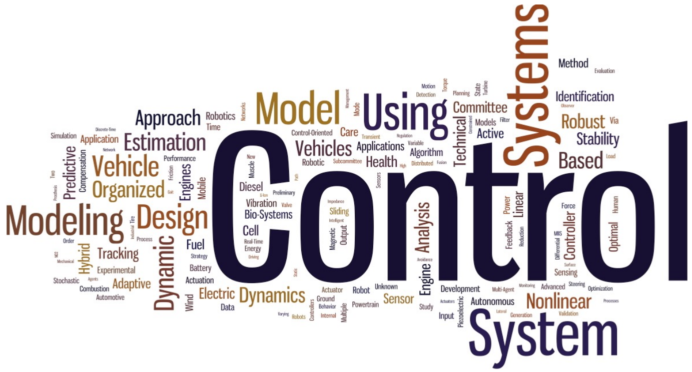


Automatique

Systèmes bouclés : commande, stabilité & performances

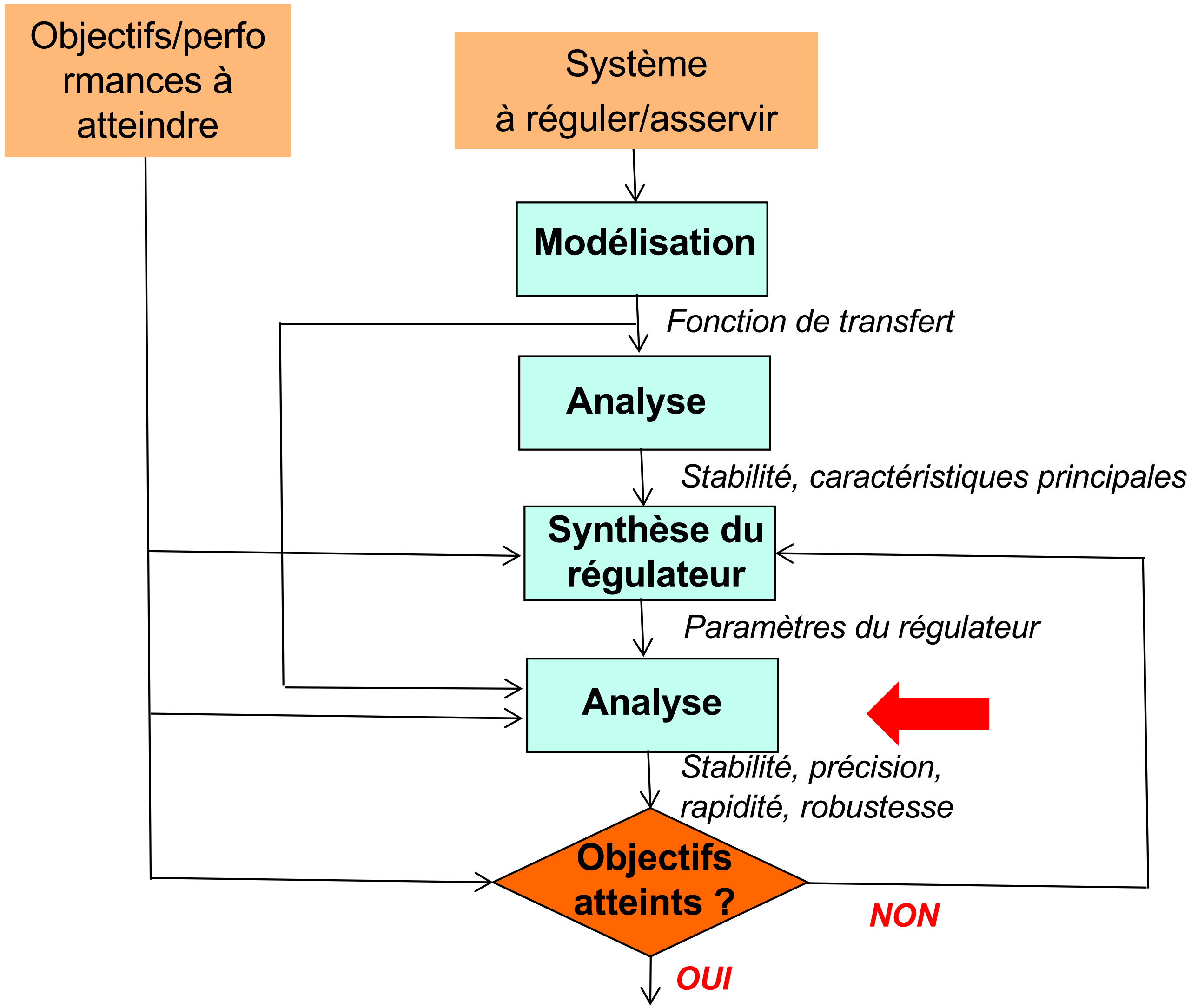
Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 17 novembre 2024

Plan du cours

Etapes de conception d'une commande en boucle fermée



Principe des systèmes de contrôle

- Le contrôle ou la commande d'un système consiste à **maintenir la sortie** d'un système autour d'une valeur suffisamment proche d'une valeur spécifiée par un signal de consigne

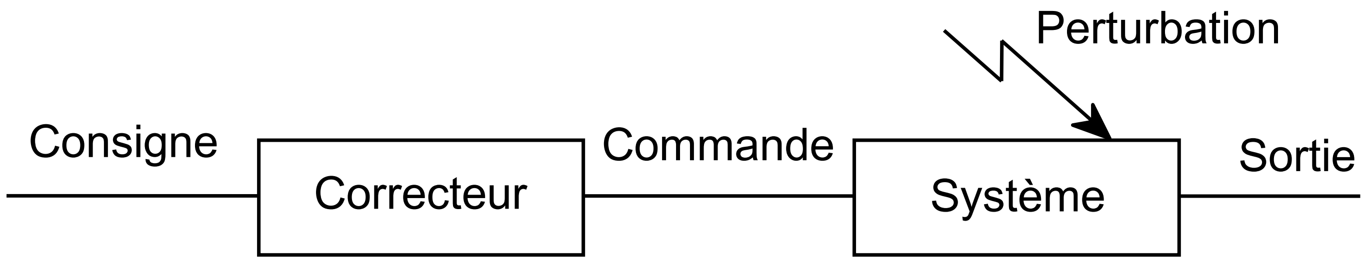
- Le terme « ***suffisamment proche »*** est ici entendu dans le sens de spécifications résultant d'un **cahier des charges** qui définit :
  - la précision ou l'erreur admissible en régime permanent (*< 2% par exemple*)
  - la rapidité au travers du temps de réponse à 5% (*< 5 s par exemple*)
  - l'amortissement de la réponse *(aucun dépassement par exemple)*

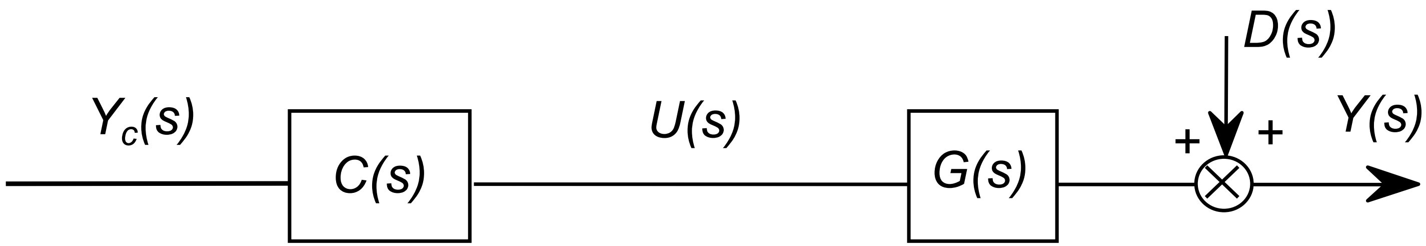
  Ce cahier des charges doit être réaliste car des spécifications trop exigeantes conduisent à des systèmes de contrôle irréalisables

- Concevoir un système de contrôle à *insérer* un ***organe de commande** :* ***correcteur ou contrôleur* ou régulateur** entre la consigne et le système

Commande en boucle ouverte

- La commande en **boucle ouverte** consiste à ajuster la commande directement à partir de la consigne sans tenir compte de la sortie



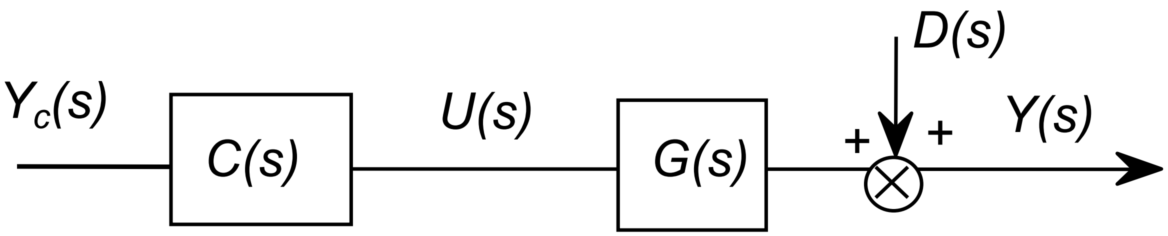


- Exemples : grille-pain, lave-vaisselle, lave-linge

Matlab tech talk : open loop control

www.youtube.com/watch?v=FurC2unHeXI

Contrôle parfait théorique



$$Y(s) = C(s)G(s)Y_c(s) + D(s)$$

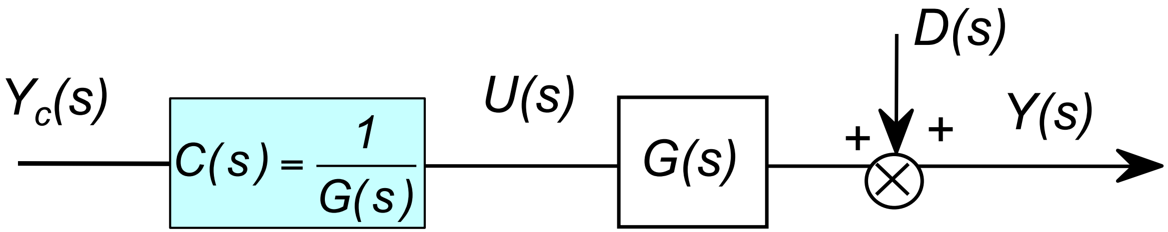
$$C(s) = ?$$

- En l'absence de perturbation ($D(s)=0$), pour avoir un ***suivi parfait*** de la sortie : $Y(s)=Y_c(s)$, il faut

$$C(s)G(s) = 1 \qquad \Rightarrow C(s) = \frac{1}{G(s)}$$

- En théorie, le correcteur ***parfait*** devrait être choisi comme l'inverse du modèle du système afin de compenser la dynamique de celui-ci

Limites pratiques du contrôle parfait théorique



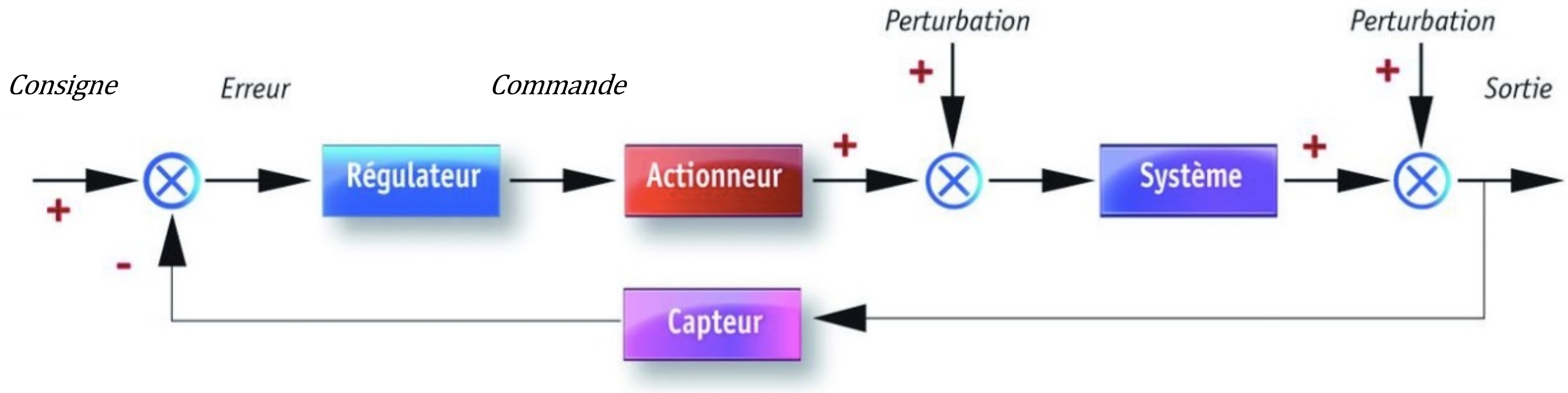
- *Le modèle G(s)* n'est qu'une version simplifiée/approchée du système
- Certaines dynamiques ne peuvent pas être compensées exactement
  - *G(s)* strictement causal, *C(s)=1/G(s)* ➔ non causal !
  - Un retard pur deviendrait une avance !
- Actionneurs sont limités ➔ saturation de la commande
- Dynamique du système évolue toujours dans le temps (vieillissement, …).
  - Etre capable de capturer les évolutions de *G(s)* ➔ modification de *C(s)*
- Présence de perturbations (*D(s)≠0*) ➔ impossible à compenser !

Contrôle parfait théorique en boucle ouverte :

peu robuste et peu performant en pratique

Solution aux limites pratiques du contrôle en boucle ouverte :
la commande en boucle fermée

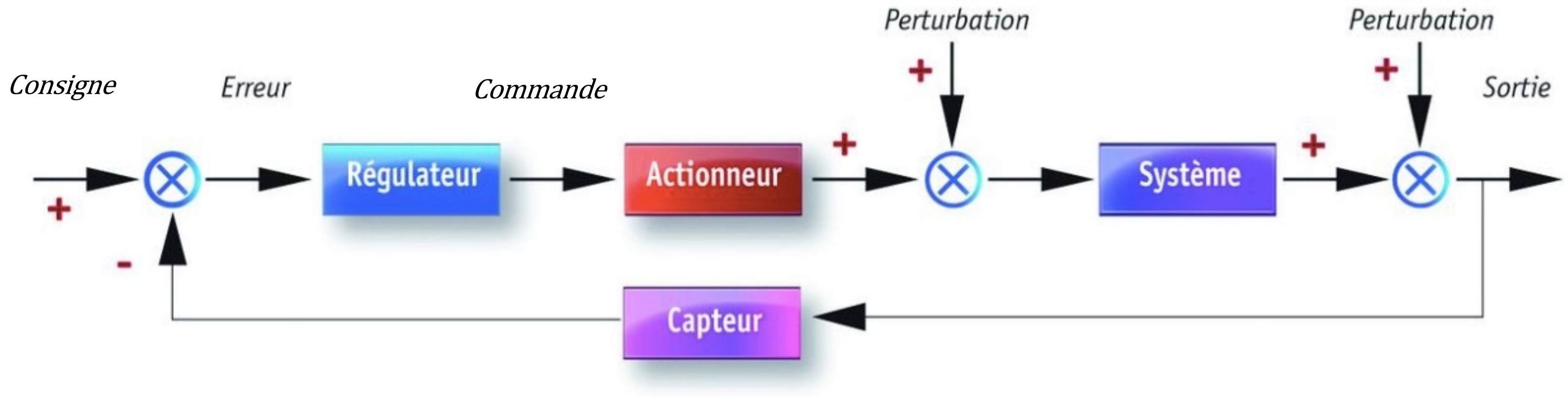
- Objectifs
  - rendre le système bouclé robuste aux incertitudes du modèle
  - Être capable de rejeter les perturbations
- Principe
  - mesurer la sortie pour ajuster la commande par un régulateur



Matlab tech talk : closed loop control
www.youtube.com/watch?v=5NVjIIi9fkY

Rappel des 3 éléments d'une commande en boucle fermée

① Capteur
② Régulateur
③ Actionneur



Remarque : actionneur et système sont souvent rassemblés dans un même bloc

Schéma de commande en boucle fermée

- La recherche d'une loi de commande s'appuie sur :
  - un modèle *G(s)* de l'ensemble actionneur + système
  - le type de signaux d'entrée : la consigne $Y_c(s)$, la perturbation *D(s)*
- On distingue la *chaîne directe* et la *chaîne de retour*

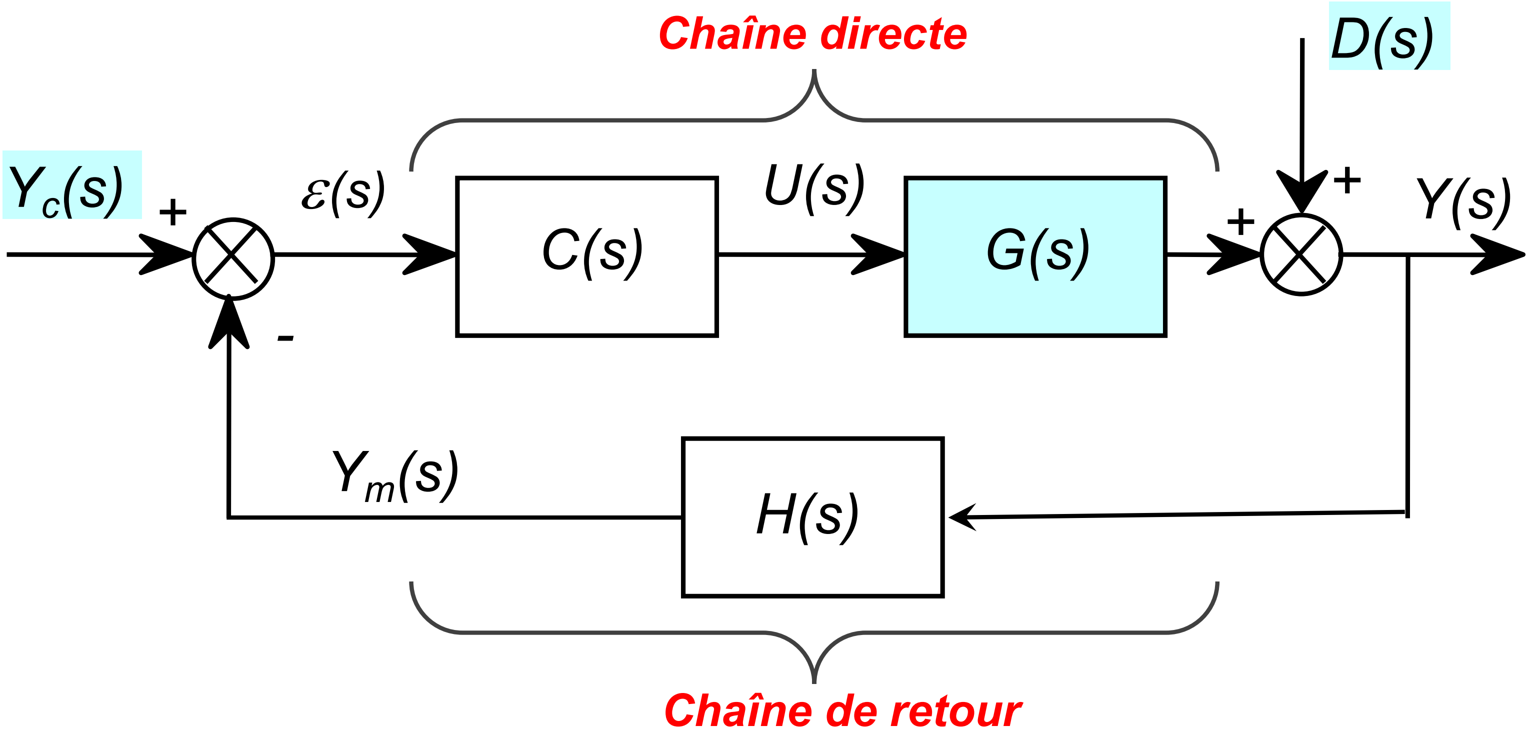
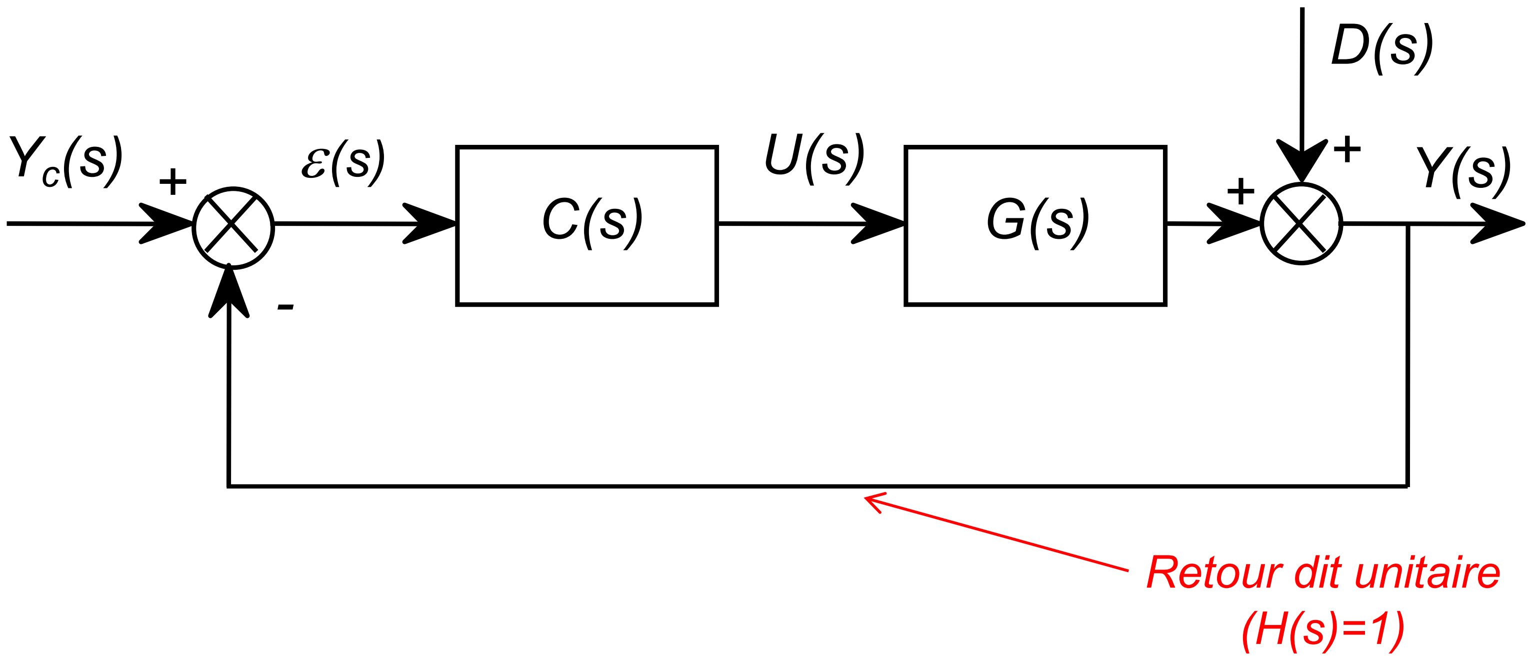
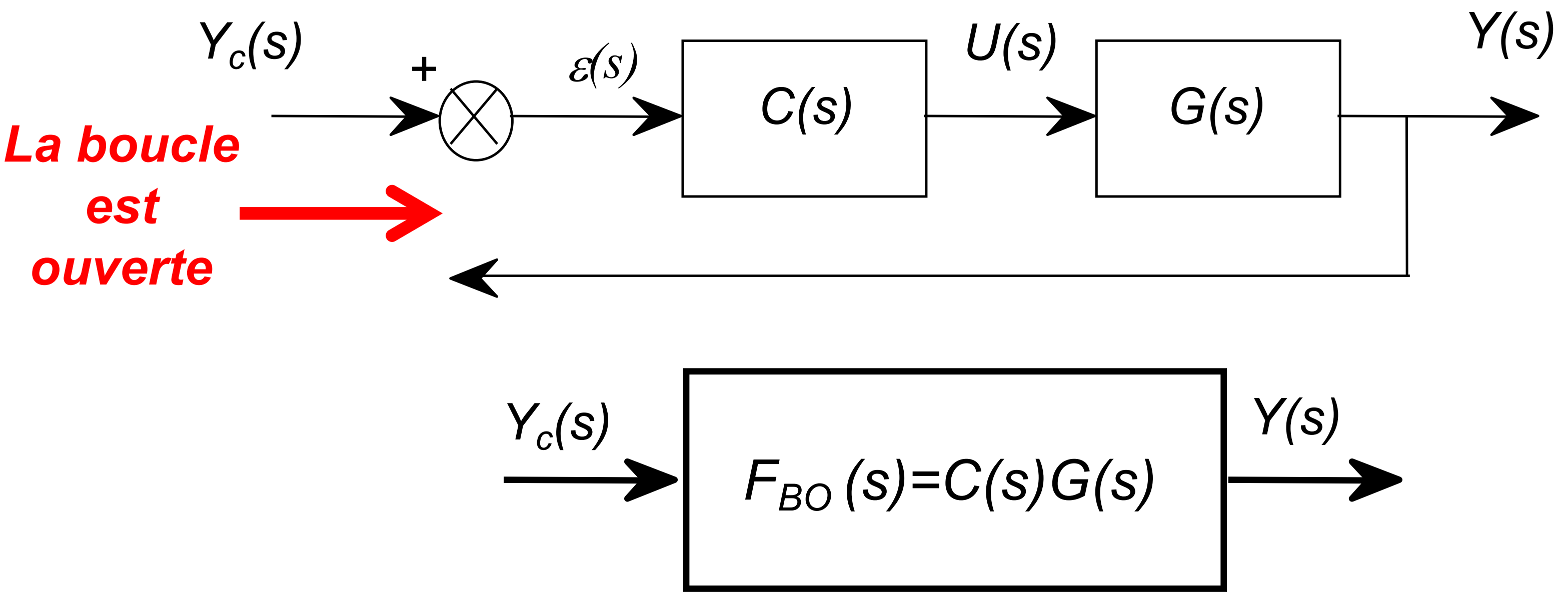


Schéma de commande en boucle fermée avec un retour unitaire

- Sachant que tout système bouclé peut se ramener à un système à retour unitaire par opérations sur les schémas-blocs, nous allons dans la suite nous limiter au *cas des systèmes bouclés à retour unitaire* (*$H(s)=1$*)



Fonction de transfert en boucle ouverte

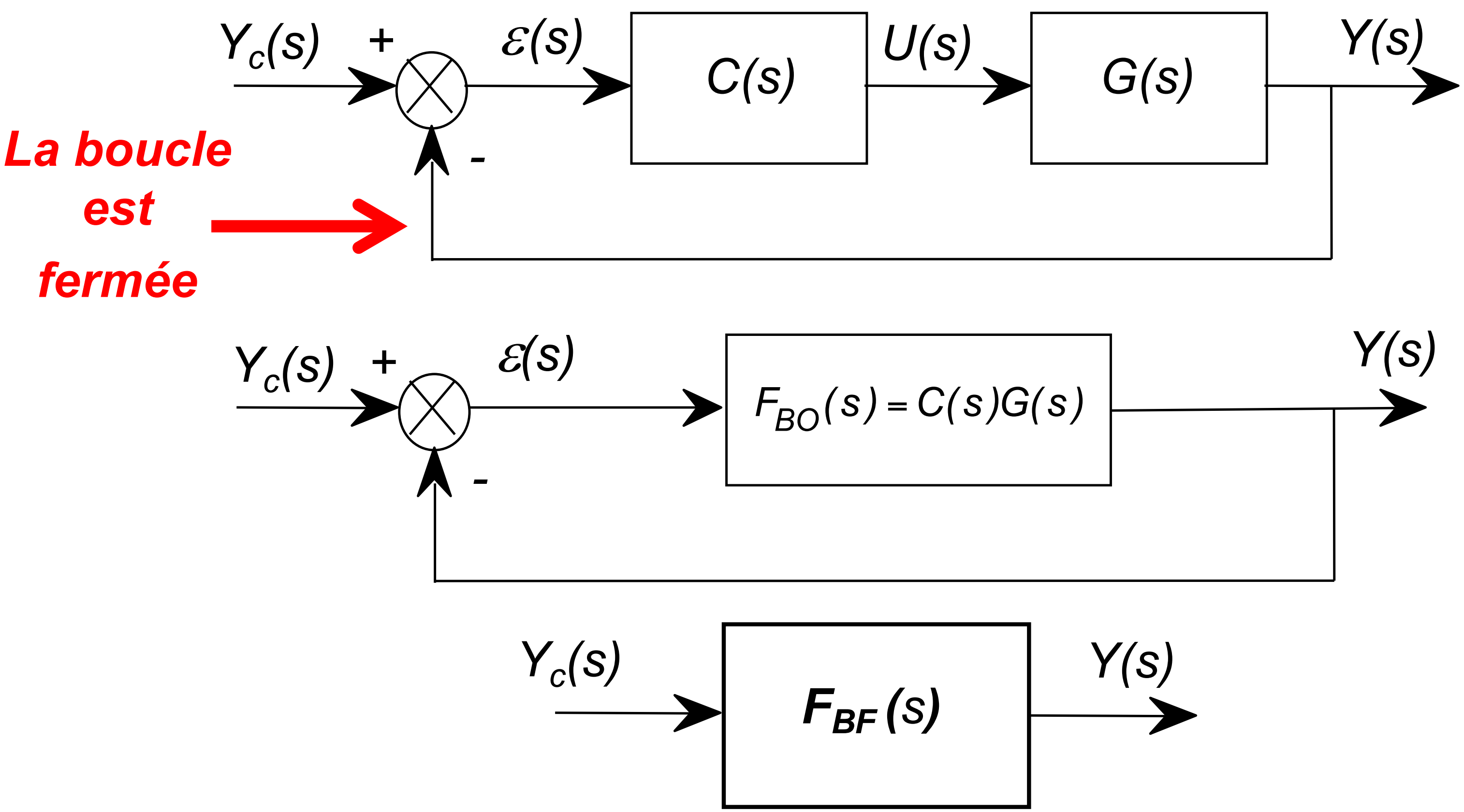


Une commande en boucle ouverte est rarement utilisée en pratique

MAIS

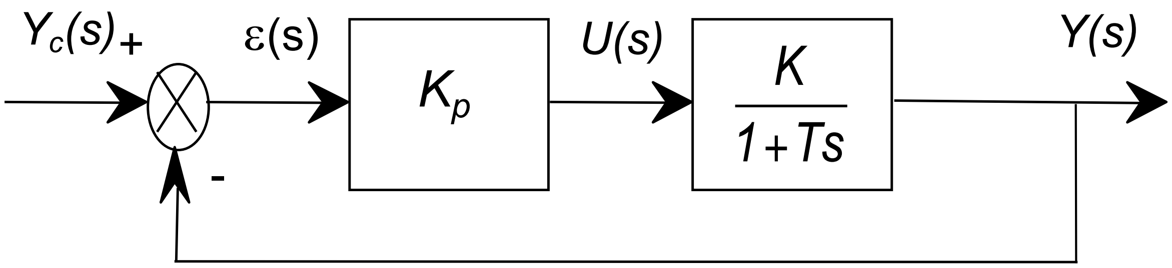
la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(s)$ peut jouer un rôle utile pour l'analyse des performances des systèmes bouclés

Fonction de transfert en boucle fermée



$$F_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)}$$

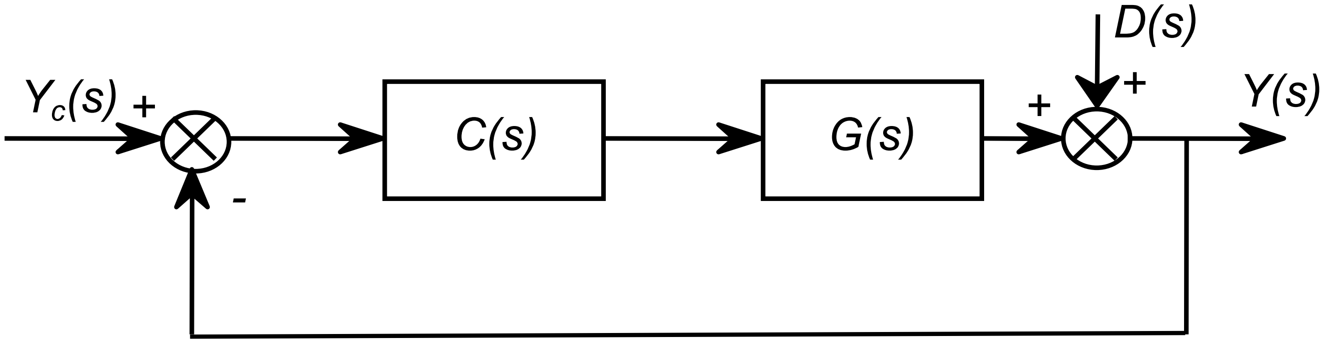
Exemple - Calcul de $F_{BO}(s)$ et $F_{BF}(s)$

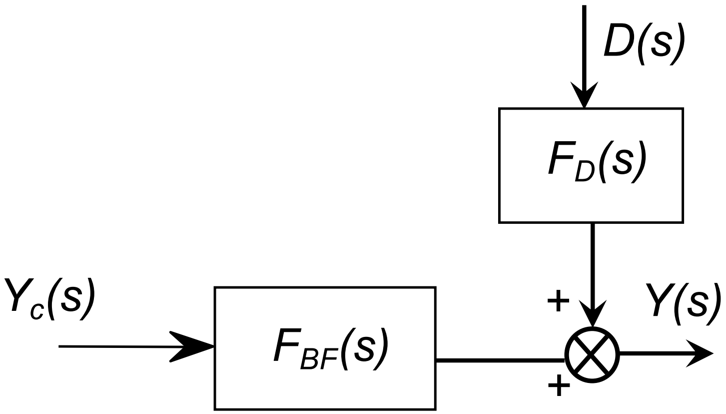


$$F_{BO}(s) = C(s)G(s) = \frac{KK_p}{1+Ts}$$

$$F_{BF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)} = \frac{\frac{KK_p}{1+Ts}}{1+\frac{KK_p}{1+Ts}} = \frac{KK_p}{1+Ts+KK_p}$$

Fonctions de transfert en présence de perturbation





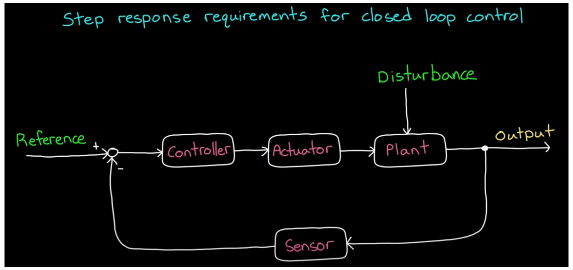
$$F_{BF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)}$$

$$F_D(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + F_{BO}(s)}$$

$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)} Y_c(s) + \frac{1}{1 + F_{BO}(s)} D(s)$$

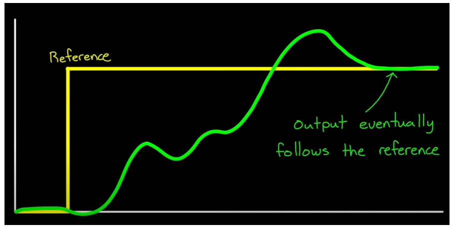
Objectifs pour les fonctions de transfert en boucle fermée

$$Y(s)=\frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)}Y_c(s)+\frac{1}{1+F_{BO}(s)}D(s)$$



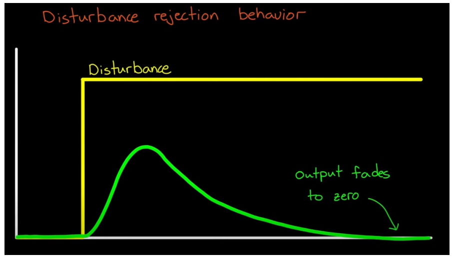
- En mode suivi de consigne, il faut que la sortie tende vers la consigne

$$F_{BF}(s)=\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}=\frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)}\rightarrow 1$$

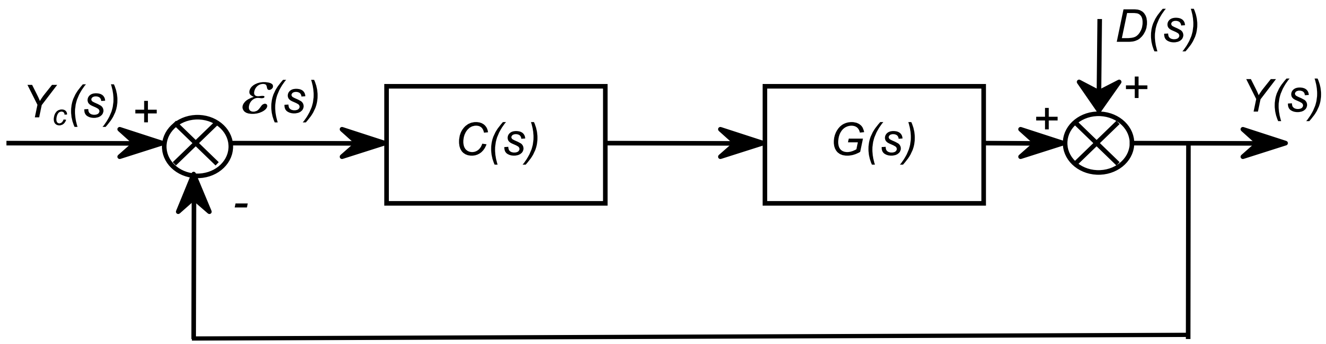


- En mode régulateur, il faut rejeter/supprimer l'effet des perturbations

$$F_D(s)=\frac{1}{1+C(s)G(s)}=\frac{1}{1+F_{BO}(s)}\rightarrow 0$$



Objectifs de la suite du cours



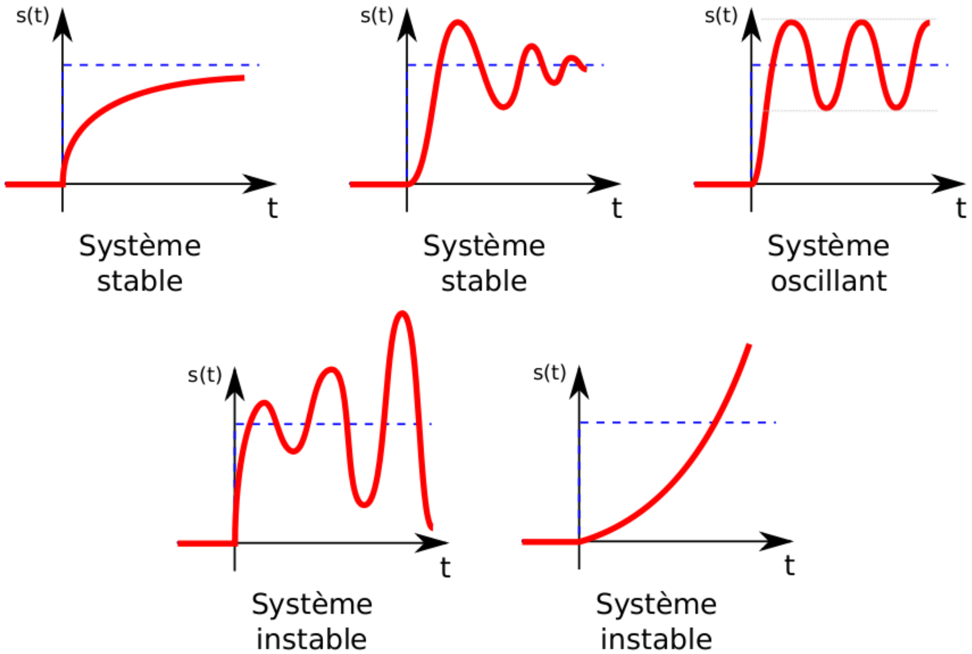
- ***Se doter d'outils*** pour évaluer les performances du système bouclé
  - ***sa stabilité*** *avec une certaine robustesse*
  - ***sa précision***
  - ***sa rapidité***
  - ***son amortissement***

Matlab tech talk - Understanding control systems, Part 3

www.youtube.com/watch?v=u1pgaJHiiew

Stabilité d'un système bouclé

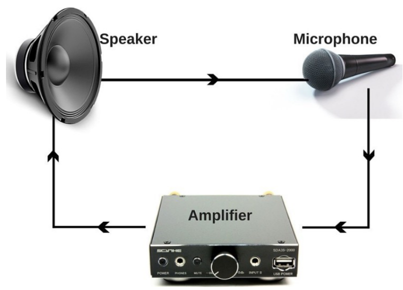
- La mauvaise conception d'un contrôle peut conduire à un système bouclé instable !



- *Avant d'étudier les autres performances, le contrôle via le choix du correcteur C(s) doit garantir la stabilité du système bouclé*

Comment prévoir la stabilité de la boucle fermée?

Effets d'une perte de contrôle/stabilité d'un système



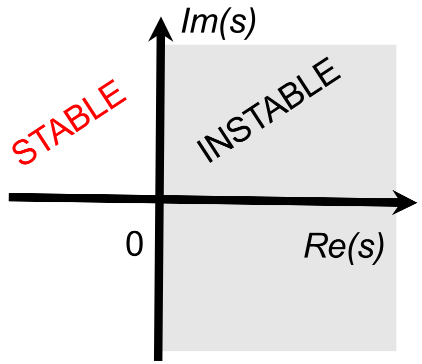
- Effets déplaisants sans conséquence majeure
  - Chute en vélo !
  - Effet Larsen - Retour acoustique d'un micro

- Effets plus tragiques
  - Black-out électrique *(panne électrique à grande échelle)*
  - Instabilités aéro-élastiques qualifiées sous le terme de « flottement »
    - vibrations d'un grand pont dues au vent (Tacoma bridge)
    - vibrations d'une aile d'avion dues à l'écoulement d'air

www.youtube.com/watch?v=qpJBvQXQC2M

Outils pour analyser la stabilité d'un système bouclé

$$Y(s) = F_{BF}(s)Y_c(s) + F_D(s)D(s)$$



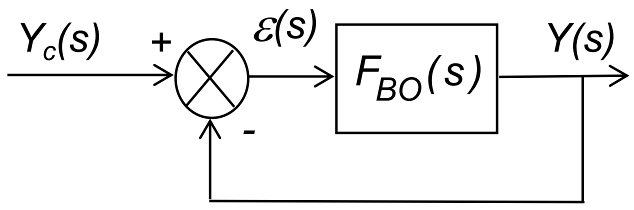
- Le système bouclé est stable si tous les pôles p_i de $F_{BF}(s)$ sont *à partie réelle strictement négative*
- *Peut-on prévoir la stabilité du système bouclé à partir de $F_{BO}(s)$ sans calculer explicitement les pôles de $F_{BF}(s)$? Oui !*

$$Y(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)}Y_c(s) + \frac{1}{1+F_{BO}(s)}D(s)$$

- Outils d'analyse de la stabilité d'un système bouclé à partir de $1+F_{BO}(s)=0$
  - ***Critère algébrique de Routh-Hurwirtz***

Application du critère de Routh-Hurwitz à un système bouclé

- Soit : $F_{BO}(s) = \dfrac{N_{BO}(s)}{D_{BO}(s)}$



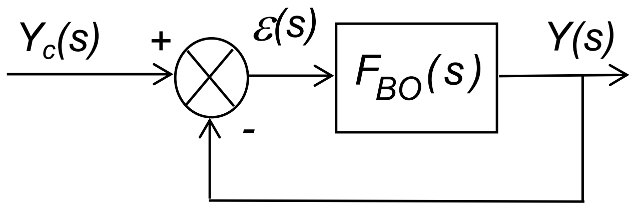
- Dans le cas d'un retour unitaire, on a :

$$F_{BF}(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)} = \frac{N_{BO}(s)}{N_{BO}(s)+D_{BO}(s)}$$

- Pour étudier la stabilité du système bouclé, on peut appliquer le critère de Routh au dénominateur de $F_{BF}(s)$
  - *cela revient à appliquer le critère à $N_{BO}(s)+D_{BO}(s)=0$*

Application du critère de Routh-Hurwitz à un système bouclé - *Exemple*

$$F_{BO}(s) = \frac{N_{BO}(s)}{D_{BO}(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)}$$



- Dans le cas d'un retour unitaire, on a :

$$F_{BF}(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1+F_{BO}(s)} = \frac{N_{BO}(s)}{N_{BO}(s)+D_{BO}(s)} = \frac{K}{s^3+s^2+s+K}$$

s^3	*1*	*1*
s^2	*1*	*K*
s^1	*1-K*	*0*
s^0	*K*	

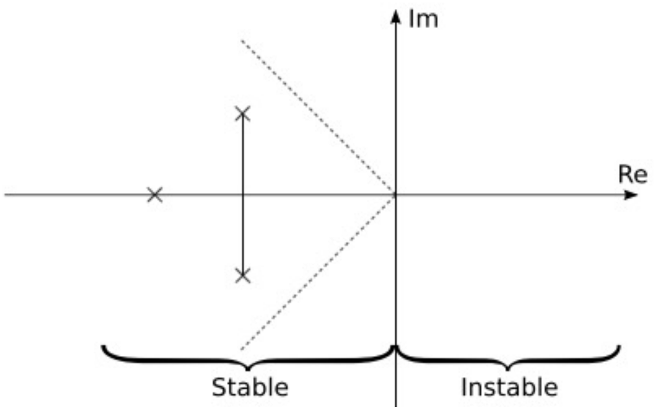
– D'après le critère de Routh, il faut que tous les termes de la 1ère colonne > 0 : *K > 0 et 1-K >0* ➔ ***0 < K < 1***

Robustesse de la stabilité

- Critère de Routh-Hurwirtz
  - permet de conclure sur la stabilité du système bouclé
  - ne permet pas d'évaluer si le système bouclé stable est plus ou moins proche de l'instabilité
  - Un modèle est toujours une approximation du système. On doit donc s'assurer de la *stabilité avec une certaine marge*

Il existe des marges de stabilité (gain, phase) définies dans le domaine fréquentiel

- La position des pôles dans le plan complexe peut aider à juger de la stabilité du système bouclé
  - Si un pôle p_i du système bouclé est trop près de l'axe des imaginaires, il risque d'évoluer vers l'instabilité



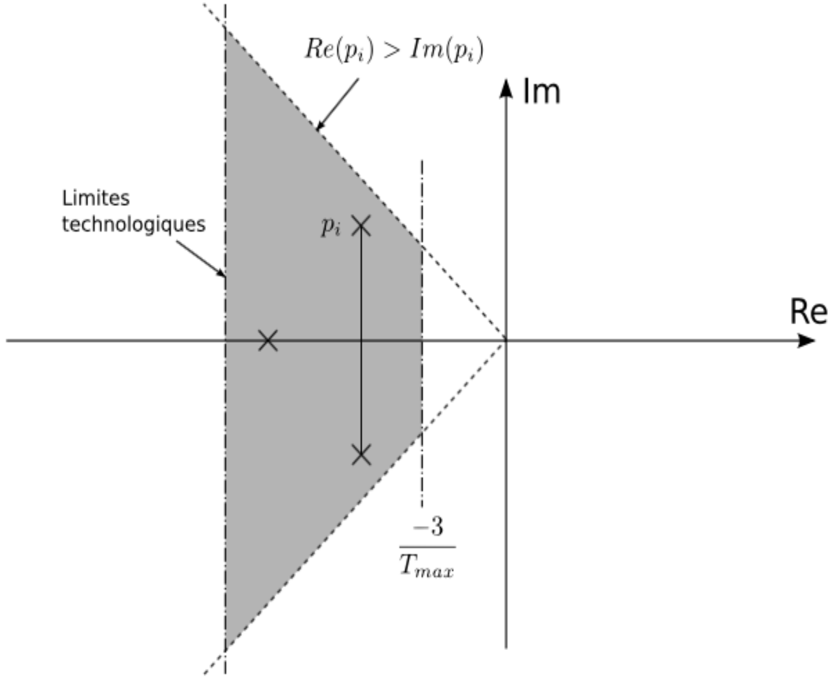
Compromis stabilité-rapidité-amortissement dans le plan des pôles

- On peut ainsi définir une zone permettant d'avoir un bon compromis *stabilité – rapidité – amortissement*

  – Pour avoir une réponse transitoire rapide, on définit un temps maximal T_{max} et on place les pôles à gauche de l'axe $-3/T_{max}$

  – Pour éviter un dépassement important, on fixe la partie réelle des pôles plus grande que la partie imaginaire : $Re(p_i) > Im(p_i)$

  – Les limites technologiques imposent la borne de gauche



Pôle dominant d'un système

- Les pôles dont la partie réelle est proche de l'axe des imaginaires sont les plus lents. Ce sont les pôles dominants
- Les pôles p_i dont la partie réelle est, en valeur absolue, très grande devant celle des pôles dominants peuvent alors être négligés

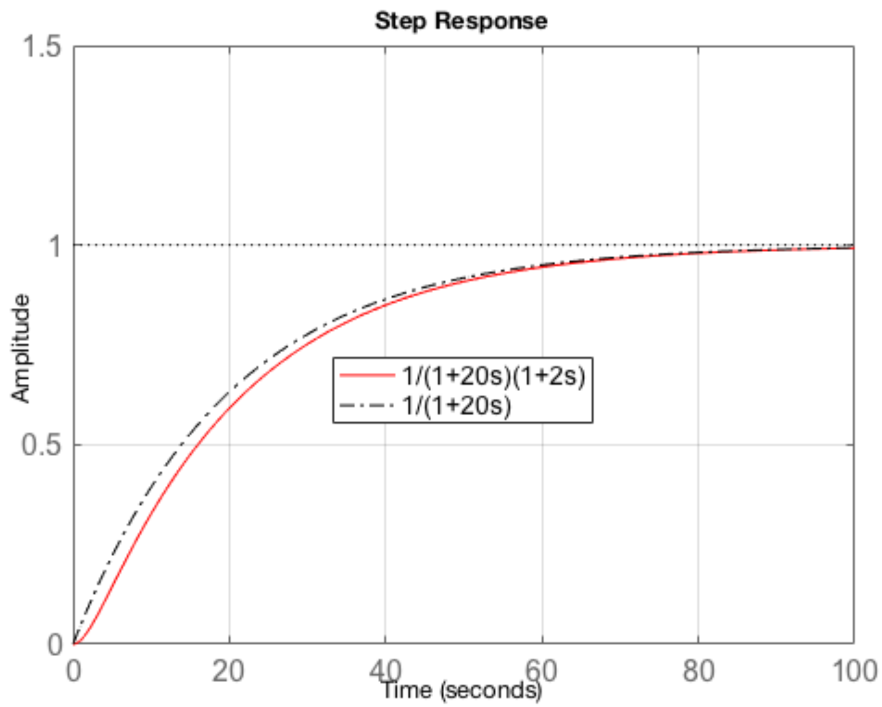
Exemple

$$G(s) = \frac{1}{(1+20s)} \times \frac{1}{(1+2s)}$$

$$p_1 = -\frac{1}{20} = -0.05$$

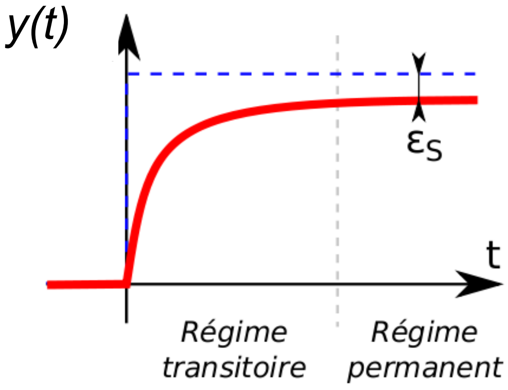
$$p_2 = -\frac{1}{2} = -0.5$$

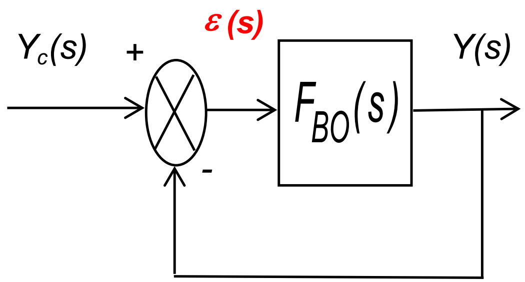
$$|p_2| > |p_1| \quad \Rightarrow \begin{cases} p_2 \text{ peut être négligé} \\ p_1 \text{ pôle dominant} \end{cases}$$

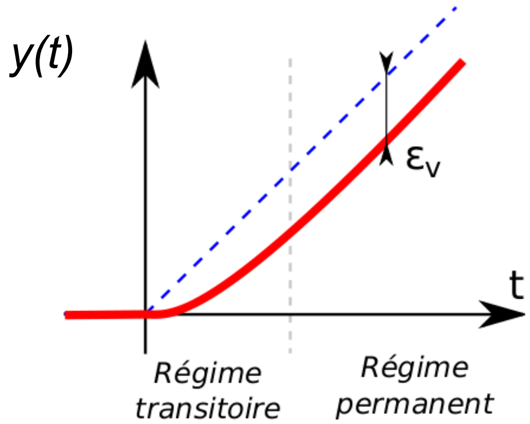


Précision d'un système bouclé

- Un système bouclé *stable* est ***précis*** si lors d'un changement de consigne, l'erreur entre la consigne et la sortie est nulle en régime permanent







ε_S : erreur statique ou de position si consigne en échelon

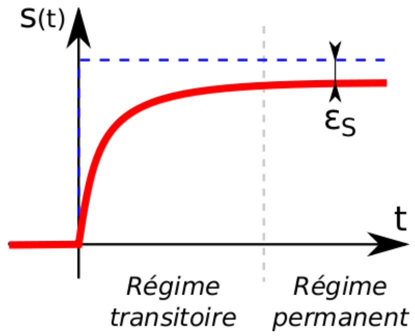
ε_V : erreur de traînage ou de vitesse si consigne en rampe

- La précision se définit en fonction du ***type de consigne*** :
  - consigne en ***échelon*** : précision statique ou erreur de position
  - consigne en ***rampe*** : précision en vitesse ou erreur de traînage
  - consigne en ***parabole*** : précision en accélération

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- Analyser la précision statique revient à étudier l'erreur entre la consigne et la sortie en régime permanent ($t \to +\infty$)

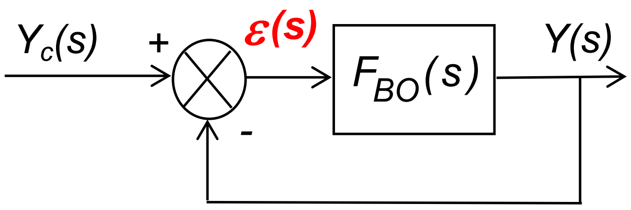
$$\varepsilon_S = \lim_{t \to +\infty} \left(y_c(t) - y(t) \right) = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$$



- Le système bouclé est dit :
  - ***précis*** si cette limite est nulle
  - ***non précis*** si cette limite n'est pas nulle
    - *On peut néanmoins dire que le système est d'autant plus précis que l'erreur est faible*

- On exploite le théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \to 0} s\varepsilon(s)$$



Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- On exploite le théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s\to 0} s\left(Y_c(s) - Y(s)\right) = \lim_{s\to 0} sY_c(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{Y_c(s)}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} sY_c(s)\left(1 - F_{BF}(s)\right) = \lim_{s\to 0} sY_c(s)\left(1 - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\right) \qquad H(s) = 1$$

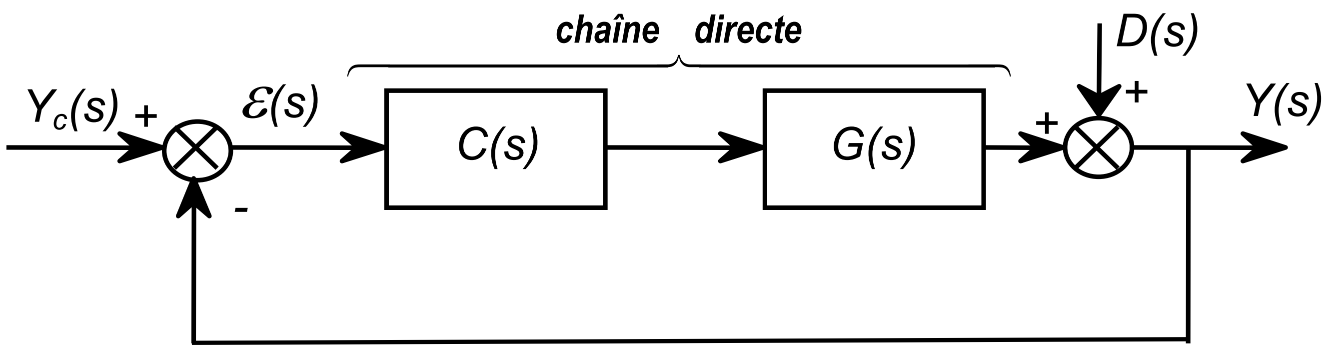
$$= \lim_{s\to 0} sY_c(s)\left(1 - \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)}\right)$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sY_c(s)\left(\frac{1}{1 + F_{BO}(s)}\right)}$$

➔ La précision du système bouclé dépend

- de $Y_c(s)$ et donc du type de consigne *: échelon, rampe, parabole, …*
- de la fonction de transfert en boucle ouverte $F_{BO}(s)$ *et de donc de* $C(s)$ *et* $G(s)$

Classe d'une fonction de transfert en boucle ouverte



- De manière générale, $F_{BO}(s)$ est une fraction rationnelle et peut s'écrire

$$F_{BO}(s) = C(s)G(s) = \frac{K\left(1 + b_1 s + \ldots + b_m s^m\right)}{s^{\alpha}\left(1 + a_1 s + \ldots + a_n s^n\right)}$$

  - K est le gain de la chaîne directe
  - α est la ***classe*** *(parfois appelé le type)* de $F_{BO}(s)$
    - α = ***nombre d'intégrateurs*** dans la chaîne directe

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

- De manière générale, la transformée de Laplace de la consigne $Y_c(s)$ prend la forme

$$Y_c(s) = \frac{1}{s^\beta}$$

Echelon : $\beta=1$

Rampe : $\beta=2$

Parabole : $\beta=3$

$$F_{BO}(s) = \frac{K\left(1+b_1 s+\ldots+b_m s^m\right)}{s^\alpha\left(1+a_1 s+\ldots+a_n s^n\right)}$$

- L'erreur en régime permanent devient alors :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sY_c(s)\left(\frac{1}{1+F_{BO}(s)}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^{\beta-1} + s^{\beta-\alpha-1}K\frac{(1+b_1 s+\ldots)}{(1+a_1 s+\ldots)}}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^{\beta-1} + s^{\beta-\alpha-1}K}$$

Outil pour analyser la précision d'un système bouclé

$\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t)$	Echelon	Rampe	Parabole
Classe α de $F_{BO}(s)$	$\beta=1$	$\beta=2$	$\beta=3$
$\alpha=0$	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
$\alpha=1$	0	$\frac{1}{K}$	∞
$\alpha=2$	0	0	$\frac{1}{K}$

Tableau récapitulatif de l'erreur en régime permanent

$$Y_c(s) = \frac{1}{s^\beta}$$

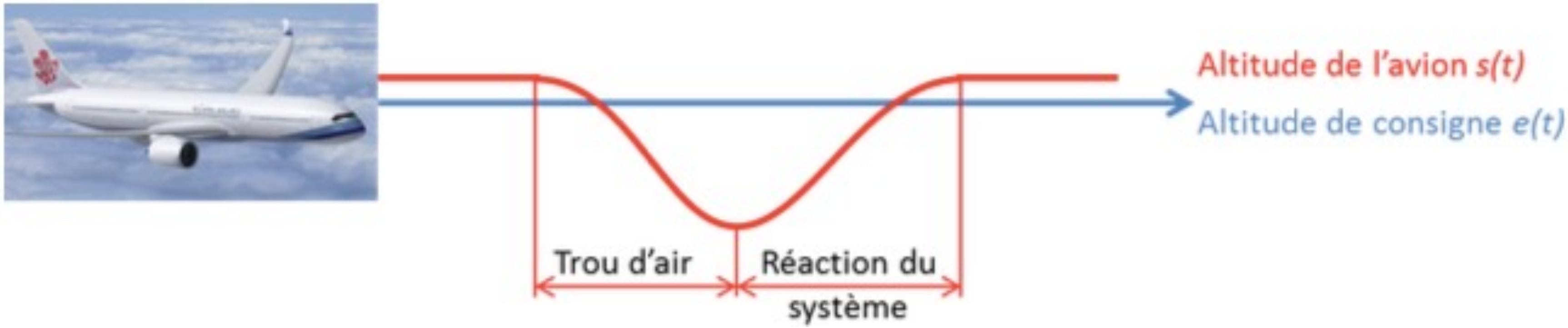
$$F_{BO}(s) = \frac{K\left(1 + b_1 s + \ldots + b_m s^m\right)}{s^\alpha\left(1 + a_1 s + \ldots + a_n s^n\right)}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^{\beta-1} + s^{\beta-\alpha-1}K}$$

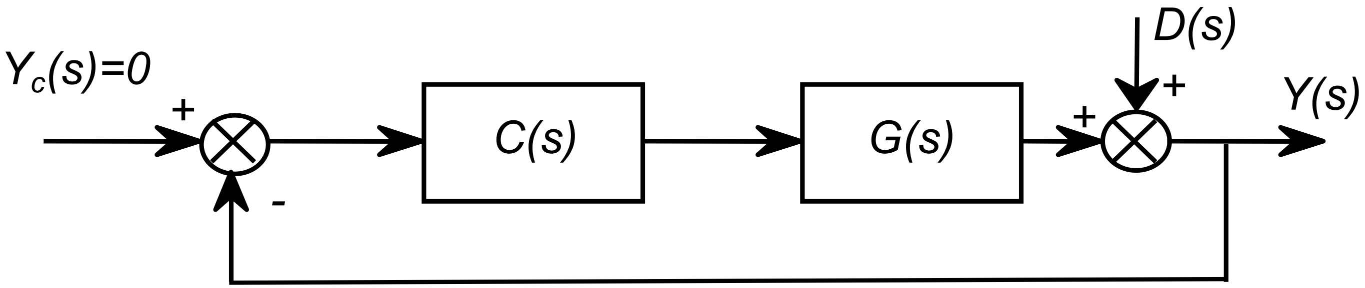
- ***Règle des intégrateurs*** : pour annuler l'erreur en régime permanent à une consigne $Y_c(s)$, $F_{BO}(s)$ doit contenir au moins autant d'*intégrateurs que le signal $Y_c(s)$ en contient : $\alpha \geq \beta$*
- Augmenter le gain K de la $F_{BO}(s)$ permet d'améliorer la précision

Influence des perturbations sur la précision d'un système bouclé

- Rappel
  - Perturbation : entrée parasite qui nuit au bon fonctionnement du système



Méthode pour analyser l'influence d'une perturbation *en échelon* sur la précision d'un système bouclé



- On cherche, lorsque $y_c(t)=0$, à caractériser $y_D(t)$ pour $\mathbf{d(t)=\Gamma(t)}$

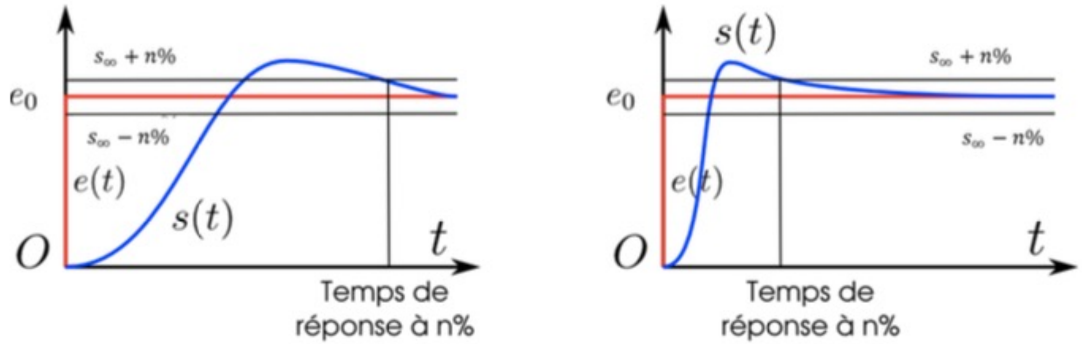
$$\lim_{t\to+\infty} y_D(t) = \lim_{s\to0} sY_D(s) = \lim_{s\to0} sF_D(s)D(s) \qquad F_D(s) = \frac{1}{1+F_{BO}(s)}; \quad Y_D(s) = \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_D(t) = \lim_{s\to0} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + K} \overset{?}{\rightarrow} 0 \qquad F_{BO}(s) = \frac{K\left(1+b_1 s+\ldots+b_m s^m\right)}{s^\alpha\left(1+a_1 s+\ldots+a_n s^n\right)}$$

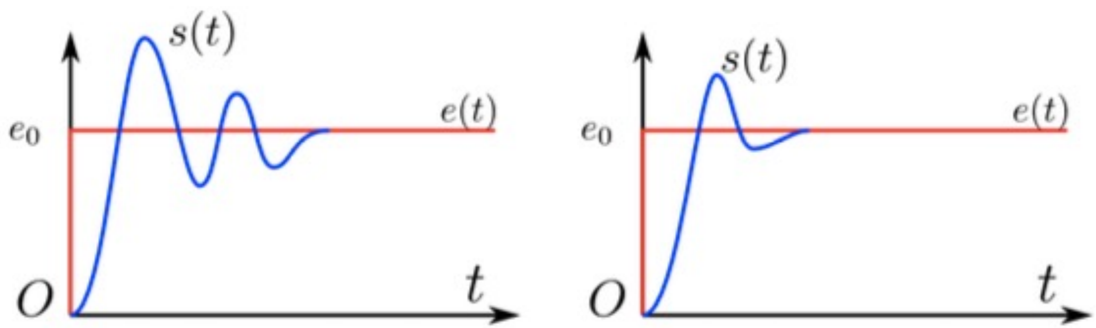
- Le nombre d'intégrateurs α <u>en amont</u> de la perturbation est décisif ($\alpha \geq 1$)
- Ajouter un intégrateur ***en amont de la perturbation permet de la rejeter***

Rapidité et amortissement du système bouclé

- On caractérise :
  - la rapidité du système bouclé par son temps de réponse à *n*%

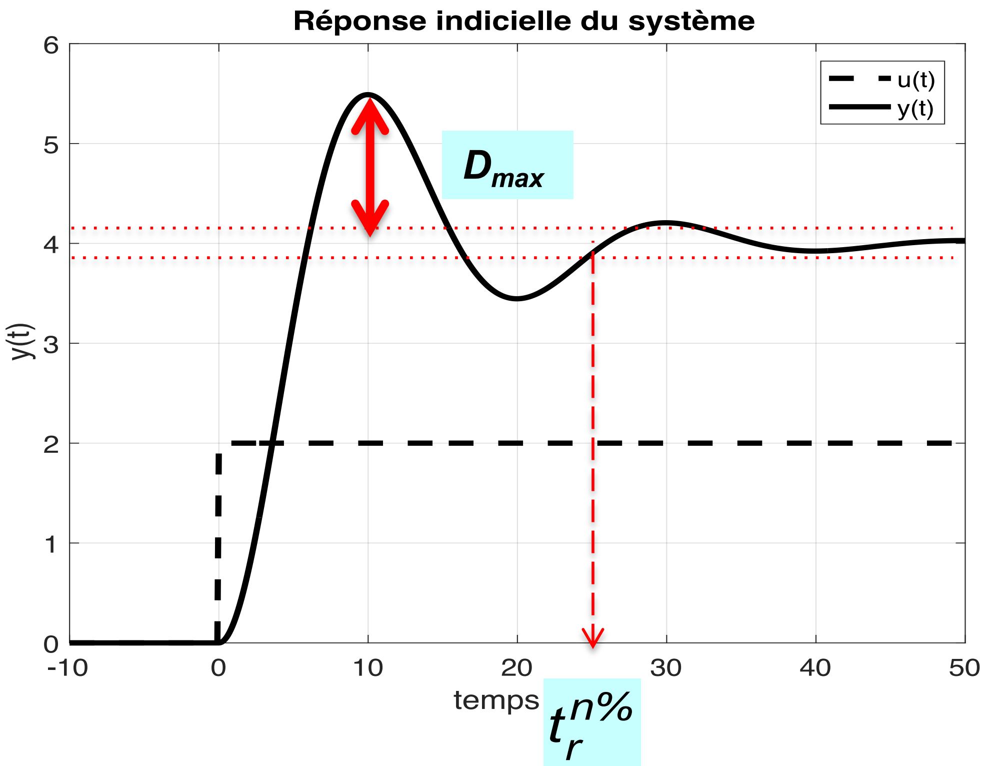


  - l'amortissement du système bouclé par le dépassement max $D_{max}=D_1$



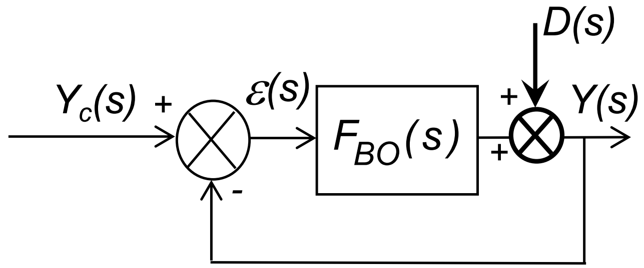
Outils pour analyser la rapidité et l'amortissement du système bouclé

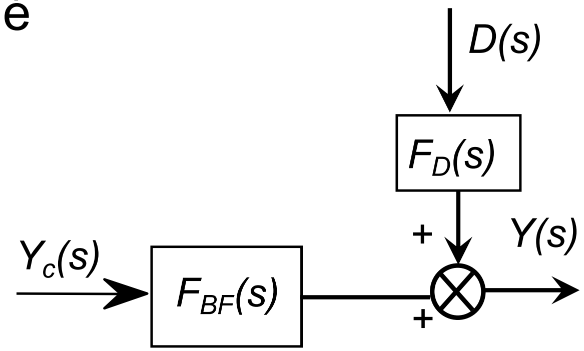
- La rapidité est caractérisée par son temps de réponse à *n*% : $t_r^{n\%}$
- L'amortissement est caractérisé par la valeur du dépassement max: $D_{max}=D_1$



Stabilité et performances des structures bouclées
Résumé des outils d'analyse

① A partir du schéma-bloc du système bouclé





① On calcule $F_{BO}(s)$. *On en déduit* $F_{BF}(s)$ *et* $F_D(s)$

② On analyse la ***stabilité*** du système bouclé

– critère de Routh-Hurwitz

③ On évalue les critères de performances. *Vérifient-ils le cahier des charges ?*

– ***Précision***

- Calcul de l'erreur de précision $\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \to 0} s\varepsilon(s)$

– ***Rapidité*** et ***amortissement***

- Calcul du temps de réponse à $n\%$ et D_{max}

Remarque : il existe d'autres outils d'analyse dans le domaine fréquentiel

TP 1 Automatique S5
Robot 3pi+ suiveur de ligne