Automatique

Stabilité des systèmes

Hugues Garnier

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 16 novembre 2024

Avant-propos

Ces transparents sont issus d'une version initiale élaborée par ma collègue Floriane Collin.

Je tiens à la remercier d'avoir autorisé leur adaptation.

Plan du cours

Stabilité

Illustration de l'importance de la stabilité des systèmes en Automatique
Atterrissage de la fusée Starship de SpaceX

https://www.youtube.com/watch?v=zM2l4TkZokc

Voir aussi le booster de la fusée Superheavy attrapé par la tour le 13 octobre 2024
https://www.youtube.com/watch?v=hI9HQfCAw64

Stabilité

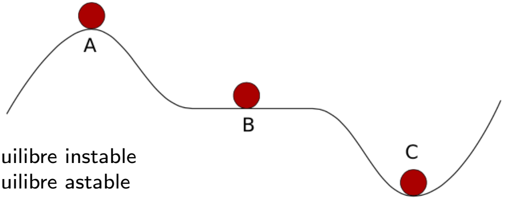
Stabilité au sens de Lyapunov

Si toute variation d'un système autour d'une position d'équilibre demeure au voisinage de ce point, alors cette position est dite stable.
Ecarté d'une position d'équilibre, cette position est :

- **stable** si le système tend à y revenir.
- **astable** si le système atteint une nouvelle position d'équilibre.
- **instable** si le système tend à s'en écarter davantage.

Stabilité = mesure de la tendance du système à revenir à sa position d'équilibre après avoir été perturbé.

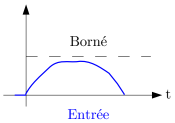
Illustration : bille roulant dans un rail

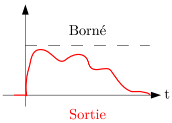


A : position d'équilibre instable
B : position d'équilibre astable
C : position d'équilibre stable

Stabilité au sens BIBO *(Bounded Input - Bounded Output)*

Un système est **stable** si pour une entrée bornée, la sortie est aussi bornée.

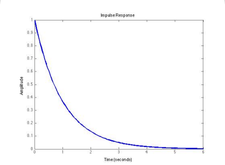


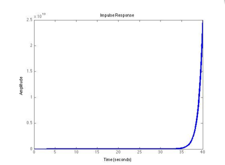


Stabilité d'après la réponse impulsionnelle

Un système est **stable** si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quand $t \to \infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$$



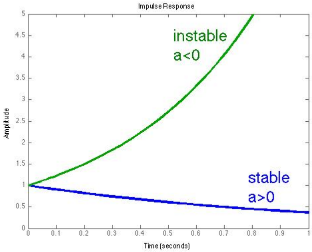


Stabilité d'après la réponse impulsionnelle

Exemples

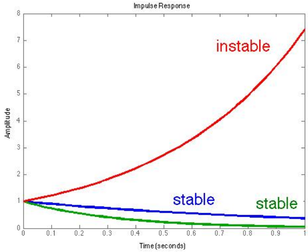
$$G_1(s) = \frac{1}{s+a} \Leftrightarrow g_1(t) = e^{-at}\Gamma(t)$$

Si $a > 0$, $g_1(t)$ converge $\Rightarrow$ système stable
Si $a < 0$, $g_1(t)$ diverge $\Rightarrow$ système instable



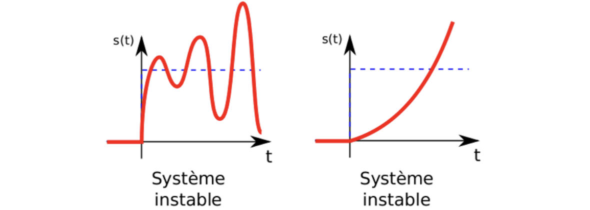
$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s-2)}$$
$$G_2(s) = \frac{-1/6}{s+1} + \frac{1/10}{s+3} + \frac{-1/15}{s-2}$$
$$g_2(t) = \frac{-1}{6}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-3t} - \frac{1}{15}e^{2t}$$

$\Rightarrow$ système instable



Stabilité

Stabilité d'après la réponse indicielle



Un système est stable si sa réponse indicielle (à un échelon) tend vers une valeur finie lorsque $t \to +\infty$.

Stabilité

Stabilité d'après les pôles de la fonction de transfert

Soit un système linéaire représenté par une fonction de transfert $G(s)$.
Le système est **stable** si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \text{ stable } \Leftrightarrow \mathcal{R}e(p_i) < 0, \forall p_i$$

p_i : pôles de $G(s)$, aussi les racines de l'équation caractéristique $D(s) = 0$

- Equation différentielle sans second membre :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

- Solution : combinaison linéaire de termes de la forme

$$y(t) = \begin{cases} Ae^{p_i t} & \text{(pôle réel simple } p_i\text{)} \\ At^n e^{p_i t} & \text{(pôle réel multiple } p_i\text{)} \\ A\sin(\omega_i t + \varphi)e^{\sigma_i t} & \text{(pôles complexes conjugués : } p_i = \sigma_i \pm j\omega_i\text{)} \end{cases}$$

$y(t)$ ne diverge pas $\Leftrightarrow \mathcal{R}e(p_i) < 0, \forall p_i$

Stabilité

Cas particuliers d'un ou plusieurs pôles sur l'axe imaginaire

- 1 pôle simple en zéro $p_1 = 0 \Rightarrow$ Système astable

$$G(s) = C\frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

- 2 pôles imaginaires conjugués $p_{1,2} = \pm\alpha j \Rightarrow$ Système astable

$$G(s) = C\frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{(s^2+p_{1,2}^2)(s-p_3)\dots(s-p_n)}$$

- Pôles de multiplicité i sur l'axe imaginaire $(i > 2) \Rightarrow$ Système instable

$$G(s) = C\frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^i(s-p_r)\dots(s-p_n)}; \quad G(s) = C\frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{(s^2+p_{1,2}^2)^i(s-p_r)\dots(s-p_n)}$$

Stabilité d'après le calcul des pôles

Exemples

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

1 pôle : $p_1 = -2$
$p_1 < 0 \Rightarrow$ système stable

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

2 pôles : $p_{1,2} = 1 \pm j$

$\mathcal{R}e(p_{1,2}) > 0$
$\Rightarrow$ système instable

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

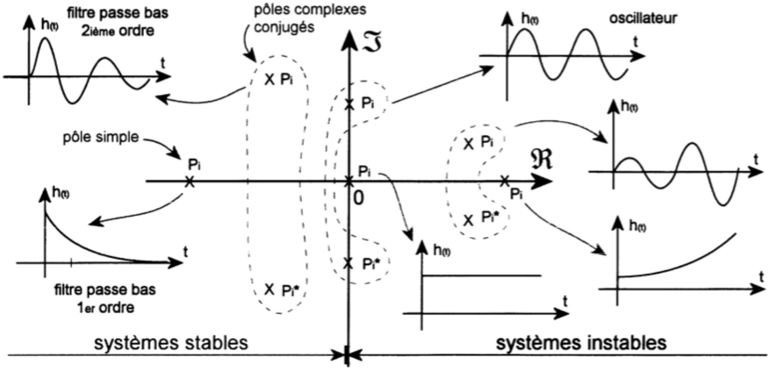
3 pôles : $p_1 = -1; p_2 = -2; p_3 = 3$
$p_3 > 0 \Rightarrow$ système instable

$$G_4(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+1)}$$

4 pôles : $p_1 = -1;\ p_2 = -2;\ p_{3,4} = \pm j$

$p_{3,4}$ sur l'axe imaginaire
$\Rightarrow$ système astable

Relation entre position des pôles et réponse impulsionnelle



Un système est stable si $\mathcal{R}e(p_i) < 0 \; \forall \, p_i \Leftrightarrow$ tous les pôles doivent être dans la partie gauche du plan complexe.

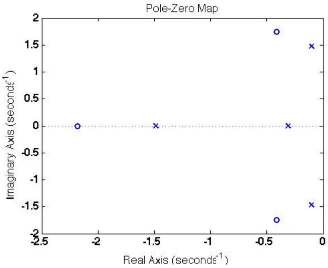
Un système est stable si sa réponse impulsionnelle (à une impulsion de Dirac) tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Sous Matlab - Diagramme des pôles et des zéros

Exemple

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 5s + 7}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 8s + 2}$$

```
s = tf('s');
G = (s^3 + 3*s^2 + 5*s + 7)/(s^4 + 4*s^3 + 6*s^2 + 8*s + 2);
zpplot(G) % voir aussi pole(G)
```



Un système est stable si $\mathcal{R}e(p_i) < 0 \, \forall \, p_i$

$\Leftrightarrow$ Tous les pôles doivent être dans la partie gauche du plan complexe.

Et quand Matlab n'existait pas ?

Exemple

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 5s + 7}{12s^5 + 14s^4 + 3s^3 + s^2 + 16s + 11}$$

Le système décrit par $G(s)$ est-il stable ?

Calcul des pôles de $G(s)$ *(sans Matlab !)* $\rightarrow$ compliqué !

Solution : critère algébrique de Routh-Hurwitz !

Visionnez les vidéos de Brian Douglas :
Routh-Hurwitz Criterion, An Introduction &
Routh-Hurwitz Criterion, Special cases!

Stabilité

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots + a_1 s + a_0}$$

1. Vérifier que $\forall\ a_i \neq 0$ et $\forall\ a_i$ ont le même signe puis construire le tableau
2. Recopier les coefficients du dénominateur dans les deux 1ères lignes
3. Compléter le tableau selon la règle : $b_{i,j} = \dfrac{b_{i-1,1} b_{i-2,j+1} - b_{i-1,j+1} b_{i-2,1}}{b_{i-1,1}}$
4. $G(s)$ stable $\Leftrightarrow$ tous les termes de la 1ère colonne sont de même signe.

Le nombre de pôles instables correspond au nombre de changement de signe dans la 1ère colonne.

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_0 \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
s^{n-2} & b_{3,1} & b_{3,2} & \cdots & & \\
s^{n-3} & b_{4,1} & b_{4,2} & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
s^0 & a_0 & & & &
\end{array}$$

$$b_{3,1} = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}, \quad b_{3,2} = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_{n-5} a_n}{a_{n-1}}, \ldots, b_{4,1} = \frac{b_{3,1} a_{n-3} - b_{3,2} a_{n-1}}{b_{3,1}}, \ldots$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 1

$D(s) = s^4 + 3s^3 - 5s^2 + s + 2$

$D(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

Tous les coefficients a_i n'ont pas le même signe ($a_2 < 0$) $\rightarrow$ système instable !

Vérification avec le calcul des pôles :

$p_1 = -4.21$,
$p_2 = -0.49$,
$p_{3,4} = 0.85 \pm j0.48 \rightarrow$ système instable !

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tous les coefficients du dénominateur $a_i > 0 \, \forall \, i$. On peut alors construire le **tableau de Routh**

$$D(s) = 1s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|l} s^4 & 1 \\ s^3 & \\ s^2 & \\ s & \\ s^0 & \end{array}$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 3 \\ s^3 & & \\ s^2 & & \\ s & & \\ s^0 & & \end{array}$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & & & \\ s^2 & & & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & & \\ s^2 & & & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & \\ s^2 & & & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

Stabilité

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 8 \\
s^3 & 2 & 10 & 0 \\
s^2 & & & \\
s & & & \\
s^0 & & &
\end{array}$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & -2 & & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\frac{2 \times 3 - 10 \times 1}{2} = -2$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & -2 & 8 & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array} \qquad \frac{2 \times 8 - 0 \times 1}{2} = 8$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$G(s) = \dfrac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$ **Tableau de Routh**

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & -2 & 8 & 0 \\ s & 18 & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\frac{-2 \times 10 - 8 \times 2}{-2} = 18$$

Stabilité

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & -2 & 8 & 0 \\ s & 18 & 0 & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\frac{-2 \times 0 - 0 \times (2)}{-2} = 0$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & -2 & 8 & 0 \\ s & 18 & 0 & \\ s^0 & 8 & & \end{array} \qquad \frac{18 \times 8 - 0 \times (-2)}{18} = 8$$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 10s + 8}$$

Tableau de Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 8 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & -2 & 8 & 0 \\ s & 18 & 0 & \\ s^0 & 8 & & \end{array}$$

Tous les termes de la 1ère colonne n'ont pas le même signe ⇒ système instable!
Le nombre de pôles instables correspond au nombre de changement de signe dans la première colonne, 2 ici *(de 2 à -2 et de -2 à 18)*.

Vérification par le calcul des pôles
$p_1 = -2,\ p_2 = -1,\ p_{3,4} = 0.5 \pm j1.93 \Rightarrow$ 2 pôles instables

Construction du tableau de Routh

Exemple 3

$$G(s) = \frac{s^2 - 5s + 7}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

Tous les coefficients du dénominateur $a_i > 0 \, \forall \, i$. On peut alors construire le tableau

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 12 \\
s^2 & 6 & 8 \\
s^1 & \frac{6\times 12 - 8\times 1}{6} = \frac{32}{3} & 0 \\
s^0 & \frac{32/3\times 8 - 0\times 6}{32/3} = 8 &
\end{array}$$

Tous les termes de la 1ère colonne sont positifs $\Rightarrow G(s)$ stable.

Vérification par le calcul des pôles
$p_1 = p_2 = p_3 = -2 \Rightarrow$ 3 pôles stables

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Cas particulier 1 - Un zéro dans la 1ère colonne ⇒ système astable ou instable
$D(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 1$

Tableau de Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 6 & 0 \\ s^2 & 0 & 1 & \\ s & & & \\ s^0 & & & \end{array} \qquad \frac{3\times 2 - 6\times 1}{3} = 0 \quad \frac{3\times 1 - 0\times 1}{3} = 1$$

Ce cas particulier est obtenu lorsque le système possède :

- un ou plusieurs pôles astables (pôles sur l'axe imaginaire)
- un ou plusieurs pôles instables (pôles dans la partie droite du plan complexe)
- si l'élément nul est le dernier du tableau, présence d'1 pôle nul ou de 2 pôles imaginaires purs conjugués. Le système est astable

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Cas particulier 1 - Un zéro dans la 1ère colonne $\Rightarrow$ système astable ou instable
$D(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 1$

Tableau de Routh On remplace le zéro par ϵ et on évalue la limite des nouveaux termes lorsque $\epsilon \to 0^+$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 6 & 0 \\ s^2 & 0 & 1 & \\ s & \infty & & \\ s^0 & & & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 1 \\ s^3 & 3 & 6 & 0 \\ s^2 & \epsilon & 1 & \\ s & 6 - \dfrac{3}{\epsilon} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left(6 - \frac{3}{\epsilon}\right) = -\infty < 0 \Rightarrow$$ système instable !

2 changements de signe dans la première colonne $\Rightarrow$ 2 pôles instables

Vérification par le calcul des pôles
$p_1 = -2.97; p_2 = -0.17; p_{3,4} = 0.07 \pm j1.38 \Rightarrow$ 2 pôles instables

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Cas particulier 2 - Une ligne entière de zéros $\Rightarrow$ système astable ou instable

$D(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 3$

Tableau de Routh

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 3 \\ s^3 & 3 & 3 & 0 \\ s^2 & 3 & 3 & 0 \\ s & 0 & 0 & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\frac{3 \times 3 - 3 \times 3}{3} = 0 \qquad \frac{3 \times 0 - 0 \times 3}{3} = 0$$

Ce cas particulier est obtenu lorsque le système possède :

- une paire de pôles réels de même amplitude mais de signe opposé (ex : $p_{1,2} = \pm 1$) $\Rightarrow$ système instable
- une paire de pôles imaginaires de même amplitude mais de signe opposé (ex : $p_{1,2} = \pm j$) $\Rightarrow$ système astable
- des paires de pôles complexes conjugués symétriques par rapport à l'origine du plan complexe (ex : $p_{1,2} = 1 \pm j$, $p_{3,4} = -1 \pm j$) $\Rightarrow$ système instable

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Cas particulier 2 - Une ligne entière de zéros $\Rightarrow$ système astable ou instable
$D(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 3$

Tableau de Routh On va à la ligne supérieure (à celle où il n'y a que des zéros) et on crée un polynôme $A(s)$ formé des coefficients de cette ligne. On dérive alors $A(s)$. Les coefficients du polynôme dérivé remplace ceux de la ligne supérieure et on poursuit la construction du tableau de Routh.

s^4	1	4	3
s^3	3	3	0
s^2	3	3	
s^1	0	0	

A partir de la ligne supérieure, on construit : $A(s) = 3s^2 + 3$ que l'on dérive :

$$A'(s) = 6s + 0$$

La 3ème ligne du tableau est alors modifiée :

s^4	1	4	3
s^3	3	3	0
s^2	$\cancel{3}$ 6	$\cancel{3}$ 0	
s^1	$\cancel{0}$ 3	$\cancel{0}$ 0	
s^0	0		

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Cas particulier 2 - Une ligne entière de zéros $\Rightarrow$ système astable ou instable
$D(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 3$

Tableau de Routh modifié

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 3 \\ s^3 & 3 & 3 & 0 \\ s^2 & \cancel{3}\ 6 & \cancel{3}\ 0 & \\ s^1 & \cancel{0}\ 3 & \cancel{0}\ 0 & \\ s^0 & 0 & & \end{array}$$

Dernier élément du tableau est nul ! $\Rightarrow$ le système est astable : 1 pôle en zéro ou 2 pôles imaginaires purs conjugués

Vérification par le calcul des pôles
Ici on a deux pôles conjugués sur l'axe imaginaire $\Rightarrow$ système astable
Pôles : $p_{1,2} = -1.5 \pm j0.866$, $p_{3,4} = \pm j$

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Cas particulier 2 - Une ligne entière de zéros *(2nd exemple)*

$D(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$

Tableau de Routh

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 6 & 8 \\
s^4 & 7 & 42 & 56 \\
s^3 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

A partir de la ligne supérieure, on construit : $A(s) = 7s^4 + 42s^2 + 56$ que l'on dérive : $A'(s) = 28s^3 + 84s + 0$

La 2ème ligne du tableau est alors modifiée :

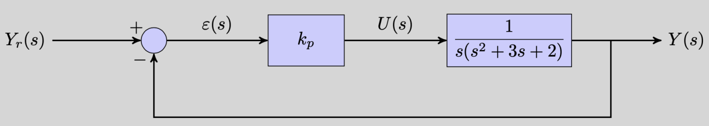
$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 6 & 8 \\
s^4 & \cancel{7}\ 28 & \cancel{42}\ 84 & \cancel{56}\ 0 \\
s^3 & \cancel{0}\ 3 & \cancel{0}\ 6 & 0 \\
s^2 & 28 & 0 & \\
s^1 & 6 & 0 & \\
s^0 & 0 & &
\end{array}
$$

même conclusion que l'exemple précédent

Stabilité

Critère de Routh-Hurwitz :
outil très utile pour déterminer la plage de valeurs de gain d'un correcteur qui garantit la stabilité d'un système bouclé

Déterminer la plage de valeurs de k_p qui permet au système bouclé de rester stable.



Méthode :

1. on determine la fonction de transfert en boucle fermée $F_{BF}(s) = \dfrac{Y(s)}{Y_r(s)}$
2. on construit le tableau de Routh et on en déduit la plage de valeurs de k_p qui permet de respecter les conditions de stabilité du critère

Stabilité

Détermination de la plage de valeurs d'un gain pour garantir la stabilité d'un système bouclé grâce au tableau de Routh

1. on determine la fonction de transfert en boucle fermée $F_{BF}(s)$

$$F_{BF}(s) = \frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{k_p}{s^3 + 3s^2 + 2s + k_p}$$

2. Tous les coefficients du dénominateur $a_i > 0 \, \forall \, i \Rightarrow k_p > 0$.
   On construit le tableau

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k_p \\ s^1 & \dfrac{6-k_p}{3} & 0 \\ s^0 & k_p & \end{array}$$

   Tous les termes de la 1ère colonne doivent être positifs pour garantir $F_{BF}(s)$ stable (sur la base de la connaissance du modèle $G(s)$).

   $k_p > 0$ et $\frac{6-k_p}{3} > 0$
   Système stable $\Leftrightarrow 0 < k_p < 6$

Stabilité - Résumé

Stabilité d'après la réponse impulsionnelle

Un système est **stable** si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$$

Stabilité d'après les pôles

Un système est **stable** si ses pôles sont tous à partie réelle strictement négative

$$G(s) \text{ stable } \Leftrightarrow \mathcal{R}e(p_i) < 0, \forall p_i$$

Tous les pôles doivent être dans la partie gauche du plan complexe

Stabilité d'après le critère algébrique de Routh-Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \text{ avec } D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_i > 0$$

Le système est **stable** si et seulement si les coefficients a_i sont tous positifs et si les termes de la 1ère colonne du tableau de Routh sont tous positifs.