

Automatique

Analyse des systèmes

Hugues Garnier

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

Version du 5 novembre 2024

Plan du cours

- Chapitre 1 - Introduction à l'Automatique et modélisation des systèmes
- Chapitre 2 - Analyse des systèmes
 - Réponse indicielle - Indices de caractérisation
 - Réponses de quelques systèmes importants
 - Identification de quelques systèmes importants
- Chapitre 3 - Stabilité des systèmes
- Chapitre 4 - Systèmes bouclés : commande, stabilité et performances
- Chapitre 5 - Correcteurs standards et leurs réglages

Analyse de systèmes dynamiques linéaires ?

L'objectif est de comprendre comment va réagir le système à des sollicitations de l'entrée. On distingue :

- **l'analyse temporelle** qui étudie le comportement transitoire du système suite à un changement brusque de l'entrée (type échelon) ;
- **l'analyse fréquentielle** (*ou harmonique*) qui étudie le comportement du système suite à une excitation de forme sinusoïdale

On se focalisera dans la suite sur **l'analyse temporelle**.

Un intérêt particulier est accordé aux **systèmes d'ordre un et deux**.

- De tels systèmes sont fréquemment rencontrés en pratique
- Des systèmes plus complexes peuvent souvent être approchés par des systèmes d'ordre un ou deux.

Leurs réponses temporelles doivent être parfaitement maîtrisées.

Analyse de systèmes. Comment faire ?

L'analyse d'un système peut s'effectuer de manière :

- **expérimentale**

- On excite le système par un signal spécifique $u(t)$ (type échelon ou rampe) et on relève sa réponse $y(t)$

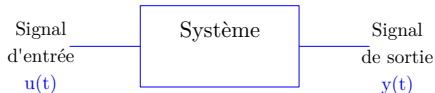
- **théorique**

- A partir de la connaissance de la fonction de transfert $G(s)$ du système, la réponse $Y(s)$ à n'importe quelle excitation $U(s)$ est obtenue par :

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

- La réponse $y(t)$ peut être calculée **analytiquement** par transformée de Laplace inverse

Analyse temporelle des systèmes



Objectif

Analyser/caractériser la réponse $y(t)$ du système à une entrée donnée $u(t)$

Signaux d'entrée usuels

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$ qui conduit à la **réponse impulsionnelle** (*impulse response*)
- Echelon $A\Gamma(t)$ qui conduit à la **réponse indicielle** (*step response*)
- Rampe $Ar(t)$ (*ne porte aucun nom particulier*)

Réponse temporelle d'un système

Décomposition de la réponse (celle souvent exploitée en Automatique)

- Réponse totale = réponse transitoire + réponse permanente

- Réponse (ou régime ou phase) transitoire

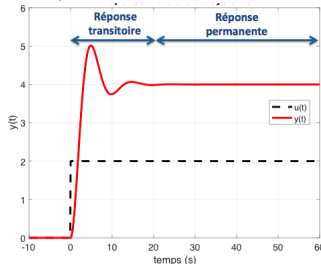
Pour un système stable, partie de la réponse où le système réagit à l'entrée ; elle est encadrée par deux états d'équilibre. C'est une caractéristique propre au système, qui ne dépend pas du type d'excitation

Ex : accélération, freinage, temps de chauffe, ...

- Réponse (ou régime ou phase) permanente

Partie de la réponse où l'équilibre est à nouveau atteint, après la réponse transitoire

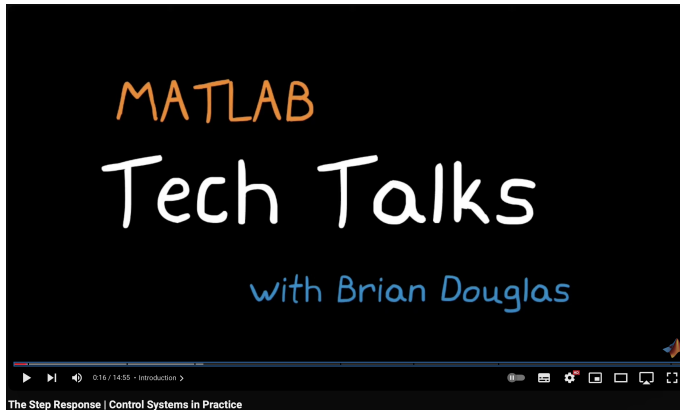
Ex : vitesse de croisière, ...



Réponse indicielle d'un système

Visualisez la vidéo de Brian Douglas

The Step Response: Control Systems in Practice



Intérêt particulier pour la réponse indicielle en Automatique

Analyser la réponse indicielle revient à :

- caractériser la réponse permanente en déterminant :
 - la valeur finale de la sortie : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$
 - le gain statique K
- caractériser la réponse transitoire en déterminant les indices suivants
 - le temps de montée $T_m^{x\%}$
 - le temps de réponse $T_r^{x\%}$
 - l'instant du premier dépassement T_{D_1}
 - la valeur du premier dépassement $D_{1\%}$

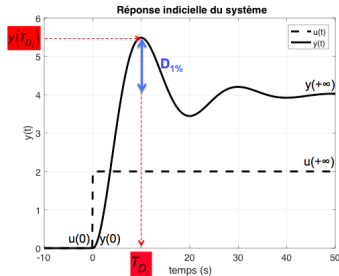
Réponse indicielle

Indice de caractérisation du régime permanent

Gain statique (*steady-state gain*)

Pour un système stable, c'est le rapport des variations de la sortie sur celle de l'entrée (pour un échelon)

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$



Indice de caractérisation du régime permanent

Gain statique (*steady-state gain*)

Si on connaît la fonction de transfert $G(s)$ du système

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Démonstration. Si les conditions initiales des signaux sont nulles $y(0) = u(0) = 0$, d'après le théorème de la valeur finale et la relation $Y(s) = G(s)U(s)$:

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)} = \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} sU(s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} sU(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Réponse indicielle

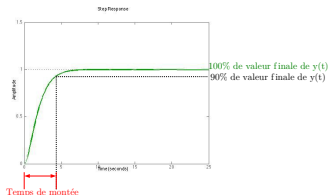
Indices de caractérisation du régime transitoire

Temps de montée (*rise time*)

$T_m^{x\%}$ = : temps nécessaire pour que la sortie atteigne x % (exemple : $x = 90$ % ou $x = 100$ %) de la valeur finale de la réponse

- Rapidité du système

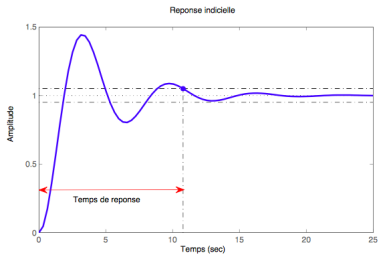
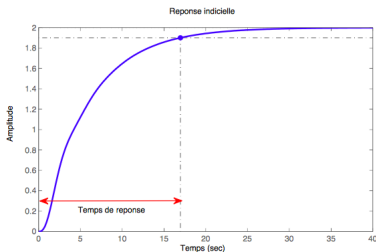
→ *Plus le temps de montée est court, plus le système est rapide.*



Indices de caractérisation du régime transitoire

Temps de réponse (*settling time*)

$T_r^{x\%}$: temps nécessaire pour que la sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une zone de tolérance de $\pm x \%$ autour de la valeur finale (exemple $x = \pm 5 \%$)

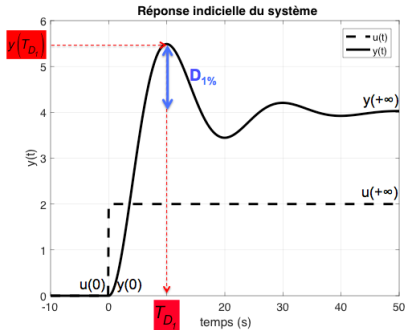


Réponse indicielle

Indices de caractérisation du régime transitoire

Instant du premier dépassement (ou du premier pic)

T_{D_1} : Instant où la sortie atteint le premier dépassement (ou premier pic) si celui-ci a lieu.



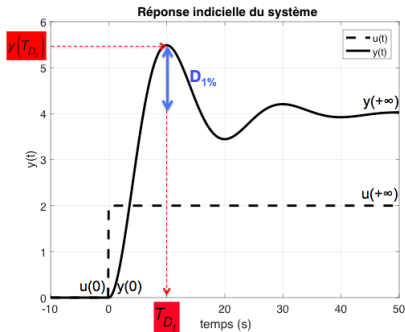
Réponse indicielle

Indices de caractérisation du régime transitoire

Valeur du premier dépassement (*overshoot*)

Différence relative entre la valeur du premier dépassement et la valeur finale, en pourcentage :

$$D_{1\%} = \frac{y(T_{D_1}) - y(+\infty)}{y(+\infty) - y(0)} \times 100$$

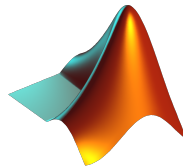


Outil logiciel pour analyser les systèmes linéaires

Matlab

Boîte à outils **Control**

fr.mathworks.com/products/control.html



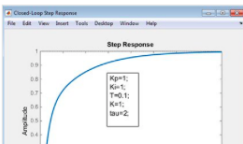
Fonctionnalités



Création et manipulation de modèles linéaires

Créez et manipulez les modèles de votre système de contrôle.

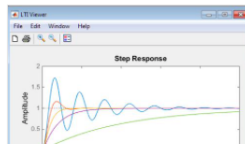
» En savoir plus



Analyse de modèles

Utilisez l'application et les fonctions pour analyser des modèles linéaires.

» En savoir plus



Concevoir et régler des systèmes de contrôle

Réglez de manière systématique les paramètres de votre système de contrôle à l'aide de techniques de conception SISO et MIMO.

» En savoir plus

Quelques systèmes importants

Gain pur

Fonction de transfert

$$G(s) = K$$

Exemples

- *Loi d'Ohm : $u(t) = Ri(t)$*
- *Relation fondamentale de la dynamique : $F(t) = ma(t)$*
- *Relation température/flux thermique : $\theta(t) = R\Phi(t)$, ...*

Quelques systèmes importants

Intégrateur du 1er ordre

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Exemples

- Condensateur ($u(t) = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau$)
- Réservoir hydraulique ($P(t) = \frac{\rho g}{A} \int q(\tau) d\tau$)
- Ressort mécanique ($F(t) = k \int v(\tau) d\tau$), ...

Quelques systèmes importants

Système du 1er ordre

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

Paramètres caractéristiques d'un système du 1er ordre

- K : gain statique (*steady-state gain*)
- T : constante de temps (*time-constant*)

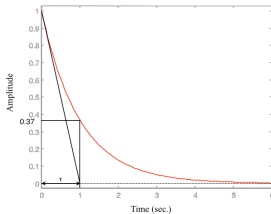
Exemples

- Circuit électrique RC ($RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$)
- Réservoir hydraulique ($S\dot{h}(t) + ah(t) = q_e(t)$)
- Four ($C\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = p(t)$)

Quelques systèmes importants

Réponse **impulsionnelle** d'un système du 1er ordre

$$u(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{G(s) = \frac{K}{1 + Ts}} \quad \longrightarrow \quad y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \Gamma(t)$$



- Régime transitoire : exponentielle amortie
- Régime permanent : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

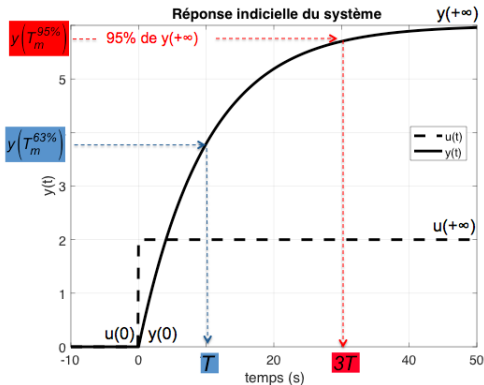
Quelques systèmes importants

Réponse **indicielle** d'un système du 1er ordre : réponse **apériodique**

$$u(t) = A\Gamma(t) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad \longrightarrow \quad y(t) = KA(1 - e^{-t/T})\Gamma(t)$$

$T_m^{63\%} = T$
$T_m^{95\%} \approx 3T$
$T_r^{5\%} = T_m^{95\%}$

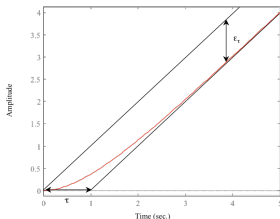
- Pente à l'origine non nulle
- Pas de dépassement



Quelques systèmes importants

Réponse à la rampe d'un système du 1er ordre

$$u(t) = r(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{1 + Ts}} \rightarrow y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})\Gamma(t)$$



Quelques systèmes importants

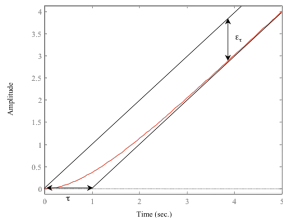
Réponse à la rampe d'un système du 1er ordre

$$u(t) = r(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{K}{1 + Ts}} \rightarrow y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})\Gamma(t)$$

Erreur de traînage

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t) - y(t)) = t - Kt + KT$$

$$\text{Si } K = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t) - y(t)) = T$$

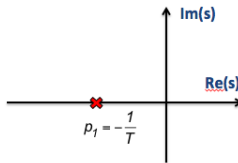


Quelques systèmes importants

Diagramme des pôles et des zéros d'un système du 1er ordre

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

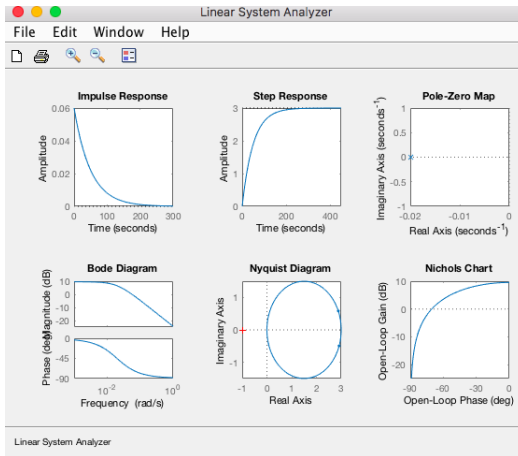
1 seul pôle : $p_1 = -\frac{1}{T}$



- plus la constante de temps T est grande, plus le pôle est proche de l'axe imaginaire et plus le système est lent

Outil logiciel pour analyser les systèmes linéaires

Sous Matlab : `Itiview(tf(3,[50 1]));` % $G(s) = \frac{3}{1+50s}$



Quelques systèmes importants

Système du 2nd ordre

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\frac{z}{\omega_0}s + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0s + \omega_0^2}$$

Paramètres caractéristiques d'un système du 2nd ordre

- K : gain statique (*steady-state gain*)
- z : coefficient d'amortissement (*damping factor*) ($z > 0$)
- ω_0 : pulsation propre non amortie (*undamped natural frequency*)

Exemples

- Circuit électrique RLC
- Système mécanique masse-ressort-amortisseur

Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle

$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = ?$$

Réponse transitoire d'un système du 2nd ordre :

- pente à l'origine nulle
- la réponse dépend de z qui va déterminer le type de pôles (réels ou complexes conjugués) :

$$s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$$

$\Rightarrow$ 3 cas à considérer : $z > 1$, $z = 1$ et $z < 1$

Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z > 1$

$$u(t) = A\Gamma(t) \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \rightarrow y(t) = KA \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right) \Gamma(t)$$

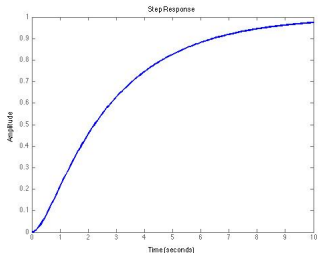
2 pôles réels :

$$p_1 = -z\omega_0 + \omega_0 \sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{T_1}$$

$$p_2 = -z\omega_0 - \omega_0 \sqrt{z^2 - 1} = -\frac{1}{T_2}$$

- Réponse **apériodique** (sans oscillation amortie)
- Peut s'écrire sous la forme de 2 systèmes du 1er ordre en cascade (en série)

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$



Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z = 1$

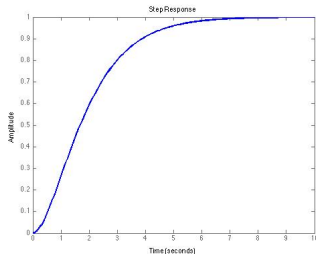
$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = KA\left(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)\Gamma(t)$$

1 pôle réel double :

$$p_{1,2} = -\omega_0 = -\frac{1}{T}$$

- Réponse dite **apériodique critique**
- Peut s'écrire sous la forme de 2 systèmes du 1er ordre en cascade de même constante de temps

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$$



Quelques systèmes importants

Caractéristiques temporelles d'un système du 2nd ordre

Réponse indicielle pour $z < 1$

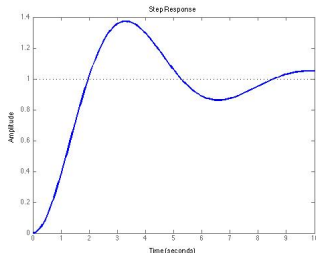
$$u(t) = A\Gamma(t) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}} \longrightarrow y(t) = KA \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \varphi) \right) \Gamma(t)$$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2} \text{ et } \varphi = \arccos(z)$$

2 pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -z\omega_0 \pm j\omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

Réponse **pseudo-périodique** (oscillation amortie)



Quelques systèmes importants

Réponse indicielle pour $z < 1$

Quelques caractéristiques du régime pseudo-périodique

Valeur du 1er dépassement en % $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \times 100$

Instant du 1er dépassement $T_{D1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

Valeur du $n^{\text{ième}}$ dépassement en % $D_{n\%} = -(-D_1)^n \times 100$

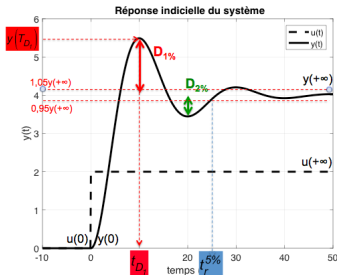
Instant du $n^{\text{ième}}$ dépassement $T_{Dn} = n T_{D1}$

Pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

Temps de réponse à 5 % $T_r^{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0 z}$

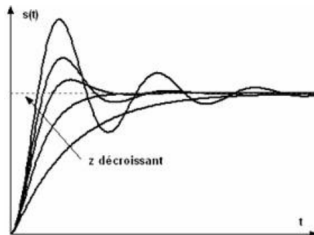
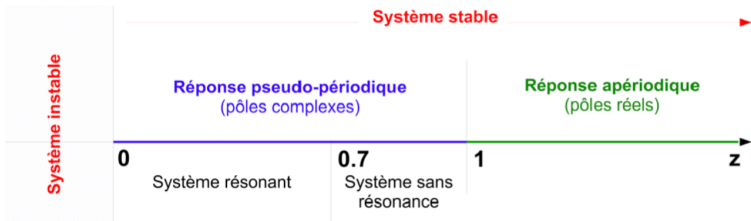
Temps de réponse à x % $T_r^{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{\omega_0 z}$

Temps de montée (100%) $T_m^{100\%} = \frac{\pi - \arccos(z)}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$



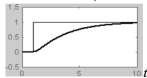
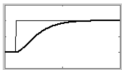
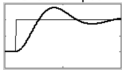
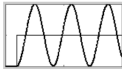
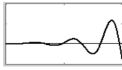
Quelques systèmes importants

Caractéristiques des réponses indicielles d'un système du 2nd ordre



Quelques systèmes importants

Caractéristiques des réponses indicielles d'un système du 2nd ordre

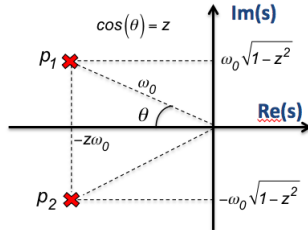
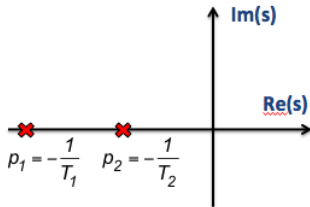
Value of Z	Poles p_1 and p_2	Type of step response $y(t)$
$Z > 1$	Real and distinct 	Overdamped 
$Z = 1$	Real and multiple 	Critically damped 
$0 < Z < 1$	Complex conj. 	Underdamped 
$Z = 0$	Imaginary 	Undamped 
$Z < 0$	Pos. real part 	Unstable 

Quelques systèmes importants

Diagramme des pôles et des zéros d'un système du 2nd ordre

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

si $z \geq 1$, $p_{1,2} = -z\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$ si $z < 1$, $p_{1,2} = -z\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - z^2}$



- Si les pôles se déplacent verticalement

$$T_r^{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0 z} \text{ reste constant}$$

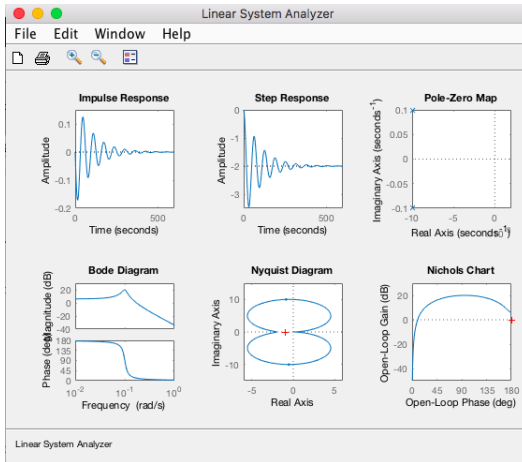
- Si les pôles se déplacent horizontalement

$$T_{D1} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}} \text{ reste constant}$$

Outil logiciel pour analyser les systèmes linéaires

Sous Matlab: `ltiview(tf(-0.02,[1 0.02 0.01]));`

$$\%G(s) = \frac{-0.02}{s^2 + 0.02s + 0.01}$$

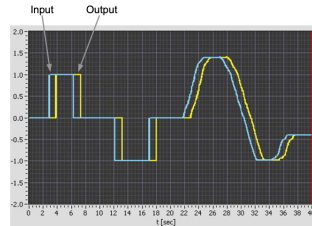


Quelques systèmes importants

Retard pur

Fonction de transfert

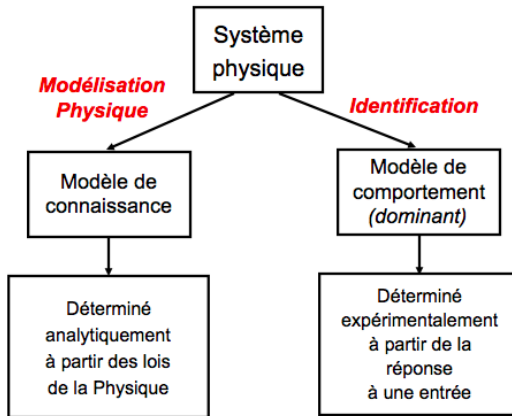
$$G(s) = e^{-\tau s}$$



Retard pur τ = temps pendant lequel la sortie ne réagit pas à la commande

Modélisation de systèmes LTI

Rappel des deux approches possibles



Identification à partir de la réponse indicielle

Modèle du premier ordre

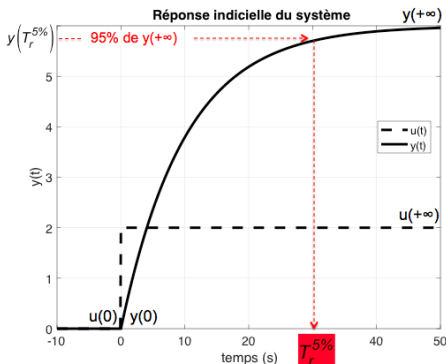
$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

- 1 Relever les valeurs finale et initiale de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

- 2 Relever $y(T_r^{5\%})$, en déduire $T_r^{5\%}$ puis T :

$$T = \frac{T_r^{5\%}}{3}$$



Identification à partir de la réponse indicielle

Modèle du second ordre pseudo-périodique

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- 1 Relever les valeurs finales et initiales de la réponse et de l'échelon. On en déduit K :

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{u(+\infty) - u(0)}$$

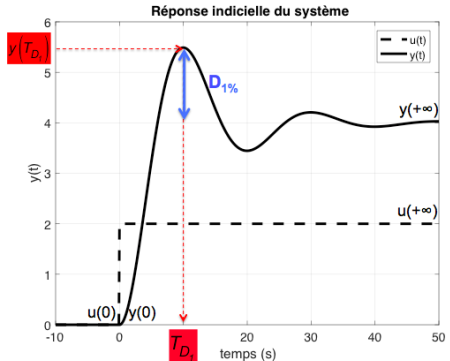
- 2 Relever les valeurs finale et initiale de la réponse ainsi que celle du premier dépassement $y(t_{D_1})$. On en déduit D_1 , puis z :

$$D_1 = \frac{y(t_{D_1}) - y(+\infty)}{y(+\infty) - y(0)}$$

$$z = \sqrt{\frac{(\ln(D_1))^2}{(\ln(D_1))^2 + \pi^2}}$$

- 3 Relever l'instant du premier dépassement T_{D_1} . On en déduit ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T_{D_1} \sqrt{1 - z^2}}$$



Identification à partir de la réponse indicielle

Les méthodes simples précédentes fournissent, en général, des modèles peu précis (du comportement dominant du système) lorsque le signal de sortie est entaché de bruit de mesure.

Il existe aujourd'hui des méthodes d'identification de systèmes beaucoup plus performantes disponibles dans les boîtes à outils CONTSID du CRAN ou *System Identification* de Matlab (voir cours Identification de systèmes dynamiques au S8 de 4A IA2R).