# *Quelques rappels sur la transformée de Laplace & la décomposition en éléments simples*

Hugues GARNIER

hugues.garnier@univ-lorraine.fr

*Version du 18 septembre 2020*

# Pierre-Simon LAPLACE

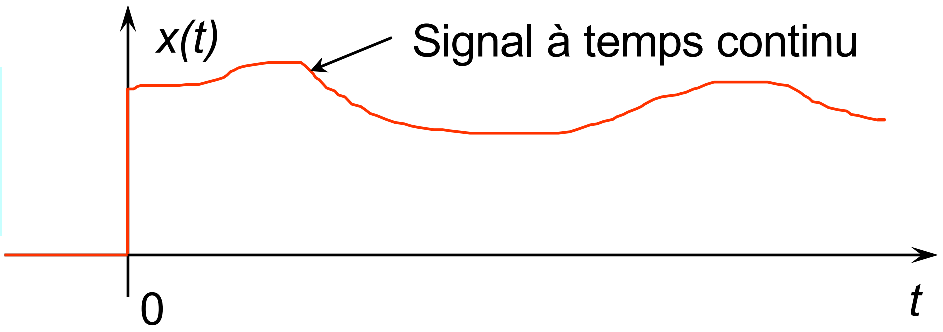
- 23 mars 1749 - 5 mars 1827
- Grand scientifique français
- A profondément influencé les mathématiques, l'astronomie, la physique et la philosophie des sciences de son siècle
- La transformée qui porte son nom facilite grandement l'analyse des systèmes à temps continu

*Visionner la vidéo de Brian Douglas : Control Systems Lectures-The Laplace Transform and the Important Role it Plays*

# Définition

- Soit un signal à temps continu *x(t)* causal *(nul pour t<0)*, la transformée de Laplace de *x(t)* est définie par :

$$\mathcal{L}\big(x(t)\big) = X(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$




où

– *s* est la variable de Laplace (parfois notée *p*)

– *s* est complexe : $s = \alpha + j\omega$

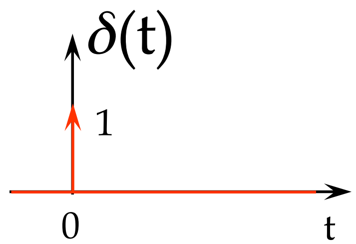
- On dit que *X(s)* est la transformée de Laplace du signal *x(t)*

- *Remarque : les conditions de convergence de l'intégrale impropre ne seront pas indiquées*

# Transformée de Laplace de signaux usuels

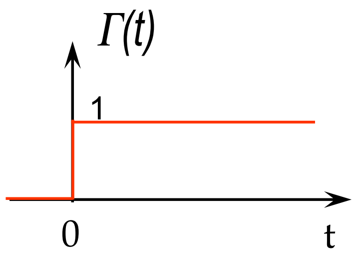
- *Impulsion de Dirac*

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$



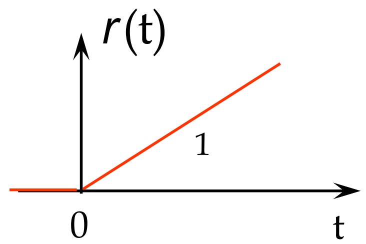

- *Echelon unité*

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{s}$$



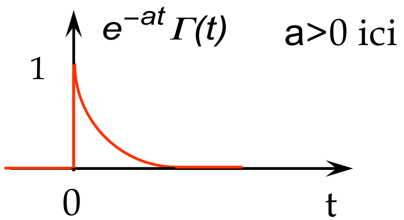

- *Rampe unité*

$$\mathcal{L}(r(t)) = \frac{1}{s^2}$$




- *Exponentielle causal* (*a* scalaire réel ou complexe)

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\Gamma(t)\right) = \frac{1}{s+a}$$



UNIVERSITÉ DE LORRAINE

POLYTECH NANCY

# Table de transformées de Laplace

| $x(t)$ | $X(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $\Gamma(t)$ | $\dfrac{1}{s}$ |
| $r(t)=t\ \Gamma(t)$ | $\dfrac{1}{s^2}$ |
| $t^n\ \Gamma(t)$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-at}\Gamma(t)$ | $\dfrac{1}{s+a}$ |
| $t^n\ e^{-at}\Gamma(t)$ | $\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |

# Table de transformées de Laplace

| $x(t)$ | $X(s)$ |
|---|---|
| $\sin(\omega_o t)\,\Gamma(t)$ | $\dfrac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}$ |
| $\cos(\omega_o t)\,\Gamma(t)$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega_o^2}$ |
| $e^{-at}\sin(\omega_o t)\,\Gamma(t)$ | $\dfrac{\omega_o}{(s+a)^2+\omega_o^2}$ |
| $e^{-at}\cos(\omega_o t)\,\Gamma(t)$ | $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_o^2}$ |



H. Garnier

# Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Linéarité***

$$\mathcal{L}\big(a\,x(t)\big) = a\,X(s)$$

$$\mathcal{L}\big(a\,x(t) + b\,y(t)\big) = a\,X(s) + b\,Y(s)$$

- ***Dérivation par rapport au temps***

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right) = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right) = s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x^{(1)}(0) - \ldots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

# Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Théorème du retard***

$$\mathrm{L}\left(x(t-t_0)\right) = e^{-st_0}X\left(s\right)$$

  – Déterminer **L**$(rect(t-0.5))$

- ***Changement d'échelle***

$$\mathrm{L}\left(x(at)\right) = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

  – Déterminer **L**$(r(2t))$

- ***Produit par le temps***

$$\mathrm{L}\left(t\,x(t)\right) = -\frac{dX(s)}{ds}$$

  – Déterminer **L**$(t\cos(\omega_0 t))$

# Quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace

- ***Produit de convolution***

$$\mathcal{L}\big(x(t)*y(t)\big) = X(s)\times Y(s) \qquad x(t)*y(t)=\int_0^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

- ***Théorème de la valeur initiale***

$$x(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sX(s)$$

- ***Théorème de la valeur finale***

$$\lim_{t\to+\infty}\big(x(t)\big) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

*Si la limite existe*

*Exemple :*

$$x(t)=e^{-2t}\,\Gamma(t) \qquad X(s)=\frac{1}{s+2}$$

*Contre – exemple :*

$$x(t)=\cos\big(\omega_o t\big)\,\Gamma(t) \qquad X(s)=\frac{s}{s^2+\omega_o^2}$$

# Transformée de Laplace inverse

- Le problème consiste à retrouver le signal *x(t)* à partir de *X(s)*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = x(t)$$

- *Utilisation de la définition à partir de l'intégrale*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(X\left(s\right)\right) = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds$$

Formule compliquée ! On évite de l'utiliser

- *La transformée de Laplace inverse est un opérateur **linéaire***

On va exploiter cette propriété

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(a\,X(s)+b\,Y(s)\right) &= a\,\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) + b\,\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)\\ &= a\,x(t) + b\,y(t)\end{aligned}$$

# Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace (TL)

- La ***procédure de résolution*** est la suivante :
  1. Appliquer la TL aux 2 membres de l'équation différentielle en *y(t) en tenant compte des conditions initiales des signaux*
  2. Calculer *Y(s)* en utilisant les propriétés et la table de TL
  3. Décomposer *Y(s)* en éléments simples
  4. Utiliser la table de transformées pour obtenir *y(t)* par transformée inverse

# Transformée de Laplace inverse dans le cas de formes simples

- Exploitation directe de la table de transformées de Laplace
  - *On essaie de mettre la transformée de Laplace sous une forme donnée dans la table*
- *Exemples*

$$X(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$x(t)=3e^{-2t}\Gamma(t)$$

$$Y(s) = \frac{4}{2s+1}$$

$$Y(s) = \frac{4}{2s+1} = \frac{4}{2\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

$$y(t)=2e^{-\frac{1}{2}t}\Gamma(t)$$

# Transformée de Laplace inverse dans le cas de formes simples

- Exploitation directe de la table de transformées de Laplace
  - *On essaie de mettre la transformée de Laplace sous une forme donnée dans la table*

- *Exemples (suite) :*

$$X(s) = \frac{2}{(s+4)^3}$$

$$x(t) = t^2 e^{-4t} \Gamma(t)$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2+16}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2+16} = \frac{4}{s^2+4^2}$$

$$y(t) = \sin(4t)\, \Gamma(t)$$

# Transformée de Laplace inverse par décomposition en éléments simples

- La méthode consiste à ***décomposer en éléments simples Y(s)*** *et à exploiter ensuite la table de transformées de Laplace*

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}$$

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s-s_1}\right]+\ldots+\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{A_n}{s-s_n}\right]$$

$$=A_1 e^{s_1 t}\Gamma(t)+\ldots+A_n e^{s_n t}\Gamma(t)$$

$A_i$ : scalaire réel ou complexe

# *Rappels : décomposition en éléments simples*

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i} \qquad avec \quad n>m$$

- Cas où les *n* racines du dénominateur de *Y(s)* sont **toutes distinctes**

$$Y(s)=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-s_n}$$

$$A_i=\lim_{s\to s_i}\left[\left(s-s_i\right)Y(s)\right] \qquad i=1,2,\cdots,n$$

# Transformée de Laplace inverse
# Exemple

- Déterminer le signal *y(t)* ayant comme transformée de Laplace

$$Y(s) = \frac{s+2}{s\left(s+1\right)\left(s+3\right)}$$

$$y(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right)\Gamma(t)$$

# Rappels : décomposition en éléments simples

- **2ème cas :** Si $Y(s)$ possède une racine multiple $s_1$ de multiplicité $r$ :

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{(s-s_1)^r} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s-s_1)^r}$$

$$A_i = \lim_{s \to s_1} \left( \frac{1}{(r-i)!} \left[ \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left\{ (s-s_1)^r\, Y(s) \right\} \right] \right) \qquad i = 1, 2, \cdots, r$$

  - Formule compliquée ! On évite de l'utiliser

  - Méthode recommandée pour les cas « simples » :
    - On détermine $A_r$ par la méthode des limites
    - On choisit des valeurs de $s \neq s_1$ (par exemple $s=0$, $s=-1$ etc)
    - on résout un système d'équations pour les coefficients $A_{1}, \ldots, A_{r-1}$

# Transformée de Laplace inverse
# Exemple

- Déterminer le signal *y(t)* ayant comme transformée de Laplace

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1}\left[(s+1)^2 Y(s)\right] = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \lim_{s \to -3}\left[(s+3) Y(s)\right] = -\frac{1}{4}$$

$$s = 0; Y(0) = \frac{2}{3} = A_1 + A_2 + \frac{A_3}{3}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right)\Gamma(t)$$



H. Garnier

# Cas particuliers de transformées de Laplace du 2e ordre

$$Y(s)=\frac{N(s)}{as^2+bs+c}$$ On calcule le discriminant $\Delta$

- Si $\Delta>0$ ; les deux racines sont **réelles distinctes**

$$Y(s)=\frac{K}{a(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}$$

$$y(t)=\left(A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}\right)\Gamma(t)$$

- Si $\Delta=0$ ; la racine est **double réelle**. 2 cas sont à distinguer **:**

$$Y(s)=\frac{K}{a(s-s_1)^2}=\frac{A}{(s-s_1)^2}$$

$$y(t)=Ate^{s_1t}\Gamma(t)$$

$$Y(s)=\frac{ds+e}{a(s-s_1)^2}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2}$$

$$y(t)=\left(A_1e^{s_1t}+A_2te^{s_1t}\right)\Gamma(t)$$

- Si $\Delta<0$ ; les deux racines sont **complexes conjuguées**. 2 cas sont à distinguer :

$$Y(s)=\frac{K}{as^2+bs+c}=A\frac{\omega_o}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_o^2}$$

$$y(t)=Ae^{-\alpha t}\sin\left(\omega_o t\right)\Gamma(t)$$

$$Y(s)=\frac{ds+e}{as^2+bs+c}=A\frac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_o^2}$$

$$y(t)=Ae^{-\alpha t}\cos\left(\omega_o t\right)\Gamma(t)$$



H. Garnier