



École doctorale IAEM Lorraine
Département de Formation Doctorale en Automatique

Validation de données et diagnostic des systèmes incertains à l'aide de l'analyse par intervalle

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 18 juillet 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
(spécialité automatique et traitement du signal)

par

Moustapha ALHAJ DIBO

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	HEYEN Georges	Professeur à l'Université de Liège - Belgique (Président)
	VERGÉ Michel	Professeur à l'ENSAM - Paris
<i>Examineurs :</i>	BONNIFAIT Philippe	Maître de Conférences à l'UTC - Compiègne
	CELSE Benoît	Docteur au Département Informatique Scientifique à l'IFP
	MAQUIN Didier	Professeur à l'INPL - Vandoeuvre-Les-Nancy
	RAGOT José	Professeur à l'INPL - Vandoeuvre-Les-Nancy

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), sous la direction de Monsieur José Ragot, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, et la codirection de Monsieur Didier Maquin, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine.

J'exprime ma sincère reconnaissance à Monsieur Georges Heyen, Professeur à l'Université de Liège, ainsi qu'à Monsieur Michel Vergé, Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, pour avoir accepté de juger ce travail en tant que rapporteurs dans le jury.

Je remercie respectueusement Monsieur Philippe Bonnifait, Maître de Conférences à l'Université de Technologie de Compiègne, ainsi que Monsieur Benoît Celse, Docteur au Département Informatique Scientifique à l'Institut Français du Pétrole, pour leur participation à ce jury.

Je remercie Monsieur le Professeur José Ragot, qui a dirigé mes travaux, pour sa constante disponibilité, pour l'aide et les nombreux conseils et encouragements qu'il m'a toujours prodigués, pour m'avoir fait bénéficier de sa rigueur scientifique, de ses critiques objectives et de ses conseils avisés.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur le Professeur Didier Maquin, pour son soutien et ses remarques constructives tout au long de ce travail.

Je remercie mes amis et collègues de l'équipe SURFDIAG du CRAN, et tout spécialement Serges Elom Domlan, pour l'ambiance conviviale qu'ils ont contribué à entretenir, les bons moments passés en leur compagnie, ainsi que Marjorie Schwartz pour son aide précieuse et son altruisme.

Enfin, mes pensées vont à mes parents et à toute ma famille, pour leurs encouragements et leur soutien.

*Je dédie cette thèse
à mes parents,
à ma femme Ghada,
et à mes enfants Dima et Anas.*

Table des matières

Table des figures

xi

Notations

Introduction générale

1

Chapitre 1

Validation de données et analyse par intervalle - Concepts fondamentaux

1.1	Introduction	7
1.2	Système	8
1.3	Défauts et défaillances	8
1.4	Les différents types d'erreurs et leur origine	9
1.4.1	Erreurs systématiques	9
1.4.2	Erreurs accidentelles	10
1.5	Réconciliation de données	12
1.6	Notion de redondance	15
1.6.1	Redondance matérielle	15
1.6.2	Redondance analytique	15
1.7	Diagnostic et surveillance	16
1.8	DéTECTABILITÉ et ISOLABILITÉ	16
1.9	Diagnostic à base de modèles	16
1.10	Diagnostic à base de modèles analytiques	17
1.10.1	Principe du diagnostic à base de modèles analytiques	17
1.10.2	Test de cohérence	20
1.10.3	Principales méthodes de diagnostic à base de modèles analytiques	21
1.10.3.1	Estimation paramétrique	22

1.10.3.2	Estimation d'état	22
1.11	Modèle incertain et approche bornante	25
1.12	Analyse ensembliste	28
1.13	Arithmétique des intervalles	30
1.13.1	Définitions et notations	30
1.13.2	Opérations logiques sur les intervalles	33
1.13.3	Opérations arithmétiques sur les intervalles	34
1.13.4	Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles	35
1.13.5	Fonction réelle et domaines de définition	35
1.13.6	Fonction d'inclusion	36
1.13.7	Inversion ensembliste	39
1.14	Résolution d'un système d'équations intervalles linéaires	42
1.14.1	Prétraitement et préconditionnement d'un système linéaire	45
1.14.2	Contraction et consistance d'un CSP	47
1.14.3	Contracteurs à point fixe	48
1.14.3.1	Le contracteur de Krawczyk	49
1.14.3.2	Le contracteur de Gauss Seidel	50
1.14.4	L'élimination de Gauss par intervalle	51
1.14.5	Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés	52
1.15	Conclusion	53

Chapitre 2

Validation de données des systèmes statiques incertains

2.1	Introduction	57
2.2	Systèmes certains et mesures incertaines	58
2.2.1	Capteur linéaire à caractéristique incertaine	58
2.2.2	Estimation d'état à partir des mesures	62
2.2.3	Test de cohérence de mesures : génération des résidus	64
2.2.4	Localisation de défauts de grandes amplitudes	66
2.2.4.1	Signatures théoriques et expérimentale de défauts	67
2.2.4.2	Localisation de défauts	67
2.2.5	Estimation d'état	68
2.2.6	Estimation d'état par réconciliation de données	70
2.2.6.1	Première étape	70
2.2.6.2	Deuxième étape	71

2.2.7	Détection et localisation de défauts par réconciliation de données	72
2.2.8	Exemple	73
2.3	Systèmes et mesures incertains	79
2.3.1	Estimation d'état	81
2.3.2	Estimation d'état par réconciliation de données	82
2.3.2.1	Première étape	83
2.3.2.2	Deuxième étape	84
2.3.3	Détection et localisation de défauts par réconciliation de données	85
2.3.4	Exemple	86
2.3.5	Sensibilité de détection de défauts vis-à-vis des paramètres incertains	92
2.4	Application à un réseau de transport de matière	95
2.4.1	Détection et localisation de défaut	97
2.4.2	Estimation des variables du système	98
2.4.3	Réconciliation de données	98
2.5	Conclusion	101

Chapitre 3

Validation de données des systèmes dynamiques incertains

3.1	Introduction	105
3.2	Représentation des systèmes dynamiques sous une forme statique	106
3.2.1	Première forme statique	107
3.2.2	Deuxième forme statique	109
3.3	Position du problème	110
3.3.1	Cas des matrices d'observation inversibles	111
3.3.1.1	Estimation d'état	111
3.3.1.2	Détection et localisation de défauts par estimation d'état	113
3.3.1.3	Exemple	114
3.3.2	Cas des matrices d'observation rectangulaire	117
3.3.2.1	Estimation d'état	117
3.3.2.2	Détection et localisation de défauts par estimation d'état	119
3.3.2.3	Exemple	121
3.3.3	Cas des matrices d'observation verticale	123
3.3.3.1	Estimation d'état	124
3.3.3.2	Détection et localisation de défauts de mesures	126
3.3.3.3	Exemple	127

3.4	Génération des résidus par espace de parité dans le cas incertain	130
3.4.1	Vecteur parité d'un système certain	130
3.4.2	Vecteur parité d'un système à paramètres incertains	131
3.4.3	Analyse du vecteur parité	138
3.4.4	Extension au cas des systèmes dynamiques	139
3.4.4.1	Première forme statique	140
3.4.4.2	Deuxième forme statique	141
3.4.5	Exemple	143
3.5	Approche bornante : garantie, précision et justesse	146
3.6	Conclusion	148

Chapitre 4

Validation de données d'un convertisseur série résonnant

4.1	Introduction	152
4.2	Principe de fonctionnement	153
4.3	Modèle d'état	156
4.4	Estimation d'état	161
4.5	Défauts de convertisseur	163
4.5.1	Transistor en court-circuit dû à une surintensité du courant	163
4.5.2	Blocage de transistor	163
4.5.3	Diode bloquée	164
4.6	Détection et localisation de défauts	164
4.7	Conclusion	167

Conclusion générale

Annexes

Annexe A

Arithmétique d'intervalle

Annexe B

Résolution des équations linéaires intervalles

B.1	Elimination de Gauss	175
B.2	Algorithme de Gauss-Seidel	176
B.3	Algorithme de Krawczyk	176

B.4	Algorithme de propagation de contrainte	177
B.5	Contracteur par programmation linéaire	178

Annexe C

Rang et valeurs propres d'une matrice incertaine

C.1	Inégalités de Weyl et de Weinmann	179
C.2	Disques de Gerschgorin	181

Bibliographie	185
----------------------	------------

Table des figures

1.1	Collection et conditionnement de données	13
1.2	Modules d'une procédure de surveillance	17
1.3	Etape du diagnostic à base du modèle analytique	18
1.4	Forme de calcul et d'évaluation des résidus	19
1.5	Méthodes utilisées en diagnostic à base de modèles analytiques	21
1.6	Estimation paramétrique [Fra96]	22
1.7	Schéma fonctionnel d'un observateur générateur de résidu	24
1.8	Loi d'Ohm	25
1.9	Vecteur intervalle de dimension 2	32
1.10	Image directe f , fonction d'inclusion minimale $[f]^*$ et non minimale $[f]$ d'une fonction vectorielle f de dimension deux ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).	38
1.11	En dimension 2 : (a) L'ensemble solution \mathbb{X} du système linéaire $AX = B$; $B \in [B]$ est un polyèdre convexe. (b) L'ensemble solution du système linéaire $AX = B$; $A \in [A]$ et $B \in [B]$ est une union de ces polyèdres.	41
1.12	Les différentes solutions possibles du système $[A]X = [B]$	41
1.13	Effet d'enveloppement observé pour une rotation.	43
2.1	Non discernabilité et discernabilité des mesures	60
2.2	Non discernabilité et discernabilité des grandeurs à mesurer	62
2.3	Estimation d'une grandeur vraie à partir de mesure	63
2.4	Domaine admissible et optimisé des variables du système	77
2.5	Domaine admissible et optimisé des variables du système	90
2.6	Sensibilité de détection vis-à-vis des paramètres incertains de la matrice A en analysant les résidus r	93
2.7	Sensibilité de détection vis-à-vis des paramètres incertains de la matrice A en analysant les résidus structurés r_m	93
2.8	Sensibilité de détection vis-à-vis l'amplitude a_1 de l'incertitude affectant le capteur mesurant X_1 en analysant les résidus r	94
2.9	Sensibilité de détection vis-à-vis l'amplitude a_1 de l'incertitude affectant le capteur mesurant X_1 en analysant les résidus structurés r_m	95

2.10	Réseau de transport de matière	95
3.1	Schéma d'un système dynamique linéaire dans sa représentation d'état . . .	106
3.2	Entrée appliquée au système	115
3.3	Sorties mesurées	115
3.4	Résidus	116
3.5	Variables d'état estimées	116
3.6	Entrée du système	122
3.7	Sorties mesurées et corrigées	122
3.8	Indicateurs de défauts	123
3.9	Variables d'état estimées	123
3.10	Entrée du système	128
3.11	Sorties du système	128
3.12	Variables d'état estimées	129
3.13	Résidus structurés	129
3.14	Décomposition du vecteur des mesures par projection orthogonale $Y(k) =$ $Y_W(k) + Y_C(k)$	132
3.15	Mesures	144
3.16	Vecteur parité et indicateur de défauts	146
4.1	Schéma d'un convertisseur série résonnant	153
4.2	Définition discrète des variables d'état	156
4.3	Commande du convertisseur	160
4.4	Courant et tension mesurés	165
4.5	Courant et tension estimés et générés	166
4.6	Les résidus	166

Notations

\mathbb{N} :	l'ensemble des nombres entiers naturels
\mathbb{R}^n :	espace des réels, euclidien, de dimension n
$\mathbb{I}\mathbb{R}^n$:	espace des intervalles de dimension n
$\mathbb{I}\mathbb{R}_\varepsilon$:	espace des intervalles à précision réelle
\emptyset :	l'ensemble vide
\mathcal{R} :	l'opérateur de contraction
\underline{x}, \bar{x} :	bornes inférieure et supérieure de l'intervalle $[x]$
$c([x])$:	centre de l'intervalle $[x]$
$w([x])$:	longueur de l'intervalle $[x]$
\vec{x} :	rayon de l'intervalle $[x]$
$x \in [x]$:	élément quelconque de $[x]$
$[x]$:	intervalle $[\underline{x}, \bar{x}] = \langle c([x]); \vec{x} \rangle$ de centre $c([x])$ et de rayon \vec{x}
$[0]$:	intervalle $\langle 0; \varepsilon \rangle$ de $\mathbb{I}\mathbb{R}_{\varepsilon \geq 0}$
$[a][b] = [c]$:	égalité au sens d'un <i>CSP</i> (Constraint Satisfaction Problem)

$$\exists a \in [a] \exists b \in [b], \exists c \in [c] \mid a.b = c$$

Introduction générale

Pour fonctionner correctement, les systèmes de commande et de surveillance des processus ont besoin de recevoir des données cohérentes représentatives de l'état de fonctionnement de ces processus. Malheureusement, l'ensemble des données prélevées sur un processus ne constitue pas une représentation exacte de son fonctionnement parce que les données sont sujettes à des erreurs de différentes natures. Il est donc nécessaire de tester la validité des données acquises avant de les utiliser. Le problème majeur rencontré lors d'une procédure de validation de données ou de diagnostic réside dans le fait qu'un modèle ne définit qu'un comportement approché du processus qu'il est censé représenter. Ces approximations proviennent des erreurs de modélisation qui peuvent être expliquées par l'impossibilité d'identifier exactement les paramètres d'un système réel à cause de la précision limitée de son instrumentation. En outre, le comportement de tout système réel change au cours du temps d'une manière non prévisible en raison de l'environnement, des modes opératoires,... La représentation d'un système réel par un modèle incertain constitue une bonne solution pour prendre en compte le caractère incertain des paramètres du modèle du système. Plusieurs approches ont été développées pour analyser de tels modèles. Citons notamment l'approche probabiliste et l'approche bornante. L'objectif de cette thèse est de proposer, en utilisant l'approche bornante, des méthodes de validation de données des systèmes incertains.

Le premier chapitre est un chapitre introductif portant sur la validation de données, le diagnostic et l'analyse par intervalle. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés au problème de la validation de données dans sa globalité. Les concepts fondamentaux de la validation de données sont énoncés. Après avoir présenté les différents types d'erreur pouvant affecter les mesures, le problème de la réconciliation de données est présenté comme un problème d'optimisation quadratique. Ceci nous conduit naturellement aux méthodes existantes permettant de détecter et localiser des défauts à partir d'un modèle analytique du système (le diagnostic à base de modèle). Des notions comme la redondance analytique ou les tests de cohérence sont rappelées. La notion de modèle incertain et les différents types d'incertitude sont ensuite introduites à travers l'approche bornante permettant d'appréhender les variables incertaines. Le principe de l'analyse par intervalle et

ses différentes propriétés sont présentés. Ainsi les notions de fonction d'inclusion, d'inversion ensembliste et de contracteurs, permettant de minimiser l'effet d'enveloppement et d'alléger le temps de calcul requis pour résoudre une équation intervalle, sont expliquées. Enfin, plusieurs méthodes de résolution d'un système linéaire intervalle sont exposées.

L'objectif du deuxième chapitre est de traiter le problème de la validation de données des systèmes statiques linéaires incertains. Une nouvelle approche du problème de réconciliation de mesures est proposée en s'appuyant sur l'analyse par intervalle. La méthode proposée est aisée à mettre en œuvre. Elle permet de valider les mesures et de donner une estimée des variables intervenant dans le modèle du système sur la base de la connaissance des intervalles dans lesquels varient les erreurs de mesure. On s'affranchit ainsi de la connaissance a priori des lois de distribution statistique des erreurs de mesure. La mise en œuvre de cette méthode passe par une étape préalable de modélisation des capteurs prenant en compte le caractère incertain des mesures. Il a été ainsi mis en avant un modèle pour la représentation d'un capteur à caractéristique incertaine. Les incertitudes pouvant être présentes sur les capteurs uniquement ou à la fois sur le système et les capteurs, deux situations sont alors considérées. Dans les deux situations, nous proposons une méthode de validation de données à partir d'équation de redondance. Enfin une application sur un réseau de transport de matière clôt ce chapitre. Cette application montre l'efficacité de la démarche proposée.

Les systèmes statiques n'étant pas représentatifs de la majorité des processus rencontrés, il convient de s'intéresser aussi aux systèmes dynamiques. Ceci est l'objet du troisième chapitre. Dans un premier temps, deux formes permettant de représenter les systèmes linéaires incertains dynamiques sous une forme statique sont mises en évidence. Ensuite, le problème de la validation de données de ces systèmes est étudié dans trois cas. Le premier cas concerne les systèmes complètement mesurés. Pour ce faire, en s'appuyant sur l'arithmétique des intervalles, on calcule une estimée des variables d'état intervenant dans le modèle du système étudié. Il est ensuite adopté, en se basant sur l'estimée calculée, une démarche classique de détection et localisation de défaut. Le deuxième cas traite des systèmes partiellement mesurés. Dans ce cas, en utilisant les deux formes statiques et en s'appuyant sur la résolution des équations de type intervalle un algorithme séquentiel permettant de calculer une estimée des variables d'état sur une fenêtre d'observation $[k, k + s]$, est proposé. L'analyse de chaque étape du calcul de cette estimée permet de détecter et de localiser les défauts pouvant affecter les mesures. Enfin, le troisième cas, celui des systèmes dont la dimension du vecteur de sortie est plus grande que la dimension du vecteur d'état, est étudié. Dans ce cas, une méthode séquentielle permettant de calculer une estimée des variables d'état est proposée. Dans la dernière partie de ce chapitre montre l'application du principe de l'espace de parité au cas d'un modèle incertain dans

le cas statique et dynamique. Nous présentons une méthode de calcul d'une matrice de projection permettant de générer un vecteur parité. La méthode permet d'obtenir une matrice de projection sous une forme polynomiale en les incertitudes et assure un découplage total par rapport aux variables d'état. L'analyse du vecteur parité est effectuée dans le but d'expliquer le principe de détection de défaut dans le cadre l'approche bornante.

Le dernier chapitre de ce mémoire présente un exemple applicatif des méthodes présentées dans le troisième chapitre. Il s'agit d'effectuer la validation de données sur un convertisseur série résonnant. Le principe de fonctionnement du convertisseur série résonnant est tout d'abord détaillé. A partir de l'analyse des différentes phases de fonctionnement du convertisseur, il est établi un modèle linéaire permettant de décrire tous les modes de fonctionnement de ce convertisseur et capable de prendre en compte les incertitudes affectant les différents éléments constituant le convertisseur, notamment la résistance, les capacités et l'inductance. Les méthodes de validation de données développées sont ensuite éprouvées sur le modèle linéaire incertain obtenue.

1

Validation de données et analyse par intervalle - Concepts fondamentaux

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Système	8
1.3	Défauts et défaillances	8
1.4	Les différents types d'erreurs et leur origine	9
1.4.1	Erreurs systématiques	9
1.4.2	Erreurs accidentelles	10
1.5	Réconciliation de données	12
1.6	Notion de redondance	15
1.6.1	Redondance matérielle	15
1.6.2	Redondance analytique	15
1.7	Diagnostic et surveillance	16
1.8	DéTECTABILITÉ et ISOLABILITÉ	16
1.9	Diagnostic à base de modèles	16
1.10	Diagnostic à base de modèles analytiques	17
1.10.1	Principe du diagnostic à base de modèles analytiques	17
1.10.2	Test de cohérence	20
1.10.3	Principales méthodes de diagnostic à base de modèles analytiques	21

1.11	Modèle incertain et approche bornante	25
1.12	Analyse ensembliste	28
1.13	Arithmétique des intervalles	30
1.13.1	Définitions et notations	30
1.13.2	Opérations logiques sur les intervalles	33
1.13.3	Opérations arithmétiques sur les intervalles	34
1.13.4	Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles	35
1.13.5	Fonction réelle et domaines de définition	35
1.13.6	Fonction d'inclusion	36
1.13.7	Inversion ensembliste	39
1.14	Résolution d'un système d'équations intervalles linéaires . . .	42
1.14.1	Prétraitement et préconditionnement d'un système linéaire . . .	45
1.14.2	Contraction et consistance d'un CSP	47
1.14.3	Contracteurs à point fixe	48
1.14.4	L'élimination de Gauss par intervalle	51
1.14.5	Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés	52
1.15	Conclusion	53

1.1 Introduction

Une des tâches les plus importantes en conduite des procédés est l'extraction de l'information à partir des données acquises sur le processus, dans le but d'évaluer ses performances et, le cas échéant, d'élaborer une stratégie de conduite optimale. Si cette information est erronée, toute décision prise conduit à établir une commande inadaptée. La validation de données est une phase qui se situe entre la phase d'acquisition de ces données et celle de prise de décision. On appelle donc « validation de données » l'action de générer une information, représentant une grandeur physique (estimation), qui sera considérée comme crédible par les traitements ultérieurs. Cette estimation de la grandeur physique sera réalisée à partir de différents signaux issus, soit de capteurs mesurant cette grandeur, soit de modèles générant une estimée de celle-ci. La nécessité de la validation de données est justifiée par les deux raisons suivantes :

- il est nécessaire d'améliorer la qualité des informations traitées de façon à augmenter la sûreté de fonctionnement des systèmes par une meilleure connaissance de son état.
- sur le plan économique, on peut tirer des bénéfices substantiels lors de l'emploi d'un dispositif de validation des données par une meilleure connaissance de la qualité des produits fabriqués.

La validation des données peut être réalisée « en ligne » ou « hors ligne ». Dans le traitement hors ligne, les données du procédé sont validées après leur acquisition pendant un certain temps. Les résultats de validation offrent alors un jeu de données fiables pour les études de simulation ou d'optimisation et permettent un meilleur suivi du fonctionnement de l'installation. Dans le cas de l'approche en ligne, les données du procédé sont validées à des intervalles de temps réguliers (toutes les heures, toutes les 10 minutes,...) et ceci au fur et à mesure de leur acquisition. Grâce à la validation, les ingénieurs et les opérateurs sont en mesure d'améliorer le fonctionnement de leur installation grâce à une meilleure utilisation des mesures (permettant un fonctionnement plus proche des spécifications), de détecter rapidement le biais ou la dérive d'un capteur, de façon plus générale de détecter la dégradation des performances d'un équipement.

La procédure de validation de données comporte les étapes suivantes :

- tester l'adéquation des mesures réelles, par rapport au modèle du système (phase de détection et de localisation de défauts).
- corriger a posteriori les mesures de façon à vérifier les contraintes du modèle du système.
- déduire, lorsque cela possible, la valeur des grandeurs non mesurées ainsi que leur intervalle de confiance.

1.2 Système

Un système est un ensemble structuré d'éléments (composants, constituants) interconnectés physiquement entre eux ou en interaction à partir de relations fonctionnelles. La notion de système est très générale puisqu'elle s'adresse aussi bien à des ensembles physiques qu'à des éléments plus abstraits comme des équations mathématiques. Dans le cadre du diagnostic, les termes système et système physique désignent tout particulièrement l'installation à surveiller. Suivant les auteurs, le terme système désigne soit l'installation complète, soit se restreint à l'ensemble des éléments commandés, c'est-à-dire à l'installation privée de ses organes de commande, de ses capteurs et de ses actionneurs ; dans ce cas, pour plus de concision, nous parlerons de système commandé.

1.3 Défauts et défaillances

De manière générale, un défaut correspond à une déviation du comportement normal du système, de son unité de commande ou de son système d'instrumentation. Selon [BJL⁺90] et [Ger88] plusieurs types de défauts peuvent être définis :

- Les défauts de capteur : ils se caractérisent par un écart entre la valeur vraie de la grandeur et sa mesure.
- Les défauts à effets additifs de système : ils correspondent par exemple à des entrées inconnues agissant sur le système. En présence d'un tel défaut, les grandeurs de sortie du système varient indépendamment des entrées connues.
- Les défauts à effets multiplicatifs : ils correspondent à des modifications des paramètres du modèle représentant le système. Ils engendrent des variations des sorties du système dont l'amplitude dépend de la valeur des entrées connues. Ce type de défauts permet une bonne représentation de la détérioration des installations.
- Les défauts d'actionneurs : ils se traduisent par une incohérence entre les commandes d'un actionneur et sa sortie.

La sévérité constitue une caractéristique essentielle des défauts. La classification par ordre croissant d'importance du niveau de dégradation a été proposée par [BJL⁺90] comme suit :

- défaut naissant.
- défaut passager.
- défaut permanent.
- défaut catastrophique.

Un défaut peut engendrer différents états de fonctionnement d'un système. Les termes « détérioration », « défaillance » et « panne » ont été introduits pour caractériser ces différents états de fonctionnement. La détérioration d'un système sous-entend une perte de performance. Une défaillance correspond à l'altération ou la cession de l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise. Ainsi, un défaut est considéré comme défaillance à partir du moment où il a des effets néfastes sur le fonctionnement du système. Diverses classifications des défaillances sont proposées par [Zwi95]. Une panne implique l'arrêt ou le non-fonctionnement du système ou d'un de ses éléments. La défaillance se différencie donc d'une panne dans le sens où elle n'entraîne pas forcément un arrêt de la fonction mais provoque seulement un dysfonctionnement. En somme, les concepts de détérioration, défaillance et panne sont progressifs en terme d'état de fonctionnement du système.

1.4 Les différents types d'erreurs et leur origine

Lors de la conception d'un capteur, on s'efforce, dans un souci de simplicité, d'établir une relation linéaire entre les variations Δs de la sortie et celles Δm de l'entrée [Asc82] :

$$\Delta s = S \Delta m$$

où S désigne la sensibilité du capteur. Notons que la constance de la sensibilité doit dépendre le moins possible de l'amplitude de la grandeur à mesurer, de la variance de cette grandeur, du temps et de l'action d'autres grandeurs physiques de son environnement qui ne font pas l'objet de la mesure comme la température, la pression, l'humidité, les champs magnétiques et la tension d'alimentation du capteur.

En général, les valeurs des grandeurs ne peuvent être connues qu'après traitement par une chaîne de mesure. La différence entre la valeur mesurée et la valeur vraie constitue l'erreur de mesure. Pratiquement, on ne peut obtenir qu'une estimation de cette erreur, la valeur vraie ne peut donc être connue. Les erreurs de mesure peuvent être systématiques ou accidentelles [RDMB90]. Dans certains cas, ces erreurs peuvent être modélisées au moyen de fonctions de répartition.

1.4.1 Erreurs systématiques

L'erreur systématique affectant une grandeur à mesurer est soit constante (biais), soit à variation lente par rapport à la durée de mesure (dérive). Elle introduit donc une différence entre valeur vraie et valeur mesurée. Les causes les plus fréquentes de ce type d'erreur sont :

Erreur sur la valeur d'une grandeur de référence

Ces erreurs sont absolues, indépendantes de la valeur à mesurer (mais pas du temps). La variation de celles-ci dans le temps est appelée dérive. Elles ne sont pas décelables par répétition des mesures d'une même grandeur, mais peuvent l'être par comparaison de mesures obtenues par des moyens différents, comme par exemple, un décalage de zéro, une valeur inexacte de la tension d'alimentation d'un pont, etc.

Erreur sur la sensibilité ou la courbe d'étalonnage

Ces erreurs dépendent de la grandeur à mesurer. Elles peuvent aussi dériver au cours du temps. L'opération d'étalonnage, résultant elle-même d'un ensemble d'opérations expérimentales, est entachée d'erreurs qui affectent les résultats des mesures ultérieures, de manière systématique.

Erreur due aux modes ou aux conditions d'emploi

Il peut s'agir d'erreur de rapidité (mesure effectuée avant que ne soit établi le régime permanent au sein de l'appareil de mesure), d'erreur de finesse (la présence du capteur perturbe la grandeur à mesurer) ou de l'inadéquation entre l'instrument de mesure et la grandeur à mesurer.

Erreur dans l'exploitation de données brutes de mesure

Ces erreurs résultent d'une appréciation erronée des corrections à apporter aux résultats bruts de la mesure, afin d'en obtenir une image plus juste.

1.4.2 Erreurs accidentelles

L'apparition de ces erreurs, comme leur amplitude et leur signe est considérée comme aléatoire. Les principales causes de ces erreurs sont :

L'indétermination intrinsèque des caractéristiques instrumentales

On distingue plusieurs erreurs liées aux indéterminations intrinsèques des caractéristiques instrumentales, on peut citer :

- les erreurs de mobilité, telles que les valeurs des variations de l'excitation n'entraînent pas de variations décelables du signal de sortie au delà d'une certaine valeur.
- les erreurs d'hystérésis (exemple : la réponse d'un capteur à une excitation dépend des conditions d'utilisation antérieures).

- les erreurs de quantification (attribution d'une valeur unique à l'ensemble de valeurs analogiques lors de la conversion analogique numérique).

La prise en compte de signaux parasites de caractère aléatoire

Parmi ces erreurs, on peut noter les bruits de fond produits par l'agitation thermique des porteurs de charge, les inductions parasites dues aux rayonnements électromagnétiques et à la fluctuation de tension des sources d'alimentation modifiant les performances des appareils de mesure, etc...

Dans l'ouvrage [NJ00], Narasimhan classe les erreurs en deux catégories : les erreurs aléatoires et les erreurs déterministes.

Les erreurs aléatoires impliquent que ni l'amplitude ni le signe des erreurs ne peuvent être prévus avec certitude. Elles correspondent habituellement aux composantes à haute fréquence d'un signal mesuré. Leurs amplitudes sont normalement petites sauf quelques transitoires occasionnels. En d'autres termes, si la mesure est répétée avec le même instrument et dans des conditions identiques, une valeur différente est obtenue à chaque expérience. Ces erreurs ne peuvent pas être complètement éliminées et sont toujours présentes dans toute mesure. La seule méthode permettant de caractériser ces erreurs est celle utilisant les lois de distribution et de probabilité des erreurs. Les erreurs accidentelles mentionnées précédemment ne sont donc qu'une partie de ce type d'erreur.

Les erreurs déterministes ont une amplitude et un signe qui peuvent être inconnus. Ainsi, si la mesure est répétée avec le même instrument et dans les mêmes conditions, la contribution d'une erreur à la valeur à mesurer sera identique. Les erreurs systématiques mentionnées précédemment constituent une partie de ce type d'erreur.

Comme mentionné précédemment, les erreurs dans les données mesurées peuvent amener à appliquer une mauvaise commande sur le système. Cela dégrade la performance de ce système et, dans certains cas, engendre un mauvais fonctionnement. Pour éviter ces problèmes, il est nécessaire de réduire ou d'éliminer complètement, l'effet des erreurs sur le système. Plusieurs techniques peuvent être employées pour atteindre cet objectif. Dans ce document, nous allons développer des méthodes basées sur deux techniques. La première s'appuie sur la génération de résidus et l'utilisation d'une table de signature qui permet de traiter les erreurs déterministes (on détecte et localise les erreurs puis on corrige a posteriori les mesures affectées par ces erreurs). La deuxième technique est basée sur la réconciliation de données, cette technique permet de traiter les erreurs aléatoires.

1.5 Réconciliation de données

La réconciliation de données est une technique qui vise à améliorer la qualité des données issues de l'instrumentation, qui sont sujettes à des erreurs de différents types comme décrit dans le paragraphe précédent, en réduisant l'effet des erreurs aléatoires. Bien évidemment, les recherches dans le domaine du traitement du signal ont mené à la conception des filtres analogiques et numériques qui peuvent être utilisés pour diminuer l'effet des erreurs aléatoires (bruit) sur les mesures. La différence principale entre la réconciliation de données et les autres techniques de filtrage est que la réconciliation de données se sert des contraintes du modèle du système de manière explicite et permet d'obtenir une estimée des variables d'état du système en ajustant les mesures du système de sorte que cette estimée satisfasse les contraintes du modèle. La réconciliation de données consiste ainsi à corriger a posteriori les mesures (les données) de façon à ce qu'elles vérifient les équations de contraintes représentant le système. Les données réconciliées offrent donc une image plus juste de l'état du système. Un autre avantage de la réconciliation de données provient de la possibilité de fournir une estimation de certaines grandeurs non mesurées à cause de raisons économiques ou technologiques.

Mathématiquement, la réconciliation de données peut être formulée comme étant un problème d'optimisation quadratique sous contraintes :

$$\begin{aligned} \min_{x_i} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - x_i)^2 \\ g_k(x_i, u_j) = 0 \quad k = 1 \dots m \end{aligned}$$

La fonction objectif définit la somme quadratique pondérée des ajustements des mesures y_i , où w_i dénote le poids qui peut être choisi selon l'imprécision des mesures, x_i l'estimée des variables mesurées et u_j l'estimée des variables non mesurées.

L'équation $g_k(x_i, u_j) = 0$ définit les contraintes du modèle du système. Ces contraintes sont généralement des bilans matière et énergie, mais pourraient s'étendre à des relations d'inégalité imposées par le bon fonctionnement du système. Les lois déterministes de la conservation de la masse ou de l'énergie sont typiquement employées comme contraintes pour la réconciliation de données parce qu'elles sont habituellement connues de façon exacte. Les équations empiriques ou d'autres types d'équations contenant plusieurs paramètres non mesurés ne sont pas recommandées, puisqu'elles sont connues approximativement. Notons qu'on doit éviter de forcer les variables mesurées à obéir à des relations inexactes pour ne pas obtenir une solution imprécise de la réconciliation de données. La détection des erreurs déterministes est un complément technique de la réconciliation de données et qui sert à éliminer l'effet de ces erreurs. Ainsi, la réconciliation de données et la

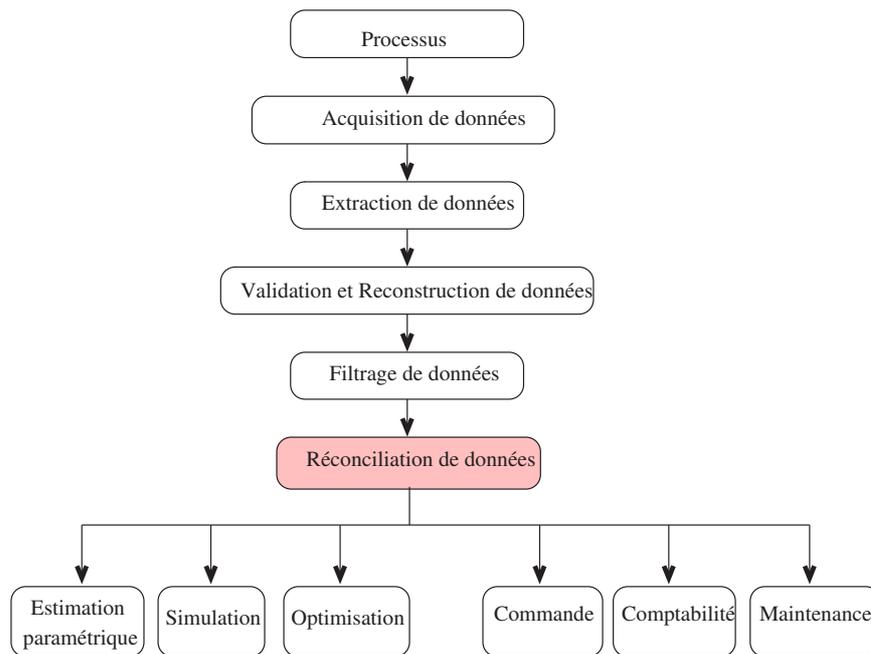


FIG. 1.1 – Collection et conditionnement de données

détection des erreurs déterministes sont appliquées ensemble pour améliorer la pertinence des données mesurées. Notons que certains auteurs ont montré que la réconciliation de données est, sous certaines conditions, équivalente à la correction des erreurs [KLT03].

La réconciliation de données en vue de la réduction des erreurs peut être appliquée aux processus industriels en tant qu'élément d'une stratégie intégrée que l'on appelle conditionnement de données ou rectification de données [NJ00]. Le schéma 1.1 illustre les diverses opérations qui peuvent être mises en œuvre au cours du conditionnement des données. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la validation et à la réconciliation de données.

Le problème de la réconciliation de données a été considéré la première fois par [KD61] qui ont résolu ce problème pour les systèmes linéaires, dans le cas où toutes les variables d'état sont mesurées et en utilisant les multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les contraintes. De nombreux travaux ont ensuite été effectués, notamment par [Rip65], [Vac69], [MBR91], [NJ00], [ADMR04a] tandis que [HCL79], [HMK96], [HDBL03] se sont focalisés sur des applications industrielles de la réconciliation de données. L'article de [MSD76] fut le premier à traiter le problème de la réconciliation de données dans le cas où le système linéaire contient des variables non mesurées. Dans l'article de [CCH83], les auteurs éliminent les variables non mesurées en utilisant une matrice de projection. Le principe de l'analyse par composantes principales a également été récemment employé

pour la réconciliation de données [YSW03].

Le problème de la réconciliation de données est parfaitement maîtrisé et résolu dans le cas des systèmes linéaires et a connu plusieurs extensions : évaluation sur horizon glissant pour les systèmes dynamiques [AMR99], étude de l'influence de la précision des mesures [ALMR96], évaluation simultanée de l'état et des paramètres du système [MMR99], détection des erreurs de grande amplitude [MR91], [NH93]. Dans les articles [Man98], [RMA99], [MR03] les auteurs ont développé des approches basées sur des inégalités.

La réconciliation de données des systèmes non linéaires a été prise en compte la première fois dans l'article de [KG80]. L'approche itérative proposée dans cet article a quelques limitations par rapport à l'approche proposée par [PF88] dans lequel les auteurs utilisent une méthode de linéarisation successive et une matrice de projection pour réconcilier les données des systèmes non linéaires.

La réconciliation de données pour les systèmes dynamiques a également été abordée par plusieurs auteurs. Dans l'article [Alm91] les auteurs traitent le cas dynamique linéaire et emploient des techniques de réconciliation par équilibrage d'état. Plus tard, dans l'article [YY96] les auteurs ont utilisé la technique de la réconciliation de données pour filtrer le bruit de la sortie d'un système dynamique. Dans l'article [LEL92] les auteurs ont utilisé les méthodes d'optimisation sous contraintes non linéaires pour traiter le cas dynamique non linéaire.

Dans le cas des modèles incertains, l'arithmétique des intervalles permet de traiter des variables définies par leur bornes inférieures et supérieures. Cette approche est appelée approche bornante. Dans les articles [BMR98], [ADMR02], [ADMR03a] les auteurs ont développé des méthodes basées sur cette approche en utilisant l'hypothèse de bornitude des erreurs de mesure.

La réconciliation de données et la détection des erreurs déterministes réalisent la réduction des erreurs en exploitant seulement la propriété de redondance des mesures. Les variables d'état de n'importe quel système sont reliées entre elles par des contraintes physiques telles que des lois de conservation de matière ou d'énergie. Ces contraintes étant connues, un nombre minimum de mesures est alors nécessaire afin de calculer tous les paramètres et variables de système. S'il y a plus de mesures que ce minimum, alors la redondance existant dans les mesures peut être exploitée. Le principe premier de la réconciliation de données réside donc dans l'utilisation de la redondance générée par le système « mesures + modèle » comme source d'information pour la correction a posteriori des mesures. Dans le paragraphe suivant, on exprime la notion de redondance et ses différents

types.

1.6 Notion de redondance

La redondance est une notion essentielle des techniques de diagnostic. Le terme redondance est utilisé ici pour traduire la possibilité de connaître la valeur d'une variable de différentes manières. Le niveau de redondance s'apparente au nombre de degrés de liberté d'un système (nombre de degrés de liberté = nombre de variables - nombre d'équations (contraintes)). Si le nombre de mesures dépasse le nombre de degrés de liberté, le système devient donc redondant et le nombre (degré) de redondances peut se définir par la différence entre le nombre de mesures et le nombre de degrés de liberté. Deux types de redondance peuvent être distingués : la redondance matérielle et la redondance analytique.

1.6.1 Redondance matérielle

Pour s'assurer de la validité d'une mesure, une première approche consiste à mesurer, à l'aide de différents capteurs, la même grandeur physique, d'où le nom « redondance matérielle ». Ensuite, les valeurs obtenues sont directement comparées deux à deux [BJL⁺90]. Une différence entre deux mesures, supérieure à un seuil, est révélatrice de la présence d'un défaut. La redondance matérielle a été très couramment employée dans les domaines à haut niveau de risque, notamment dans le cas de l'aéronautique, l'aérospatial ou le nucléaire. Cette méthode a pour avantage d'être relativement fiable et simple à mettre en œuvre. Par contre, elle s'avère très coûteuse et peut poser des problèmes de surcharge et d'encombrement matériel. En outre, le champ d'application de la redondance matérielle se limite essentiellement aux défauts de capteurs, très peu d'applications pratiques autorisent la redondance matérielle d'actionneurs.

1.6.2 Redondance analytique

La redondance analytique est basée sur l'exploitation des relations analytiques liant différentes grandeurs mesurées d'un système en fonctionnement normal. Ces relations, ne faisant intervenir que des grandeurs mesurées, sont appelées relations de redondance analytique. Celles-ci peuvent être issues de l'expression mathématique de lois physiques ou peuvent être déduites d'une analyse statistique des mesures. Ces relations sont utilisées pour vérifier la cohérence des mesures vis-à-vis du modèle du système en générant des signaux indicateurs de défauts, dont la valeur est révélatrice de la présence de défauts. Sous condition de trouver de telles relations entre les variables mesurées, la redondance analytique permet une exploitation simultanée des informations fournies par les mesures et les modèles disponibles. Cette approche, en contrepartie de calculs supplémentaires,

permet, par rapport à la redondance matérielle, de limiter le nombre de capteurs nécessaires à la surveillance. En plus de limiter le nombre de capteurs nécessaires, la redondance analytique permet d'appréhender des défauts affectant aussi bien la chaîne d'instrumentation que le système commandé ou ses organes de commande puisqu'elle intègre bien plus d'informations que la redondance matérielle.

1.7 Diagnostic et surveillance

Le diagnostic signifie simplement la détermination des composants défaillants au sein d'un système physique. Le principe général du diagnostic consiste à vérifier la cohérence entre un comportement observé et un comportement attendu. Le diagnostic d'un système est effectué à travers la détection, la localisation et l'identification des défauts [Ger98]. La détection de défauts consiste à signaler la présence d'un défaut, c'est-à-dire déterminer si l'état courant du système et de ses éléments est normal ou anormal, en signalant toute déviation par rapport au fonctionnement attendu. Cette tâche est ensuite complétée par celle de localisation qui doit indiquer quel organe ou quel composant est affecté par le défaut. Enfin, la tâche d'identification a pour objet de caractériser le défaut en durée et en amplitude afin d'en déduire sa sévérité. Le diagnostic constitue donc une étape d'une procédure plus complète que nous désignons sous le nom de surveillance. Selon [BJL⁺90] et [CGT93], la surveillance nécessite la mise en oeuvre de nombreuses tâches décrites par la figure 1.2.

1.8 Détectabilité et isolabilité

Les concepts de détectabilité et d'isolabilité ont été introduits pour caractériser la capacité d'une procédure de diagnostic à signaler la présence d'un défaut et indiquer quel composant est en défaut.

1.9 Diagnostic à base de modèles

La procédure de diagnostic à base de modèle cherche à vérifier la conformité des observations, traduisant l'état réel du fonctionnement du comportement du système, vis-à-vis du modèle représentant le comportement attendu. La comparaison des comportements réels et attendus permet de révéler la présence d'éventuels défauts voire même de déduire les éléments affectés par un défaut. Selon la nature des modèles utilisés, les méthodes et outils employés sont évidemment différents. On distingue notamment les modèles fonctionnels et matériels, les modèles qualitatifs et les modèles analytiques. Notre travail s'inscrit

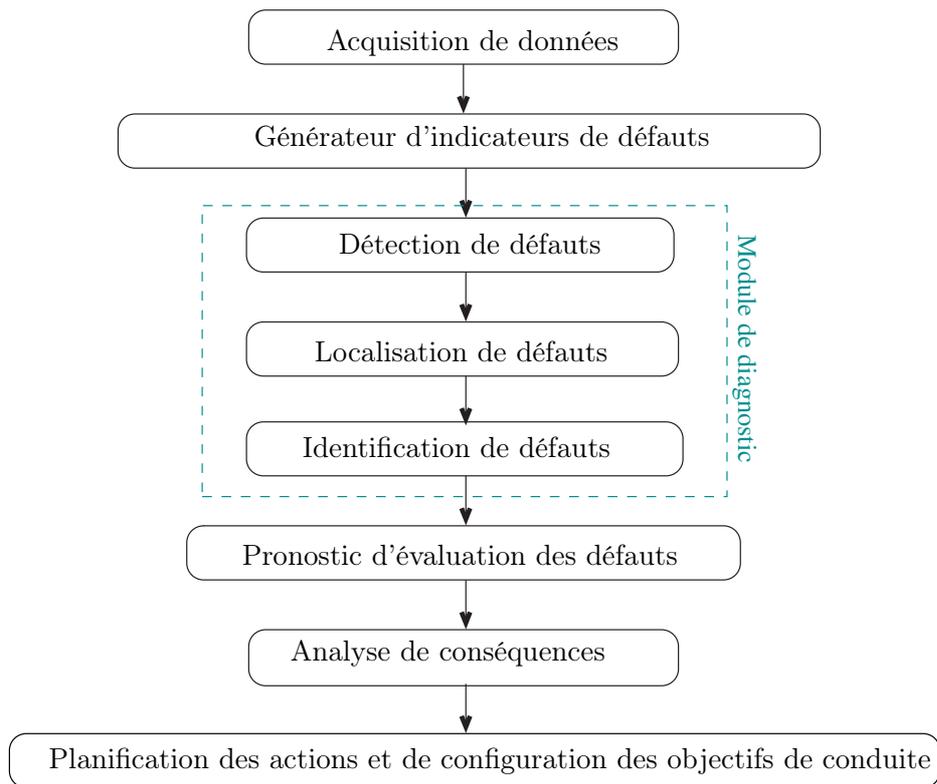


FIG. 1.2 – Modules d'une procédure de surveillance

dans le contexte du diagnostic à base de modèles analytiques. Cette approche est présentée en détail dans le paragraphe suivant. Le lecteur pourra se référer à [IB96] pour des applications industrielles.

1.10 Diagnostic à base de modèles analytiques

1.10.1 Principe du diagnostic à base de modèles analytiques

De nombreux travaux ([Wil76], [Ise84], [Ise97], [VJ97], [Ger88], [Ger91], [CW84], [BN93], [Fra90], [Ham86], [PC91]), [RMAD04], [RMAD03] traitent ce sujet et témoignent de la diversité des approches proposées. Très souvent dans la littérature, seuls les modules de détection et de localisation sont considérés et détaillés. L'opération d'identification est souvent omise ou reléguée aux opérateurs, car elle s'avère alors subsidiaire par rapport aux difficultés qu'elle peut induire. Une procédure de détection et localisation de défauts à base de modèles analytiques peut être décomposée en deux étapes principales désignées sous le nom de « génération des résidus » et « prise de décision » (voir figure 1.3).

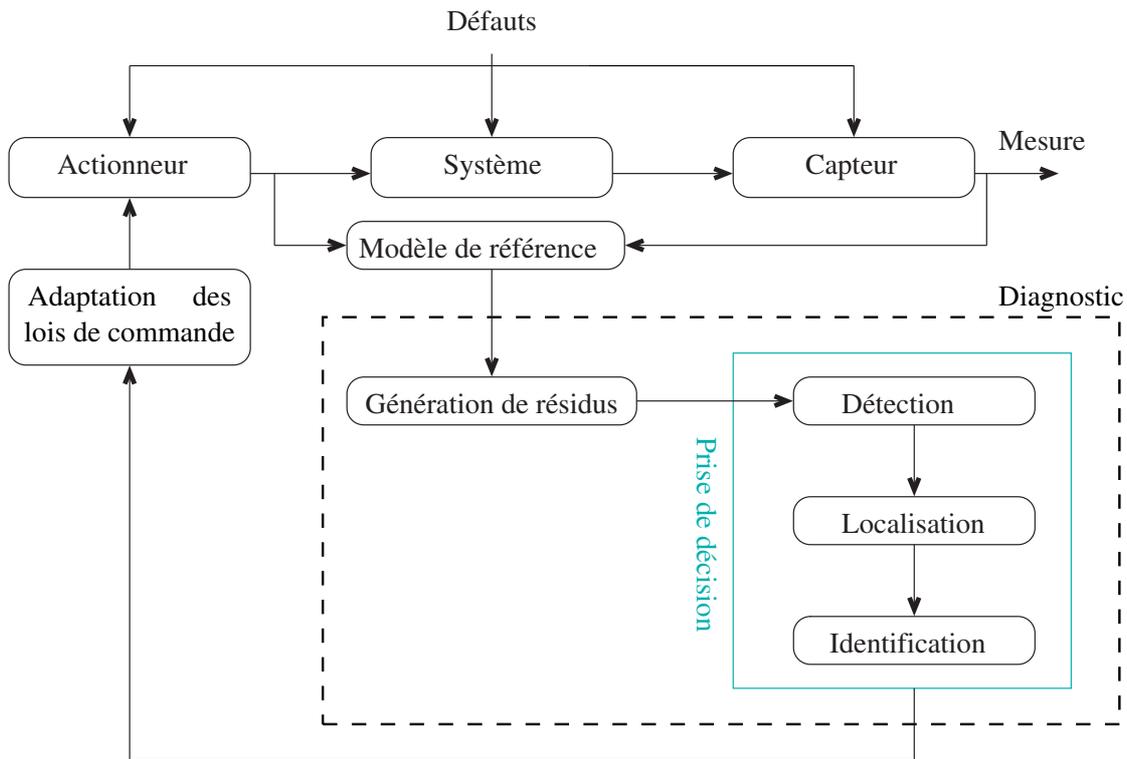


FIG. 1.3 – Etape du diagnostic à base du modèle analytique

La première phase concerne la génération de résidus, grandeurs sensibles aux défauts. Elle correspond principalement à la phase de perception et vise à la mise en évidence d'événements qui affectent l'évolution du système et qui traduisent un changement de situation sans préjuger du fait qu'ils soient normaux ou non. Un résidu est une grandeur obtenue explicitement à partir des mesures issues des capteurs et des signaux de commande du système, soit directement (espace de parité), soit indirectement par l'intermédiaire d'estimées (observateurs d'état, estimation paramétrique). L'expression qui permet le calcul d'un résidu en fonction de mesures est appelée forme de calcul ou forme externe. En fonctionnement normal, un résidu doit être idéalement nul, c'est-à-dire indépendant du point de fonctionnement courant. En pratique, il est différent de zéro car il dépend implicitement des perturbations liées à l'environnement, des erreurs de modélisation et bien sûr des défauts. La relation liant le résidu à ces différentes grandeurs est appelée forme d'évaluation ou forme interne. La distinction entre formes de calcul et d'évaluation résulte simplement de la séparation de l'expression analytique d'un résidu en deux parties, l'une parfaitement connue et facile à calculer numériquement, l'autre dépendant des incertitudes modélisant les diverses perturbations agissant sur le système et des défauts à diagnostiquer figure 1.4.

La seconde étape d'un module de diagnostic à base de modèle analytique est appelée prise de décision et regroupe :

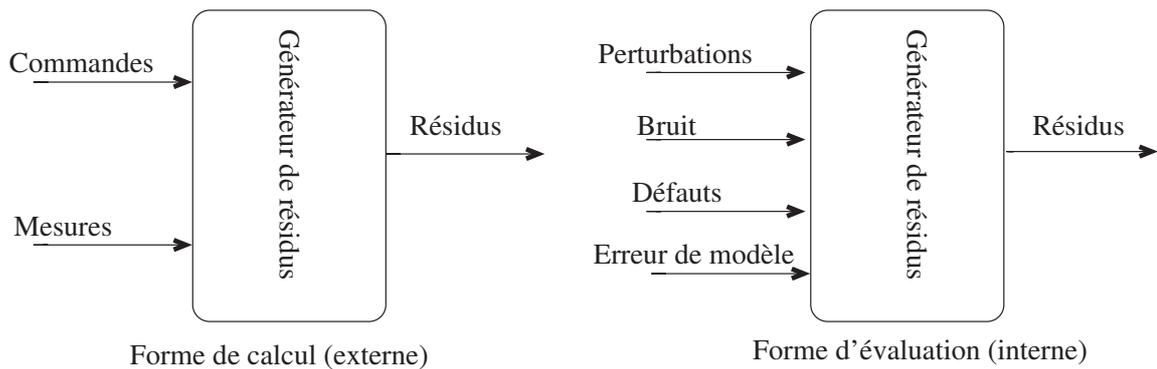


FIG. 1.4 – Forme de calcul et d'évaluation des résidus

- tout particulièrement, les procédures de détection et de localisation qui concernent l'analyse des comportements pour distinguer ceux qui sont anormaux et la détermination précise du composant incriminé.
- puis, dans une moindre mesure, la procédure d'identification qui consiste à déterminer l'instant d'apparition du défaut, à le quantifier en estimant sa durée et son amplitude, ainsi qu'à en comprendre l'origine.

La présence de plusieurs défauts simultanés dans un ensemble de données rend cette étape plus difficile, car un résidu peut être sensible à plusieurs défauts, ce qui peut entraîner une confusion sur la localisation de ces défauts. Une façon d'améliorer la décision concernant cette localisation consiste à générer des résidus qui ne sont sensibles qu'à un sous-ensemble particulier de défauts, d'où le nom « résidus structurés » [Ger91].

Les sous-ensembles de défauts permettent de structurer une table de signature appelée également matrice d'incidence ou matrice de signatures théoriques de défauts (cette matrice est construite en se basant sur l'hypothèse que si un résidu dépasse un seuil donné, la valeur booléenne « 1 » sera associée à ce résidu. Par contre, si le résidu ne dépasse pas le seuil, on lui associera la valeur booléenne « 0 »). Ces signatures traduisent l'influence des défauts sur les résidus. Pour que tous les défauts puissent être détectés, aucune colonne de la matrice des signatures théoriques de défauts ne doit être nulle, et pour que tous les défauts puissent être localisés, toutes les signatures théoriques doivent être distinctes. On peut distinguer trois cas pour une matrice d'incidence :

- non localisante : une colonne est nulle ou deux au moins sont identiques.
- localisante : les colonnes sont non nulles et distinctes deux à deux, mais différent entre elles par un nombre peu important de composantes.
- fortement localisante : en plus d'être faiblement localisante, aucune colonne ne peut être obtenue à partir d'une autre en remplaçant un "1" par un "0".

r/d	d_1	d_2	d_3
r_1	1	1	0
r_2	1	1	1
r_3	1	1	1

TAB. 1.1 – Signature théorique non localisante : r/d =résidu/défaut

r/d	d_1	d_2	d_3
r_1	1	1	0
r_2	1	0	1
r_3	1	1	1

TAB. 1.2 – Signature théorique faiblement localisante : r/d =résidu/défaut

r/d	d_1	d_2	d_3
r_1	1	1	0
r_2	1	0	1
r_3	0	1	1

TAB. 1.3 – Signature théorique fortement localisante : r/d =résidu/défaut

Dans cette thèse, on valide et on réconcilie les données des systèmes incertains où les incertitudes sont modélisées par des paramètres incertains mais bornés. En supposant que les bornes sont connues et en utilisant l'arithmétique des intervalles, on peut générer des résidus caractérisés par leurs bornes inférieure et supérieure. Ce type de résidu est appelé « résidu intervalle » et en régime de fonctionnement normal tous les résidus intervalles générés doivent contenir la valeur « 0 ». Si un ou plusieurs résidus ne contiennent pas cette valeur, on déclare donc qu'il y a un ou plusieurs défauts dans les données récoltées. Les résidus intervalles structurés sont générés, dans cette thèse, en effectuant la différence entre les mesures et leur estimée intervalle calculée à partir des données saines. Ainsi, chaque résidu est sensible aux défauts d'une seule mesure.

1.10.2 Test de cohérence

Le test de cohérence consiste à vérifier l'adéquation des grandeurs observées ou mesures représentant un comportement observé à un ou plusieurs modèles du système physique faisant office de référence en décrivant un comportement attendu.

Deux classes de méthodes utilisant le principe du test de cohérence sont envisagées. La première, appelée procédure de bon fonctionnement, utilise un modèle décrivant un comportement normal du système. Classiquement, une incohérence comportementale est révélée lorsque les résidus sortent d'un voisinage de zéro ou que les paramètres identifiés dérivent anormalement. Il faut souligner que pour ce type de stratégie, c'est l'incohérence

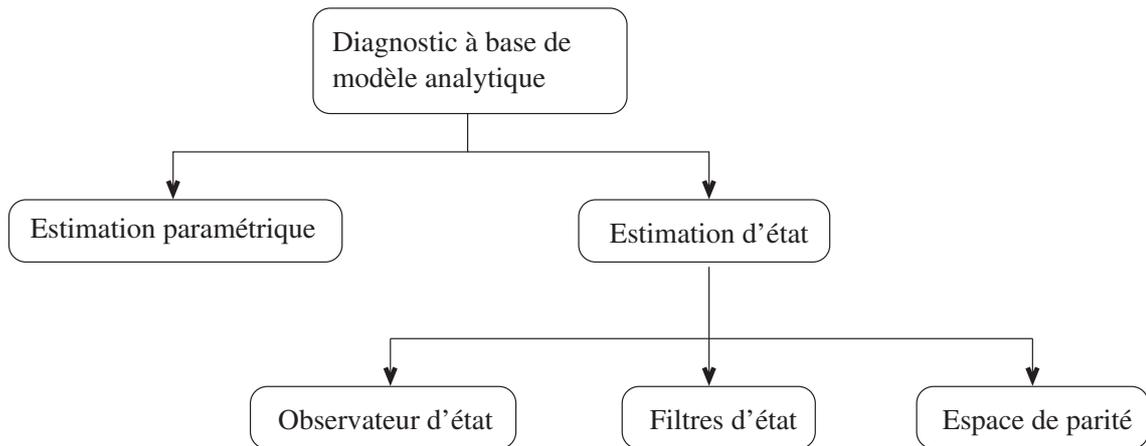


FIG. 1.5 – Méthodes utilisées en diagnostic à base de modèles analytiques

entre le comportement observé du système et celui attendu qui est étudié plutôt que la cohérence.

La seconde classe de méthodes correspond aux procédures orientées mauvais fonctionnement. Plus particulièrement adaptées à la localisation de défauts, elles sont nécessairement dédiées aux anomalies dont un modèle a pu être développé, ne serait-ce qu'en termes de modifications de certaines caractéristiques d'un résidu ou, de manière plus détaillée, sous forme de modèles analytiques. En effet, disposer d'un modèle pour chaque défaut pouvant survenir sur un système physique est pratiquement irréalisable. De ce fait, il est nécessaire de construire avant tout une première procédure orientée bon fonctionnement permettant, après détection, de déclencher la procédure mauvais fonctionnement dédiée à des anomalies particulières. La cohérence entre les observations et un modèle de mauvais fonctionnement conduit à conclure à la présence du défaut représenté par le modèle. Néanmoins, ne possédant pas une représentation complète de toutes les anomalies possibles, il est possible que se produise un défaut non modélisé induisant, soit des incohérences vis-à-vis de tous les modèles de mauvais fonctionnement, auquel cas la procédure de localisation est mise en défaut, soit au contraire une cohérence se traduisant par une localisation erronée.

1.10.3 Principales méthodes de diagnostic à base de modèles analytiques

On peut distinguer deux types de méthodes pour le diagnostic à base de modèle analytique : l'estimation paramétrique et l'estimation d'état (voir figure 1.5).

1.10.3.1 Estimation paramétrique

Les méthodes d'estimation paramétrique ont pour principe d'estimer les paramètres du modèle. La technique la plus connue est celle des moindres carrés et ses multiples extensions. Elle a été notamment utilisée par [RGB95] dans le cas d'une machine synchrone. Afin de traiter les systèmes non-linéaires, certaines méthodes comme la méthode des moments partiels ré-initialisés [Tri87], [KCT95], utilisent la discrétisation des équations différentielles et la linéarisation par rapport aux paramètres à identifier. Ce qui permet ensuite d'appliquer des techniques classiques d'estimation en ligne comme les moindres carrés. D'autres méthodes proposent l'utilisation du filtre de Kalman étendu [ZL87], [AM79], [AAF89], [LL93], permettant l'estimation de certains paramètres du modèle en plus des composantes du vecteur d'état. En règle générale, les résidus proviennent de la différence entre les valeurs connues des paramètres et leurs estimées (voir figure 1.6). Cette technique est particulièrement intéressante dans le cas de défauts intervenant sur les paramètres eux-mêmes [HP94] et [HI96]. D'autres approches peuvent être utilisées, citons en particulier l'estimation Bayésienne et l'estimation au sens du maximum de vraisemblance.

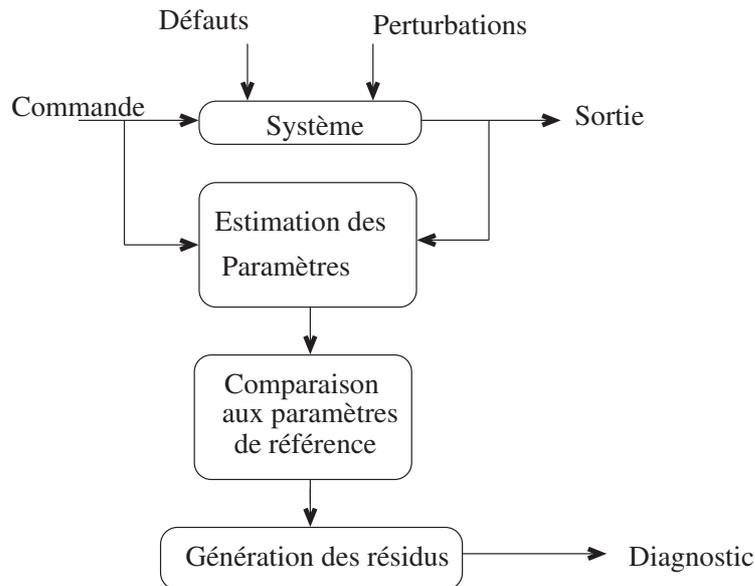


FIG. 1.6 – Estimation paramétrique [Fra96]

1.10.3.2 Estimation d'état

La seconde catégorie de méthodes regroupe les méthodes reposant sur l'estimation d'état et se subdivise en trois familles distinctes : l'espace de parité, les observateurs d'état et les filtres.

Espace de parité

Par définition, l'espace de parité est un espace dans lequel tous les éléments sont des résidus, c'est-à-dire de valeur statistiquement nulle en l'absence de défauts. Dans le contexte de cette approche, le terme vecteur de parité est souvent employé pour désigner le vecteur des résidus et les relations utilisées pour générer les résidus sont appelées relations de parité. Les relations de parité sont des relations comportementales statiques ou dynamiques existant entre grandeurs mesurées. Cette approche a été initialement proposée dans le cas d'une redondance matérielle par [EW70], puis développée pour les systèmes statiques (espace de parité) par [PS77]. Ce type de redondance est appelé « redondance analytique directe » [BJL⁺90] et a tout d'abord été utilisée en complément de la redondance matérielle, et ce particulièrement dans le milieu aéronautique [PS77], [DGH79], [DDD79]. Malheureusement, des relations algébriques entre mesures obtenues à un même instant ne permettaient d'effectuer que la surveillance de capteurs, ce qui incita bon nombre de chercheurs à s'intéresser à des méthodes plus sophistiquées et fut à l'origine de l'essor de la redondance temporelle pour les systèmes dynamiques (espace de parité généralisé) [DDDW77], [Mir79], [Lou82], [LWV86], [CW84], [Ham86]. Citons aussi le travail de [MVV88] qui démontre que la taille minimale de la fenêtre d'observation temporelle correspond à l'ordre de la partie observable du modèle d'état et donne une méthode permettant d'obtenir des résidus qui ne dépendent que de la mesure d'un seul capteur (SSPR ou Single Sensor Parity Relation) ou d'une seule entrée (SAPR ou Single Actuator Parity Relation). [CZ90] étend la notion d'espace de parité généralisé dans le cas stochastique en utilisant en plus des mesures, une prédiction de l'état du système à l'aide d'un filtre de Kalman. [GS90] proposent de générer des résidus orthogonaux à certains défauts ; l'amplitude d'un ensemble spécifique de résidus dits structurés va augmenter en présence d'un défaut donné. Le problème d'optimisation de ces résidus se traite à l'aide des valeurs et vecteurs propres généralisés. [SCC93] et [CSC95] généralisent ce problème à l'aide de fonctions de sensibilité aux défauts et aux entrées inconnues. [CCS97] s'intéressent notamment à l'influence de la taille de la fenêtre temporelle des relations de parité sur la qualité des résidus déterminés, c'est-à-dire sur la valeur du critère d'optimisation. Enfin, certains auteurs se sont penchés sur les liens existant entre la génération de résidus par espace de parité et par observateurs d'état, et démontrent un certain degré d'équivalence [Mas86], [SCC91], [Sta91], [Fra89], [PFC89].

Observateur d'état

Cette approche s'appuie sur une bonne connaissance du modèle et de ses paramètres. Dans le cas des systèmes linéaires, la structure de base des reconstitueurs est toujours la même à savoir celle de l'observateur proportionnel [Kai80]. Un modèle parallèle, corrigé à l'aide de l'erreur d'estimation multipliée par un gain adéquat, est élaboré. Ce gain est

souvent calculé par placement de pôles, ce qui permet d'imposer la dynamique désirée. Une notion essentielle, qui n'apparaît pas dans l'approche par Espace de Parité, est la stabilité de l'observateur, c'est-à-dire la faculté de l'estimée à pouvoir converger vers la vraie valeur. L'état inconnu du système est reconstruit en se recalant à l'aide de certaines mesures, le gain de l'estimateur dépendant des objectifs et des performances désirées. Le but est de créer, à partir de l'estimation des mesures, des résidus qui seront testés afin de détecter une rupture à l'aide de diverses techniques : reconnaissance de formes, analyse discriminante floue, arbres logiques, systèmes experts. Dans cette approche, les résidus correspondent à l'erreur de prédiction de l'observateur d'ordre plein ou réduit [CFW75] ou encore à l'erreur d'innovation d'un filtre de Kalman [WDC75]. L'un des avantages de ces techniques de génération de résidus est la possibilité de construire des batteries d'observateurs pour assurer l'isolabilité des défauts. Chaque observateur est conçu de façon à générer un résidu ou un sous-ensemble de résidus sensibles à une situation particulière de défaut [Fra87], [Fra90], [Cla78]. Le schéma fonctionnel d'un observateur générateur de résidus est représenté sur la figure 1.7.

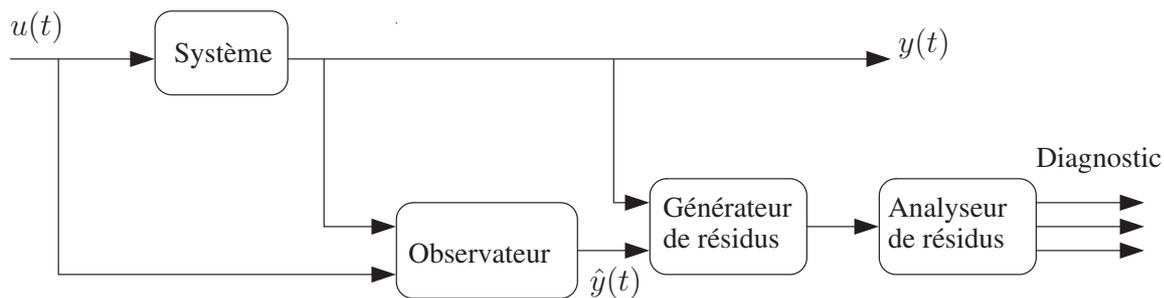


FIG. 1.7 – Schéma fonctionnel d'un observateur générateur de résidu

Signalons que dans cette approche plusieurs types d'observateurs sont construits. Citons parmi ces observateurs, les observateurs à entrées inconnues [WH82], [Fra89], les observateurs à dynamique imposée par la méthode « eigenstructure assignment » [PFC89], [PC91], [Mas86] et les observateurs à mémoire finie [Nun97].

Récemment, une autre approche, concernant le diagnostic des systèmes incertains, en s'appuyant sur l'arithmétique des intervalles, a permis la synthèse d'observateurs intervalles. Ce type d'observateurs est capable d'estimer complètement ou partiellement le vecteur d'état ou de sortie du système sous forme intervalle; il est ensuite possible de générer des résidus intervalles. Parmi les travaux qui ont été développés dans ce sens, on peut citer [HSG01, RG03].

Filtres d'état

Comme les observateurs qui s'adressent à un contexte déterministe, les filtres utilisent une formulation similaire du problème d'estimation et s'appuient sur des modèles stochastiques. Cette approche comprend différents problèmes d'estimation de l'état du système, qui dépendent de la position de l'instant courant t par rapport à la fenêtre temporelle d'observation $[t_0, t_f]$. Les filtres sensibles aux défauts peuvent être considérés comme des observateurs particuliers dont les gains sont fixés de manière à ce que le vecteur des résidus, c'est-à-dire le vecteur des erreurs de prédiction, prenne une direction particulière pour chaque situation de défaut. Les premiers résultats concernant les filtres sensibles aux défauts FDF (Failure Detection Filter) sont dus à [Bea71] et [Jon73], puis une généralisation a été proposée par [Mas86].

1.11 Modèle incertain et approche bornante

Pour introduire le concept de modèle incertain, nous allons présenter un exemple simple connu par tous : la loi d'Ohm. Par définition, elle précise que le courant I traversant

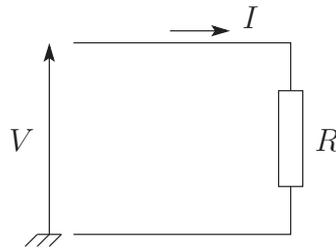


FIG. 1.8 – Loi d'Ohm

sant une résistance de valeur nominale R_0 et la tension V à ses bornes sont proportionnels selon la relation $V = R_0 I$. En supposant que la chaîne d'instrumentation est parfaite, alors les véritables valeurs I et V du courant et de la tension, appelées valeurs vraies, sont mesurées sans erreur. En notant I_m et V_m les mesures respectives de I et V , la relation proportionnelle précédente devient : $V_m = R_0 I_m$. Ce modèle est déterministe dans la mesure où à une valeur I_m du courant correspond une valeur V_m de la tension parfaitement déterminée pour R_0 fixée.

En pratique, à cause de l'impossibilité à produire des composants strictement identiques, les fabricants donnent la valeur R d'une résistance avec une certaine précision technologique σ ($\sigma=5\%$, 10% ...) ce qui signifie que la valeur de R est comprise dans l'intervalle $[R_0(1 - \sigma), R_0(1 + \sigma)]$. De plus, R dépend de la température du composant électrique. L'influence de cette dernière peut être prise en compte en modifiant le modèle

par l'ajout d'une équation supplémentaire faisant intervenir la résistivité de la résistance ; cependant, ce paramètre est généralement mal connu. En conclusion, la valeur R de la résistance est connue avec imprécision et n'a que peu de chance de valoir effectivement sa valeur nominale R_0 à cause des diverses perturbations précitées. Contrairement au modèle déterministe $V = R_0 I$, un modèle incertain permet d'appréhender les perturbations qui l'affectent : nous avons choisi de les représenter par une unique variable incertaine θ_1 :

$$V = RI = (1 + \theta_1)R_0 I \quad \theta_1 \in [-\sigma, +\sigma]$$

Notons que la chaîne d'instrumentation supposée parfaite ne l'est pas en pratique : les véritables valeurs du courant I et de la tension V sont mesurées avec une certaine imprécision. Tout comme pour la résistance, la précision technologique d'un capteur, indiquée par le fabricant, dépend de sa qualité. La modélisation choisie pour représenter le comportement normal des deux capteurs de courant et tension est la suivante :

$$\begin{aligned} I_m &= (1 + \theta_2)I + \theta_3 \\ V_m &= (1 + \theta_4)V + \theta_5 \end{aligned}$$

Les incertitudes paramétriques θ_2 et θ_4 prennent en compte l'imprécision relative des capteurs due par exemple à des non-linéarités comme le phénomène de saturation, alors que θ_3 et θ_5 représentent des bruits aléatoires de capteurs. La nature proprement dite de ces variables sera précisée ultérieurement.

L'exemple présenté précédemment montre bien que lors de la modélisation d'un système, plusieurs modèles peuvent être obtenus selon les hypothèses introduites dans le processus de modélisation et, en conséquence de ces hypothèses, aucun modèle ne peut généralement représenter de manière exacte le système. On doit donc prendre en compte les incertitudes de modélisation. Les incertitudes de modèles se décomposent habituellement en deux catégories : les incertitudes structurelles et les incertitudes paramétriques (modèles constitués de relations comportementales imprécises). Une incertitude (ou, de manière équivalente, un paramètre incertain) est alors une variable dont la valeur ne peut être connue parfaitement, utilisée en vue de formaliser le peu de connaissance disponible associée à une perturbation ou un paramètre. Elle permet ainsi de prendre en considération la méconnaissance que l'on a d'un système en indiquant, dans la représentation associée, qu'à certains endroits subsistent des imprécisions.

Une variable incertaine est donc issue d'une connaissance partielle du système et s'oppose à une variable déterministe, qui est parfaitement définie à chaque instant. Deux approches statistiques permettent d'appréhender des variables incertaines : l'approche probabiliste et l'approche ensembliste [Jau00].

L'approche probabiliste, de loin la plus répandue, consiste à représenter un vecteur x de \mathbb{R}^n par une densité de probabilité ou loi de distribution f , fonction vectorielle vérifiant la propriété suivante :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$$

Cette description génère deux types d'information, d'une part, le support de la variable incertaine, c'est-à-dire l'ensemble de toutes ses valeurs possibles, d'autre part, la façon dont cette variable est distribuée sur son support. Traditionnellement, les incertitudes sont représentées, dans une même relation, par un terme additif unique sous la forme d'un bruit.

L'approche ensembliste [CYL95], [MNPLW96], [Plo98], [Adr00], est plus pauvre que la précédente puisqu'elle ne dispense des informations que sur les frontières délimitant son support. Cependant, la modélisation à l'aide de variables bornées permet de prendre en compte, directement à l'intérieur du modèle, les incertitudes paramétriques. Dans certains cas, l'approche ensembliste est parfaitement adaptée à la prise en compte d'incertitudes de par la nature de la connaissance disponible. Ainsi, sur une chaîne d'instrumentation, les erreurs de mesure sont quantifiées en terme de tolérance ou précision technologique, et non sous forme de loi de distribution. De plus, travailler uniquement sur les supports des variables incertaines, sans tenir compte d'une quelconque loi de distribution, permet d'étudier des systèmes plus complexes. Cette approche s'appuie sur l'analyse par intervalles [Moo79], [Neu90], pour construire des enveloppes (ou des domaines plus complexes tels que des polytopes) tenant compte des plages de variations des incertitudes et permettant de définir les frontières du domaine correspondant à un comportement normal du système. En effet, avec ce type d'approche, un modèle ne définit plus un comportement de référence, mais un ensemble de comportements possibles ou acceptables.

La détermination des bornes des incertitudes paramétriques d'un modèle passe par une étape de caractérisation. Il s'agit de la détermination de l'ensemble des valeurs acceptables des paramètres pour lesquelles le modèle parvient à expliquer le mieux, au sens d'un critère choisi, l'ensemble des observations disponibles [MV96]. Suivant la stratégie et le modèle utilisés, le domaine peut être recherché de manière exacte, ou approché par une forme plus simple. Dans le cas d'un modèle linéaire, le domaine recherché est un polytope convexe. Les premières stratégies proposées consistent à circonscrire le véritable domaine à l'intérieur d'une forme plus simple comme une ellipsoïde [FH82] ou un orthotope [MB82], [FCK99] (dans \mathbb{R}^n , un orthotope est un hyper-rectangle, c'est-à-dire un domaine délimité par $2n$ hyperplans de dimensions $n - 1$ qui sont soit orthogonaux, soit parallèles). Dans le cas où le modèle est statique, le domaine des valeurs acceptables des paramètres reste

un polytope convexe ; en revanche ce domaine devient compliqué dans le cas d'un modèle dynamique et un domaine approché doit être recherché [VN96]. Une technique de pavage peut être utilisée afin d'obtenir une approximation du domaine recherché quelle que soit sa complexité. Dans l'article [APR02] les auteurs se limitent à l'étude de modèles linéaires en les variables bornées, que ce soit des incertitudes affectant les paramètres du modèle ou l'erreur d'équation. Ils supposent que l'erreur additive d'équation appartient à un intervalle tandis que les paramètres fluctuent à l'intérieur d'un domaine borné invariant dans le temps, l'objectif étant de le déterminer selon un critère de précision du modèle.

Dans cette thèse, on s'intéresse uniquement aux systèmes sujets à des incertitudes paramétriques. Pour implémenter une stratégie de validation et de réconciliation de données, ou de façon plus générale le diagnostic, sur de tels systèmes, on s'appuie sur l'approche ensembliste. Cette approche est également connue sous la dénomination d'approche bornante.

1.12 Analyse ensembliste

L'analyse par intervalles a été initialement développée pour tenir compte des imprécisions sur la valeur des nombres. Ces imprécisions peuvent provenir des données issues de la chaîne d'instrumentation qui n'est jamais parfaite comme précisé précédemment. Dans ce cas, l'imprécision est liée à la qualité du capteur (précision technologique indiquée par le fabricant), aux conditions opératoires, à la présence de signaux parasites ou tout simplement d'un défaut (biais systématique, dérive,..., à cause d'un mauvais étalonnage ou d'un encrassement). La seconde source d'imprécision provient de l'outil informatique lui-même. Même si un nombre est parfaitement connu, son codage informatique sous forme d'une série plus ou moins longue de bits est nécessairement fini. Ainsi, un nombre rationnel tel que $1/3$ ne peut être exactement représenté. La valeur réellement utilisée dans les calculs sera un nombre tronqué $0.3333 \dots$ où la quantité de chiffres après la virgule dépend du nombre de bits assurant le codage. De plus, de nombreuses fonctions usuelles sont en réalité calculées à l'aide d'approximations. Dans une série d'opérations (d'instrumentation ou de calcul) l'imprécision entraîne alors une incertitude sur le résultat final. Pour quantifier cette incertitude, on doit savoir comment elle évolue au cours des opérations.

L'ouvrage de référence [Moo66] est le premier dans le domaine de l'analyse par intervalle, suivi de [Moo79]. Plus tard, [Neu90] et [Sha95] développent plus spécifiquement la résolution de systèmes d'équations linéaires ou non-linéaires, tandis que [Han92] s'attache au problème d'optimisation globale, c'est-à-dire la recherche de manière garantie de tous les minimiseurs d'un critère non-connexe, alors que les méthodes plus classiques d'optimisation non-linéaire (Gradient, Newton-Raphson,...) ne renvoient qu'un seul optimum

pouvant n'être que local.

Le principal attrait de l'analyse par intervalles réside dans sa capacité à appréhender les incertitudes sur les paramètres d'un modèle. C'est donc logiquement que cet outil fit son apparition dans le domaine de l'estimation paramétrique. Appelée estimation paramétrique ensembliste, elle repose généralement sur un modèle linéaire en les paramètres et caractérisé par une erreur d'équation bornée. L'objectif consiste alors à déterminer l'ensemble des valeurs acceptables des paramètres, c'est-à-dire cohérentes avec les mesures, le modèle et les bornes de l'erreur d'équation [BS88], [Cer93], [Cer96], [CG88], [FH82], [MV96], [MN88], [MN90], [PLW88], [PLW90]. L'essentiel des travaux portant sur l'approche ensembliste en estimation paramétrique sont regroupés dans l'ouvrage collectif [MNPLW96].

L'utilisation de l'analyse par intervalles dans le cadre du diagnostic s'est récemment développée. Les premiers travaux ont été publiés par [CYL95]. Dans cette publication les auteurs utilisent une variante (*Segment Interval Arithmetic*) de l'arithmétique des intervalles initialement proposée par Moore (1966) pour la détection et la localisation de défauts en s'appuyant sur une approche de type Espace de Parité. Le modèle utilisé repose sur des lois de conservation (masse, énergie,...) et prend en compte explicitement les défauts à diagnostiquer, permettant ainsi de générer, pour chaque anomalie étudiée, des indicateurs servant à déterminer la plus probable d'entre elles. Plus tard [RBM97], proposent une technique ensembliste en vue d'effectuer la détection et la localisation de défauts de capteurs dans le cas d'un modèle statique et linéaire tandis que [AVASH03] et [ADMR03b] traitent le cas dynamique. Des techniques multisignaux [Rip99] ont été utilisées pour établir un diagnostic d'un moteur automobile à partir de la cohérence des signaux capteurs.

Récemment de nombreux travaux, traitant du diagnostic dans le cas de modèles incertains où les incertitudes sont représentées par des variables bornées, ont été publiés [Plo98] et [Adr00]. La stratégie développée dans les articles [ATMVS99], [ATMVDLR99], [Arm99] et [ATMVS00], se fonde sur l'analyse modale par intervalles permettant la construction d'une paire d'enveloppes encadrant l'enveloppe exacte à rechercher. Il est ainsi possible de quantifier, à chaque instant, l'erreur maximale vis-à-vis de l'enveloppe exacte et de l'ajuster en fonction de la précision souhaitée en augmentant la taille de l'enveloppe minorante et en diminuant celle de l'enveloppe majorante. Dans les articles [PSQ99, PQT00] les auteurs proposent une technique d'optimisation globale permettant d'évaluer les enveloppes associées à un modèle intervalle récursif. Celui-ci est défini par une représentation d'état discrète dont les valeurs limites des matrices d'état sont connues, sachant que les incertitudes sont supposées invariantes. L'enveloppe multidimensionnelle obtenue, pour

des raisons de temps de calcul, n'est en fait qu'une approximation du domaine réel.

Notons que l'analyse par intervalles reste peu utilisée et ce quel que soit le domaine de recherche considéré. Le principal inconvénient résulte de la dépendance entre variables bornées que ne peut prendre facilement en compte cet outil, entraînant un effet de majoration (ou d'approximation extérieure) rendant les bornes obtenues pessimistes. Une autre difficulté réside dans les temps d'exécution des algorithmes ensemblistes qui peuvent rapidement s'avérer prohibitifs lorsque le nombre de variables bornées s'accroît.

Dans le cadre de cette thèse, nous ferons abstraction des problèmes liés aux erreurs numériques. Seules les incertitudes portant sur les paramètres de modèle seront prises en compte dans l'élaboration de notre procédure de diagnostic par approche bornante.

1.13 Arithmétique des intervalles

1.13.1 Définitions et notations

Par définition, un intervalle est un ensemble fermé et borné de nombres réels [Moo79], [Neu90]. Si x désigne une variable réelle bornée, alors l'intervalle $[x]$ auquel elle appartient est défini par :

$$[x] = \{x \in \mathbb{R} / \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

où \underline{x} et \bar{x} sont des nombres réels représentant respectivement les bornes inférieure et supérieure de x . On note \mathbb{IR} l'ensemble des intervalles définis sur \mathbb{R} . De manière générale, l'intervalle $[x]$ sera noté : $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ ou $[x] = \langle c([x]); \vec{x} \rangle$, où $c([x])$ représente le centre de l'intervalle et $\vec{x} = (\bar{x} - \underline{x})/2$ son rayon.

Notons que les bornes \underline{x} et \bar{x} peuvent être finies ou infinies, dans le cadre de la modélisation des systèmes, les incertitudes sont d'amplitude finie. Les paramètres physiques tels qu'une résistance ne changent pas de signe et les domaines de bon fonctionnement qui en résultent sont fermés. C'est pour cette raison que nous ne détaillerons plus les problèmes engendrés par des intervalles contenant au moins une borne infinie. Néanmoins, il est utile de savoir qu'une arithmétique des intervalles étendue existe et permet d'appréhender de tels domaines [Did97].

Si une seconde variable réelle y est élément de $[x]$, alors nous noterons : $y \in [x]$. Dans ces conditions, toutes les valeurs possibles de y sont comprises entre les deux bornes sans forcément les atteindre.

Cette notation permet de distinguer la variable bornée x , dont la valeur courante est inconnue et peut fluctuer entre \underline{x} et \bar{x} , de l'intervalle $[x]$ qui est un ensemble parfaitement déterminé. De manière pratique, un domaine d'appartenance ou support peut ainsi être associé à un paramètre, certes inconnu, mais dont les bornes peuvent être appréciées. Ce domaine, représenté sous la forme d'un intervalle, traduit ainsi la notion d'incertitude. Dans la suite de ce document, les variables incertaines seront systématiquement définies en tant que variables bornées. Un autre avantage de l'utilisation des intervalles est que l'évaluation d'une fonction intervalle conduit à un ensemble contenant nécessairement les valeurs recherchées [Jau00]. Notons que représenter le support d'une variable incertaine x par un intervalle $[x]$ ne suppose en aucune façon que la variable considérée est distribuée selon une loi de distribution uniforme f définie par :

$$f(x) = \frac{h(x - \underline{x}) - h(x - \bar{x})}{\bar{x} - \underline{x}} \quad \text{où la fonction d'Heaviside } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, la loi de distribution résultant de la somme ou du produit de deux distributions uniformes n'étant plus uniforme [Plo98], le maniement de variables régies par ces lois serait bien trop complexe. Par conséquent, la seule hypothèse à retenir est que la variable x ne peut prendre que des valeurs appartenant à l'intervalle $[x]$.

Le lien qui existe entre les espaces \mathbb{R} et \mathbb{IR} est défini par la précision minimale que l'on accepte dans un espace d'intervalles.

Définition 1.1 *L'espace des intervalles à précision réelle \mathbb{IR}_ε est défini par :*

$$\varepsilon \in \mathbb{R}, \mathbb{IR}_\varepsilon = \{[x] \in \mathbb{IR} \mid \vec{x} \geq \varepsilon\}$$

Par abus de langage, lorsque la précision est infinie, l'espace d'intervalles utilisé est \mathbb{IR}_0 . La relation entre l'ensemble des réels, celui des intervalles de réels et des intervalles à précision réelle s'exprime par : $\mathbb{R} \in \mathbb{IR} ; \mathbb{IR} = \mathbb{IR}_0$.

La notion d'intervalle peut aisément être étendue au cas d'un vecteur X constitué de n variables réelles $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Le vecteur intervalle $[X]$ contenant X se définit comme suit :

$$[X] = \left[[x_1] \cdots [x_n] \right]^T$$

où chaque intervalle $[x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ est associé à une variable réelle x_i . Prenons le cas d'un vecteur de dimension 2. L'intervalle $[X]$ définit un orthotope aligné (un orthotope aligné veut dire que ces hyperplans sont orthogonaux à des axes du repère paramétrique

	Intervalle $[x]$	Vecteur intervalle $[X]$
Centre ou Milieu	$c([x]) = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2}$	$c([X]) = [c([x_1]) \cdots c([x_n])]^T$
Longueur ou Taille	$w([x]) = \bar{x} - \underline{x}$	$w([X]) = \max(w([x_1]), \dots, w([x_n]))$
Valeur absolue ou Norme	$ [x] = \max(\underline{x} , \bar{x})$	$ [X] = \max(x_1 , \dots, x_n)$

TAB. 1.4 – Expression des principales caractéristiques d’un intervalle

(les arrêtes de l’hyper-rectangle sont donc colinéaires à ces axes)) avec les axes du repère (x_1, x_2) , plus familièrement appelé boîte ou pavé (voir figure 1.9).

Dans ce mémoire, nous appellerons variable bornée normalisée toute variable x comprise entre 1 et -1 : $|x| \leq 1$, ce qui correspond à poser : $[x] = [-1, 1]$. Notons qu’un vecteur X de variables bornées normalisées est caractérisé par la propriété suivante : $\|X\|_\infty \leq 1$.

Le tableau 1.4 montre un certain nombre de caractéristiques courantes d’un intervalle notamment le centre, la longueur et la valeur absolue. La valeur absolue d’un intervalle correspond au maximum de la valeur absolue de ses bornes ; de ce fait, l’inégalité $|x| \leq |[x]|, \forall x \in [x]$, est toujours respectée.

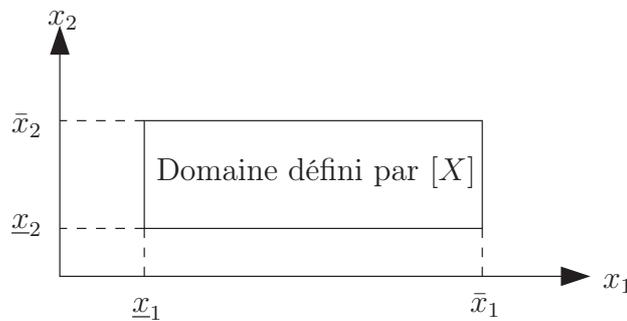


FIG. 1.9 – Vecteur intervalle de dimension 2

Lorsque la borne inférieure est l’opposée de la borne supérieure ($\bar{x} = -\underline{x}$), un intervalle est qualifié de symétrique. Si x est un intervalle symétrique, alors ses caractéristiques se simplifient pour s’exprimer comme suit :

- le centre : $c([x]) = 0$

- la longueur : $w([x]) = 2\bar{x}$
- la valeur absolue : $|[x]| = 0.5w([x]) = \bar{x}$

1.13.2 Opérations logiques sur les intervalles

Les intervalles peuvent être vus comme des ensembles sur lesquels s'appliquent des opérateurs logiques (égalité, intersection, réunion, relation d'ordre, inclusion) permettant de les comparer.

Deux intervalles $[x]$ et $[y]$ sont égaux si et seulement si leurs bornes sont égales :

$$[x] = [y] \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y} \text{ et } \bar{x} = \bar{y}$$

Cette définition s'étend aisément dans le cas vectoriel où l'équivalence précédente doit être vérifiée pour chaque composante des vecteurs intervalles $[X]$ et $[Y]$.

L'intersection de deux intervalles $[x]$ et $[y]$ est vide si l'une des conditions $\underline{x} > \bar{y}$ ou $\bar{x} < \underline{y}$ est vérifiée. Sinon, cette intersection est aussi un intervalle défini par :

$$[x] \cap [y] = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})]$$

Dans le cas vectoriel, l'intersection de $[X]$ avec $[Y]$ est vide si au moins une des intersections entre deux composantes de même indice de ces deux intervalles est vide. Sinon, une relation similaire à la précédente est utilisée :

$$[X] \cap [Y] = \left[[x_1] \cap [y_1] \cdots [x_n] \cap [y_n] \right]^T$$

L'union de deux intervalles est définie si et seulement si leur intersection est non-vide, et dans ce cas, c'est aussi un intervalle :

$$[x] \cup [y] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

Si l'intersection est vide, il est possible d'utiliser l'intervalle enveloppe de l'union qui complète celle-ci de manière à obtenir un ensemble connexe [Did97] :

$$[\{[x], [y]\}] = [\min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})]$$

Comme pour les variables réelles, on peut définir les relations d'ordre pour les variables intervalles comme suit :

$$[x] \text{ op } [y] \Leftrightarrow \bar{x} \text{ op } \underline{y} \text{ avec } \text{op} \in \{<, \leq\}, \quad [x] \text{ op } [y] \Leftrightarrow \underline{x} \text{ op } \bar{y} \text{ avec } \text{op} \in \{>, \geq\}$$

Les relations d'ordre sont antisymétriques et transitives, et les inégalités \leq et \geq sont réflexives. Pour comparer deux intervalles, il est nécessaire que l'intersection de ces derniers soit vide (inégalité stricte) ou limitée à une borne commune (inégalité large). Les relations précédentes sont valables dans le cas de deux vecteurs intervalles lorsque la relation d'ordre est vérifiée pour chaque composante.

L'opérateur d'inclusion peut être défini par :

$$[x] \subseteq [y] \Leftrightarrow \underline{x} \geq \underline{y} \text{ et } \bar{x} \leq \bar{y}$$

L'extension dans le cas vectoriel ne pose aucun problème puisqu'il suffit de vérifier la relation précédente pour toutes les composantes de même indice des vecteurs intervalles $[X]$ et $[Y]$.

1.13.3 Opérations arithmétiques sur les intervalles

Les intervalles peuvent être vus comme des couples de réels, et non plus seulement en tant qu'ensembles. Les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) sur les variables réelles peuvent donc être reformulées dans le cadre de l'analyse par intervalles. Les opérateurs élémentaires de l'arithmétique des intervalles sont définis dans le tableau 1.5.

Opération arithmétique	Calcul des bornes de l'intervalle obtenu
Addition	$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
Négation	$-[x] = [-\bar{x}, -\underline{x}]$
Soustraction	$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$
Multiplication	$[x][y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})]$
Inversion	$\frac{1}{[x]} = \left[\frac{1}{\bar{x}}, \frac{1}{\underline{x}} \right]$ si $0 \notin x$
Division	$\frac{[x]}{[y]} = \left[\min\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right), \max\left(\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right) \right]$ si $0 \notin y$

TAB. 1.5 – Opérations arithmétiques sur les variables intervalle

L'inversion n'est définie que si 0 n'est pas élément de $[x]$, c'est-à-dire si l'une des contraintes $\underline{x} > 0$ ou $\bar{x} < 0$ est respectée. Si aucune de ces deux contraintes n'est vérifiée, l'inverse de $[x]$ ne peut être ni connexe, ni compact, ce qui est en contradiction avec la définition d'un intervalle.

Une opération arithmétique entre un intervalle $[x]$ et une constante α (ou une variable réelle) revient à utiliser les relations définies dans le tableau 1.5 dans le cas où l'un des deux intervalles $[x]$ et $[y]$ a des bornes égales (intervalle dégénéré). Le produit scalaire d'un vecteur à composantes réelles φ et d'un vecteur intervalle $[X]$ est défini par la relation suivante :

$$\varphi[X] = \frac{1}{2} \varphi (\underline{X} + \overline{X}) + \frac{1}{2} |\varphi| [\underline{X} - \overline{X}, \overline{X} - \underline{X}] \quad (1.1)$$

1.13.4 Propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles

Les propriétés de l'arithmétique des intervalles sont des conséquences directes des définitions des opérations qu'elle utilise. Par exemple, il est facile de montrer que la multiplication et l'addition sont toutes les deux associatives et commutatives. Par contre, la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication n'est pas toujours vérifiée. Moore [Moo66] définit la sous-distributivité en observant que pour les intervalles $[x]$, $[y]$ et $[z]$ la relation suivante est toujours satisfaite :

$$[x]([y] \pm [z]) \subseteq [x][y] \pm [x][z] \text{ ou } ([z] \pm [y])[x] \subseteq [z][x] \pm [y][x]$$

Notons que les propriétés algébriques de l'arithmétique des intervalles se déduisent de celles rencontrées dans le cas de variables réelles. Néanmoins, certaines propriétés diffèrent à cause du problème de dépendance. Pour plus d'information, consulter [Moo79].

1.13.5 Fonction réelle et domaines de définition

Soit \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux ensembles respectivement définis sur \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n et f une fonction de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n . L'image \mathbb{Y} d'un ensemble \mathbb{X} par la fonction f est l'ensemble des images des éléments de \mathbb{X} par f :

$$f(\mathbb{X}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{X}, y = f(x)\}$$

On appelle \mathbb{X} le domaine de définition de f et \mathbb{Y} son domaine image. L'image inverse de l'ensemble \mathbb{Y} par la même fonction f est l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^m dont l'image appartient à \mathbb{Y}

$$f^{-1}(\mathbb{Y}) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists y \in \mathbb{Y}, f(x) = y\}$$

Soient \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 (respectivement \mathbb{Y}_1 et \mathbb{Y}_2) deux sous-ensembles de \mathbb{X} (respectivement

\mathbb{Y}). Parmi les propriétés importantes de ces ensembles rappelons :

$$f(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2) \subset f(\mathbb{X}_1) \cap f(\mathbb{X}_2) \quad (1.2)$$

$$f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) = f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2) \quad (1.3)$$

$$f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) = f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \quad (1.4)$$

$$f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2) = f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cup f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \quad (1.5)$$

$$f(f^{-1}(\mathbb{Y})) \subset \mathbb{Y} \quad (1.6)$$

$$f^{-1}(f(\mathbb{X})) \supset \mathbb{X} \quad (1.7)$$

Ces propriétés définissent un jeu de relations logiques entre les domaines de définition et les domaines images des fonctions réelles. Notons que, pour une fonction réelle la combinaison des opérateurs associés et utilisés avec des intervalles ne fournit pas toujours la même image. Afin de lever les ambiguïtés possibles, on définit la fonction d'inclusion. Les fonctions d'inclusion sont alors aux intervalles ce que les fonctions réelles sont aux réels. L'association d'une fonction d'inclusion à une fonction réelle permet d'étudier le domaine de variation de la fonction réelle. Individuellement, elle définissent des relations sur les ensembles par un raisonnement sur les intervalles [Moo66].

1.13.6 Fonction d'inclusion

Définition 1.2 Soit f une fonction de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n . Une fonction intervalle $[f]$ définie de $\mathbb{I}\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$ est une fonction d'inclusion de f si :

$$\forall [x] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m, f([x]) \subset [f]([x])$$

Notons que quelque soit la fonction f , on peut trouver une fonction d'inclusion. Par exemple la fonction $[f]([x]) = \mathbb{I}\mathbb{R}^n$, pour tout $[x] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$, est une fonction d'inclusion pour toute fonction f de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n , ce qui implique la non unicité des fonctions d'inclusion.

Définition 1.3 Une fonction d'inclusion f est monotone au sens de l'inclusion si et seulement si :

$$[x] \subset [y] \Rightarrow [f]([x]) \subset [f]([y])$$

Définition 1.4 Soit $[x](k)$ une série d'intervalles définie sur l'espace \mathbb{X} . La fonction d'inclusion $[f]$ définie sur \mathbb{X} est convergente si et seulement si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([x](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w([f]([x](k))) = 0$$

où $w([x](k))$ dénote la longueur de $[x](k)$

L'image d'une fonction d'inclusion est un élément intervalle de \mathbb{IR}^m qui contient l'image de la fonction réelle associée. La construction d'une bonne fonction d'inclusion est un problème essentiel pour l'analyse d'intervalles. L'objectif est d'obtenir un intervalle qui soit le plus proche possible du domaine image de la fonction réelle lorsque le domaine de définition de la fonction réelle est un intervalle. La construction de ces fonctions s'appuie en particulier sur le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soit la fonction f définie sur X^m à valeur $Y \in \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_m) \mapsto Y$, pour laquelle nous disposons d'une expression explicite comportant uniquement des fonctions et des opérateurs. Soit \mathbb{F} la fonction de \mathbb{X}^m dans \mathbb{Y} obtenue en remplaçant chaque occurrence de la variable x_i par l'ensemble \mathbb{X}_i . Alors en posant :*

$$f(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_m) = \{f(x_1 \dots x_m) \mid x_1 \in \mathbb{X}_1, \dots, x_m \in \mathbb{X}_m\}$$

on a

$$f(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_m) \subset \mathbb{F}(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_m)$$

Si l'expression explicite de f ne fait intervenir qu'une seule occurrence de chaque variable x_i alors on a l'égalité :

$$f(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_m) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_1 \dots \mathbb{X}_m)$$

Lorsque cette égalité est vérifiée, la fonction \mathbb{F} est dite optimale, dans le cas contraire, elle est dite pessimiste. Par cette égalité, on définit la fonction d'inclusion optimale telle que :

Définition 1.5 *La fonction intervalle $[f] : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}^n$ est une fonction d'inclusion optimale pour f si et seulement si :*

$$\forall [X] \in \mathbb{IR}^m, f([X]) = [f]([X])$$

L'image d'une fonction optimale est unique et incluse dans celle de toutes les autres fonctions d'inclusion que l'on pourrait choisir. Une fonction qui n'est pas optimale est dite pessimiste. Le pessimisme induit par les multiples occurrences d'une même variable est dû à l'effet de dépendance [Moo66].

Lorsque le domaine image d'une fonction réelle n'a pas la structure d'un intervalle, la fonction optimale ne peut être construite. Dans ce cas, la fonction d'inclusion est nécessairement pessimiste. L'optimalité de $[f]$ dépend de la topologie des domaines mis

en correspondance (voir figure 1.10). Pour assurer l'unicité de la fonction d'inclusion, on définit la fonction d'inclusion minimale, notée $[f]^*$. Son image est le plus petit intervalle contenant le domaine image de f pour un domaine de définition donné.

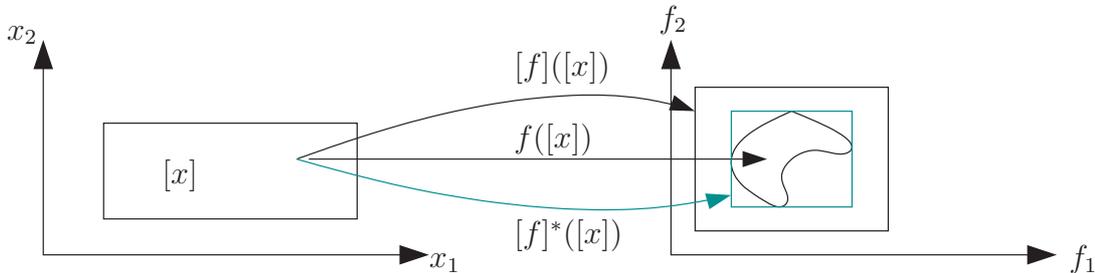


FIG. 1.10 – Image directe f , fonction d'inclusion minimale $[f]^*$ et non minimale $[f]$ d'une fonction vectorielle f de dimension deux ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Il apparaît simplement qu'une fonction d'inclusion minimale est nécessairement monotone. La convergence, sans être une condition nécessaire pour les fonctions d'inclusion, assure la continuité entre l'espace des réels et celui des intervalles. Si la fonction d'inclusion $[f]$ associée à f est convergente, alors pour une donnée ponctuelle, on a $[f](x) = f(x)$.

On peut définir également la fonction d'inclusion centrée qui s'appuie sur le théorème suivant :

Théorème 1.2 Soit f une fonction de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R} différentiable sur le pavé $[X]$. Alors, on peut écrire :

$$\forall X \in [X], \exists \xi \in [X] \text{ telle que } f(X) = f(X_c) + g^T(\xi)(X - X_c)$$

où g est le vecteur gradient de f et X_c est le centre de $[X]$.

Sous l'hypothèse que f est différentiable, on peut écrire :

$$\forall X \in [X], f(X) \in f(X_c) + [g^T]([X])(X - X_c)$$

où $[g^T]$ est une fonction d'inclusion de g^T .

La fonction d'inclusion centrée $[f_c]$ pour f est alors définie par :

$$f_c([X]) = f(X_c) + [g^T]([X])([X] - X_c)$$

Le principal avantage de la fonction d'inclusion centrée est sa convergence, car :

$$\frac{w([f_c]([X]))}{w(f([X]))} \rightarrow 1 \text{ lorsque } w([X]) \rightarrow 0$$

Pour plus de détails sur la fonction d'inclusion, appelée aussi extension sur les intervalles, le lecteur peut consulter [Moo66], [Moo79] et [JKDW01].

1.13.7 Inversion ensembliste

L'inversion ensembliste est une méthode qui permet d'obtenir une estimation du domaine de définition \mathbb{X} d'une fonction f à partir de sa forme directe (f) et de son domaine image \mathbb{Y} . Ce problème revient à estimer le domaine image de la fonction inverse f^{-1} inconnue [JW93, JW96].

Définition 1.6 Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et \mathbb{Y} un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n . Le problème d'inversion ensembliste consiste à trouver l'ensemble \mathbb{X} tel que :

$$X \in \mathbb{X} \Rightarrow f(X) \in \mathbb{Y}$$

Si la fonction f est linéaire et si l'ensemble des mesures à inverser \mathbb{Y} est un polyèdre convexe alors l'ensemble solution \mathbb{X} est aussi un polyèdre dont les caractéristiques élémentaires (volume, projections ...) peuvent être calculées analytiquement [PLW94]. Considérons par exemple le système suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{b}_1, \bar{b}_1] \\ [\underline{b}_2, \bar{b}_2] \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

L'ensemble solution de x_1 et x_2 est défini par le domaine D obtenu en effectuant l'intersection entre les domaines D_1 et D_2 caractérisant le système (1.8), $D = D_1 \cap D_2$ avec :

$$D_1 = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 - \underline{b}_1 = 0 \\ a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 - \bar{b}_1 = 0 \end{cases} \quad D_2 = \begin{cases} a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 - \underline{b}_2 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 - \bar{b}_2 = 0 \end{cases}$$

La figure 1.11 - (a) illustre la détermination de domaine D à partir des domaines D_1 et D_2 . Le domaine solution de (1.8) obtenu correspond à la région grisée sur la figure. Les droites en traits discontinus représentent une réalisation possible de l'équation (1.8) pour une valeur choisie dans le domaine solution.

Lorsque les paramètres de la fonction d'inclusion $[f]$ associée à f sont des intervalles de rayon non nul, l'ensemble solution \mathbb{X} est une union des différents polyèdres qui peuvent être obtenus. Considérons comme exemple le système suivant :

$$\begin{pmatrix} [\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] & [\underline{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,2}] \\ [\underline{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,1}] & [\underline{a}_{2,2}, \bar{a}_{2,2}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{b}_1, \bar{b}_1] \\ [\underline{b}_2, \bar{b}_2] \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

L'ensemble solution de x_1 et x_2 est défini par le domaine D obtenu comme suit :

$$D = D_1 \cap D_2, \\ \inf(d_1 \cup d_2) \leq D_1 \leq \sup(d_1 \cup d_2), \quad \inf(d_3 \cup d_4) \leq D_2 \leq \sup(d_3 \cup d_4)$$

où :

$$d_1 = \begin{cases} \sup([\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] x_1 + [\underline{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,2}] x_2) - \underline{b}_1 = 0 \\ \sup([\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] x_1 + [\underline{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,2}] x_2) - \bar{b}_1 = 0 \end{cases}, \\ d_2 = \begin{cases} \inf([\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] x_1 + [\underline{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,2}] x_2) - \underline{b}_2 = 0 \\ \inf([\underline{a}_{1,1}, \bar{a}_{1,1}] x_1 + [\underline{a}_{1,2}, \bar{a}_{1,2}] x_2) - \bar{b}_2 = 0 \end{cases}, \\ d_3 = \begin{cases} \sup([\underline{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,1}] x_1 + [\underline{a}_{2,2}, \bar{a}_{2,2}] x_2) - \underline{b}_1 = 0 \\ \sup([\underline{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,1}] x_1 + [\underline{a}_{2,2}, \bar{a}_{2,2}] x_2) - \bar{b}_1 = 0 \end{cases}, \\ d_4 = \begin{cases} \inf([\underline{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,1}] x_1 + [\underline{a}_{2,2}, \bar{a}_{2,2}] x_2) - \underline{b}_2 = 0 \\ \inf([\underline{a}_{2,1}, \bar{a}_{2,1}] x_1 + [\underline{a}_{2,2}, \bar{a}_{2,2}] x_2) - \bar{b}_2 = 0 \end{cases}$$

La figure 1.11 - (b) illustre la détermination de domaine D à partir des domaines d_1 , d_2 , d_3 et d_4 . Le domaine solution de (1.9) obtenu correspond à la région grisée sur la figure. Les droites en traits discontinus représentent une réalisation possible de l'équation (1.9) pour une valeur choisie dans le domaine solution.

Dans ce deuxième cas, en écrivant la fonction $[f]$ sous une forme matricielle on distingue 3 types de solutions pour la résolution du système $[A]x = [B]$ [KR00] :
United Solution Set (*USS*) :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^m \mid \exists A \in [A], \exists B \in [B], AX = B\}, \quad [A]X \cap [B] \neq \emptyset$$

Contrôlable Solution Set (*CSS*) :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^m \mid \exists A \in [A], \forall B \in [B], AX = B\}, \quad [A]X \supseteq [B] \subseteq \Sigma$$

Tolerable Solution Set (*USS*) :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^m \mid \forall A \in [A], \exists B \in [B], AX = B\}, \quad [A]X \subseteq [B] \subseteq \Sigma$$

Ces trois ensembles solution sont représentés sur la figure 1.12. Dans le paragraphe suivant, on présente des méthodes pour fournir une estimation d'un domaine incluant l'ensemble *USS*.

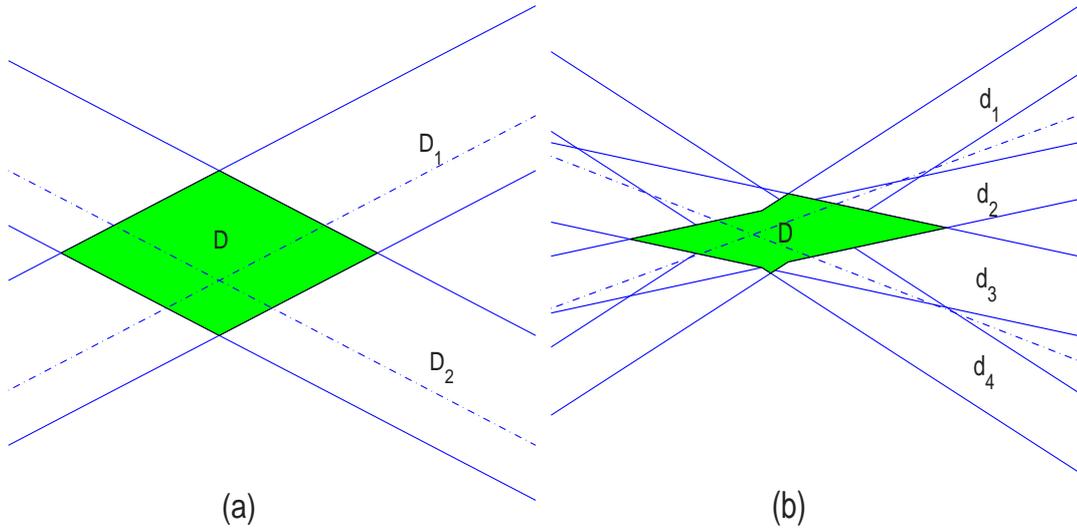


FIG. 1.11 – En dimension 2 : (a) L'ensemble solution \mathbb{X} du système linéaire $AX = B$; $B \in [B]$ est un polyèdre convexe. (b) L'ensemble solution du système linéaire $AX = B$; $A \in [A]$ et $B \in [B]$ est une union de ces polyèdres.

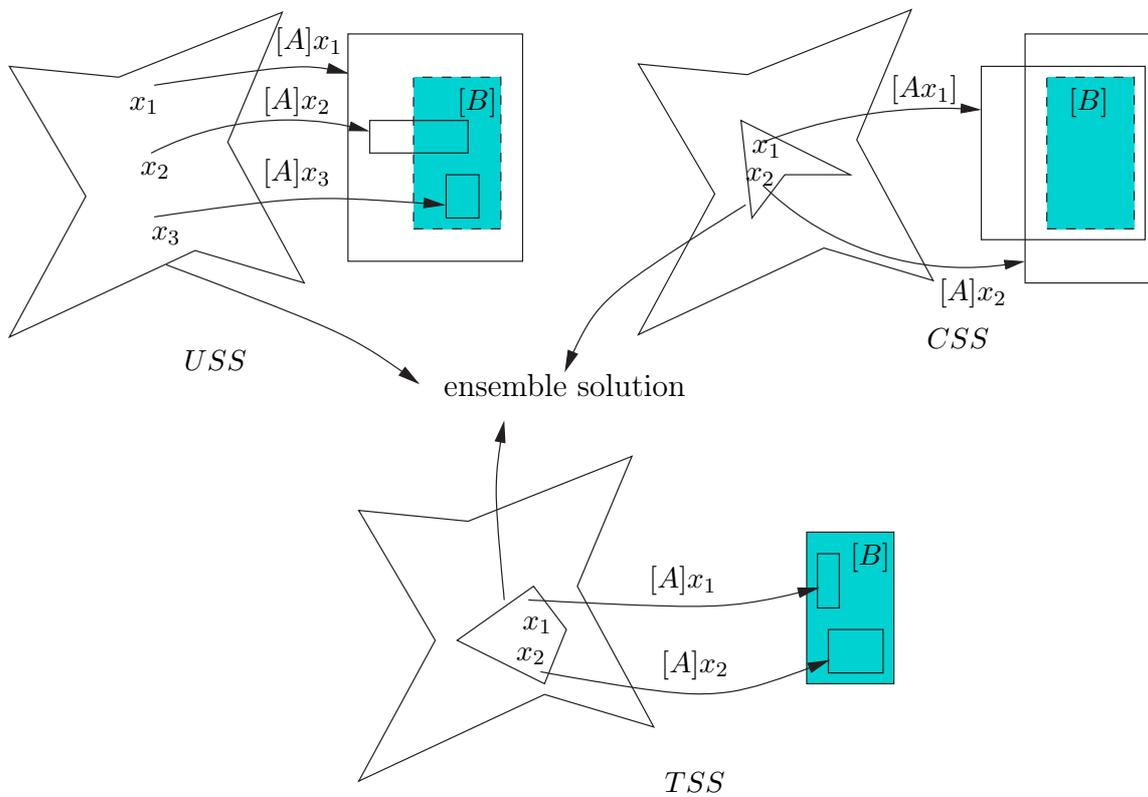


FIG. 1.12 – Les différentes solutions possibles du système $[A]X = [B]$.

1.14 Résolution d'un système d'équations intervalles linéaires

Dans de nombreuses applications d'algèbre linéaire, on se pose le problème de trouver une bonne approximation du vecteur $[X] \in \mathbb{IR}^n$ qui satisfasse une équation de la forme $[A]X = [B]$. On trouvera une présentation générale et un développement théorique de ce problème dans les travaux de A. Neumaier [Neu90], [Neu98], [Han97].

La résolution d'un système d'équations dans \mathbb{R} pose en premier lieu, un problème sémantique. La structure de monoïde de l'ensemble des intervalles et la difficulté à déterminer des fonctions d'inclusion optimales rendent improbables les cas d'égalité lorsqu'on manipule des intervalles ($[X] + [Y] = [Z] \not\Rightarrow [Z] - [Y] = [X]$). Notons que l'inversion exacte et complète d'une fonction ou d'un système d'équations $\{Y = f(X)\}$ est obtenue lorsqu'on observe l'égalité ($f^{-1}(f(X)) = X$). Par contre la propriété ensembliste ($X \subset f^{-1}(f(X))$) n'assure que l'inclusion. Dans $\mathbb{IR}_{\varepsilon > 0}$ les méthodes de sous-pavage (ces méthodes proposent un découpage des domaines de définition par des partitionnements qui ne se chevauchent pas [Kie99]) s'appuient sur la topologie des espaces mis en correspondance par f . On peut remarquer que les méthodes d'inversion ensembliste autorisent une résolution exacte si ces espaces admettent un sous-pavage exact.

Remarque 1.1 *Soit une fonction f définie sur X à valeur dans Y . Si une équation $f(X) = Y$ est complètement et exactement résoluble par l'analyse d'intervalle dans $\mathbb{IR}_{\varepsilon > 0}$, il existe alors un partitionnement du domaine de définition et du domaine image tel que :*

$$X = \bigcup_i [x_i] \quad \text{et} \quad Y = \bigcup_i [y_i] \quad (1.10)$$

$$\forall i, j : [x_i] \in \mathbb{IR}_{\varepsilon > 0}, \quad [y_j] \in \mathbb{IR}_{\varepsilon > 0} \quad (1.11)$$

De manière générale, cette condition nécessaire traduit le fait que la résolution exacte et complète d'un problème n'est possible qu'avec un formalisme qui permet de décrire exactement toutes les données du problème et ce n'est pas le cas des intervalles.

Remarque 1.2 *Le formalisme de l'analyse d'intervalles ne permet pas de décrire tous les ensembles définis sur \mathbb{R} . Un intervalle peut décrire deux quantités différentes, par exemple l'intervalle $[-1, 1]$ peut constituer l'enveloppe intervalle de $(\{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\})$ et de $\{\frac{1}{|x|} \geq 1, x \neq 0\}$. On rencontre également la même ambiguïté avec l'arrondi des machines de précision finie ($3.1416 = \pi = 3.14159$).*

Cette différence entre le contenant et le contenu d'un ensemble est mise en évidence par l'effet d'enveloppement décrit par Moore [Moo66]. La figure 1.13 illustre cet effet

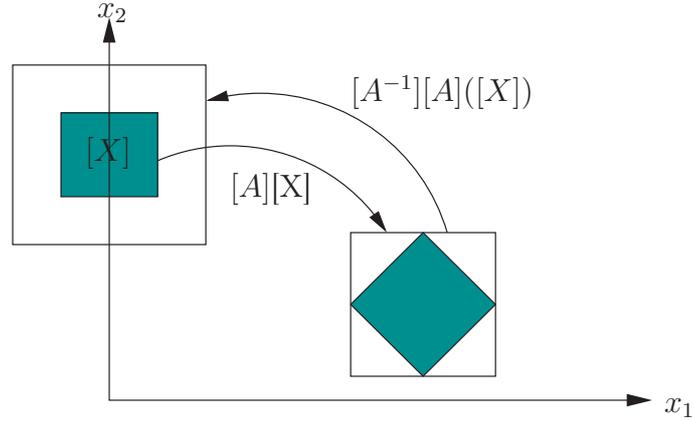


FIG. 1.13 – Effet d’enveloppement observé pour une rotation.

quand on applique une rotation puis la rotation inverse à un élément de \mathbb{IR}^2 avec :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} [y_1] \\ [y_2] \end{pmatrix} = [A]^{-1}A \begin{pmatrix} [x_1] \\ [x_2] \end{pmatrix}$$

Les matrices $[A]$ et $[A^{-1}]$ sont les fonctions d’inclusions associées aux applications A et A^{-1} .

Remarquons que, du point de vue formel, les écritures suivantes sont équivalentes :

$$f(X) = Y \Leftrightarrow g(X) = f(X) - Y = 0 \tag{1.12}$$

La résolution exacte de l’équation $g(X) = 0$ en utilisant l’analyse par intervalle est impossible car la condition (1.10) assure qu’il n’y a pas de fonction d’inclusion qui résolve exactement l’équation $[g]([X]) = \langle 0; \varepsilon \rangle$. Lorsque le problème est posé dans $\mathbb{IR}_{\varepsilon > 0}$, il est impossible de partitionner $\langle 0; \varepsilon \rangle$. Pour cela, on cherche une solution à l’équation :

$$[g]([X]) = \langle a; \varepsilon \rangle, \quad |a| < \varepsilon \tag{1.13}$$

En précision infinie, l’intervalle $\langle a; \varepsilon \rangle$ est nécessairement centré en $a = 0$. Par abus d’écriture, nous notons $[0]$ l’intervalle $\langle a; \varepsilon \rangle$ de $\mathbb{IR}_{\varepsilon > 0}$. Il est important de noter que l’égalité ensembliste est définie par :

$$[a] = [b] \Leftrightarrow (([a] \subset [b]) \text{ et } ([a] \supset [b])) \tag{1.14}$$

Ainsi, l’équation (1.13) se résout au sens de l’inclusion :

- $[g]([X]) \subset \langle 0; \varepsilon \rangle$, la résolution de cette inclusion a un intérêt lorsque $\varepsilon = 0$, on

cherche alors une solution exacte :

$$[g]([X]) = g(X) = 0 \Leftrightarrow (([a] \subset [b]) \text{ et } ([a] \supset [b])) \quad (1.15)$$

- $[g]([X]) \supset \langle 0; \varepsilon \rangle$, la résolution de cette inclusion a un intérêt lorsque $\varepsilon > 0$, on cherche alors la plus petite boîte $[g]([X])$ contenant 0, celle qui minimise ε .

Une solution qui vérifie les deux inclusions équivaut à une solution exacte dans \mathbb{R}_ε . Ces inclusions se distinguent sous les dénominations de résolutions extérieures ou intérieures. On peut les définir en distinguant les ensembles (les intervalles) des variables qu'ils contiennent :

Définition 1.7 $[X]_0$ est une approximation extérieure de l'ensemble des solutions de l'équation $X \in [X], Y \in [Y], f(X) = Y$ si et seulement si :

$$\forall Y \in [Y], \exists X \in [X]_0 \mid f(X) = Y$$

Définition 1.8 $[X]_0$ est une approximation intérieure de l'ensemble des solutions de l'équation $X \in [x], y \in [Y], f(x) = Y$ si et seulement si :

$$\forall X \in [X]_0, \exists Y \in [Y] \mid f(X) = Y$$

Cette distinction entre les variables et leur domaine est réalisée par le formalisme informatique. Les relations d'inclusion et les équations peuvent être interprétées comme des contraintes. La résolution du système se ramène alors à un Problème à Satisfaction de Contraintes (*CSP* : Constraint Satisfaction Problem). Nous rappelons quelques définitions :

Définition 1.9 Un Problème de Satisfaction de Contraintes $H = (X, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ est défini par :

- un ensemble de variable $X = \{x_1 \dots x_n\}$.
- un ensemble de domaines $\mathcal{D} = \{D_1 \dots D_n\}$ où D_i est le domaine associé à la variable x_i .
- un ensemble de contraintes $\mathcal{C} = \{C_1 \dots C_m\}$, tels que les variables associées à chaque contrainte C_i soient définies dans X .

Nous écrirons qu'un système d'équations linéaires s'étudie au sens du *CSP* de la manière suivante :

$$CSP(A \in [A], B \in [B], X \in [X], AX = B) \Leftrightarrow [A][X] - [B] = [0]$$

En notant $[a_{i,j}]$ l'élément (i, j) de la matrice $[A]$, $[b_i]$ le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur $[B]$, on peut écrire pour $i = 1 \dots m$ le *CSP* suivant :

$$H = \left(\begin{array}{l} X = \{[x_1], \dots, [x_n]\} \\ \mathcal{D} = \{\mathbb{IR}, \dots, \mathbb{IR}\} \\ \mathcal{C} = \left\{ C_i : [0] \subset \sum_{k=1}^{k=n} [a_{ik}][x_k] - [b_i] \right\} \end{array} \right) \quad (1.16)$$

Définition 1.10 *Un k -assignement est l'affectation simultanée de k valeurs à un ensemble de k variables.*

Définition 1.11 *La solution S d'un *CSP* $H = (X, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ est l'ensemble des k -assignements valides par H .*

1.14.1 Prétraitement et préconditionnement d'un système linéaire

Le prétraitement d'un système linéaire intervalle de la forme $[A]X = [B]$, consiste à transformer la matrice $[A]$ en une matrice proche de l'identité pour faciliter la résolution de ce système. Dans le cadre des *CSP* construits à partir d'un système d'équations linéaires, le préconditionnement est un opérateur de contraction utilisé comme prétraitement pour des contracteurs plus élaborés qui permettent d'améliorer le conditionnement du système linéaire. Cette opération est réalisée en modifiant le centre ou le rayon des intervalles mis en jeu. Considérons le système linéaire suivant :

$$[A][X] - [B] = [0] \quad (1.17)$$

Le préconditionnement est couramment utilisé lorsque $[A]$ est une matrice carrée de dimension $(n \times n)$. Dans ce cas, la matrice de préconditionnement M est une matrice réelle de même dimension que $[A]$ et $[X]$, $[B]$, $[0]$ sont des vecteurs de dimension n , $[X]$ étant l'inconnue. Les systèmes linéaires suivants correspondent à des *CSP* équivalents :

$$CSP([A][X] - [B] = [0]) \Leftrightarrow CSP((M[A])[X] - M[B] = M[0]) \quad (1.18)$$

La matrice M doit être choisie de façon à faciliter la résolution de (1.17) [Kel97]. Lorsque la matrice centre A_c de la matrice $[A]$ est inversible, on choisit $M = A_c^{-1}$ [JKDW01].

$$CSP([A][X] - [B] = [0]) \Leftrightarrow CSP((A_c^{-1}[A])[X] - A_c^{-1}[B] = A_c^{-1}[0])$$

Examinons dans quelle mesure ce type de prétraitement peut se généraliser au cas des matrices de dimension quelconque. Dans le cas scalaire, la multiplication d'un intervalle par un réel permet de modifier le centre ou le rayon de l'intervalle. On observe :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda[x] = \langle \lambda c([x]); |\lambda| \vec{x} \rangle = [\lambda c([x]) - |\lambda| \vec{x}, \lambda c([x]) + |\lambda| \vec{x}]$$

On note le produit $\lambda[x]$ par $[\lambda x]$, on le généralise au produit matriciel en notant :

$$M[A] = [MA] = MA + \langle 0; |M| \vec{A} \rangle = [MA - |M| \vec{A}; MA + |M| \vec{A}]$$

où $|M|$ est composée de la valeur absolue des éléments de M .

Nous montrons à présent que le produit d'une matrice réelle par une matrice d'intervalle est une application monotone.

Soit $[A]$ et $[B]$ deux matrices d'intervalles de dimension $m \times n$. On définit l'inclusion de deux matrices de la manière suivante :

$$[A] \subset [B] \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots m, \forall j = 1 \dots n : [A_{i,j}] \subset [B_{i,j}]$$

Soit M une matrice réelle non nulle, alors la monotonie s'exprime par la relation :

$$[A] \subset [B] \Rightarrow M[A] \subset M[B]$$

La même démonstration peut conduire au résultat :

$$[A] \subset [B] \Rightarrow [A]M \subset [B]M$$

Démonstration : Les matrices $[A]$ et $[B]$ sont de dimension $m \times n$ et on a l'inclusion $[A] \subset [B]$. On décrit les matrices $[A]$ et $[B]$ selon leurs colonnes par :

$$[A] = ([a_1] \dots [a_n]) \text{ et } [B] = ([b_1] \dots [b_n])$$

$[a_i]$ et $[b_i]$ sont des vecteurs de dimension m .

Soit M une matrice ponctuelle de dimension $l \times m$, décrite par ses l vecteurs lignes de dimension m :

$$M = \begin{pmatrix} m_1^t \\ \vdots \\ m_l^t \end{pmatrix}$$

La matrice M définit une application linéaire. On peut écrire chaque terme du produit

$MA, A \in [A]$, comme le résultat d'une fonction f_i linéaire continue :

$$\begin{aligned} A &\in [A] \\ a_j &\text{ la } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } A \\ (MA)_{i,j} &= f_i(a_j) = m_i a_j \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $[A] \subset [B]$ donc $a_j \in [b_j]$. Puisque f_i est continue, elle conserve alors l'inclusion d'où on a $f_i(a_j) \in f_i(b_j)$. En appliquant ce résultat sur tous les termes des matrices $MA, A \in [A]$, on obtient :

$$[A] \subset [B] \Rightarrow M[A] \subset M[B]$$

Cette propriété de monotonie permet de prouver l'équivalence des *CSP* préconditionnés. En effet, l'égalité du système linéaire est une double inclusion. On peut donc écrire la propriété suivante :

M est une matrice scalaire, de dimension compatible pour le produit avec les matrices $[A]$ et le vecteur $[B]$ alors :

$$[A][X] - [B] = [0] \Leftrightarrow (M[A])[X] - M[B] = M[0]$$

Les prétraitements matriciels peuvent apparaître comme des contracteurs s'ils modifient le rayon des intervalles et donc le domaine de définition des *CSP*. On parle de préconditionnement lorsque ces prétraitements permettent d'améliorer le conditionnement du système.

1.14.2 Contraction et consistance d'un CSP

Les inconnues du système d'équations que l'on cherche à résoudre appartiennent à un domaine de taille infinie dans le *CSP* (1.16). La représentation numérique du problème nécessite une première opération qui consiste à borner ces quantités abstraites. La réduction de ce domaine est connue en informatique sous le nom de problème de consistance d'arc ou encore contraction. Cette opération s'appuie sur une relation d'équivalence propre aux *CSP* :

Définition 1.12 Deux *CSP* H_1 et H_2 sont équivalents s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Définition 1.13 Un contracteur \mathcal{R} pour un *CSP* $H_1 = (X, \mathcal{D}_1, \mathcal{C})$ est un opérateur capable de modifier le domaine de définition \mathcal{D}_1 en un domaine de définition $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ tel que le nouveau *CSP* H_2 obtenu soit équivalent à H_1 .

De manière empirique, pour que le *CSP* (1.16) soit résolvable par une machine, il doit être équivalent à celui obtenu en remplaçant la quantité « infinie » par la plus grande valeur numérique codable sur l'ordinateur utilisé. La contraction consiste ensuite à réduire les domaines de définition des variables pour obtenir un *CSP* équivalent dont le domaine est le plus petit possible. On le construit en éliminant les parties du domaine de définition qui ne sont pas compatibles avec les contraintes. Un domaine, dont chaque valeur satisfait au moins une contrainte, est dit arc-consistant.

Définition 1.14 Soit $H = (X, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ un *CSP* et x_i une variable de X . Le domaine de définition D_i associé à x_i est dit arc-consistant si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall C(x_1 \dots x_i \dots x_n) \in \mathcal{C} \text{ une contrainte portant sur la variable } x_i \text{ et } \forall x_i \in D_i \\ \exists (x_1 \dots x_i \dots x_n) \in \mathcal{D} \mid C(x_1 \dots x_i \dots x_n) \text{ est vérifiée} \end{cases}$$

Définition 1.15 Un *CSP* $H = (X, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ est globalement consistant si et seulement si :

$$\forall x_i \in D_i, \exists (x_1 \dots x_i \dots x_n) \in \mathcal{D} \mid \forall C(x_1 \dots x_i \dots x_n) \in \mathcal{C}, C(x_1 \dots x_i \dots x_n) \text{ est vérifiée}$$

La consistance globale traduit le fait que pour toutes les variables du problème, le domaine de définition correspond au domaine de variation des contraintes. Dans ce cas, un *CSP* globalement consistant donne une estimation extérieure minimale du système d'équations équivalent.

Il existe plusieurs types de contracteurs. Cependant, leurs domaines d'application et leurs performances diffèrent et sont complémentaires. Trois critères permettent de les classer : la linéarité des contraintes, le rapport entre les nombres des inconnues et des contraintes et la taille (longueur) $w([X])$ de $[X]$. Dans ce qui suit, nous présentons des contracteurs à point fixe capables de contracter des *CSP* linéaires.

1.14.3 Contracteurs à point fixe

La contraction est une opération qui réduit l'espace de recherche vers un domaine incompressible dont la taille dépend de l'incertitude initiale que l'on a sur le système (sur les matrices $[A]$ et $[B]$). Cette opération se traduit par un processus itératif formalisé par une série convergente :

$$\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{R}(\mathcal{D}_k)$$

où \mathcal{D}_k est le domaine de variation des variables et \mathcal{R} l'opérateur de contraction. Lorsque la contraction cesse, la série a convergé vers son point fixe. On observe alors un phénomène

d'idempotence :

$$\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{R}(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_k$$

En résumé un opérateur qui présente la solution S du CSP $H = (X, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ est un contracteur pour ce CSP s'il vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{contractance} & : [X] \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{R}([X]) \in \mathcal{D} \\ \text{monotonie} & : [X] \in \mathcal{D}, [X'] \in \mathcal{D}; [X] \subset [X'] \Rightarrow \mathcal{R}([X]) \subset \mathcal{R}([X']) \\ \text{idempotence} & : [X] = S \Rightarrow \mathcal{R}([X]) = [X] \end{aligned}$$

La monotonie est une propriété des fonctions d'inclusion. Si l'opérateur \mathcal{R} de la série $\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{D}_k \cap \mathcal{R}(\mathcal{D}_k)$ est une fonction d'inclusion, elle doit être monotone. C'est le cas des fonctions minimales. A partir de ces remarques, les contracteurs à points fixe sont ceux construits sur la propriété d'idempotence. Le contracteur de Krawczyk et le contracteur de Gauss-Seidel en font partie [Moo66][Rum83].

1.14.3.1 Le contracteur de Krawczyk

Avec ce contracteur, la résolution d'une équation de la forme $f(X) = 0$, f supposée différentiable et le nombre des contraintes de $f(X) = 0$ est égal la dimension de X , se traduit par la construction d'une fonction $\psi(X)$ telle que :

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow \psi(X) = X - Mf(X)$$

où M est une matrice inversible quelconque.

Lorsqu'une telle fonction est construite, le point X tel que $f(X) = 0$ est le point fixe de la série définie par $X_{k+1} = \psi(X_k)$. Si cette série converge, alors elle converge vers ce point. La fonction d'inclusion centrée de ψ est donnée par :

$$[\psi]([X]) = \psi(X_c) + [J_\psi]([X])([X] - X_c)$$

où $[J_\psi]$ est une fonction d'inclusion de la matrice jacobienne de ψ et X_c est le centre de $[X]$. Ce qui permet d'écrire le contracteur de Krawczyk comme suit :

$$[X]_{k+1} = [X]_k \cap (\psi(X_c) + [J_\psi]([X])([X] - X_c))$$

en remplaçant $\psi(X)$ par $X - Mf(X)$ on obtient :

$$[X]_{k+1} = [X]_k \cap (X_c - Mf(X_c) + (I - M[J_f]([X]))([X] - X_c))$$

où I est la matrice d'identité et $[J_f]$ est une fonction d'inclusion de la matrice jacobienne de f . La matrice M peut être choisie égale à l'inverse de la matrice jacobienne de f

calculée à X_c : $M = J_f^{-1}(X_c)$. On obtient ainsi dans ce cas :

$$[X]_{k+1} = [X]_k \cap (X_c - J_f^{-1}(X_c)f(X_c) + (I - J_f^{-1}(X_c)[J_f]([X]))([X] - X_c))$$

1.14.3.2 Le contracteur de Gauss Seidel

Ce contracteur s'appuie sur la méthode de résolution des systèmes linéaires qui porte le même nom. Le principe de cette méthode consiste à développer, ligne par ligne, le modèle linéaire intervalle $[A]X = [B]$, $[A] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$. Pour cela, on écrit :

$$[a_{i,1}]x_1 + [a_{i,2}]x_2 + \dots + [a_{i,n}]x_n = [b_i] \quad i = 1 \dots n$$

En résolvant l'équation de rang i par rapport à x_i , on obtient :

$$[x_i] = \frac{[b_i] - ([a_{i,1}]x_1 + \dots + [a_{i,i-1}]x_{i-1} + [a_{i,i+1}]x_{i+1} \dots + [a_{i,n}]x_n)}{[a_{i,i}]}$$

En supposant que x appartient à un pavé $[X]$, autrement dit que tout x_j appartient à un intervalle $[X_j]$, on peut alors écrire l'expression précédente sous la forme :

$$x_i \in [y_i] = \frac{[b_i] - ([a_{i,1}][X_1] + \dots + [a_{i,i-1}][X_{i-1}] + [a_{i,i+1}][X_{i+1}] \dots + [a_{i,n}][X_n])}{[a_{i,i}]}$$

Pour assurer que chaque composante appartient à l'intervalle de recherche, la contrainte suivante est ajoutée :

$$x_i \in [x_i] = [y_i] \cap [X_i]$$

La résolution proposée peut être améliorée en utilisant, après chaque étape, les solutions partielles obtenues aux étapes précédentes. Ainsi, en résolvant la $i^{\text{ème}}$ équation, on obtient la solution intervalle $[x_i]$ qui, en général, est plus petite que $[X_j]$. On peut donc reporter les nouveaux intervalles $[x_j]$ dans l'expression de $[y_i]$:

$$[y_i] = \frac{1}{[a_{i,i}]} \left([b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [a_{i,j}] [x_j] - \sum_{j=i+1}^n [a_{i,j}] [X_j] \right)$$

$$[x_i] = [y_i] \cap [X_i]$$

Le calcul se poursuit tant que les intervalles $[x_i]$ peuvent être réduits à l'aide de la procédure précédente.

En considérant le CSP défini par :

$$H : (AX - B = 0, A \in [A], B \in [B], X \in [X])$$

On décompose la matrice carrée A (dont les éléments diagonaux sont non nuls) sous la forme :

$$A = \Lambda + M$$

où Λ est la matrice diagonale possédant les mêmes éléments diagonaux que A . Puisque tous les éléments diagonaux de A sont supposés non nuls, on peut écrire :

$$X = \Lambda^{-1}(B - MX)$$

Les solutions en X du CSP sont donc des points fixes de $\psi(\cdot)$ où :

$$\psi(X) = \Lambda^{-1}(B - MX)$$

Connaissant une fonction d'inclusion pour $\psi(\cdot)$, le contracteur de Gauss-Seidel est donné par :

$$\mathcal{R} : \begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [X] \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} [A] \\ [B] \\ [\psi]([X]) = [X] \cap [\Lambda]^{-1}([B] - [M][X]) \end{pmatrix}$$

1.14.4 L'élimination de Gauss par intervalle

Soit un modèle linéaire intervalle $[A][X] = [b]$ où $[A] \in \mathbb{IR}^{n,n}$ est une matrice régulière, la résolution par l'élimination de Gauss se fait à l'aide d'une factorisation LU. Il s'agit d'une transformation de la matrice $[A]$ en deux matrices triangulaires, inférieure $[L]$ et supérieure $[U]$ avec $[A] \subseteq [L][U]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ [l_{2,1}] & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [l_{n,1}] & [l_{n,2}] & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_{1,1}] & 0 & \cdots & [u_{1,n}] \\ 0 & [u_{2,2}] & \cdots & [u_{2,n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{n,n}] \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} [a_{1,1}] & [a_{1,2}] & \cdots & [a_{1,n}] \\ [a_{2,1}] & [a_{2,2}] & \cdots & [a_{2,n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n,1}] & [a_{n,2}] & \cdots & [a_{n,n}] \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas certain, la solution est obtenue en résolvant les deux sous-systèmes suivants :

$$\begin{aligned} [L]y &\supseteq [b] \\ [U]x &\supseteq [y] \end{aligned}$$

Tout d'abord, les éléments de L et U sont calculés de manière itérative :

$$[l_{i,k}] = \frac{\left([a_{i,k}] - \sum_{j>k} [l_{i,j}][u_{j,k}] \right)}{[u_{k,k}]}, \quad 0 \notin [u_{k,k}], \quad \text{pour } i > k$$

et

$$[u_{i,k}] = [a_{i,k}] - \sum_{j < i} [l_{i,j}][u_{j,k}] \quad \text{pour } i \leq k$$

avec :

$$\begin{aligned} l_{i,j} &= \frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}} \quad a_{1,1} \neq 0 \\ a_{i,k}^{(j)} &= a_{i,k}^{(j-1)} - l_{i,j} a_{j,k}^{(j-1)} \quad (i, k > j) \end{aligned}$$

Puis, à partir de la connaissance des matrices $[L]$ et $[U]$, la solution du premier système triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ [l_{2,1}] & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [l_{n,1}] & [l_{n,2}] & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} [b_1] \\ [b_2] \\ \vdots \\ [b_n] \end{pmatrix}$$

s'explique :

$$[y_i] = [b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [l_{i,j}][y_j] \quad i = 1 \dots n$$

La solution $[x]$ du deuxième système triangulaire :

$$\begin{pmatrix} [u_{1,1}] & 0 & \cdots & [u_{1,n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & [u_{n-1,n-1}] & [u_{n-1,n}] \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{n,n}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} [y_1] \\ [y_2] \\ \vdots \\ [y_n] \end{pmatrix}$$

s'explique :

$$[x_i] = \frac{[y_i] - \sum_{j=i+1}^n [u_{i,j}][x_j]}{[u_{i,i}]} \quad i = n \dots 1$$

1.14.5 Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés

Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre des systèmes d'équations linéaires intervalles sur-déterminés ($[A] \in \mathbb{IR}^{m,n}$). Citons parmi ces méthodes, celle utilisant les techniques de programmation linéaire [Bea99]. Rump [Rum83] propose une réécriture du système pour que sa résolution apparaisse comme une version particulière de la pseudo-inverse. Jaulin [Jau00] développe une méthode basée sur la propagation des contraintes [Wal75] applicable aux systèmes linéaires et non linéaires qui peuvent être décrits par un modèle de la forme $f(x) = 0$.

Dans cette thèse, on adapte les méthodes de résolution des systèmes linéaires carrés

($[A] \in \mathbb{IR}^{n,n}$) à la résolution des systèmes linéaires sur-déterminés en utilisant un algorithme séquentiel.

Notons qu'aucune méthode de résolution de systèmes linéaires intervalles ne peut être considérée meilleure par rapport aux autres de façon générale. En fait, la meilleure méthode est celle conduisant à une solution intervalle de rayon minimal (influence minimale de l'effet d'enveloppement). Le lecteur intéressé peut consulter pour plus de détails ([JKDW01], [Moo66], [Neu90], [Rum83]) sur les méthodes de résolution des systèmes linéaires intervalles et les contracteurs. Dans l'annexe B différentes méthodes de contraction et de résolutions de systèmes d'équations intervalles sont présentées.

1.15 Conclusion

Nous avons présenté tout d'abord dans ce chapitre, les différentes étapes de la procédure de validation de données. Puis, les différents types d'erreurs ainsi que leur origine ont été ensuite analysés et classés. Ensuite, le problème de la réconciliation de données est formalisé et détaillé comme un problème d'optimisation quadratique. Les méthodes de diagnostic reposant sur des modèles analytiques ainsi que le test de cohérence et la notion de redondance sont présentés comme reposant sur le principe de la vérification de l'adéquation entre les mesures et le système physique. La notion de modèle incertain et les différents types d'incertitudes ont été introduits à travers l'approche ensembliste (approche bornante) permettant d'appréhender les variables incertaines.

Le principe de l'analyse par intervalle et ses différents propriétés sont présentés. Ainsi les notions de fonction d'inclusion, d'inversion ensembliste et de contracteurs, permettant de minimiser l'effet d'enveloppement et d'alléger le temps de calcul requis pour résoudre une équation intervalle, sont expliquées. Enfin, on a présenté plusieurs méthodes de résolution d'un système linéaire intervalle en se basant sur la traduction automatique du système en un *CSP*.

Dans le chapitre suivant, on évoque le problème de la validation et de la réconciliation de données des systèmes incertains dans le cas statique en s'appuyant sur l'analyse par intervalle.

2

Validation de données des systèmes statiques incertains

Sommaire

2.1	Introduction	57
2.2	Systèmes certains et mesures incertaines	58
2.2.1	Capteur linéaire à caractéristique incertaine	58
2.2.2	Estimation d'état à partir des mesures	62
2.2.3	Test de cohérence de mesures : génération des résidus	64
2.2.4	Localisation de défauts de grandes amplitudes	66
2.2.5	Estimation d'état	68
2.2.6	Estimation d'état par réconciliation de données	70
2.2.7	Détection et localisation de défauts par réconciliation de données	72
2.2.8	Exemple	73
2.3	Systèmes et mesures incertains	79
2.3.1	Estimation d'état	81
2.3.2	Estimation d'état par réconciliation de données	82
2.3.3	Détection et localisation de défauts par réconciliation de données	85
2.3.4	Exemple	86
2.3.5	Sensibilité de détection de défauts vis-à-vis des paramètres incertains	92

2.4	Application à un réseau de transport de matière	95
2.4.1	Détection et localisation de défaut	97
2.4.2	Estimation des variables du système	98
2.4.3	Réconciliation de données	98
2.5	Conclusion	101

2.1 Introduction

Un système statique est un système dans lequel les grandeurs qui apparaissent (variables d'état X , entrées U , sorties Y) sont liées exclusivement par des relations indépendantes du temps. En fonction de la nature des relations auxquelles on s'intéresse, ce système peut être linéaire ou non-linéaire. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement aux relations linéaires.

Un système physique est, en général, conçu pour remplir une mission particulière. Un moyen de vérifier son bon fonctionnement et le respect de l'exécution de ses objectifs consiste à effectuer des mesures, puis à analyser ces mesures afin d'éprouver si cette mission est correctement remplie. De façon générale, la surveillance du fonctionnement d'un système repose sur une méthodologie qui consiste à définir les grandeurs qui caractérisent son fonctionnement, se doter de moyens de mesure de ces grandeurs, définir un protocole de mesure, analyser les mesures afin d'en déduire les caractéristiques de ce fonctionnement, discriminer les différentes hypothèses de bon et de mauvais fonctionnement. Il est donc important de disposer d'informations crédibles et représentatives du fonctionnement du système. Cependant, quelles que soient les précautions prises, l'immunité de la mesure vis-à-vis d'erreurs ne peut être totalement garantie. Il convient donc de disposer de procédures permettant de valider ces mesures. Comme mentionnée dans le chapitre précédent, la validation de données comporte plusieurs étapes. Dans ce chapitre, en s'appuyant sur l'exploitation de relations de redondance analytique, on se focalise sur la détection d'incohérences, la localisation des défauts de grande amplitude affectant les mesures (localisation de défauts uniques), l'estimation des variables d'état, l'estimation des valeurs manquantes et le remplacement de valeurs erronées par des valeurs vraisemblables.

Souvent, les problèmes de détection d'erreurs et de validation de mesures doivent être traités dans un contexte de modélisation. En effet, la plupart des systèmes sont caractérisés par plusieurs variables qui sont liées entre elles par le biais d'équations obtenues à partir des lois physiques de conservation de masse ou d'énergie [HBM97] ou à partir de modèles statistiques. Dans ce cas, les mesures, même si elles sont effectuées par des capteurs indépendants, doivent être traitées globalement puisqu'elles sont les images de grandeurs couplées par l'intermédiaire d'un modèle.

La plupart des méthodes de validation de données s'appuie sur une connaissance de la loi de distribution a priori des erreurs de mesure (méthodes issues du maximum de vraisemblance par exemple). On peut s'interroger sur le bien fondé de cette hypothèse et essayer de s'en affranchir. Il peut sembler raisonnable de faire simplement une hypothèse de bornitude sur les erreurs de mesure. Cette façon de les caractériser a été utilisée dans

des procédures d'identification et de diagnostic de systèmes [PAR99], [Adr00], [JKDW01]. L'approche bornante, appliquée à la théorie de l'estimation paramétrique, a vu le jour au cours des années 80 avec, notamment, les travaux de Fogel et Huang [FH82] qui utilisent des domaines ellipsoïdaux, puis ceux de Milanese et Belforte [MB82] qui travaillent avec des orthotopes. Plus tard, d'autres auteurs [WPL87], [MN88] ont utilisé des domaines sous forme de polytopes. Sommairement, le problème d'estimation paramétrique consiste à rechercher l'ensemble des valeurs de paramètres (Feasible Parameter Set) pour lequel chaque valeur est compatible avec toutes les observations disponibles lorsque l'erreur d'équation est bornée. Les mesures peuvent être alors décrites par un modèle à paramètres incertains. Notons aussi que des imprécisions subsistent toujours lors de la modélisation d'un système physique. Il est clair alors que l'incertitude peut affecter les mesures ou le système lui-même. Dans ce qui suit, la validation de mesures s'effectuera dans le cas où l'incertitude affecte uniquement les mesures et dans le cas où l'incertitude affecte à la fois les mesures et le système simultanément. Une estimée intervalle des variables d'état par la réconciliation de données sera également proposée en ayant le souci d'obtenir des estimées intervalles avec des rayons les plus petits possibles.

2.2 Systèmes certains et mesures incertaines

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux systèmes linéaires statiques décrits par des modèles certains avec des mesures fournies par des capteurs à caractéristiques incertaines. Nous présentons tout d'abord un modèle décrivant ce type de capteur puis, à partir des mesures, une estimée des variables d'état du système sera fournie. Ensuite, la notion de résidus intervalles est utilisée dans le but de tester la cohérence des mesures. En analysant les résidus et en s'appuyant sur la connaissance d'une table de signatures, une démarche de détection et de localisation des défauts de grande amplitude est mise en place. Enfin une estimée intervalle obtenue par réconciliation de données sera proposée.

2.2.1 Capteur linéaire à caractéristique incertaine

L'estimation d'une grandeur physique est, de façon très générale, effectuée à partir de l'information fournie par un capteur dont la caractéristique est connue. Le capteur, en vertu du principe physique sur lequel repose sa conception, donne une image y de la grandeur x à mesurer. La connaissance du principe physique utilisé permet de fournir un modèle f du capteur tel que :

$$y = f(x, \theta) \tag{2.1}$$

où le paramètre $\theta \in \mathbb{R}^p$ est supposé connu.

En réalité, le paramètre θ du capteur n'est pas connu exactement et on dispose seulement d'une approximation $\hat{\theta}$ de θ . De façon générale, l'erreur issue de cette approximation est non nulle. En plus, d'autres facteurs peuvent affecter cette approximation (modèle imparfait, variables exogènes influentes non prises en compte ...). Il est alors plus approprié de représenter ce paramètre par un modèle incertain. L'erreur d'approximation n'est pas connue, mais on peut supposer que sa variation est limitée. En supposant connue la plage de variation de θ , on peut le représenter par un intervalle $[\theta] = [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \in \mathbb{IR}^p$. Les bornes $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$ définissent un domaine dont les dimensions sont représentatives des incertitudes affectant le paramètre θ .

Un capteur à caractéristique statique linéaire incertaine peut être modélisé (en prenant en compte des erreurs additives et multiplicatives) de la façon suivante :

$$y = h(1 + a\eta)x + g(1 + b\mu) \quad \text{avec } |\eta| \leq 1 \text{ et } |\mu| \leq 1 \quad (2.2)$$

où h représente la valeur moyenne du gain du capteur et g celle de «l'offset», a et b les amplitudes des variations maximales des incertitudes, x est la variable à mesurer et y représente la mesure. Les variables bornées η et μ serviront à caractériser les erreurs à effets additifs et multiplicatifs ; à l'instant où la mesure est effectuée, ces erreurs sont inconnues. Dans la suite, et cela sans être très restrictif, on choisit les valeurs des constantes h et g positives. Pour comprendre le rôle joué par les constantes h , g , a et b ainsi que par les variables bornées η et μ intervenant dans le modèle du capteur (2.2), on peut s'interroger sur le caractère de discernabilité des mesures effectuées avec le même capteur pour deux valeurs distinctes d'une variable à mesurer.

Soit x_1 une valeur prise par la variable à mesurer. La mesure y_1 délivrée par le capteur appartient au domaine :

$$\begin{aligned} y_1 &\in [\underline{y}_1, \bar{y}_1] \\ \underline{y}_1 &= h(1 - a)x_1 + g(1 - b) \\ \bar{y}_1 &= h(1 + a)x_1 + g(1 + b) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considérons maintenant le cas où la variable à mesurer vaut x_2 . Le capteur fournit alors une mesure y_2 appartenant au domaine :

$$\begin{aligned} y_2 &\in [\underline{y}_2, \bar{y}_2] \\ \underline{y}_2 &= h(1 - a)x_2 + g(1 - b) \\ \bar{y}_2 &= h(1 + a)x_2 + g(1 + b) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour des valeurs x_1 et x_2 distinctes, il est donc possible que les intervalles auxquels les mesures appartiennent présentent une intersection non vide. Cela signifie que les paramètres d'incertitude peuvent prendre, aux moments où les deux mesures sont effectuées,

des valeurs telles que les mesures obtenues soient identiques. La condition d'intersection des intervalles $[y_1]$ et $[y_2]$ peut être expliquée par :

$$\begin{aligned} (\bar{y}_1 - \underline{y}_2)(\bar{y}_2 - \underline{y}_1) &> 0 \\ (h(1+a)x_1 + 2gb - h(1-a)x_2) (h(1+a)x_2 + 2gb - h(1-a)x_1) &> 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

La condition exprimée en (2.5) est vérifiée si et seulement si les deux termes de la partie gauche de l'inégalité, à savoir $(h(1+a)x_1 + 2gb - h(1-a)x_2)$ et $(h(1+a)x_2 + 2gb - h(1-a)x_1)$, sont de même signe. Ceci s'explique par les inégalités :

$$\left. \begin{aligned} (h(1+a)x_1 + 2gb - h(1-a)x_2) < 0 \\ (h(1+a)x_2 + 2gb - h(1-a)x_1) < 0 \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left. \begin{aligned} (h(1+a)x_1 + 2gb - h(1-a)x_2) > 0 \\ (h(1+a)x_2 + 2gb - h(1-a)x_1) > 0 \end{aligned} \right\}$$

qui permettent de définir deux régions D_1 et D_2 où :

$$\left. \begin{aligned} D_1 : x_1 < \frac{h(1-a)x_2 - 2gb}{h(1+a)} \\ D_2 : x_1 > \frac{h(1+a)x_2 + 2gb}{h(1-a)} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

L'ensemble solution de l'équation (2.5) est alors défini par :

$$D = (D_1 \cap D_2) \quad (2.7)$$

si $D = \emptyset$, alors les mesures des deux grandeurs distinctes x_1 et x_2 seront elles-mêmes différentes. La figure 2.1 illustre les deux situations de non discernabilité et de discernabilité des mesures (pour $h = 2$, $a = 0.1$, $g = 1$, $b = 0$).

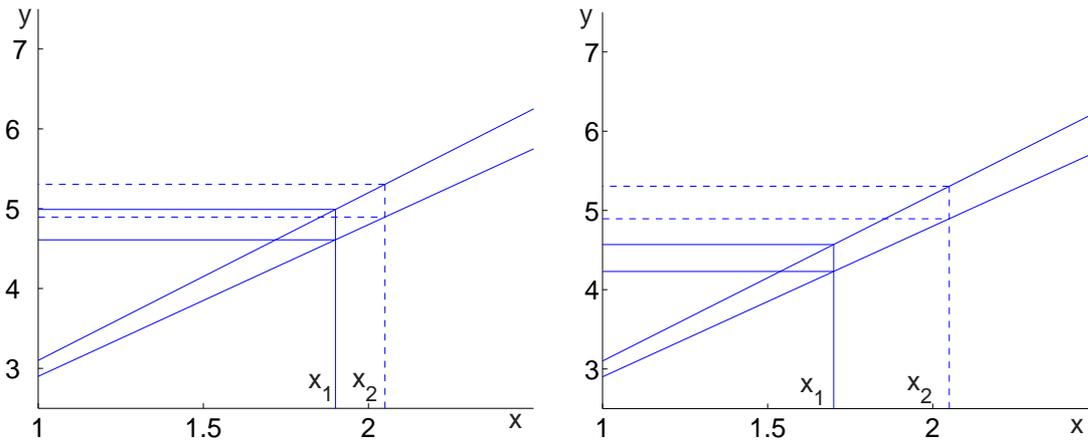


FIG. 2.1 – Non discernabilité et discernabilité des mesures

On peut aussi s'interroger sur le caractère de discernabilité des grandeurs vraies cor-

respondantes lorsqu'on dispose des mesures $y_{m,1}$ et $y_{m,2}$. Compte tenu de l'équation (2.2) et les mesures $y_{m,1}$ et $y_{m,2}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_{m,1} - g(1 + b\mu)}{h(1 + a\eta)}, & |\eta| \leq 1, \quad |\mu| \leq 1 \\ x_2 &= \frac{y_{m,2} - g(1 + b\mu)}{h(1 + a\eta)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

En remplaçant les variables incertaines bornées et normalisées η et μ par leur valeur intervalle, on obtient :

$$x_1 \in [x_1] = \left[\frac{y_{m,1} - g(1 + b)}{h(1 + a)}, \frac{y_{m,1} - g(1 - b)}{h(1 - a)} \right] \quad (2.9)$$

$$x_2 \in [x_2] = \left[\frac{y_{m,2} - g(1 + b)}{h(1 + a)}, \frac{y_{m,2} - g(1 - b)}{h(1 - a)} \right] \quad (2.10)$$

Si les deux intervalles $[x_1]$ et $[x_2]$ sont disjoints, alors on peut affirmer que les grandeurs vraies x_1 et x_2 sont distinctes. Au contraire, une intersection non vide de ces deux intervalles ne permet pas d'affirmer que les grandeurs vraies sont distinctes. La condition d'intersection entre les intervalles $[x_1]$ et $[x_2]$ peut être traduite par :

$$\left(\frac{y_{m,1} - g(1 - b)}{h(1 - a)} - \frac{y_{m,2} - g(1 + b)}{h(1 + a)} \right) \left(\frac{y_{m,2} - g(1 - b)}{h(1 - a)} - \frac{y_{m,1} - g(1 + b)}{h(1 + a)} \right) > 0 \quad (2.11)$$

A partir de cette inégalité on peut définir les domaines :

$$\left. \begin{aligned} D_1 : y_{m,1} &> \frac{(1 - a)y_{m,2} + 2g(a - b)}{(1 + a)} \\ D_2 : y_{m,1} &< \frac{(1 + a)y_{m,2} + 2g(a - b)}{(1 - a)} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Les valeurs de $y_{m,1}$ et $y_{m,2}$ satisfaisant les relations (2.12) sont caractérisées par :

$$D = (D_1 \cap D_2) \quad (2.13)$$

Si $D = \emptyset$, alors les deux grandeurs x_1 et x_2 sont différentes. Avec $h = 2$, $a = 0.1$, $g = 1$ et $b = 0$ les deux situations de non discernabilité et discernabilité des grandeurs à mesurer sont illustrées sur la figure 2.2.

Sur la plupart des processus réels, il est nécessaire de disposer d'un nombre assez important de capteurs. Le modèle (2.2) peut, dans ce cas, être étendu à un nombre n quelconque de capteurs. Dans la section qui suit, nous proposons un modèle incertain de

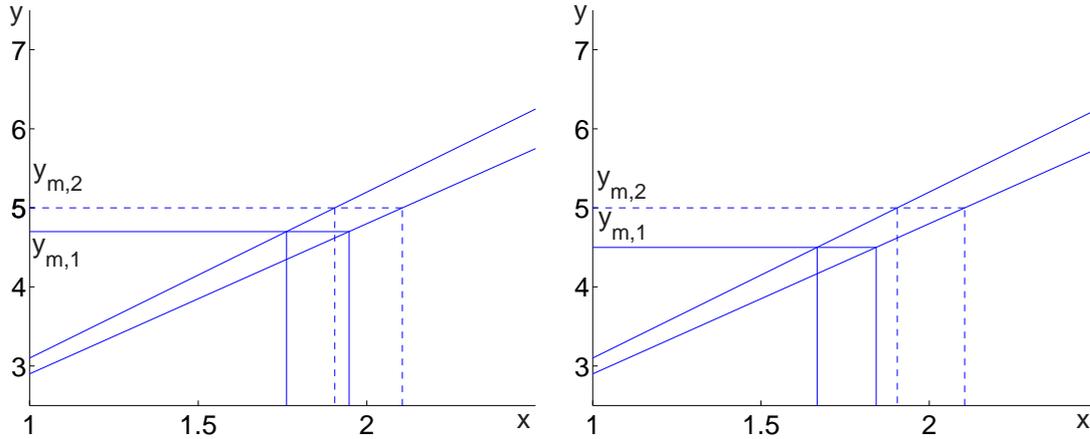


FIG. 2.2 – Non discernabilité et discernabilité des grandeurs à mesurer

n capteurs, puis en s'appuyant sur ce modèle nous montrons comment reconstruire les variables à mesurer à partir de mesures effectuées sur le processus.

2.2.2 Estimation d'état à partir des mesures

Le modèle (2.2) décrivant un capteur incertain, peut être étendu dans le cas de n capteurs incertains comme suit :

$$Y = D_h (I + D_a D_\eta) X + D_g (I + D_b D_\mu) \quad Y \in \mathbb{R}^n \quad (2.14)$$

où Y est le vecteur de mesures, X les variables à mesurer et $D_h, D_a, D_\eta, D_g, D_b, D_\mu$ sont des matrices diagonales définies par :

$$D_h = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix}, \quad D_a = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \quad D_b = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$$

$$D_\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_n \end{pmatrix}, \quad D_g = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{pmatrix}, \quad D_\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

où h_i représente la valeur moyenne du gain du $i^{\text{ème}}$ capteur ($i = 1, \dots, n$), g_i celle de «l'offset», a_i et b_i les amplitudes des variations maximales des incertitudes, η_i et μ_i sont des variables bornées et normalisées pour caractériser les erreurs à effets additifs et multiplicatifs. Sans atteinte à la généralité, les éléments a_i et b_i , h_i et g_i ($i = 1..n$) sont supposés positifs.

Le modèle du système de mesure (2.14) ou plus généralement le modèle (2.1) permet de fournir, au moyen d'un mécanisme d'inversion, une estimée des grandeurs X à partir des mesures Y (voir figure 2.3), ainsi à partir de (2.14) on peut écrire :

$$X_m = \left(I + D_a D_\eta \right)^{-1} D_h^{-1} \left(Y - D_g (I + D_b D_\mu) \right) \quad \hat{X}_m \in \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

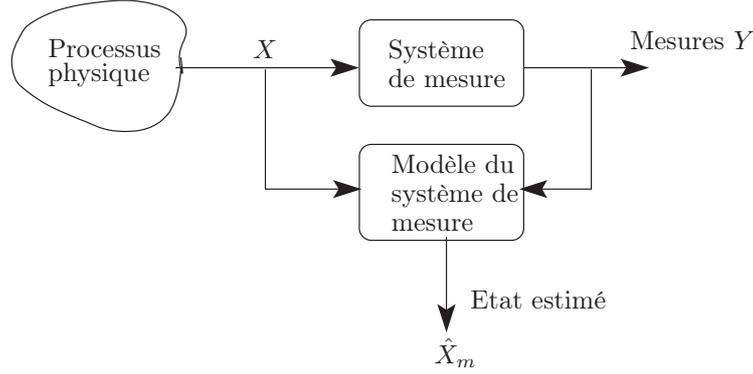


FIG. 2.3 – Estimation d'une grandeur vraie à partir de mesure

Compte tenu de l'équation (2.15), en remplaçant les variables bornées et normalisées η_i et μ_i par leurs valeurs intervalles (car leurs valeurs exactes ne peuvent être connues), nous pouvons déduire une estimée intervalle des variables à mesurer garantissant l'inclusion des valeurs réelles :

$$\begin{aligned} \hat{X}_m \in [\hat{X}_m] &= [\underline{\hat{X}}_m, \overline{\hat{X}}_m] \\ \underline{\hat{X}}_m &= \min_{D_\eta, D_\mu} \left((I + D_a D_\eta)^{-1} D_h^{-1} (Y - D_g (I + D_b D_\mu)) \right) \\ \overline{\hat{X}}_m &= \max_{D_\eta, D_\mu} \left((I + D_a D_\eta)^{-1} D_h^{-1} (Y - D_g (I + D_b D_\mu)) \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Comme les matrices D_h , D_a , D_g , D_b , D_η et D_μ sont diagonales, les bornes estimées, $\underline{\hat{X}}_m$ et $\overline{\hat{X}}_m$, dans l'équation (2.16) peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{X}}_m &= \left(I + D_a \right)^{-1} D_h^{-1} \left(Y - D_g (I - D_b) \right) \\ \overline{\hat{X}}_m &= \left(I - D_a \right)^{-1} D_h^{-1} \left(Y - D_g (I + D_b) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

On peut noter, sur les équations (2.17), que chaque mesure n'a d'influence que sur l'estimée de la variable qui lui est associée, c'est-à-dire, une mesure Y_i n'a d'influence que sur la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $[\hat{X}_m]$.

2.2.3 Test de cohérence de mesures : génération des résidus

La procédure de détection de défauts à base de modèle repose toujours sur un test de cohérence. Le test de cohérence de mesures se base sur une génération préalable de signaux indicateurs de défauts de mesures. Ces signaux, appelés aussi résidus, sont obtenus à partir de la connaissance du modèle du système considéré en fonctionnement normal et des mesures collectées sur ce système. Les résidus sont alors révélateurs de la cohérence des mesures vis-à-vis du modèle du système en fonctionnement normal. Nous procédons dans notre cas spécifique à la génération de résidus sous forme intervalle.

Considérons tout d'abord que le modèle du système est défini par l'équation suivante :

$$A X = 0 \quad X \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{m.n} \quad (2.18)$$

où A est la matrice des contraintes du modèle du système, X est le vecteur des variables à mesurer.

En remplaçant dans (2.18) les variables à mesurer par leurs estimées intervalles calculées à partir des mesures (2.16), nous pouvons déduire l'expression des résidus sous forme intervalle $[r_m] = A[\hat{X}_m]$ dont l'évaluation fait usage des règles de calcul de l'arithmétique des intervalles (voir équation (1.1)) :

$$\begin{aligned} [r_m] &= [\underline{r}_m, \bar{r}_m] = A[\hat{X}_m] \\ \underline{r}_m &= \frac{1}{2}A \left(\underline{\hat{X}}_m + \overline{\hat{X}}_m \right) + \frac{1}{2} |A| \left[\underline{\hat{X}}_m - \overline{\hat{X}}_m, \overline{\hat{X}}_m - \underline{\hat{X}}_m \right] \\ \bar{r}_m &= \frac{1}{2}A \left(\underline{\hat{X}}_m + \overline{\hat{X}}_m \right) + \frac{1}{2} |A| \left[\overline{\hat{X}}_m - \underline{\hat{X}}_m, \underline{\hat{X}}_m - \overline{\hat{X}}_m \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nous pouvons aussi générer d'autres résidus par des combinaisons adéquates entre les contraintes du modèle du système. Ces combinaisons permettent d'éliminer certaines variables et de supprimer l'influence de ces variables dans la valeur des résidus. Le nombre maximal de résidus pouvant être obtenus par des combinaisons linéaires entre les contraintes du modèle dépend du degré de redondance de chaque variable dans le modèle du système (2.18). Le degré de redondance d'une variable est égal au nombre de fois où cette variable est présente dans les contraintes du modèle. Le nombre maximal de résidus pouvant être calculé par des combinaisons adéquates pour éliminer une seule variable d'état est donné par $N^{(1)}$:

$$N^{(1)} = \sum_{i=1}^n C_{p_{x_i}}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(p_{x_i})(p_{x_i} - 1)}{2} \quad (2.20)$$

où p_{x_i} est le degré de redondance de la $i^{\text{ème}}$ variable. Si on élimine deux variables simul-

tanément le nombre maximal des résidus est donné par :

$$N^{(2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n C_{p_{x_i, x_j}}^3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{(p_{x_i, x_j})(p_{x_i, x_j} - 1)(p_{x_i, x_j} - 2)}{3!} \quad (2.21)$$

où p_{x_i, x_j} est le degré de redondance conjoint des $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ variables (présence simultanée des deux variables). De façon générale, le nombre maximal de résidus pouvant être obtenu par l'élimination de v variables simultanément, pour $v \geq 2$, est donné par :

$$\begin{aligned} N^{(v)} &= \sum_{i=1}^n \sum_{i+1}^n \dots \sum_v^n C_{p_{x_i, \dots, x_v}}^{(v+1)} = \sum_{i=1}^n \sum_{i+1}^n \dots \sum_v^n \frac{(p_{x_i, \dots, x_v})!}{(v+1)!(p_{x_i, \dots, x_v} - (v+1))!} \\ &= \frac{(p_{x_i, \dots, x_v})(p_{x_i, \dots, x_v} - 1) \dots (p_{x_i, \dots, x_v} - (v+2))}{(v+1)!} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où le degré de redondance conjoint des variables x_i, \dots, x_v vérifie $p_{x_i, \dots, x_v} > v$.

Finalement le nombre maximal des résidus qui peuvent être générés à partir du système $AX = 0$ en remplaçant X par $[\hat{X}_m]$ est donné par :

$$N = m + N^{(1)} + N^{(2)} + \dots + N^{(v)} \quad (2.23)$$

Ainsi, en étendant la définition (2.19), l'expression des résidus intervalles peut être déduite par :

$$\begin{aligned} [r] &= [r, \bar{r}] = \mathcal{A}[\hat{X}_m] \\ \underline{r} &= \frac{1}{2} \mathcal{A} \left(\underline{\hat{X}}_m + \overline{\hat{X}}_m \right) + \frac{1}{2} |\mathcal{A}| \left[\underline{\hat{X}}_m - \overline{\hat{X}}_m, \overline{\hat{X}}_m - \underline{\hat{X}}_m \right] \\ \bar{r} &= \frac{1}{2} \mathcal{A} \left(\underline{\hat{X}}_m + \overline{\hat{X}}_m \right) + \frac{1}{2} |\mathcal{A}| \left[\underline{\hat{X}}_m - \overline{\hat{X}}_m, \overline{\hat{X}}_m - \underline{\hat{X}}_m \right] \\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N, n} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{N-m, n}$ est la matrice issue des différentes combinaisons linéaires entre les contraintes du modèle du système (2.18).

Bien évidemment, dans le cas des systèmes de mesures certains, le résidu se réduit à la valeur 0 lorsque le système de mesure n'est pas défaillant ; en présence d'une défaillance, le résidu n'est pas nul et sa valeur est uniquement imputable à la défaillance. Pour des systèmes de mesures à caractéristiques incertaines, l'analyse des résidus s'avère plus délicate car elle doit prendre en compte les incertitudes. Pour cela, deux approches peuvent

être considérées : l'approche directe et l'approche indirecte.

L'approche directe consiste à tester s'il existe des matrices D_η et D_μ (voir équation 2.14), contenant des incertitudes bornées η_i et μ_i ($i = 1, \dots, n$), telle que le résidu $[r_j]$ $j = 1, \dots, N$ soit nul. S'il en est ainsi, les mesures intervenant dans l'expression de ce résidu peuvent être considérées comme cohérentes. L'approche indirecte consiste à tester si les résidus intervalles $[r_i]$ $i = 1 \dots N$ contiennent la valeur 0. Pour chaque composante $[r_i]$ de $[r]$, cela revient à tester le signe de la quantité :

$$t_i = \underline{r_i} \cdot \bar{r_i} \quad (2.25)$$

Toutes les mesures satisfaisant à la condition $t_i \leq 0$, $i = 1 \dots N$ peuvent donc être déclarées cohérentes.

Si le test précédent $t_i \leq 0$ garantit la cohérence des mesures, l'estimée \hat{X}_m des variables à mesurer peut être considérée cohérente avec le modèle du système, sinon cette estimée est incohérente avec le modèle du système et nous devons détecter et localiser les mesures à la source de cette incohérence, c'est-à-dire les mesures entachées d'erreurs.

Les expressions (2.24) montrent que le domaine des résidus est limité par un ensemble d'hyperplans parallèles deux à deux et parallèles aux axes de coordonnées. Le test $t_i \leq 0$ est équivalent à vérifier si l'origine appartient au polytope généré par les mesures et les résidus. De façon générale, le test de cohérence des mesures repose donc sur le calcul de la distance de l'origine aux différentes facettes du polytope défini en (2.24).

En conclusion, un résidu est considéré normal s'il contient la valeur 0, sinon ce résidu est anormal et on déclare dans ce cas qu'un ou plusieurs défauts affectent les mesures.

2.2.4 Localisation de défauts de grandes amplitudes

Dans ce paragraphe, notre intérêt s'est porté sur la méthode de localisation basée sur les signatures binaires de défauts. Pour cette méthode, la localisation de défauts nécessite la génération d'une matrice ou table de signatures théoriques des différents défauts pouvant affecter le système de mesure. Cette matrice doit traduire alors l'influence théorique des différents défauts que l'on cherche à détecter sur les résidus qui sont générés. L'évaluation des résidus permet ensuite de constituer un vecteur de signature expérimentale de défauts. En comparant les signatures théoriques des différents défauts avec la signature expérimentale, le défaut ayant occasionné le comportement anormal observé peut être identifié. La correspondance entre la signature expérimentale et les signatures théoriques

est effectuée en procédant à un calcul de distance entre la signature expérimentale et les différentes signatures théoriques.

2.2.4.1 Signatures théoriques et expérimentale de défauts

La matrice de signatures théoriques représente une codification binaire de la structure du système d'équations utilisé pour la génération des résidus. Cette matrice, notée S^t , traduit alors l'occurrence des différentes variables d'état dans les équations utilisées pour générer les résidus :

$$S_{i,j}^t = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{A}_{i,j} \neq 0 \quad i = 1 \dots N, j = 1 \dots n \\ 0 & \text{si } \mathcal{A}_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Par la suite $S_{*,j}^t$ désigne la $j^{\text{ème}}$ signature théorique.

La génération de la signature expérimentale S^e utilise aussi une codification binaire, et consiste à associer à chaque résidu la valeur 0 ou 1 selon qu'il est affecté ou non par un défaut. Rappelons qu'un résidu intervalle est affecté par un défaut s'il ne contient pas la valeur 0; sa signature est donc :

$$S_i^e = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \notin [r_i] \\ 0 & \text{si } 0 \in [r_i] \end{cases} \quad (2.27)$$

2.2.4.2 Localisation de défauts

La localisation de défauts est basée sur la comparaison de la signature expérimentale S^e avec les différentes signatures théoriques S^t . L'hypothèse de défaut la plus vraisemblable est désignée par la signature de défaut théorique la plus proche de la signature expérimentale. La localisation de défauts nécessite alors le calcul de la distance entre les différentes signatures théoriques de défauts et la signature expérimentale. Les mesures de distance fréquemment employées sont la distance euclidienne (2.28) et la distance de Hamming (2.29) [CSF92] :

$$d_j = \left(\sum_i (S_{i,j}^t - S_i^e)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left((S_{*,j}^t - S^e)^T (S_{*,j}^t - S^e) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

$$d_j = \sum_i S_{i,j}^t \oplus S_i^e \quad (2.29)$$

où d_j désigne la distance entre les signatures expérimentale et théoriques de défauts, et \oplus représente l'opérateur logique « ou exclusif ».

D'autres techniques de comparaison ont été proposées dans la littérature. Nous citons parmi ces techniques, l'utilisation d'un degré de cohérence des mesures [Ham86], l'utilisation de l'entropie de l'information contenue dans les signatures théoriques et expérimentale [Kra91] ou l'utilisation d'un indice de séparation des signatures théoriques et expérimentale [CHC91].

2.2.5 Estimation d'état

Dans un premier temps, la détection d'un défaut sur les mesures permet de valider ou d'invalider les mesures selon qu'elles sont affectées ou pas par ce défaut, ce qui peut constituer un moyen de surveillance des capteurs qui les délivrent. Cependant, les mesures déclarées invalides engendrent une perte d'informations quant à la connaissance de l'état du système. Dès qu'on détecte un défaut sur une mesure à partir des résidus, l'estimée calculée à partir des mesures (2.15) devient incohérente avec le modèle du système. En plus le calcul de cette estimée ne prend pas en compte les contraintes du modèle du système.

Pour donner une estimée des variables à mesurer cohérente avec le modèle du système (2.18), sous l'hypothèse d'un défaut de mesure unique, nous corrigeons tout d'abord a posteriori la mesure qui est en défaut. Puis en prenant en compte la mesure corrigée, les mesures saines et le modèle du système (2.18), nous proposons une estimée des variables à mesurer.

Supposons que la $i^{\text{ème}}$ mesure soit déclarée invalide (affectée par un défaut). En utilisant les mesures déclarées valides (saines) et le modèle du système, on calcule toutes les estimations possibles de la $i^{\text{ème}}$ variable. Pour cela, considérons la $j^{\text{ème}}$ contrainte supposée dépendre de la $i^{\text{ème}}$ variable. Afin de calculer l'estimée de la $i^{\text{ème}}$ variable de cette contrainte, définissons $B_j^{(i)}$ le vecteur construit à partir de $A_{j,*}$ (la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A) en changeant le signe de tous ses éléments, en les divisant ensuite par le $i^{\text{ème}}$ et enfin en annulant le $i^{\text{ème}}$:

$$\begin{aligned} B_{j,k}^{(i)} &= -\frac{A_{j,k}}{A_{j,i}} & A_{j,i} \neq 0, & \quad k = 1 \dots n, \quad k \neq i \\ B_{j,i}^{(i)} &= 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

L'estimée intervalle de la $i^{\text{ème}}$ variable à partir de la $j^{\text{ème}}$ contrainte du modèle du système (2.18) s'exprime alors par :

$$[\hat{X}_{i,j}] = B_j^{(i)}[\hat{X}_m] = \frac{1}{2}B_j^{(i)}(\underline{\hat{X}}_m + \overline{\hat{X}}_m) + \frac{1}{2}|B_j^{(i)}|[\underline{\hat{X}}_m - \overline{\hat{X}}_m, \overline{\hat{X}}_m - \underline{\hat{X}}_m] \quad (2.31)$$

En supposant que le degré de redondance de la $i^{\text{ème}}$ variable est p , on peut alors calculer p estimées intervalles de cette variable en utilisant les p contraintes de modèle (2.18) contenant cette variable. En effectuant l'intersection entre ces différentes estimées, on obtient une estimée $[\hat{X}_i]$ qui garantit l'inclusion de la valeur réelle (vraie) de cette variable :

$$[\hat{X}_i] = [\max(\inf(B^{(i)}[\hat{X}_m])), \min(\sup(B^{(i)}[\hat{X}_m]))] \quad (2.32)$$

où $B^{(i)} \in \mathbb{R}^{p,n}$ est la matrice constituée de tous les vecteurs pouvant être calculés à partir du modèle du système pour la $i^{\text{ème}}$ variable selon (2.30). Le calcul de $B^{(i)}[\hat{X}_m]$ s'effectue en utilisant le même principe que pour calculer les résidus (2.19).

En remplaçant la $i^{\text{ème}}$ composante de $[\hat{X}_m]$ (voir les équations 2.16 et 2.17) par $[\hat{X}_i]$, on obtient une estimée $[\hat{X}_s]$ cohérente avec le modèle du système.

Pour prendre en compte toutes les contraintes du modèle du système (2.18), nous pouvons répéter la démarche exprimée précédemment sur toutes les variables en utilisant l'estimée $[\hat{X}_s]$ au lieu de $[\hat{X}_m]$ dans l'équation (2.32). Finalement, pour obtenir une estimée des variables d'état avec des rayons les plus petits possibles, nous choisissons :

$$[\hat{X}_f] = [\hat{X}] \cap [\hat{X}_s] \quad (2.33)$$

La mise en œuvre de cette méthode est relativement aisée, mais elle présente cependant un inconvénient majeur. En effet, il est possible qu'un défaut n'ait pas une amplitude suffisante pour être détecté au niveau de l'ensemble des résidus qu'il devrait en théorie affecter. Cette situation conduit à la génération d'une signature de défaut expérimentale erronée qui entraîne une mauvaise localisation lorsqu'elle est identique à la signature d'un autre défaut. De plus l'estimée d'état déclarée cohérente avec le modèle du système dans ce cas ne l'est pas en réalité. Pour cela, en s'appuyant sur un critère d'optimisation et en prenant en compte l'incertitude sur les mesures, une méthode de réconciliation de données permettant de calculer une estimée des variables d'état, en prenant en compte le modèle du système, plus précise que celle calculée précédemment sera développée. La méthode permet aussi de détecter et localiser les défauts affectant les mesures.

2.2.6 Estimation d'état par réconciliation de données

Nous avons vu dans le premier chapitre que le problème de la réconciliation de données consiste à ajuster les mesures collectées sur un système de façon à ce qu'elles vérifient les contraintes (les équations) du modèle décrivant ce système. Dans la plupart des travaux effectués sur la réconciliation de données, les auteurs supposent que les erreurs de mesures sont indépendantes, de moyenne nulle, ayant une variance connue et suivent une distribution gaussienne. Dans ce qui suit, nous proposons d'employer seulement les bornes inférieures et supérieures des erreurs, ces bornes étant choisies selon la précision des mesures [RMAD05].

Considérons l'expression (2.16), où une estimée des variables d'état est obtenue sous une forme intervalle à partir des mesures. Selon cette expression, le domaine des variables d'état est limité par un ensemble d'hyperplans parallèles deux à deux issu de l'intersection des bandes définies par les bornes inférieures et supérieures des estimées $[\hat{X}_m]$. Ce domaine est parfaitement cohérent vis-à-vis du modèle de mesures mais il doit vérifier aussi le modèle du système; pour cela, nous proposons une stratégie en deux étapes. Dans la première étape, en prenant compte des contraintes du modèle (équation 2.18), nous réduisons le nombre de variables d'état à estimer. Dans la deuxième étape, en tenant compte des variables réduites dans la première étape et du modèle de mesures (2.14), nous exprimons sous forme intervalle une estimée des variables à mesurer cohérente avec le modèle du système en s'appuyant sur un critère d'optimisation sous contraintes.

2.2.6.1 Première étape

On réduit la dimension du problème d'estimation à partir des relations de dépendance entre variables. Sans atteinte à la généralité, on peut toujours supposer que les contraintes du modèle (2.18) sont indépendantes et donc la matrice A est de plein rang ligne. On réorganise A et X sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_b & A_h \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_b \in \mathbb{R}^{m,(n-m)} \quad A_h \in \mathbb{R}^{m,m} \quad (2.34)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_b \\ X_h \end{pmatrix}, \quad X_b \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad X_h \in \mathbb{R}^m \quad (2.35)$$

où A_h est une matrice régulière de rang m obtenue par permutation des lignes et des colonnes de la matrice A , X_b est un vecteur constitué des variables indépendantes (au sens des contraintes introduites par le modèle du système 2.18).

Nous pouvons alors exprimer l'état du système sous la forme :

$$X = HX_b \quad \text{avec } H = \begin{pmatrix} I \\ -A_h^{-1}A_b \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

2.2.6.2 Deuxième étape

Selon la décomposition précédente et compte tenu de l'estimée intervalle obtenue à partir des mesures (2.16) et (2.17), les estimées des grandeurs vraies indépendantes doivent donc respecter :

$$\underline{\hat{X}}_m \leq H\hat{X}_b \leq \overline{\hat{X}}_m \quad \text{avec } \hat{X}_b \in \mathbb{IR}^{n-m} \quad (2.37)$$

Le domaine ainsi généré est un polytope convexe dont la forme peut être complexe. Nous proposons de réduire le domaine admissible à une forme orthotopique alignée (centre X_c et longueur $2X_r$) :

$$[\hat{X}_b] = X_c + \lambda \otimes X_r \quad X_c \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad X_r \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \lambda \in \mathbb{IR}^{n-m} \quad (2.38)$$

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n - m \quad (2.39)$$

où l'opérateur \otimes désigne la multiplication de deux vecteurs élément par élément et λ_i représente la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur λ . Compte tenu de (2.37), les paramètres de forme du domaine X_c et X_r doivent satisfaire à :

$$\underline{\hat{X}}_m \leq H(X_c + \lambda \otimes X_r) \leq \overline{\hat{X}}_m \quad (2.40)$$

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n - m \quad (2.41)$$

Afin que le domaine admissible soit « le plus grand possible », les relations (2.40) et (2.41) doivent être résolues de façon à obtenir le rayon X_r maximal. Nous devons résoudre alors un problème d'optimisation et pour cela on doit choisir un critère à optimiser. Parmi les choix possibles, nous proposons de maximiser « la taille » de l'orthotope défini en (2.38). Ainsi, le problème d'optimisation du volume de l'orthotope s'explique :

$$\left. \begin{array}{l} \max_{X_{r,i}} \prod_{i=1}^{n-m} X_{r,i} \\ HX_c + |H| X_r - \overline{\hat{X}}_m \leq 0 \\ -HX_c + |H| X_r + \underline{\hat{X}}_m \leq 0 \end{array} \right\} \quad (2.42)$$

$X_{r,i}$ étant les composantes du X_r .

Ce problème classique d'optimisation peut être résolu en utilisant des techniques d'optimisation sous contraintes (voir par exemple [BGLS02]).

Connaissant alors X_c et X_r , une estimée des variables X cohérente avec le modèle du système peut être calculée :

$$[\hat{X}] = H[\hat{X}_b] \quad (2.43)$$

Notons que grâce au critère d'optimisation utilisé pour l'estimation d'état par réconciliation de données, nous obtenons une estimée d'état avec des rayons plus petits que ceux calculés dans la section précédente (l'estimée \hat{X}_f (2.33)).

2.2.7 Détection et localisation de défauts par réconciliation de données

Si le problème d'optimisation (2.42) n'a pas de solution, on en déduit que l'estimée $[\hat{X}_m]$, obtenue à partir des mesures, n'est pas cohérente avec le modèle du système. On suspecte donc les mesures utilisées pour calculer cette estimée. Pour localiser la mesure ayant provoqué l'incohérence entre le modèle du système (2.18) et l'estimée $[\hat{X}_m]$, on étudie l'influence de chaque mesure séparément sur le résultat du problème d'optimisation (2.42). Pour cela, on écrit les relations (2.42) sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \max_{X_{r,i}} \prod_{i=1}^{n-m} X_{r,i} \\ f_j(X_c, X_r, \hat{X}_{m,j}) \leq 0 \\ g_j(X_c, X_r, \hat{X}_{m,j}) \leq 0 \end{array} \right\}, \quad j = 1 \dots n \quad (2.44)$$

Pour étudier l'influence de la $k^{\text{ème}}$ mesure sur les relations (2.44), on reformule ces relations sans prendre en compte les contraintes associées à cette mesure :

$$\left. \begin{array}{l} \max_{X_{r,i}} \prod_{i=1}^{n-m} X_{r,i} \\ f_j(X_c, X_r, \hat{X}_{m,j}) \leq 0 \\ g_j(X_c, X_r, \hat{X}_{m,j}) \leq 0 \end{array} \right\}, \quad j = 1 \dots n, \quad j \neq k \quad (2.45)$$

Sous l'hypothèse d'un défaut de mesure unique, deux situations sont possibles :

- si on trouve une solution au problème (2.45), on déclare que cette mesure est invalide (affectée par un défaut). La solution obtenue permet, selon (2.43), de calculer une estimée de toutes les variables du système.

L'obtention d'une estimée $[\hat{X}]$ selon (2.43), cohérente avec le modèle du système,

permet de calculer une estimée des sorties des capteurs selon la relation (2.14) :

$$[\hat{Y}] = D_h (I + D_a D_\eta) [\hat{X}] + D_g (I + D_b D_\mu) \quad (2.46)$$

L'estimée $[\hat{Y}]$ est calculée à partir des données ($[\hat{X}]$) cohérentes avec le modèle du système, elle garantit donc l'inclusion de l'état réel du système de mesure. Ainsi, toutes les valeurs appartenant au domaine défini par la $k^{\text{ème}}$ composante de $[\hat{Y}]$ peuvent servir à corriger, a posteriori, la $k^{\text{ème}}$ mesure en défaut. Nous pouvons alors considérer $[\hat{Y}]$ comme référence et la comparer avec les mesures réelles pour tester le résultat obtenu par la résolution du problème d'optimisation (2.45). Pour cela on génère les résidus intervalles suivants :

$$[r_m] = [\hat{Y}] - Y \quad (2.47)$$

Notons que ces résidus sont structurés puisque chaque résidu est sensible aux défauts sur une seule mesure. Ainsi, si le résidu $[\hat{r}_{m,k}]$ est anormal (ne contient pas la valeur 0), on déduit que la $k^{\text{ème}}$ mesure est affectée par un ou plusieurs défauts.

- si l'on ne trouve pas de solution au problème (2.45), on déclare que la $k^{\text{ème}}$ mesure est valide. Ainsi, on garde les contraintes faisant intervenir cette mesure et on reformule le problème (2.42) en supprimant les contraintes relatives à une autre mesure. On répète le processus pour étudier l'influence de toutes les mesures sur le problème (2.42), on s'arrête bien sûr dès qu'on trouve une solution au problème d'optimisation reformulé.

Signalons que l'obtention des résidus intervalles à partir des mesures réelles et estimées (2.47) ne fait usage que de peu d'opérations d'arithmétique des intervalles. Ainsi l'effet d'enveloppement est réduit par rapport au cas où les résidus sont générés à partir du modèle du système (2.24). Il en résulte une plus grande sensibilité aux défauts des résidus calculés.

2.2.8 Exemple

Considérons le système décrit par le modèle suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \quad (2.48)$$

Les mesures des variables intervenant dans le modèle (2.48) sont données par :

$$Y = (2.04 \ 10.64 \ 8.06 \ 14.11 \ 4.03)^T \quad (2.49)$$

Les capteurs utilisés pour mesurer les variables sont modélisés par (2.14) où :

$$\begin{aligned}
 D_h &= \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\
 D_a &= \text{diag}(0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2) \\
 D_g &= \text{diag}(0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2) \\
 D_b &= \text{diag}(0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05) \\
 D_\eta &= \text{diag}(\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5), \quad |\eta_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 5 \\
 D_\mu &= \text{diag}(\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \mu_5), \quad |\mu_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 5
 \end{aligned}$$

où *diag* est un opérateur créant une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs du vecteur passé en paramètres. A partir des mesures Y on peut obtenir, selon les équations (2.16) et (2.17), une estimée intervalle des variables à mesurer $[\hat{X}_m]$.

$$[\hat{X}_m] = \left([1.52, 2.31] \ [8.69, 13.06] \ [6.54, 9.84] \ [11.58, 17.40] \ [3.18, 4.80] \right)^T \quad (2.50)$$

Compte tenu des relations (2.23), (2.24) et (2.48), le nombre maximal de résidus intervalles pouvant être générés est égal à 10 :

$$\begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ [r_3] \\ [r_4] \\ [r_5] \\ [r_6] \\ [r_7] \\ [r_8] \\ [r_9] \\ [r_{10}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} [X_m] = \begin{pmatrix} [-8.83, -0.37] \\ [-16.85, -1.50] \\ [-8.35, -1.58] \\ [-2.17, 11.31] \\ [-16.39, -2.74] \\ [-24.41, -3.87] \\ [-6.57, 6.62] \\ [-3.61, 2.88] \\ [-4.95, 6.46] \\ [-11, 99, 11.15] \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

où les résidus $[r_1]$, $[r_2]$ et $[r_3]$ sont obtenus directement à partir du modèle du système (2.48) en remplaçant les variables par leur estimée \hat{X}_m . Les résidus $[r_4]$, $[r_5]$ et $[r_6]$ sont obtenus par élimination de la variable X_1 du modèle (2.48). Quant aux résidus $[r_7]$, $[r_8]$ et $[r_9]$, ils sont issus de l'élimination de la variable X_2 du modèle (2.48). Enfin, le résidu $[r_{10}]$ est obtenu en éliminant simultanément les variables X_1 et X_2 du modèle(2.48).

Il est clair que certains résidus ne contiennent pas la valeur 0 ce qui permet de déclarer, sous l'hypothèse d'un défaut unique, qu'une mesure est affectée par un défaut. Pour localiser cette mesure, on établit la matrice des signatures théorique S^t et la signature expérimentale S^e :

$$S^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Les distances euclidiennes entre la signature expérimentale et l'ensemble des 5 signatures théoriques valent :

$$d = (2.24 \ 1 \ 2.65 \ 2.65 \ 2.24)$$

Il apparaît clairement que la distance minimale correspond à la deuxième variable X_2 et l'on peut donc déclarer que la mesure utilisée pour calculer l'estimée de cette variable est affectée par un défaut. Selon la relation (2.32), on peut calculer une estimée intervalle de cette variable, cohérente avec le modèle du système. Notons que pour calculer cette estimée, on n'utilise que des mesures saines :

$$[\hat{X}_2] = [4.71, 7.11], \quad \text{avec} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où la matrice $B^{(2)}$ est obtenue à partir du modèle du système (2.48), en effectuant toutes les possibilités permettant de calculer une estimée de la deuxième variable X_2 et en utilisant des mesures saines. Comme le modèle (2.48) contient la variable X_2 dans toutes ses contraintes, la matrice $B^{(2)}$ est donc constituée de trois vecteurs.

On répète ce qu'on a fait pour obtenir $[\hat{X}_2]$ sur toutes les variables, ce qui permet de prendre en compte l'influence des contraintes du système sur toutes les variables estimées :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_1] &= [1.52, 2.31], \quad \text{avec} \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ [\hat{X}_3] &= [6.54, 9.84], \quad \text{avec} \quad B^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\hat{X}_4] &= [11.58, 17.40], \quad \text{avec} \quad B^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[\hat{X}_5] = [3.18, 4.80], \quad \text{avec } B^{(5)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on obtient, selon l'équation (2.33), l'estimée finale $[X_f]$ qui prend en compte les mesures et le modèle du système simultanément :

$$[X_f] = \begin{pmatrix} [1.52, 2.31] \\ [4.71, 7.11] \\ [6.54, 9.84] \\ [11.58, 17.40] \\ [3.18, 4.80] \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} [-0.09, 3.93] \\ [4.71, 7.11] \\ [6.23, 9.42] \\ [10.94, 16.53] \\ [2.40, 5.59] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.52, 2.31] \\ [4.71, 7.11] \\ [6.54, 9.42] \\ [11.58, 16.53] \\ [3.18, 4.80] \end{pmatrix}$$

Il est également possible d'appliquer la méthode d'estimation d'état par réconciliation de données développée au paragraphe 2.2.6 en vue de calculer une estimée des variables du modèle (2.48) et de procéder par la suite à la détection et localisation de défauts en utilisant la démarche proposée au paragraphe 2.2.7. Pour cela, compte tenu de l'estimée (2.50) calculée à partir de mesures et des relations (2.37), (2.38), (2.39), (2.40) et (2.41), on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\hat{X}}_{m,1} &\leq X_{c,1} + X_{r,1}\lambda_1 \leq \overline{\hat{X}}_{m,1} \\ \underline{\hat{X}}_{m,2} &\leq X_{c,2} + X_{r,2}\lambda_2 \leq \overline{\hat{X}}_{m,2} \\ \underline{\hat{X}}_{m,3} &\leq X_{c,1} + X_{c,2} + X_{r,1}\lambda_1 + X_{r,2}\lambda_2 \leq \overline{\hat{X}}_{m,3} \\ \underline{\hat{X}}_{m,4} &\leq X_{c,1} + 2X_{c,2} + X_{r,1}\lambda_1 + 2X_{r,2}\lambda_2 \leq \overline{\hat{X}}_{m,4} \\ \underline{\hat{X}}_{m,5} &\leq -X_{c,1} + X_{c,2} - X_{r,1}\lambda_1 + X_{r,2}\lambda_2 \leq \overline{\hat{X}}_{m,5} \\ &|\lambda_1| \leq 1 \\ &|\lambda_2| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

En résolvant les inégalités (2.53), on ne trouve aucune solution. On conclut alors que les mesures permettant de calculer \hat{X}_m sont affectées par un défaut. Pour localiser la mesure affectée par le défaut, sous l'hypothèse de défaut de mesure unique, on suit l'algorithme proposé dans le paragraphe 2.2.7. Grâce à cet algorithme, on constate que les inégalités (2.53) n'ont pas de solution sauf si l'on néglige les contraintes faisant intervenir la mesure Y_2 . Ainsi, le problème d'optimisation à résoudre, compte tenu de la relation (2.45), peut être formulé comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \max X_{r,1} X_{r,2} \\
 & X_{r,1} > 0 \\
 & X_{r,2} > 0 \\
 & \underline{\hat{X}}_{m,1} - X_{c1} - X_{r,1} \leq 0 \\
 & X_{c1} + X_{r,1} - \overline{\hat{X}}_{m,1} \leq 0 \\
 & \underline{\hat{X}}_{m,3} - X_{c1} - X_{c2} - X_{r,1} - X_{r,2} \leq 0 \\
 & X_{c1} + X_{c2} + X_{r,1} + X_{r,2} - \overline{\hat{X}}_{m,3} \leq 0 \\
 & \underline{\hat{X}}_{m,4} - X_{c1} - 2X_{c2} - X_{r,1} - 2X_{r,2} \leq 0 \\
 & X_{c1} + 2X_{c2} + X_{r,1} + 2X_{r,2} - \overline{\hat{X}}_{m,4} \leq 0 \\
 & \underline{\hat{X}}_{m,5} + X_{c1} - X_{c2} + X_{r,1} - X_{r,2} \leq 0 \\
 & -X_{c1} + X_{c2} - X_{r,1} + X_{r,2} - \overline{\hat{X}}_{m,5} \leq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

En utilisant un algorithme d'optimisation sous contraintes (l'outil LMI toolbox de matlab par exemple), on obtient $X_{c,1} = 1.92$, $X_{r,1} = 0.39$, $x_{c,2} = 5.91$ et $X_{r,2} = 0.42$. La figure 2.4 montre le domaine caractérisant l'orthotope aligné obtenu en résolvant le problème d'optimisation (2.54).

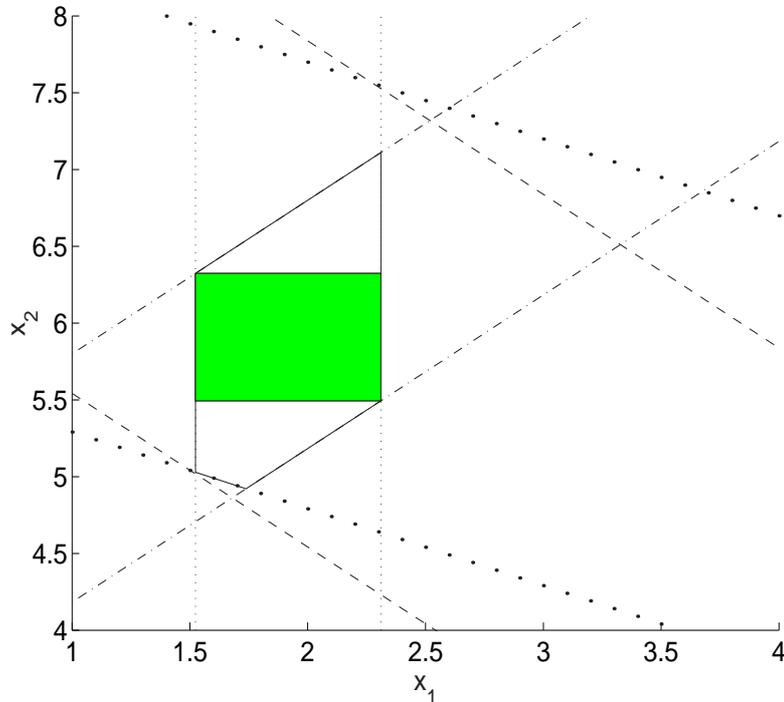


FIG. 2.4 – Domaine admissible et optimisé des variables du système

Grâce à $X_{c,1}$, $X_{r,1}$, $X_{c,2}$ et $X_{r,2}$, on peut calculer à partir de l'équation (2.43) une

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\underline{r}	-5.55	-10.29	-5.08	-4.35	-9.84	-14.58	-6.57	-3.61	-4.95
\bar{r}	1.81	2.86	0.61	8.04	1.63	2.68	6.62	2.88	6.46

TAB. 2.1 – Les résidus à partir du modèle du système

estimée de toutes les variables d'état :

$$[\hat{X}] = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} [X_{c,1} - X_{r,1}, X_{c,1} + X_{r,1}] \\ [X_{c,2} - X_{r,2}, X_{c,2} + X_{r,2}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.52, 2.31] \\ [5.49, 6.32] \\ [7.02, 8.64] \\ [12.51, 14.96] \\ [3.18, 4.80] \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

où la matrice $H = \begin{pmatrix} I \\ -A_h^{-1}A_b \end{pmatrix}$ est obtenue avec $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_b = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour vérifier que le défaut détecté est effectivement sur le capteur localisé (la mesure Y_2), on peut calculer maintenant une estimée intervalle des sorties de capteurs et générer des résidus intervalles en utilisant les formules (2.46) et (2.47) :

$$[\hat{Y}] = \begin{pmatrix} [1.41, 2.98] \\ [4.59, 7.80] \\ [5.81, 10.57] \\ [10.20, 18.16] \\ [2.74, 5.97] \end{pmatrix}, \quad [r_m] = \begin{pmatrix} [-0.63, 0.94] \\ [-6.05, -2.84] \\ [-2.26, 2.51] \\ [-3.91, 4.05] \\ [-1.29, 1.94] \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Il apparaît que $r_{m,2}$ est anormal, on en déduit alors que la mesure Y_2 est effectivement affectée par un défaut. Pour montrer l'efficacité de la détection et de la localisation de défaut en utilisant cette méthode par rapport à la méthode basée sur l'analyse des tables de signatures théoriques et expérimentale, on considère le vecteur de mesure suivant :

$$Y = \left(2.04 \ 8.05 \ 8.06 \ 14.11 \ 4.03 \right)^T \quad (2.57)$$

Avec ce vecteur de mesures, l'analyse des matrices des signatures théoriques et expérimentale de défaut ne permet pas de détecter un défaut, puisque tous les résidus intervalle $[r]$, calculés selon les relations (2.51), sont normaux (table 2.1). Par contre, la génération des résidus intervalles structurés à partir des mesures estimées et des mesures réelles (table 2.2) selon la relation (2.47) permet de détecter un défaut sur la mesure Y_2 .

	1	2	3	4	5
\hat{Y}	1.41	4.59	5.80	10.20	2.74
\hat{Y}	2.99	7.80	10.57	18.16	5.97
\underline{r}_m	-0.63	-3.43	-2.26	-3.91	-1.29
\bar{r}_m	0.94	-0.22	2.51	4.05	1.94

TAB. 2.2 – Les mesures estimées et les résidus par la méthode de réconciliation de données

La performance des deux méthodes proposées (la première est basée sur la génération des résidus r (2.24) puis l'analyse des tables de signatures théoriques et expérimentale et la deuxième qui est basée sur la génération des résidus structurés r_m (2.47)), pour la détection et la localisation de défauts est analysée de façon expérimentale. Pour cela, on exécute les deux méthodes proposées 100000 fois en prenant soin de faire varier de façon aléatoire l'amplitude du bruit affectant les vecteurs de mesures (2.49) et (2.57) tout au long des exécutions. Le pourcentage de bonne détection est alors calculé en faisant le rapport entre le nombre de cas de bonnes détections et le nombre de simulations effectuées, en l'occurrence 100000. Les résultats expérimentaux ont mis en évidence un pourcentage de bonne détection de 82% pour la première méthode et de 87% pour la seconde.

2.3 Systèmes et mesures incertains

L'hypothèse d'exactitude du modèle du système supposée dans la section 2.2 n'est pas toujours valable car il y a, en général, un certain désaccord entre le système réel et son modèle à cause de plusieurs facteurs. Citons parmi ces facteurs, les hypothèses simplificatrices, les imprécisions sur l'identification des paramètres du modèle, les changements de comportement du système réel au cours du temps,... Ce qui a été énoncé concernant les incertitudes d'un système de mesure vaut également pour le système physique auquel il est connecté. Dans cette partie, nous proposons d'étendre les deux méthodes de validation de données présentées dans la section 2.2 lorsque le système et son instrumentation de mesure ont simultanément des composants à caractéristiques incertaines.

Considérons le modèle du système défini en (2.58) et le modèle des capteurs associées à ce système (2.59).

$$A(\eta_A) X = 0 \quad X \in \mathbb{R}^n \quad A(\eta_A) \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (2.58)$$

$$Y = D_h (I + D_a D_\eta) X + D_g (I + D_b D_\mu) \quad Y \in \mathbb{R}^n \quad (2.59)$$

où les matrices D_h , D_a , D_η , D_g , D_b et D_μ ainsi que les vecteur X et Y sont définies comme

précédemment (voir équation (2.14)).

La matrice incertaine $A(\eta_A)$ est définie par :

$$A(\eta_A) = A^0 + \Delta_A \otimes \eta_A, \quad A^0 \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad \Delta_A \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad \eta_A \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{m,n} \quad (2.60)$$

où l'opérateur \otimes permet d'effectuer la multiplication de deux matrices élément par élément, A^0 est la matrice nominale de $A(\eta_A)$, Δ_A est la matrice d'amplitude des incertitudes affectant les éléments de la matrice $A(\eta_A)$ et η_A est une matrice constituée de variables bornées et normalisées.

En effectuant les combinaisons adéquates entre les contraintes du modèle du système (2.58), on peut calculer le système augmenté défini par :

$$\tilde{A}(\eta_A) X = 0 \quad X \in \mathbb{R}^n \quad \tilde{A}(\eta_A) \in \mathbb{R}^{N-m,n} \quad (2.61)$$

Rappelons que la matrice $\tilde{A}(\eta_A)$ a été définie en (2.24) et que les équations (2.23), (2.22), (2.21) et (2.20) permettent d'obtenir le nombre maximale des combinaisons possibles à partir du modèle (2.58).

En regroupant les équations (2.58) et (2.61), on peut écrire :

$$\mathcal{A}(\eta_A) X = 0, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A(\eta_A) \\ \tilde{A}(\eta_A) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(\eta_A) \in \mathbb{R}^{N,n} \quad (2.62)$$

Les valeurs des éléments de la matrice incertaine $\mathcal{A}(\eta_A)$ ne sont pas connues mais leurs bornes sont supposées connues. En remplaçant les éléments de la matrice $\mathcal{A}(\eta_A)$ par leurs bornes inférieures et supérieures et le vecteur d'état X par son estimée intervalle \hat{X}_m , calculée à partir de mesures selon la relation (2.16), nous obtenons les résidus intervalles suivants :

$$[r] = [\mathcal{A}][\hat{X}_m] \quad [r] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^N \quad \text{avec } [\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [A] \\ [\tilde{A}] \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

En utilisant les règles de l'arithmétique des intervalles mentionnées dans le premier chapitre, on peut calculer les bornes inférieures et supérieures des résidus $[r]$. Le domaine des résidus est toujours limité par un ensemble d'hyperplans parallèles deux à deux et parallèles aux axes de coordonnées.

La méthode de détection et localisation de défauts par analyse des résidus intervalles et des matrices de signatures de défauts proposée dans la section précédente reste valable dans ce cas aussi. Pour cela, en supposant qu'un défaut est détecté et localisé sur la $i^{\text{ème}}$

mesure, nous consacrons le paragraphe suivant au calcul d'une estimée des variables à mesurer cohérente avec le modèle du système (2.58).

2.3.1 Estimation d'état

La présence d'un défaut sur une mesure induit une incohérence entre l'estimée $[\hat{X}_m]$ calculée à partir des mesures et le modèle du système. Pour corriger cette estimée de façon à avoir une valeur cohérente avec le modèle du système, nous calculons une estimée de la composante de $[\hat{X}_m]$ influencée par le défaut en utilisant les mesures saines restantes et le modèle du système. Rappelons que les équations (2.16) et (2.17) montrent que chaque mesure n'a d'influence que sur l'estimée de la variable qui lui est associée. Afin de calculer toutes les estimées possibles d'une variable d'état à partir du modèle du système, on définit $B_j^{(i)}(\eta_{A_{j,*}})$ le vecteur construit à partir de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice incertaine $A(\eta_A)$ comme suit :

$$\begin{aligned} B_{j,k}^{(i)}(\eta_{A_{j,*}}) &= -\frac{A_{j,k}(\eta_{A_{j,k}})}{A_{j,i}(\eta_{A_{j,i}})}, \quad A_{j,i} \neq 0, \quad k = 1 \dots n, \quad k \neq i \\ B_{j,i}^{(i)}(\eta_{A_{j,i}}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

En remplaçant les variables incertaines par leurs bornes inférieures et supérieures, on obtient le vecteur intervalle suivant :

$$\begin{aligned} [B_{j,k}^{(i)}] &= -\frac{[A_{j,k}]}{[A_{j,i}]}, \quad 0 \notin [A_{j,i}], \quad k = 1 \dots n, \quad k \neq i \\ [B_{j,i}^{(i)}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

L'estimée intervalle de la $i^{\text{ème}}$ variable d'état à partir de la $j^{\text{ème}}$ contrainte du modèle du système s'exprime alors par :

$$[\hat{X}_{i,j}] = [B_j^{(i)}][\hat{X}_m] \quad (2.66)$$

Pour illustrer les équations (2.64), (2.65) et (2.66), prenons l'exemple suivant :

$$a_1(1 + 0.1\eta_{a_1})X_1 + a_2(1 + 0.1\eta_{a_2})X_2 + a_3(1 + 0.1\eta_{a_3})X_3 = 0 \quad (2.67)$$

$$a_4(1 + 0.1\eta_{a_4})X_1 + a_5(1 + 0.1\eta_{a_5})X_2 + a_6(1 + 0.1\eta_{a_6})X_3 = 0 \quad (2.68)$$

$$|\eta_{a_1}| \leq 1, \quad |\eta_{a_2}| \leq 1, \quad |\eta_{a_3}| \leq 1, \quad |\eta_{a_4}| \leq 1, \quad |\eta_{a_5}| \leq 1, \quad |\eta_{a_6}| \leq 1$$

Pour calculer, par exemple, à partir de l'équation (2.67) une estimée de X_2 , on construit selon l'équation (2.64) le vecteur $B_1^{(2)}(\eta_{a_1}, \eta_{a_2}, \eta_{a_3})$:

$$B_1^{(2)}(\eta_{a_1}, \eta_{a_2}, \eta_{a_3}) = \left(\frac{-a_1(1 + 0.1\eta_{a_1})}{a_2(1 + 0.1\eta_{a_2})} \quad 0 \quad \frac{-a_3(1 + 0.1\eta_{a_3})}{a_2(1 + 0.1\eta_{a_2})} \right) \quad (2.69)$$

En remplaçant η_{a_1} , η_{a_2} et η_{a_3} par leurs bornes inférieures et supérieures, on obtient le vecteur intervalle suivant :

$$[B_1^{(2)}] = \left(\frac{[-a_1 - 0.1, -a_1 + 0.1]}{[a_2 - 0.1, a_2 + 0.1]} \ 0 \ \frac{[-a_3 - 0.1, -a_3 + 0.1]}{[a_2 - 0.1, a_2 + 0.1]} \right) \quad (2.70)$$

Ainsi, l'estimée de X_2 peut être calculée par :

$$[\hat{X}_2] = [B_1^{(2)}]X \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

En supposant que le degré de redondance de la $i^{\text{ème}}$ variable d'état est p (présence p fois de la $i^{\text{ème}}$ variable dans le modèle du système (2.58)), on peut alors calculer p estimées intervalles de cette variable. L'estimée intervalle \hat{X}_i , avec le rayon le plus petit possible et qui garantit l'inclusion de l'état réel X_i , peut être obtenue en effectuant l'intersection entre ces différentes estimées :

$$[\hat{X}_k] = \left[\max \left(\inf([B^{(i)}][\hat{X}_m]) \right), \min \left(\sup([B^{(i)}][\hat{X}_m]) \right) \right] \quad (2.72)$$

où $[B^{(i)}] \in \mathbb{IR}^{p,n}$ est la matrice constituée de tous les vecteurs pouvant être calculés à partir du modèle du système pour la $i^{\text{ème}}$ variable d'état selon (2.65). Dans l'exemple précédent $[B^{(2)}] \in \mathbb{IR}^{2,3}$.

En remplaçant la $i^{\text{ème}}$ composante de l'estimée $[\hat{X}_m]$ par $[\hat{X}_i]$, on obtient une estimée $[\hat{X}_s]$ cohérente avec le modèle du système.

Pour prendre en compte toutes les contraintes du modèle du système, nous pouvons répéter la démarche exprimée précédemment sur toutes les variable d'état en utilisant l'estimée $[\hat{X}_s]$ au lieu de $[\hat{X}_m]$ dans l'équation (2.72). Finalement, pour obtenir une estimée des variables d'état avec des rayons les plus petits possibles, nous choisissons :

$$[\hat{X}_f] = [\hat{X}] \cap [\hat{X}_s] \quad (2.73)$$

2.3.2 Estimation d'état par réconciliation de données

Pour calculer une estimée des variables intervenant dans le modèle du système (2.58) avec des rayons les plus petits possibles, nous utilisons un critère d'optimisation. Pour cela, compte tenu du modèle du système (2.58) et de l'estimée calculée à partir de mesures \hat{X}_m (2.16) et (2.17), on reprend les deux étapes explicitées dans la section 2.2.6) mais cette fois avec un système incertain.

2.3.2.1 Première étape

On réduit la dimension du problème à partir des relations de dépendance entre variables. Sans atteinte à la généralité, on peut toujours supposer que les contraintes du modèle (2.58) sont indépendantes et que la matrice $A(\eta_A)$ est de plein rang ligne (plusieurs méthodes sont proposées dans l'annexe C pour calculer le rang d'une matrice incertaine). On peut donc réorganiser $A(\eta_A)$ et X sous la forme :

$$A(\eta_A) = \begin{pmatrix} A_b(\eta_A) & A_h(\eta_A) \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_b(\eta_A) \in \mathbb{R}^{m,(n-m)}, \quad A_h(\eta_A) \in \mathbb{R}^{m,m} \quad (2.74)$$

$$X = \begin{pmatrix} X_b \\ X_h \end{pmatrix}, \quad X_b \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad X_h \in \mathbb{R}^m \quad (2.75)$$

où $A_h(\eta_A)$ est une matrice régulière de rang m obtenue par permutation des lignes et des colonnes de $A(\eta_A)$. Nous pouvons maintenant exprimer l'état du système sous la forme :

$$X = HX_b, \quad \text{avec } H = \begin{pmatrix} I \\ -A_h^{-1}(\eta_A)A_b(\eta_A) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

où X_b est un vecteur constitué des variables indépendantes (au sens des contraintes introduites par le modèle du système (2.58)).

Les valeurs des paramètres incertains de la matrice $A(\eta_A)$ ne sont pas connues de façon exacte, mais leurs bornes sont supposées connues. En remplaçant ces paramètres par leurs bornes inférieures et supérieures, on obtient l'équation intervalle suivante :

$$[X] = [H]X_b, \quad \text{avec } [H] = \begin{pmatrix} I \\ -[A_h]^{-1}[A_b] \end{pmatrix} X_b \quad (2.77)$$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer l'inverse de la matrice intervalle $[A_h]$, ces méthodes ont été explicitées dans le premier chapitre. Notons que, afin de minimiser l'effet d'enveloppement, la réorganisation de la matrice $A(\eta_A)$ sous la forme (2.74), doit permettre l'obtention de la matrice intervalle $[A_h]$ de façon à ce que tous ses éléments diagonaux ne contiennent pas de zéro. On peut alors écrire la matrice $[H]$ sous la forme :

$$[H] = \begin{pmatrix} I \\ [M] \end{pmatrix}, \quad \text{où } [M] = [-[A_h]^{-1}[A_b]] \quad (2.78)$$

La matrice intervalle $[H]$ peut être représentée par sa matrice centre $H_c = c([H])$ obtenue par le calcul des centres de ses éléments et par la matrice H_r contenant les rayons de ses

éléments, ce qui permet d'écrire la relation (2.77) sous la forme :

$$[X] = (H_c + H_r \otimes \lambda_H) X_b \quad \lambda_H \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n,n-m} \quad (2.79)$$

$$H_c = \begin{pmatrix} I \\ M_c \end{pmatrix}, \quad H_r = \begin{pmatrix} 0_{(n-m,n-m)} \\ M_r \end{pmatrix} \quad M_c \in \mathbb{R}^{m,n-m}, \quad M_r \in \mathbb{R}^{m,n-m} \quad (2.80)$$

L'opérateur \otimes effectue le produit de la matrice H_r et de la matrice λ_H , constituée des variables bornées et normalisées, élément par élément.

2.3.2.2 Deuxième étape

Selon la décomposition précédente, les estimées \hat{X}_b des grandeurs vraies indépendantes X_b doivent donc respecter l'ensemble des inégalités :

$$\underline{\hat{X}}_m \leq (H_c + H_r \otimes \lambda_H) \hat{X}_b \leq \overline{\hat{X}}_m \quad \text{avec } \hat{X}_b \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (2.81)$$

Le domaine ainsi généré est un polytope convexe dont la forme peut être complexe. Nous proposons de réduire le domaine admissible à une forme orthotopique alignée (centre X_c et longueur $2X_r$) :

$$[\hat{X}_b] = X_c + \lambda \otimes X_r \quad X_c \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad X_r \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \lambda \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n-m} \quad (2.82)$$

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1 \dots n - m \quad (2.83)$$

où l'opérateur \otimes exécute le produit de deux vecteurs élément par élément. Compte tenu de (2.81), on peut écrire :

$$\underline{\hat{X}}_m \leq (H_c + H_r \otimes \lambda_H) (X_c + \lambda \otimes X_r) \leq \overline{\hat{X}}_m \quad (2.84)$$

$$|\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1 \dots n - m \quad (2.85)$$

$$|\lambda_{H_{i,j}}| \leq 1, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots n - m \quad (2.86)$$

Le calcul des bornes inférieures et supérieures du terme $(H_c + H_r \otimes \lambda_H) (X_c + \lambda \otimes X_r)$ peut être obtenu en s'appuyant sur l'arithmétique des intervalle :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_H, \lambda} \left((H_c + H_r \otimes \lambda_H) (X_c + \lambda \otimes X_r) \right) &= \max_{\text{lignes } p} \left(\underbrace{\sup \left((H_c - H_r)(X_c - X_r) \right)}_{p_1} \right) \\ &\quad \underbrace{\sup \left((H_c - H_r)(X_c + X_r) \right)}_{p_2}, \underbrace{\sup \left((H_c + H_r)(X_c - X_r) \right)}_{p_3}, \underbrace{\sup \left((H_c + H_r)(X_c + X_r) \right)}_{p_4} \end{aligned} \quad (2.87)$$

où $\max_{\text{lignes } p}$ permet d'obtenir la plus grande valeur de chaque ligne de la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes p_1, p_2, p_3 et p_4 .

$$\min_{\lambda_H, \lambda} \left((H_c + H_r \otimes \lambda_H) (X_c + \lambda \otimes X_r) \right) = \min_{\text{lignes } k} \left(\underbrace{\inf ((H_c - H_r)(X_c - X_r))}_{k_1} \right. \quad (2.88)$$

$$\left. \underbrace{\inf ((H_c - H_r)(X_c + X_r))}_{k_2}, \underbrace{\inf ((H_c + H_r)(X_c - X_r))}_{k_3}, \underbrace{\inf ((H_c + H_r)(X_c + X_r))}_{k_4} \right)$$

où $\min_{\text{lignes } k}$ permet d'obtenir la plus petite valeur de chaque ligne de la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes k_1, k_2, k_3 et k_4 .

Afin que le domaine admissible soit « le plus grand possible », les relations (2.84), (2.85) et (2.86) doivent être résolues de façon à obtenir le rayon X_r maximal. Nous devons résoudre alors un problème d'optimisation et pour cela on doit choisir un critère à optimiser. Comme cela a été fait dans le cas de systèmes certains et des mesures incertaines, nous proposons de maximiser le volume de l'orthotope aligné caractérisé par les composants $X_{r,i}$ du centre X_r . Ainsi, compte tenu des équations (2.87) et (2.88) le problème d'optimisation à résoudre est :

$$\left. \begin{array}{l} \max_{X_{r,i}} \prod_{i=1}^{n-m} X_{r,i} \\ \max_{\lambda_H, \lambda} \left((H_c + H_r \otimes \lambda_H) (X_c + \lambda \otimes X_r) \right) - \overline{\hat{X}}_m \leq 0 \\ \min_{\lambda_H, \lambda} \left((H_c + H_r \otimes \lambda_H) (X_c + \lambda \otimes X_r) \right) + \underline{\hat{X}}_m \leq 0 \end{array} \right\} \quad (2.89)$$

En utilisant une technique d'optimisation sous contraintes, on peut trouver les valeurs optimales de X_c et X_r . Une estimée des variables à mesurer cohérente avec le modèle du système peut ensuite être calculée à partir de (2.77) :

$$[\hat{X}] = H[\hat{X}_b] \quad (2.90)$$

2.3.3 Détection et localisation de défauts par réconciliation de données

La stratégie proposée pour détecter et localiser les défauts de mesures dans le cas de systèmes certains avec des mesures incertaines (section 2.2.7) peut être appliquée aussi dans le cas où le système et les mesures sont incertains. Ainsi, lorsque le problème d'optimisation (2.89) n'a pas de solution, on déclare qu'un ou plusieurs défauts affectent les mesures ayant servi à calculer l'estimée $[\hat{X}_m]$ intervenant dans (2.89) (voir les équations

2.17 et 2.16). La localisation de la mesure en défaut, sous l'hypothèse d'un défaut de mesure unique, est faite en testant l'influence des mesures une par une sur le résultat du problème d'optimisation (2.89). La mesure testée est déclarée comme étant en défaut dès qu'une solution est trouvée au problème d'optimisation. On calcule ensuite selon (2.90) une estimée de toutes les variables intervenant dans le modèle du système (2.58). Pour vérifier le résultat obtenu, on calcule une estimée intervalle des sorties des capteurs selon l'équation (2.91). Puis on génère selon l'équation (2.92) des résidus intervalles structurés :

$$[\hat{Y}] = D_h (I + D_a D_\eta) [\hat{X}] + D_g (I + D_b D_\mu) \quad (2.91)$$

$$[r_m] = [\hat{Y}] - Y \quad [r_m] \in \mathbb{IR}^n \quad (2.92)$$

Ainsi, si la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur intervalle $[r_m]$ est anormale (ne contient pas 0), on déduit que la $i^{\text{ème}}$ mesure est en défaut.

2.3.4 Exemple

Pour illustrer les méthodes d'estimation d'état et de détection et localisation de défauts présentées dans la section précédente (2.3), considérons un système incertain décrit par le modèle (2.58) avec :

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_A \right)}_{A(\eta_A)} X = 0 \quad (2.93)$$

$\eta_A \in \mathbb{IR}^{3,5}$ avec $|\eta_{A_{i,j}}| \leq 1$, $i = 1...3$, $j = 1...5$.

Les capteurs mesurant les variables intervenant dans le modèle (2.93) sont modélisés par (2.59) avec D_h , D_a , D_η , D_g , D_b et D_μ des matrices diagonales :

$$D_h = \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$D_a = \text{diag}(0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2)$$

$$D_g = \text{diag}(0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2)$$

$$D_b = \text{diag}(0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.05)$$

$$D_\eta = \text{diag}(\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4 \ \eta_5), \quad |\eta_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 5$$

$$D_\mu = \text{diag}(\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \mu_5), \quad |\mu_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 5$$

où diag est un opérateur associé à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux

sont les paramètres de l'opérateur *diag*. Les sorties des capteurs sont données par :

$$Y = (2.04 \ 11.43 \ 8.04 \ 13.93 \ 4.20) \quad (2.94)$$

A partir des mesures Y on peut obtenir, selon les équations (2.16) et (2.17), l'estimée intervalle des variables d'état $[\hat{X}_m]$.

$$[\hat{X}_m] = \left([1.52, 2.31] \ [9.35, 14.05] \ [6.52, 9.81] \ [11.44, 17.18] \ [3.32, 5.01] \right)^T \quad (2.95)$$

Compte tenu de la relation (2.23), le nombre maximal de résidus intervalle pouvant être générés est égal à 10. Avec les valeurs numériques indiquées, on obtient :

$$\begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ [r_3] \\ [r_4] \\ [r_5] \\ [r_6] \\ [r_7] \\ [r_8] \\ [r_9] \\ [r_{10}] \end{pmatrix} = [\mathcal{A}][\hat{X}_m] = \begin{pmatrix} [-10.98, -0.33] \\ [-20.13, -1.50] \\ [-9.90, -1.56] \\ [-18.06, 5.91] \\ [-21.05, -1.49] \\ [-30.81, -2.62] \\ [-10.07, 9.78] \\ [-5.22, 4.40] \\ [-7.43, 7.95] \\ [-44.72, 37.45] \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

où :

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [-1.05, -0.95] & [-1.05, -0.95] & [0.95, 1.05] & 0 & 0 \\ [-1.1, -0.9] & -2 & 0 & [0.92, 1.08] & 0 \\ 1 & [-1.05, -0.95] & 0 & 0 & 1 \\ 0 & [-1.19, -0.78] & [-1.22, -0.81] & [0.92, 1.08] & 0 \\ 0 & [-2.16, -1.85] & [0.91, 1.11] & 0 & 1 \\ 0 & [-3.16, -2.86] & 0 & [0.92, 1.08] & [0.90, 1.1] \\ [0.71, 1.31] & 0 & [-2.21, -1.81] & [0.92, 1.08] & 0 \\ [1.86, 2.16] & 0 & [-1.16, -0.86] & 0 & 1 \\ [-3.21, -2.81] & 0 & 0 & [0.92, 1.08] & [-2.11, -1.91] \\ 0 & 0 & [2.14, 4.78] & [-3.61, -1.26] & 1 \end{pmatrix}$$

Les résidus $[r_1]$, $[r_2]$ et $[r_3]$ sont obtenus à partir du modèle du système (2.93) en remplaçant les paramètres incertains par leurs bornes inférieures et supérieures et les variables à mesurer par leurs estimées intervalle calculées à partir des mesures. Les résidus $[r_4]$, $[r_5]$ et $[r_6]$ sont obtenus par élimination de la variable X_1 du modèle (2.93), les résidus $[r_7]$,

$[r_8]$ et $[r_9]$ sont issus de l'élimination de la variable X_2 du modèle (2.93) et le résidu $[r_{10}]$ est obtenu en éliminant simultanément les variables X_1 et X_2 du modèle (2.93). Pour illustrer la façon d'éliminer les variables à partir du modèle du système, considérons par exemple la cinquième ligne de la matrice \mathcal{A} . Cette ligne est obtenue en éliminant la variable X_1 entre la première et la troisième contrainte du modèle (2.93) :

$$\left(\frac{1 - 0.05\eta_{1,2}}{-1 + 0.05\eta_{1,1}} - 1 + 0.05\eta_{3,2} \right) X_2 + \frac{-1 + 0.05\eta_{1,3}}{-1 + 0.05\eta_{1,1}} X_3 + X_5 = 0$$

En remplaçant les variables bornées et normalisées $\eta_{1,2}$, $\eta_{1,1}$, $\eta_{3,2}$ et $\eta_{1,3}$ par leurs bornes, on obtient :

$$[-2.16, -1.85] X_2 + [0.91, 1.11] X_3 + X_5 = 0$$

On analyse les résidus (2.96) en s'appuyant sur les matrices des signatures théoriques et expérimentale des défauts. Les distances euclidiennes calculées à partir de la signature expérimentale et l'ensemble des cinq signatures théoriques sont :

$$d = (2.24 \ 1 \ 2.65 \ 2.65 \ 2.24)$$

Il est clair que la distance minimale correspond à la deuxième variable X_2 , ce qui permet de déclarer que la mesure utilisée pour estimer X_2 est affectée par un défaut. Selon la relation (2.72) et en utilisant les mesures saines (Y_1 , Y_3 , Y_4 et Y_5) on peut calculer, à partir du modèle du système (2.93), une estimée intervalle de $X_2 = [4.62, 7.71]$ où la matrice intervalle $[B^{(i)}]$, $i = 2$, intervenant dans (2.72) est calculée comme suit :

$$[B^{(2)}] = \begin{pmatrix} \frac{-1 + 0.05\eta_{1,1}}{1 - 0.05\eta_{1,2}} & 0 & \frac{1 + 0.05\eta_{1,3}}{1 - 0.05\eta_{1,2}} & 0 & 0 \\ \frac{-1 + 0.1\eta_{2,1}}{2} & 0 & 0 & \frac{1 + 0.08\eta_{1,1}}{2} & 0 \\ \frac{1}{1 - 0.05\eta_{3,2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1 - 0.05\eta_{3,2}} \end{pmatrix}$$

En remplaçant les variables bornées et normalisées par leur bornes, on obtient :

$$[B^{(2)}] = \begin{pmatrix} [-1.11, -0.91] & 0 & [0.91, 1.11] & 0 & 0 \\ [-0.55, -0.45] & 0 & 0 & [0.46, 0.54] & 0 \\ [0.95, 1.05] & 0 & 0 & 0 & [0.95, 1.05] \end{pmatrix}$$

En substituant $[\hat{X}_{m,2}]$ par $[\hat{X}_2]$ dans (2.95), on obtient une estimée $[\hat{X}_s]$ cohérente avec le modèle du système :

$$[\hat{X}_s] = \left([1.52, 2.31] [4.62, 7.71] [6.52, 9.81] [11.44, 17.18] [3.32, 5.01] \right)^T \quad (2.97)$$

Pour prendre en compte l'influence des contraintes du modèle (2.93) sur toutes les variables estimées, on répète ce qu'on a fait pour obtenir $[\hat{X}_2]$ pour toutes les variables restantes (X_1, X_3, X_4 et X_5) :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_1] &= [1.52, 2.31], & \text{avec } B^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & [-1.11, -0.91] & [0.91, 1.11] & 0 & 0 \\ 0 & [-2.22, -1.82] & 0 & [0.84, 1.2] & 0 \\ 0 & [0.95, .05] & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ [\hat{X}_3] &= [6.54, 9.84], & \text{avec } B^{(3)} &= \begin{pmatrix} [0.91, 1.1] & [0.91, 1.1] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\hat{X}_4] &= [11.58, 17.40], & \text{avec } B^{(4)} &= \begin{pmatrix} [0.83, 1.2] & [1.85, 2.17] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\hat{X}_5] &= [3.18, 4.80], & \text{avec } B^{(5)} &= \begin{pmatrix} -1 & [0.95, 1.05] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Enfin, on obtient, selon l'équation (2.73), l'estimée finale $[X_f]$ qui prend en compte les mesures et le modèle du système simultanément :

$$[X_f] = \begin{pmatrix} [-0.63, 4.77] \\ [4.62, 7.71] \\ [5.56, 11.07] \\ [8.55, 16.75] \\ [2.08, 6.57] \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} [1.52, 3.31] \\ [4.62, 7.71] \\ [6.52, 9.81] \\ [11.44, 17.18] \\ [3.32, 5.01] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.52, 3.31] \\ [4.62, 7.71] \\ [6.52, 9.81] \\ [11.44, 16.75] \\ [3.32, 5.01] \end{pmatrix}$$

Nous pouvons aussi calculer une estimée des variables intervenant dans le modèle (2.93) en utilisant la méthode de l'estimation d'état par réconciliation de données développée au paragraphe 2.3.2. Pour cela, compte tenu de l'estimée (2.95) calculée à partir des mesures et des relations (2.81)-(2.86), on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} & \underline{\hat{X}}_{m,1} \leq X_{c,1} + X_{r,1}\lambda_1 \leq \overline{\hat{X}}_{m,1} \\ & \underline{\hat{X}}_{m,2} \leq X_{c,2} + X_{r,2}\lambda_2 \leq \overline{\hat{X}}_{m,2} \\ \underline{\hat{X}}_{m,3} & \leq \frac{1 - 0.05\eta_{1,1}}{1 + 0.05\eta_{1,3}}(X_{c,1} + X_{r,1}\lambda_1) + \frac{1 - 0.05\eta_{1,2}}{1 + 0.05\eta_{1,3}}(X_{c,2} + X_{r,2}\lambda_2) \leq \overline{\hat{X}}_{m,3} \\ \underline{\hat{X}}_{m,4} & \leq \frac{1 - 0.1\eta_{2,1}}{1 + 0.08\eta_{2,4}}(X_{c,1} + X_{r,1}\lambda_1) - \frac{2}{1 + 0.08\eta_{2,4}}(X_{c,2} + X_{r,2}\lambda_2) \leq \overline{\hat{X}}_{m,4} \\ \underline{\hat{X}}_{m,5} & \leq -X_{c,1} - X_{r,1}\lambda_1 + (1 - 0.05\eta_{3,2})(X_{c,2} + X_{r,2}\lambda_2) \leq \overline{\hat{X}}_{m,5} \\ & |\lambda_1| \leq 1 \\ & |\lambda_2| \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

En résolvant les inégalités (2.98), on ne trouve aucune solution, on conclut ainsi que les mesures permettant de calculer \hat{X}_m sont affectées par un défaut. Pour localiser la mesure affectée par le défaut, sous l'hypothèse de défaut de mesure unique, on suit l'algorithme proposé dans le paragraphe 2.3.3. Grâce à cet algorithme, on constate que les inégalités

(2.98) n'ont pas de solution sauf si l'on néglige les contraintes liées à la mesure Y_2 . Ainsi le problème d'optimisation à résoudre, compte tenu de la relation (2.87), (2.88) et (2.89), peut être formulé comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \max X_{r,1} X_{r,2} \\
 & X_{r,1} > 0 \\
 & X_{r,2} > 0 \\
 & \hat{X}_{m,1} - X_{c1} - X_{r,1} \leq 0 \\
 & X_{c1} + X_{r,1} - \hat{X}_{m,1} \leq 0 \\
 & \hat{X}_{m,3} - 0.9X_{c1} - 0.9X_{c2} + 0.9X_{r,1} + 0.9X_{r,2} \leq 0 \\
 & 1.11X_{c1} + 1.11X_{c2} + 1.11X_{r,1} + 1.11X_{r,2} - \hat{x}_{m,3} \leq 0 \\
 & \hat{X}_{m,4} - 0.82X_{c1} - 1.83X_{c2} + 0.82X_{r,1} + 1.83X_{r,2} \leq 0 \\
 & 1.2X_{c1} + 2.17X_{c2} + 1.2X_{r,1} + 2.17X_{r,2} - \hat{X}_{m,4} \leq 0 \\
 & \hat{X}_{m,5} + X_{c1} - 0.95X_{c2} + X_{r,1} + 0.95X_{r,2} \leq 0 \\
 & -X_{c1} + 1.05X_{c2} + X_{r,1} + 1.05X_{r,2} - \hat{X}_{m,5} \leq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

En utilisant un algorithme d'optimisation sous contraintes on obtient $X_{c,1} = 1.82$, $X_{r,1} = 0.2723$, $X_{c,2} = 5.97$ et $X_{r,2} = 0.2726$. La figure 2.5 montre l'orthotope aligné obtenu par la résolution des inégalités (2.99).

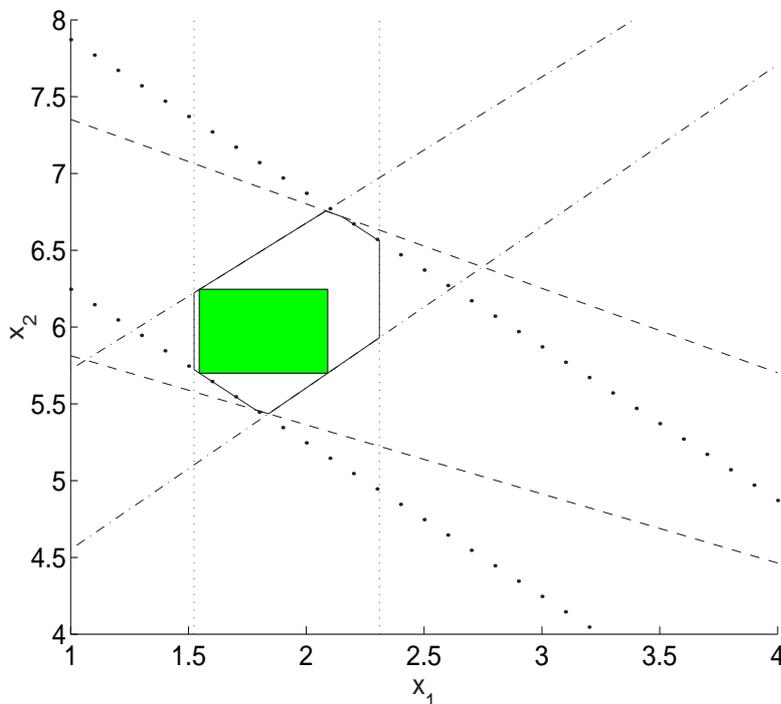


FIG. 2.5 – Domaine admissible et optimisé des variables du système

En utilisant la solution obtenue en résolvant (2.99), l'équation (2.90) permet de calculer

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\underline{r}	-6.23	-11.07	-5.15	-6.34	-9.53	-16.16	-8.62	-4.08	-6.78
\bar{r}	2.83	4.52	1.30	9.78	2.64	5.52	8.59	3.67	7.56

TAB. 2.3 – Les résidus à partir du modèle du système

une estimée de toutes les variables intervenant dans le modèle (2.93) :

$$[\hat{X}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ [0.9, 1.11] & [0.9, 1.11] \\ [0.82, 1.2] & [1.83, 2.17] \\ -1 & [0.95, 1.05] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [x_{c,1} - x_{r,1}, x_{c,1} + x_{r,1}] \\ [x_{c,2} - x_{r,2}, x_{c,2} + x_{r,2}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.55, 2.09] \\ [5.70, 6.25] \\ [6.52, 9.21] \\ [11.68, 16.08] \\ [3.32, 5.01] \end{pmatrix}$$

Pour vérifier que le défaut détecté est sur le capteur Y_2 , on peut calculer une estimée intervalle des sorties des capteurs et générer des résidus intervalles en utilisant les formules (2.91) et (2.92) :

$$[\hat{Y}] = \begin{pmatrix} [1.43, 2.72] \\ [4.75, 7.70] \\ [5.41, 11.27] \\ [9.53, 19.50] \\ [2.85, 6.22] \end{pmatrix}, \quad [r_m] = \begin{pmatrix} [-0.61, 0.68] \\ [-6.68, -3.73] \\ [-2.63, 3.23] \\ [-4.40, 5.57] \\ [-1.35, 2.02] \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

Il est clair que $r_{m,2}$ est anormal ; on en déduit donc que Y_2 est affectée par un défaut.

Pour montrer l'efficacité de la détection et de la localisation de défaut par les résidus structurés (2.100) par rapport à la méthode basée sur l'analyse des tables de signatures théoriques et expérimentale, on considère le vecteur de mesure suivant

$$Y = \begin{pmatrix} 2.04 & 7.81 & 8.04 & 13.93 & 4.20 \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

L'analyse des matrices des signatures théoriques et expérimentale de défaut ne permet pas de détecter un défaut car tous les résidus intervalle $[r]$, calculés selon les relations (2.96) sont normaux (tableau 2.3). Par contre, la génération des résidus intervalle structurés selon la relation (2.92) permet de détecter un défaut sur la mesures Y_2 (tableau 2.4).

La performance des méthodes de détection et de localisation de défauts, en analysant les résidus r (voir équation 2.63) et les résidus structurés r_m (voir équation 2.92), est traitée de façon expérimentale. Pour cela, on exécute les deux méthodes proposées 100000 fois en

	1	2	3	4	5
$\hat{\underline{Y}}$	1.43	4.75	5.41	9.53	2.85
$\hat{\bar{Y}}$	2.72	7.70	11.27	19.50	6.22
r_m	-0.61	-3.06	-2.63	-4.40	-1.35
\bar{r}_m	0.68	-0.11	3.23	5.57	2.02

TAB. 2.4 – Les sorties des capteur estimées et les résidus structurés

prenant soin de faire varier de façon aléatoire l’amplitude du bruit affectant les vecteurs de mesures (2.94 et 2.101) tout au long des exécutions. Le pourcentage de bonne détection est alors calculé en faisant le rapport entre le nombre de cas de bonnes détections et le nombre de simulations effectuées, en l’occurrence 100000. Les résultats expérimentaux ont mis en évidence un pourcentage de bonne détection de 83% en analysant r et de 87% en analysant r_m .

2.3.5 Sensibilité de détection de défauts vis-à-vis des paramètres incertains

En fonctionnement normal, un résidu présente un certain niveau de bruit dû à l’imprécision du modèle et des mesures utilisées pour générer ce résidu. En raison de ce niveau de bruit, les résidus ne sont sensibles aux défauts des mesures ou du système qu’à partir d’une certaine amplitude de défaut. La sensibilité de détection de défauts vis-à-vis de la variation d’un ou de plusieurs paramètres du modèle du système ou du système de mesures est une caractéristique importante dans la prise de décision quant à la validité ou l’invalidité des mesures.

On étudie ici la sensibilité d’une manière expérimentale. Pour cela, on fait varier l’amplitude de l’incertitude du paramètre sur lequel porte l’étude de sensibilité de 1% jusqu’à 100% de sa valeur nominale ou du centre de l’intervalle défini par ses bornes inférieure et supérieure. On observe la relation entre le taux de détection et l’amplitude de l’incertitude du paramètre considéré. Avec chaque valeur de l’incertitude, on exécute les deux méthodes permettant de générer les résidus r (voir équation 2.63) et les résidus structurés r_m (voir équation 2.92) 100000 fois. Le pourcentage de bonne détection est calculé en faisant le rapport entre le nombre de cas de bonnes détections et le nombre de simulations effectuées.

La sensibilité vis-à-vis des paramètres de la matrice incertaine $A(\eta_A)$ est étudiée en utilisant l’exemple présenté dans le paragraphe précédent 2.3.4. Pour cela on fait varier l’amplitude de l’incertitude du paramètre $A_{2,1}(\eta_{A_{2,1}})$ (voir le modèle 2.93) entre 1% et 100% de sa valeur nominale. La relation entre l’amplitude de l’incertitude et le pourcentage

de bonne détection en analysant les résidus r et r_m est montrée sur les figures 2.6 et 2.7. Il est clair que le pourcentage de bonne détection diminue avec l'augmentation de l'amplitude de l'incertitude affectant le paramètre.

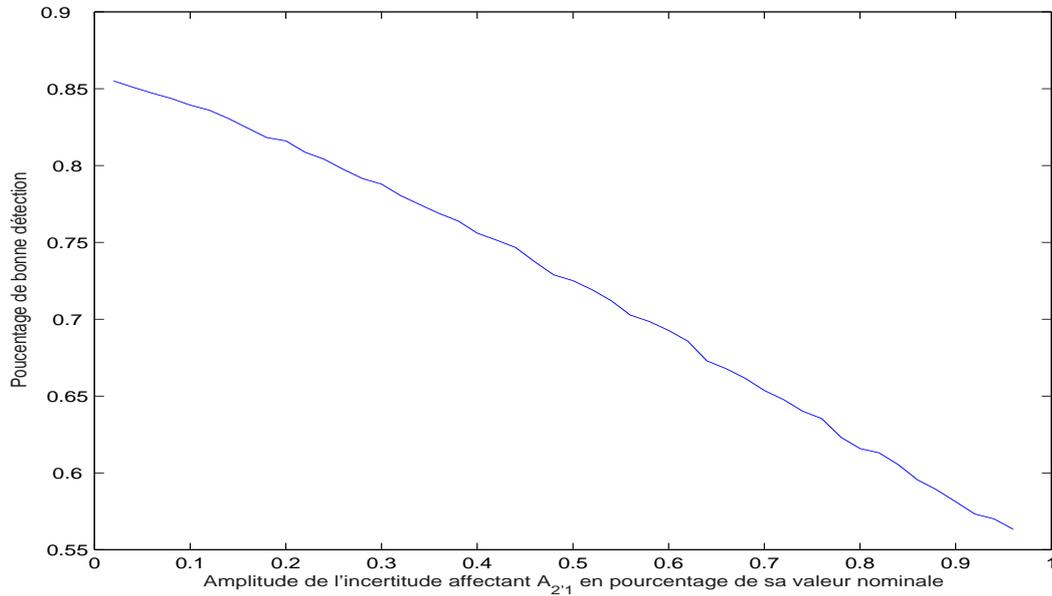


FIG. 2.6 – Sensibilité de détection vis-à-vis des paramètres incertains de la matrice A en analysant les résidus r

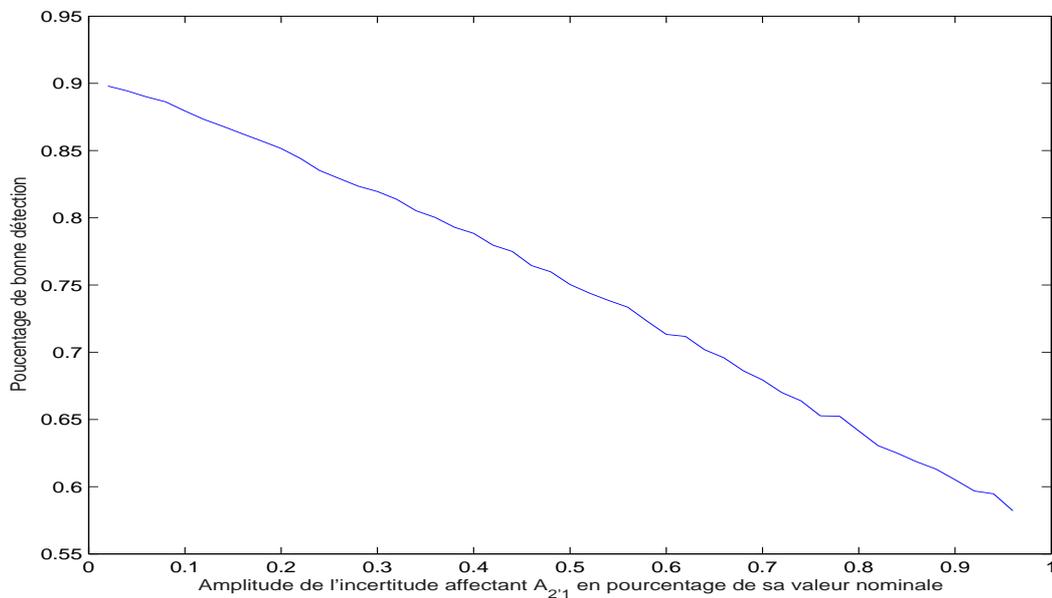


FIG. 2.7 – Sensibilité de détection vis-à-vis des paramètres incertains de la matrice A en analysant les résidus structurés r_m

Pour éprouver de façon expérimentale la sensibilité de détection vis-à-vis de la variation

de l'incertitude d'un paramètre du modèle des capteurs (2.14), dans le cas où la détection est faite par l'analyse des résidus r et les résidus structurés r_m . La sensibilité est étudiée en faisant varier l'amplitude a_1 (voir l'équation (2.14) ou (2.59)) de l'incertitude affectant le capteur mesurant X_1 entre 1% et 100% de sa valeur nominale. Nous avons exécuté les deux méthodes de détection 100000 fois. Les résultats obtenus (taux de bonne détection en fonction de l'amplitude a_1 de l'incertitude affectant le capteur mesurant X_1) sont présentés sur les figures 2.8 et 2.9. La figure 2.8 montre que le pourcentage de bonne détection diminue avec l'augmentation de a_1 . On remarque sur la figure 2.9 que le pourcentage de bonne détection augmente avec l'amplitude de l'incertitude affectant la mesure délivrée par le capteur considéré. Ceci peut être expliqué en analysant les estimées obtenues en utilisant les mesures. Compte tenu du fait que dans l'exemple 2.3.4 les mesures Y sont positives, une augmentation de l'amplitude de l'incertitude sur les mesures (augmentation des valeurs de la matrice D_a) conduit, d'après l'équation (2.16 et 2.17), à une diminution des rayons des variables estimées à partir des mesures. Le domaine satisfaisant l'ensemble des contraintes du système (2.99) est alors plus réduit. Les rayons des résidus générés sont donc plus petits et permettent donc une plus grande précision dans la prise de décision en ce qui concerne l'apparition d'un défaut. Ceci explique l'allure de la courbe de la figure 2.9.

Il faut bien noter que si les valeurs des sorties des capteurs étaient toujours négatives, on obtiendrait dans ce cas une courbe qui serait décroissante. Il est alors difficile de dissocier l'étude de sensibilité par rapport au paramètre a_1 du signe des valeurs des sorties des capteurs.

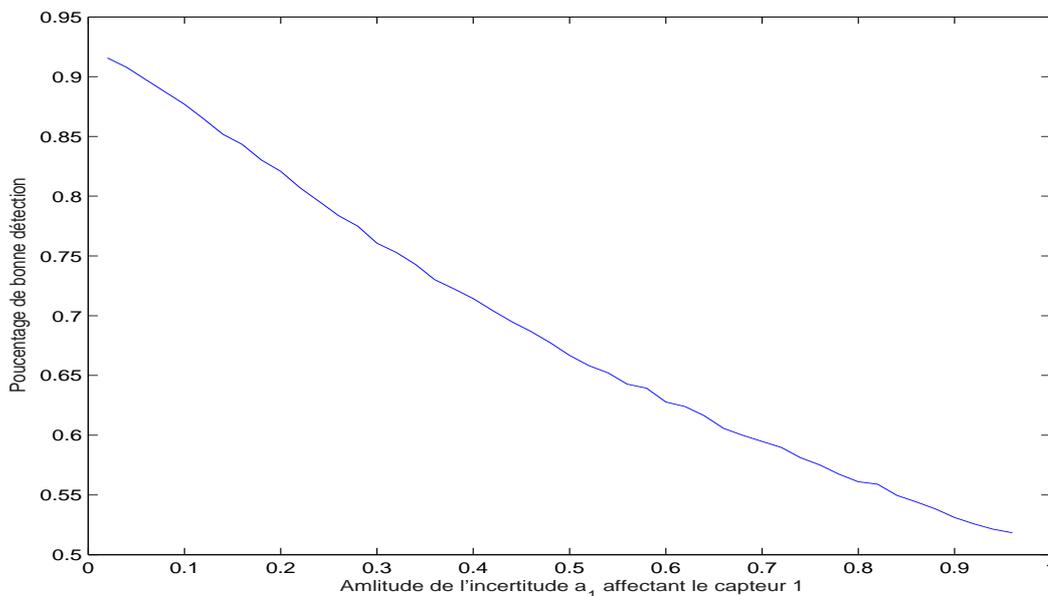


FIG. 2.8 – Sensibilité de détection vis-à-vis l'amplitude a_1 de l'incertitude affectant le capteur mesurant X_1 en analysant les résidus r

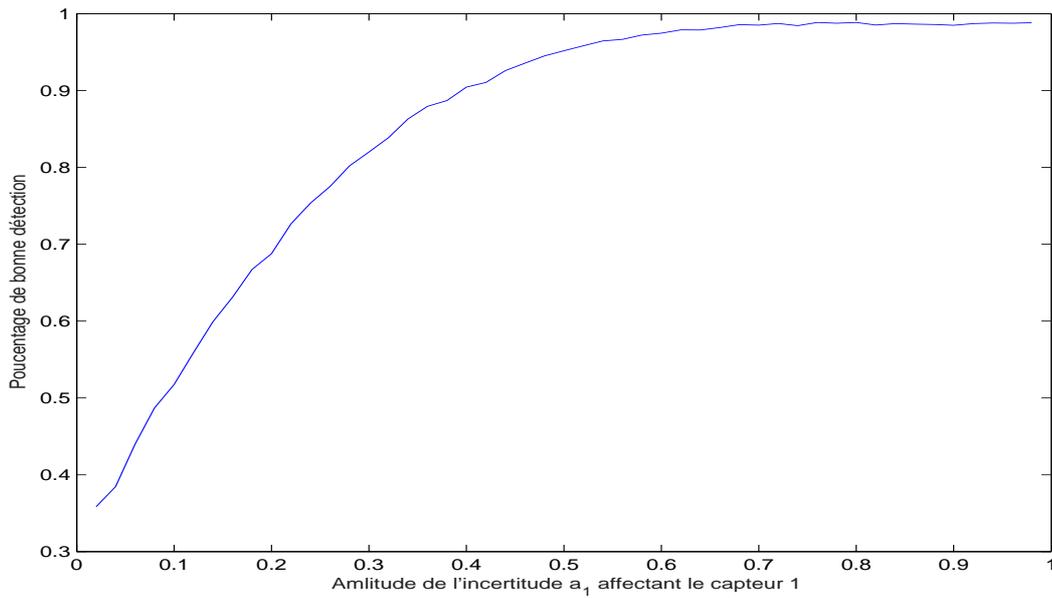


FIG. 2.9 – Sensibilité de détection vis-à-vis l’amplitude a_1 de l’incertitude affectant le capteur mesurant X_1 en analysant les résidus structurés r_m

2.4 Application à un réseau de transport de matière

Les systèmes linéaires sont fréquemment utilisés pour décrire des bilans matière en flux total. Dans cette situation, le processus peut être modélisé sous la forme $AX = 0$ ce qui permet d’utiliser les méthodes mentionnées dans ce chapitre.

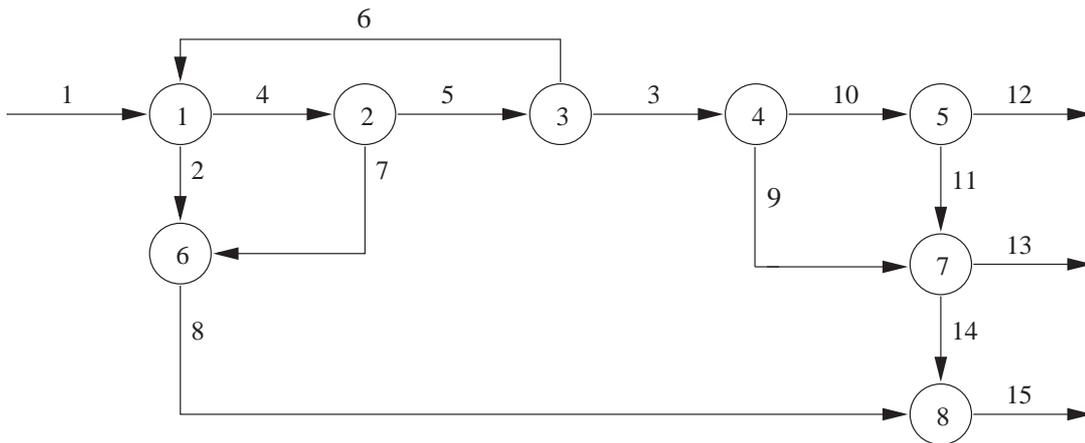


FIG. 2.10 – Réseau de transport de matière

Considérons le réseau de transport de matière (figure 2.10) constitué de 8 noeuds connectés par 15 arcs où les arcs correspondent aux flux de matière et les noeuds re-

présentent les unités de traitement. Ce type de système a été largement étudié dans le domaine de la surveillance des systèmes et principalement pour des études de réconciliation de données [MR91]. Seul le bilan en flux total est considéré, ce qui permet d'écrire, à partir du réseau montré sur la figure 2.10, 8 relations de conservation des flux :

$$AX = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

où le $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A résulte du bilan en flux total au niveau du $i^{\text{ème}}$ noeud.

Les capteurs utilisés pour mesurer les variables X intervenant dans le modèle (2.102) sont modélisés par :

$$Y = D_h (I + D_a D_\eta) X + D_g (I + D_b D_\mu), \quad X \in \mathbb{R}^{15}, \quad Y \in \mathbb{R}^{15} \quad (2.103)$$

avec :

$$\begin{aligned} D_h &= \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), \quad D_a = 0.1D_h, \quad D_g = 0.2D_h \\ D_b &= \text{diag}(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{15}), \quad b_i = 0.05, \quad i = 1 \dots 15 \\ D_\eta &= \text{diag}(\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_{15}), \quad |\eta_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 15 \\ D_\mu &= \text{diag}(\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_{15}), \quad |\mu_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 15 \end{aligned}$$

où diag est un opérateur créant une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs du vecteur passé en paramètres. Dans cette application on s'intéresse uniquement au cas d'un système complètement instrumenté. L'estimée des variables intervenant dans le modèle (2.102) à partir des sorties Y des capteurs selon les relations (2.16) et (2.17) est présentée dans le tableau 2.5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Y	46.8	9.2	34.8	44	33.2	6.3	10.7	20.2	10.1	16.8	6	10.5	13	3.2	23.1
\hat{X}_m	42.4	8.2	31.5	39.8	30	5.5	9.5	18.2	9	15.1	5.3	9.4	11.6	2.7	20.8
\hat{X}_m	51.8	10	38.5	48.7	36.7	6.8	11.7	22.2	11	18.5	6.5	11.5	14.2	3.3	25.5

TAB. 2.5 – Les sorties des capteurs et l'estimée des variables du système

2.4.1 Détection et localisation de défaut

Compte tenu de l'équation (2.24), et afin de générer tous les résidus possibles à partir du modèle du système (2.102), on effectue toutes les combinaisons linéaires deux à deux possibles des équations (2.102). Il y a 11 possibilités d'agrégation et la matrice \tilde{A} permettant de décrire ces agrégations est définie par :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Le tableau 2.6 illustre la façon dont a été obtenue la matrice \tilde{A} . Par exemple, la deuxième colonne de ce tableau montre que la première ligne de la matrice \tilde{A} est obtenue par élimination de la variable commune X_4 entre les équations 1 et 2 du modèle (2.102).

Ligne de \tilde{A}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Variable éliminée	X_4	X_6	X_2	X_5	X_7	X_3	X_{10}	X_9	X_{11}	X_8	X_{14}
Equations de (2.102) combinées	1,2	1,3	1,6	2,3	2,6	3,4	4,5	4,7	5,7	6,8	7,8

TAB. 2.6 – Obtention de la matrice \tilde{A}

En calculant les résidus selon (2.24), on obtient :

$$\begin{aligned} r_1 &= [-10.80, 10.60], & r_2 &= [-8.55, 9.15], & r_3 &= [-15.25, 0.30], & r_4 &= [1.97, 14.38], \\ r_5 &= [-2.8, 3.8], & r_6 &= [-4.5, 3.5], & r_7 &= [-3.3, 3.1], & r_8 &= [-4.6, 4.8] \\ r_9 &= [-10.5, 10.9], & r_{10} &= [-24.8, 9], & r_{11} &= [-13.5, 12.3], & r_{12} &= [-17.1, 2.2], \\ r_{13} &= [-10.9, 10.5], & r_{14} &= [-6.3, 7.1], & r_{15} &= [2.5, 14.9], & r_{16} &= [0.7, 15.5], \\ r_{17} &= [-5, 5.8], & r_{18} &= [-5, 4.2] & r_{19} &= [-7.3, 7.3]. \end{aligned}$$

Compte tenu des relations (2.26) et (2.27), on peut établir les tables de signatures théoriques et expérimentale, ce qui permet de calculer les distances euclidiennes entre la signature expérimentale et l'ensemble des 15 signatures théoriques (voir 2.28) :

$$d = \left(2.8 \ 3.2 \ 1.4 \ 3.2 \ 2.8 \ 2.8 \ 3.2 \ 3 \ 2.5 \ 2.2 \ 2.2 \ 2.2 \ 2.5 \ 2.7 \ 2.7 \right)$$

Il apparaît clairement que la distance minimale correspond à la troisième variable et l'on peut donc déclarer que la mesure Y_3 est affectée par un défaut et que, sous l'hypothèse d'un défaut unique, les autres mesures sont dites saines.

2.4.2 Estimation des variables du système

On corrige l'estimé $\hat{X}_{m,3}$ calculée à partir de la mesure Y_3 en utilisant le modèle du système (2.102) et les autres mesures déclarées saines (voir les équations (2.30), (2.31) et (2.32)). Après la correction, en s'appuyant sur l'équation (2.33), on calcule une estimée $[X_f]$ des variables du système cohérente avec le modèle (2.102). Le tableau (2.7) illustre les bornes inférieures et supérieures des variables estimées.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\underline{\hat{X}}_f$	42.4	8.2	31.5	39.8	30	5.5	9.5	18.2	9	15.1	5.3	9.4	11.6	2.7	20.8
\hat{X}_f	51.8	10	38.5	48.4	36.7	6.8	11.7	22.2	11	17.9	6.5	11.5	14.2	3.3	25.5

TAB. 2.7 – Estimée des variables du système obtenue en utilisant le modèle du système et les mesures

2.4.3 Réconciliation de données

On pourra noter que les variables 4, 6, 8, 9, 10, 11 et 14 constituent un ensemble de variables indépendantes, ce qui permet de séparer les variables intervenant dans le modèle du système selon les relations (2.34), (2.35) et (2.36) :

$$\begin{aligned}
 X &= (X_h^T, X_b^T) \\
 X_b &= (x_4, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{14}) \\
 X_h &= (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_{12}, x_{13}, x_{15}) \\
 A &= \begin{pmatrix} A_b & A_h \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compte tenu de relations (2.40), on peut écrire les inégalités suivants :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\hat{X}}_{m,4} &\leq X_{c,4} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,4} \\ \underline{\hat{X}}_{m,6} &\leq X_{c,6} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,6} \\ \underline{\hat{X}}_{m,8} &\leq X_{c,8} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,8} \\ \underline{\hat{X}}_{m,9} &\leq X_{c,9} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,9} \\ \underline{\hat{X}}_{m,10} &\leq X_{c,10} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,10} \\ \underline{\hat{X}}_{m,11} &\leq X_{c,11} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,11} \\ \underline{\hat{X}}_{m,14} &\leq X_{c,14} + X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,14} \\ \underline{\hat{X}}_{m,1} &\leq X_{c,8} + X_{c,9} + X_{c,10} + 3X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,1} \\ \underline{\hat{X}}_{m,2} &\leq X_{c,6} - X_{c,4} + X_{c,8} + X_{c,9} + X_{c,10} + 4X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,2} \\ \underline{\hat{X}}_{m,3} &\leq X_{c,9} + X_{c,10} + 2X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,3} \\ \underline{\hat{X}}_{m,5} &\leq X_{c,6} + X_{c,9} + X_{c,10} + 3X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,5} \\ \underline{\hat{X}}_{m,7} &\leq X_{c,4} - X_{c,6} - X_{c,9} - X_{c,10} + 4X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,7} \\ \underline{\hat{X}}_{m,12} &\leq X_{c,10} - X_{c,11} + 2X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,12} \\ \underline{\hat{X}}_{m,13} &\leq X_{c,9} + X_{c,11} - X_{c,14} + 3X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,13} \\ \underline{\hat{X}}_{m,15} &\leq X_{c,8} + X_{c,14} + 2X_r \lambda \leq \overline{\hat{X}}_{m,15} \\ |\lambda| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

Les inégalités (2.106) n'ont pas de solution, on déduit alors que les mesures permettant de calculer \hat{X}_m sont affectées par un défaut. Pour localiser la mesure affectée par le défaut, on suit l'algorithme proposé dans le paragraphe 2.2.7. On constate que les inégalités (2.106)

n'ont pas de solution sauf si l'on néglige les contraintes liées avec la mesure Y_3 . Ainsi le problème d'optimisation à résoudre, compte tenu de la relation (2.45), peut être formulé comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \max X_r, \quad X_r > 0 \\
 & X_{c,4} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,4} \leq 0, \quad -X_{c,4} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,4} \leq 0 \\
 & X_{c,6} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,6} \leq 0, \quad -X_{c,6} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,6} \leq 0 \\
 & X_{c,8} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,8} \leq 0, \quad -X_{c,8} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,8} \leq 0 \\
 & X_{c,9} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,9} \leq 0, \quad -X_{c,9} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,9} \leq 0 \\
 & X_{c,10} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,10} \leq 0, \quad -X_{c,10} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,10} \leq 0 \\
 & X_{c,11} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,11} \leq 0, \quad -X_{c,11} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,11} \leq 0 \\
 & X_{c,14} + X_r - \overline{\hat{X}}_{m,14} \leq 0, \quad -X_{c,14} - X_r + \underline{\hat{X}}_{m,14} \leq 0 \\
 & X_{c,8} + X_{c,9} + X_{c,10} + 3X_r - \overline{\hat{X}}_{m,1} \leq 0 \\
 & -X_{c,8} - X_{c,9} - X_{c,10} - 3X_r + \underline{\hat{X}}_{m,1} \leq 0 \\
 & X_{c,6} - X_{c,4} + X_{c,8} + X_{c,9} + X_{c,10} + 5X_r - \overline{\hat{X}}_{m,2} \leq 0 \\
 & -X_{c,6} + X_{c,4} - X_{c,8} - X_{c,9} - X_{c,10} - 5X_r + \underline{\hat{X}}_{m,2} \leq 0 \\
 & X_{c,6} + X_{c,9} + X_{c,10} + 3X_r - \overline{\hat{X}}_{m,5} \leq 0 \\
 & -X_{c,6} - X_{c,9} - X_{c,10} - 3X_r + \underline{\hat{X}}_{m,5} \leq 0 \\
 & X_{c,4} - X_{c,6} - X_{c,9} - X_{c,10} + 4X_r - \overline{\hat{X}}_{m,7} \leq 0 \\
 & -X_{c,4} + X_{c,6} + X_{c,9} + X_{c,10} - 4X_r + \underline{\hat{X}}_{m,7} \leq 0 \\
 & X_{c,10} - X_{c,11} + 2X_r - \overline{\hat{X}}_{m,12} \leq 0 \\
 & -X_{c,10} + X_{c,11} - 2X_r + \underline{\hat{X}}_{m,12} \leq 0 \\
 & X_{c,9} + X_{c,11} - X_{c,14} + 3X_r - \overline{\hat{X}}_{m,13} \leq 0 \\
 & -X_{c,9} - X_{c,11} + X_{c,14} - 3X_r + \underline{\hat{X}}_{m,13} \leq 0 \\
 & X_{c,8} + X_{c,14} + 2X_r - \overline{\hat{X}}_{m,15} \leq 0 \\
 & -X_{c,8} - X_{c,14} - 2X_r + \underline{\hat{X}}_{m,15} \leq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

En utilisant un algorithme d'optimisation sous contraintes, on obtient $X_{c,i}$ $i = 1...15$ et $X_r = 0.2676$, le polytope des estimées étant réduit à un hypercube. L'estimée intervalle des 15 variables intervenant dans le modèle (2.102) est montrée dans le tableau 2.8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\overline{\hat{X}}$	46.5	8.3	26.5	43.8	32.6	6.1	9.5	19.9	9.9	16.6	5.7	10.4	12.3	2.8	22.7
$\underline{\hat{X}}$	48.1	10.9	27.6	44.3	34.2	6.6	11.7	20.5	10.5	17.1	6.2	11.5	13.9	3.3	23.8

TAB. 2.8 – L'estimée des variables du système par réconciliation de données

En examinant cette table, on déduit que les estimées intervalles calculées selon le principe de réconciliation de données ont des rayons plus petits que ceux des estimées calculées par la première méthode (voir tableau 2.7).

Pour vérifier que le défaut détecté est effectivement sur la mesure Y_3 , on calcule une estimée intervalle des sorties de capteurs et on génère ensuite des résidus structurés en utilisant les relations (2.46) et (2.47). Le tableau 2.9 visualise les bornes de l'estimée intervalle des sorties des capteurs et les signes des bornes inférieures et supérieures des résidus structurés. L'analyse de ce tableau montre que la mesure Y_3 est effectivement affectée par un défaut car le résidu $[r_{m,3}]$ ne contient pas la valeur zéro.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
\hat{Y}	42	7.6	24.1	39.6	29.6	5.7	8.8	18.1	9.1	15.1	5.3	9.5	11.3	2.7	20.6
\bar{Y}	53.1	12.2	30.6	49	37.9	7.5	13.1	22.7	11.7	19.1	7.1	12.8	15.5	3.8	26.4
\underline{r}_m	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
\bar{r}_m	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

TAB. 2.9 – L'estimée des variables d'état par le principe de réconciliation de données

2.5 Conclusion

Une nouvelle approche du problème de réconciliation de mesures est proposé dans ce chapitre. La méthode proposée est facile à mettre en œuvre et utilise des opérations de l'arithmétique intervalle. Elle permet de valider les mesures et de donner une estimée des variables intervenant dans le modèle du système sur la base de la connaissance des intervalles de variation des erreurs de mesure. On s'affranchit ainsi de la connaissance a priori des lois de distribution statistique des erreurs de mesure.

Dans un premier temps, en se basant sur un modèle d'un capteur à caractéristique incertaine, nous avons traité diverses situations selon que les incertitudes affectent les capteurs uniquement ou à la fois le système et les capteurs. Dans le cas spécifique où les incertitudes sont présentes uniquement sur les capteurs, il a été proposé une méthode de validation de données à partir d'équation de redondance. Dans le cas où l'incertitude est simultanément sur le système et les capteurs, le problème de validation de données est traité en adoptant la même méthodologie que dans le premier cas. Enfin une application sur un réseau de transport de matière montrant l'efficacité de la démarche proposée, est mise en œuvre.

3

Validation de données des systèmes dynamiques incertains

Sommaire

3.1	Introduction	105
3.2	Représentation des systèmes dynamiques sous une forme statique	106
3.2.1	Première forme statique	107
3.2.2	Deuxième forme statique	109
3.3	Position du problème	110
3.3.1	Cas des matrices d'observation inversibles	111
3.3.2	Cas des matrices d'observation rectangulaire	117
3.3.3	Cas des matrices d'observation verticale	123
3.4	Génération des résidus par espace de parité dans le cas incertain	130
3.4.1	Vecteur parité d'un système certain	130
3.4.2	Vecteur parité d'un système à paramètres incertains	131
3.4.3	Analyse du vecteur parité	138
3.4.4	Extension au cas des systèmes dynamiques	139
3.4.5	Exemple	143
3.5	Approche bornante : garantie, précision et justesse	146

3.6 Conclusion 148

3.1 Introduction

Un système dynamique est un système soumis à des changements dans le temps et dans lequel les grandeurs qui interviennent (variables d'état, entrées, sorties) sont liées par des relations temporelles. Comme les systèmes statiques, les systèmes dynamiques peuvent être décrits par des modèles linéaires ou non-linéaires. Qu'ils soient linéaires ou non linéaires, les modèles dynamiques se présentent sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

- représentation entrées-sorties, par exemple, les équations de bilans matière en génie des procédés
- représentation d'état, dans laquelle on écrit les relations dynamiques entre les entrées et les sorties en explicitant un état (vectoriel) évalué lui-même de manière dynamique.

Notons qu'il est possible de passer d'une représentation à une autre [Aka74] [LG94].

Pour surveiller en continu l'évolution du système et trouver les causes des événements indésirables, il convient d'utiliser au mieux les informations disponibles et notamment les données des divers capteurs et actionneurs. La validation des mesures des capteurs constitue donc une étape principale pour surveiller le fonctionnement d'un système.

Nous nous intéressons, dans la suite de ce chapitre, à la validation de données des systèmes linéaires représentés sous forme discrète :

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (3.1)$$

$$Y(k) = CX(k) + DU(k) \quad (3.2)$$

où X , U et Y sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. A est la matrice d'évolution d'état, représentative de son comportement dynamique, B est la matrice de commande, C est la matrice d'observation et D est la matrice de transmission directe des entrées aux sorties.

Le système linéaire décrit par les équations (3.1) et (3.2) peut être schématisé par :

Les matrices A , B , C et D caractérisent le système décrit par les équations (3.1) et (3.2). Ces grandeurs peuvent être constantes lorsque les paramètres du système n'évoluent pas dans le temps ou variables dans le cas contraire. Plusieurs causes peuvent être à l'origine de l'évolution temporelle des paramètres du système. Par exemple, le vieillissement ou l'usure des composants du système sont des sources de changement de valeur des paramètres du système.

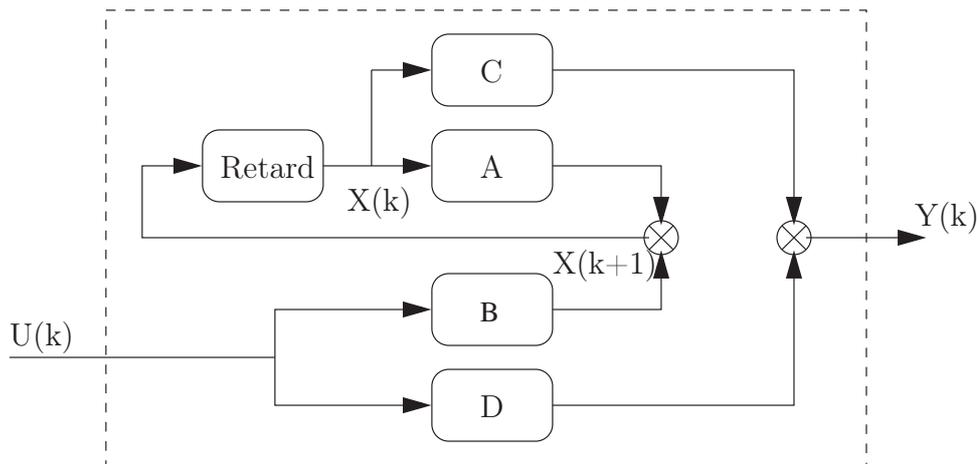


FIG. 3.1 – Schéma d'un système dynamique linéaire dans sa représentation d'état

En effet, certains systèmes réels présente un ou plusieurs paramètres variant au cours du temps de manière imprévisible. En supposant que le domaine de variation de ces paramètres est borné, on peut alors les décrire par des variables incertaines et bornées. Il est clair que les incertitudes peuvent affecter une ou plusieurs matrices parmi les matrices A , B , C et D . Nous nous intéressons au cas général où les incertitudes affectent toutes les matrices A , B , C et D simultanément.

L'objectif de ce chapitre est de développer des méthodes de validation de données, pour des systèmes linéaires dynamiques incertains, en s'appuyant sur l'arithmétique des intervalles. Dans un premier temps, en utilisant une fenêtre d'observation de taille s , on établit deux formes permettant de représenter les modèles linéaires dynamiques de façon statique. Ensuite, nous présentons des méthodes de validation de données, illustrées par des exemples, selon la forme de la matrice d'observation C . La matrice d'observation $C \in \mathbb{R}^{m,n}$ peut prendre trois formes :

- carrée : $m = n$ et $\text{rang}(C) = n$,
- rectangulaire : $m < n$ et $\text{rang}(C) = m$,
- verticale : $m > n$ et $\text{rang}(C) = n$.

Ces trois formes seront étudiées en détail au cours de la section relative à de la validation de données.

3.2 Représentation des systèmes dynamiques sous une forme statique

Considérons un système linéaire dynamique décrit par une représentation d'état discrète et comportant des incertitudes sur ses paramètres (la matrice D a été omise car c'est

souvent le cas en pratique. Si une telle matrice existe, on peut facilement s'en débarrasser en définissant une nouvelle sortie $Z(k) = Y(k) - DU(k)$:

$$X(k+1) = A(\eta_A(k))X(k) + B(\eta_B(k))U(k) \quad (3.3)$$

$$Y(k) = C(\eta_C(k))X(k) \quad (3.4)$$

où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $U(k) \in \mathbb{R}^q$ et $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. $A(\eta_A(k)) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B(\eta_B(k)) \in \mathbb{R}^{n,q}$ et $C(\eta_C(k)) \in \mathbb{R}^{m,n}$ sont des matrices incertaines. $\eta_A(k)$, $\eta_B(k)$ et $\eta_C(k)$ sont des variables bornées et normalisées.

En empilant le vecteur d'état et celui des mesures sur une fenêtre d'observation de taille s , le modèle dynamique (3.3) et (3.4) peut être représenté par une forme linéaire statique.

3.2.1 Première forme statique

Si l'on observe le système sur l'horizon $[k, k+j]$, on peut établir à partir de (3.3), l'expression liant le vecteur $X(k+j)$ à $X(k)$ et à l'entrée $U(k)$ comme suit [Adr00] :

$$\begin{aligned} X(k+j) &= A(\eta_A(k+j-1)) \dots A(\eta_A(k)) X(k) + B(\eta_B(k+j-1)) U(k+j-1) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{j-1} A(\eta_A(k+j-1)) \dots A(\eta_A(k+i)) B(\eta_B(k+i-1)) U(k+i-1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où : $j \in \mathbb{N}^*$

A partir de la relation précédente, en regroupant les vecteurs d'état sur un horizon $[k, k+s]$, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} X(k, s) &= A_s(\eta_A) X(k) + B_s(\eta_A, \eta_B) U(k, s-1) \\ A_s(\eta_A) &\in \mathbb{R}^{(s+1)n, n}, \quad B_s(\eta_A, \eta_B) \in \mathbb{R}^{(s+1)n, sq}, \quad X(k, s) \in \mathbb{R}^{(s+1)n} \\ X(k, s) &= (X(k)^T \quad X(k+1)^T \dots X(k+s)^T)^T \\ U(k, s-1) &= (U(k)^T \quad U(k+1)^T \dots U(k+s-1)^T)^T \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec :

$$A_s(\eta_A) = \begin{pmatrix} I_n \\ A(\eta_A(k)) \\ A(\eta_A(k+1)) A(\eta_A(k)) \\ \vdots \\ A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k)) \end{pmatrix}, \quad I_n \text{ matrice identité d'ordre } n,$$

$$B_s(\eta_A, \eta_B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B(\eta_B(k)) & 0 & \cdots & 0 \\ A(\eta_A(k+1))B(\eta_B(k)) & B(\eta_B(k+1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & B(\eta_B(k+s-1)) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k+1)) B(\eta_B(k)),$$

$$\varphi_2 = A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k+2)) B(\eta_B(k+1)).$$

Le vecteur $Y(k, s)$ contenant les mesures empilées sur l'horizon $[k, k+s]$ est donné par :

$$Y(k, s) = C_s(\eta_C) X(k, s), \quad C_s(\eta_C) \in \mathbb{R}^{(s+1)m, (s+1)n}, \quad Y(k, s) \in \mathbb{R}^{(s+1)m} \quad (3.7)$$

avec :

$$Y(k, s) = (Y(k)^T \ Y(k+1)^T \ \dots \ Y(k+s)^T)^T, \quad C_s(\eta_C) = \begin{pmatrix} C(\eta_C(k)) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & C(\eta_C(k+s)) \end{pmatrix}.$$

Compte tenu des équations (3.6) et (3.7), la première forme statique est alors :

$$Y(k, s) = \tilde{C}(\eta_A, \eta_C) X(k) + H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C) U(k, s-1) \quad (3.8)$$

$$\tilde{C}(\eta_A, \eta_C) \in \mathbb{R}^{(s+1)m, n}, \quad H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C) \in \mathbb{R}^{(s+1)m, sq}$$

où :

$$\tilde{C}(\eta_A, \eta_C) = \begin{pmatrix} C(\eta_C(k)) \\ C(\eta_C(k+1))A(\eta_A(k)) \\ C(\eta_C(k+2))A(\eta_A(k+1))A(\eta_A(k)) \\ \vdots \\ C(\eta_C(k+s))A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k)) \end{pmatrix},$$

$$H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{(s+1)m,1} & \alpha_{(s+1)m,2} & \cdots & \alpha_{(s+1)m,sq} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{2,1} = C(\eta_C(k+1))B(\eta_B(k)),$$

$$\alpha_{3,1} = C(\eta_C(k+2))A(\eta_A(k+1))B(\eta_B(k))$$

$$\alpha_{3,2} = C(\eta_C(k+2))B(\eta_B(k+1)),$$

$$\alpha_{(s+1)m,1} = C(\eta_C(k+s))A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k+1))B(\eta_B(k)),$$

$$\begin{aligned}\alpha_{(s+1)m,2} &= C(\eta_C(k+s)) A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k+2)) B(\eta_B(k+1)), \\ \alpha_{(s+1)m,sq} &= C(\eta_C(k+s)) B(\eta_B(k+s-1)).\end{aligned}$$

Nous remarquons que chaque ligne de la matrice $H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C)$ dépend de la même matrice d'observation alors que chacune de ses colonnes fait apparaître la même matrice de commande. La complexité de cette expression vient des différentes matrices de la représentation d'état qu'il faut distinguer au moyen d'indice temporel approprié. L'expression (3.8) exprime donc les sorties du système en fonction des entrées mais aussi en fonction de son état initial. Cette relation est particulièrement importante dans le domaine de la surveillance où l'on cherche à estimer l'état du système.

3.2.2 Deuxième forme statique

Nous nous intéressons maintenant à la construction d'une seconde forme statique, où la matrice d'état apparaît de manière linéaire, et non plus sous forme de produits comme dans le cas des matrices $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ et $H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C)$ de la première forme statique. En observant la relation (3.5), il est facile de remarquer que les produits proviennent du fait que tous les vecteurs d'état $X(k+j)$ sont exprimés en fonction du même état initial $X(k)$ qui est la valeur prise par le vecteur d'état au début de fenêtre. Dans la nouvelle représentation, appelée seconde forme statique, ce sont les relations liant le vecteur $X(k+j)$ et le vecteur précédent $X(k+j-1)$, $j \in \mathbb{N}^*$ qui sont privilégiées [Adr00] :

$$\left(A(\eta_A(k+j-1)) - I_n \right) \begin{pmatrix} X(k+j-1) \\ X(k+j) \end{pmatrix} = -B(\eta_B(k+j-1)) U(k+j-1) \quad (3.9)$$

A partir de cette relation, l'empilement des vecteurs d'état et de commande sur un horizon $[k, k+s]$, conduit à l'expression matricielle :

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\eta_A) X(k, s) &= \tilde{B}(\eta_B) U(k, s-1) \\ \tilde{A}(\eta_A(k, s-1)) &\in \mathbb{R}^{sn, (s+1)n}, \quad \tilde{B}(\eta_B(k, s-1)) \in \mathbb{R}^{sn, sq}\end{aligned} \quad (3.10)$$

où $X(k, s)$ et $U(k, s-1)$ ont été définis en (3.6), $\tilde{A}(\eta_A)$ et $\tilde{B}(\eta_B)$ sont définis par :

$$\tilde{A}(\eta_A) = \begin{pmatrix} A(\eta_A(k)) & -I_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\eta_A(k+1)) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A(\eta_A(k+s-1)) & -I_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}(\eta_B) = \begin{pmatrix} -B(\eta_B(k)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -B(\eta_B(k+1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -B(\eta_B(k+s-1)) \end{pmatrix}$$

Compte tenu de la relation (3.8), exprimant le vecteur $Y(k, s)$ en fonction de $X(k, s)$, et de la relation (3.10), la seconde forme statique est finalement déduite :

$$M(\eta_A, \eta_C) X(k, s) = H(\eta_B) \begin{pmatrix} U(k, s-1) \\ Y(k, s) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$M(\eta_A, \eta_C) \in \mathbb{R}^{(sn+(s+1)m), (s+1)n}, \quad H(\eta_B) \in \mathbb{R}^{sn+(s+1)m, sq+(s+1)m}$$

où :

$$M(\eta_A, \eta_C) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\eta_A) \\ C_s(\eta_C) \end{pmatrix}, \quad H(\eta_B) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(\eta_B) & 0 \\ 0 & I_{(s+1)m} \end{pmatrix}$$

On remarquera, à partir de l'équation (3.11), la nature de la transformation dynamique-statique qui a été choisie. Dans (3.11), $X(k, s)$ est le vecteur de tous les états sur la fenêtre d'observation. Cette forme diffère de la forme « classique » où seul l'état initial $X(k)$ de la fenêtre d'observation subsiste. La forme choisie évite la présence de termes de type $A(\eta_A(k)) \dots A(\eta_A(k+j))$ avec $j \in \mathbb{N}^*$, qui rendent difficile l'utilisation de l'analyse par intervalles (aspect non linéaire par rapport aux incertitudes). Enfin notons que dans (3.11), on a isolé dans le membre de gauche l'état du système, alors que le membre de droite ne fait intervenir que des grandeurs connues.

3.3 Position du problème

Considérons la classe des systèmes linéaires dynamiques incertains décrits par les équations (3.3) et (3.4), où les matrices incertaines $A(\eta_A(k))$, $B(\eta_B(k))$ et $C(\eta_C(k))$ ont la forme suivante :

$$A(\eta_A(k)) \in [A], \text{ avec } : [A_{i,j}] = c([A_{i,j}]) + \Delta_{A_{i,j}} \eta_{A_{i,j}}(k), \quad |\eta_{A_{i,j}}(k)| \leq 1, \quad (i, j) \in n$$

$$B(\eta_B(k)) \in [B], \text{ avec } : [B_{i,j}] = c([B_{i,j}]) + \Delta_{B_{i,j}} \eta_{B_{i,j}}(k), \quad |\eta_{B_{i,j}}(k)| \leq 1, \quad i \in n, \quad j \in q$$

$$C(\eta_C(k)) \in [C], \text{ avec } : [C_{i,j}] = c([C_{i,j}]) + \Delta_{C_{i,j}} \eta_{C_{i,j}}(k), \quad |\eta_{C_{i,j}}(k)| \leq 1, \quad i \in m, \quad j \in n$$

$c([A_{i,j}])$, $c([B_{i,j}])$ et $c([C_{i,j}])$ sont respectivement les centres des éléments intervalles $[A_{i,j}]$, $[B_{i,j}]$ et $[C_{i,j}]$ tandis que $\Delta_{A_{i,j}}$, $\Delta_{B_{i,j}}$ et $\Delta_{C_{i,j}}$ traduisent l'amplitude des incertitudes affectant ces éléments, $\eta_{A_{i,j}}$, $\eta_{B_{i,j}}$, $\eta_{C_{i,j}}$ étant des incertitudes bornées de valeurs inconnues à chaque instant.

Si toutes les variables d'état sont mesurées $m = n$, alors la matrice $C(\eta_C)$ est une matrice carrée. Dans le cas général, l'instrumentation d'un système ne permet pas un accès à toutes les variables d'état (pour des raisons liées à la technologie des capteurs ou pour des raisons purement économiques); dans ce cas, le nombre de lignes de la matrice $C(\eta_C(k))$ est inférieur au nombre de ses colonnes ($m < n$). Toutefois, il existe des situations où le nombre de lignes de la matrice $C(\eta_C(k))$ est supérieur au nombre de ses colonnes ($m > n$), notamment dans le cas de la redondance matérielle.

Dans ce qui suit, en supposant que le système est observable quelles que soient les incertitudes, nous traitons le problème de la validation de données dans les trois cas mentionnés précédemment ($m = n$, $m < n$ et $m > n$).

3.3.1 Cas des matrices d'observation inversibles

Nous traitons ici le cas où toutes les variables d'état sont mesurées. Tout d'abord, nous proposons un algorithme permettant de calculer une estimée, cohérente avec le modèle du système, de ces variables. Puis, lorsque les mesures du système sont corrompues par un ou plusieurs défauts, nous proposons une méthode qui permet de détecter ces défauts et de les localiser. Enfin, nous présentons un exemple académique pour illustrer la méthode proposée.

3.3.1.1 Estimation d'état

Rappelons les équations (3.3) et (3.4) décrivant des systèmes linéaires incertains où les incertitudes sont décrites par des variables bornées et normalisées, qui modifient les valeurs des coefficients des matrices A , B et C du modèle utilisé :

$$X(k+1) = A(\eta_A(k))X(k) + B(\eta_B(k))U(k) \quad (3.12)$$

$$Y(k) = C(\eta_C(k))X(k) \quad (3.13)$$

$$A(\eta_A(k)) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad B(\eta_B(k)) \in \mathbb{R}^{n,q}, \quad C(\eta_C(k)) \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Compte tenu de l'équation (3.13), on peut fournir une estimée de l'état du système :

$$\hat{X}(k) = C^{-1}(\eta_C(k))Y(k) \quad (3.14)$$

Comme la matrice $C(\eta_C(k))$ est incertaine mais bornée, on peut la remplacer par ses bornes, ce qui permet d'écrire l'équation (3.14) sous la forme intervalle suivante :

$$[\hat{X}^{(1)}(k)] = [C]^{-1}Y(k) \quad (3.15)$$

où l'exposant (1) indique que l'estimée $[\hat{X}(k)]$ a été obtenue en exploitant uniquement le

modèle de mesures.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer, à partir de l'équation (3.15), une estimée de $X(k)$ [Neu90] et [JKDW01]. Malheureusement aucune méthode ne peut être considérée meilleure par rapport aux autres de façon générale. En fait, la meilleure méthode est celle conduisant à l'estimation intervalle de plus petit rayon (minimisation de l'étendue de l'intervalle). Parmi les méthodes pouvant être utilisées, on peut citer celle utilisant la propagation de contraintes, la programmation linéaire, l'élimination de Gauss, l'itération de Gauss-Seidel et l'itération de Krawczyk... (voir chapitre 1 et annexe B). La meilleure solution de l'équation (3.15) peut être obtenue en résolvant cette équation par toutes les méthodes existantes et en considérant que la solution finale est donnée par l'intersection de toutes les solutions obtenues. Comme dans notre cas la matrice intervalle $[M]$ est carrée, les méthodes qui conviennent afin d'obtenir la meilleure solution de (3.15) sont l'élimination de Gauss, l'itération de Gauss-Seidel et l'itération de Krawczyk. L'estimée retenue est obtenue en faisant l'intersection des solutions fournies par les trois méthodes :

$$[\hat{X}^{(1)}(k)] = \underbrace{[\hat{X}_G^{(1)}(k)]}_{\text{Gauss}} \cap \underbrace{[\hat{X}_{GS}^{(1)}(k)]}_{\text{Gauss-Seidel}} \cap \underbrace{[\hat{X}_K^{(1)}(k)]}_{\text{Krawczyk}} \quad (3.16)$$

En remplaçant, dans l'équation (3.12), les variables d'état $X(k)$ par leur estimée intervalle $[\hat{X}^{(1)}(k)]$ et les matrices incertaines $A(\eta_A(k+j))$ et $B(\eta_B(k+j))$ par leurs bornes inférieures et supérieures, on peut calculer une estimée intervalle des variables d'état à l'instant $k+1$:

$$[\hat{X}^{(2)}(k+1)] = [A][\hat{X}^{(1)}(k)] + [B]U(k) \quad (3.17)$$

où l'exposant (2) indique que l'estimée $[\hat{X}(k+1)]$ est obtenue en exploitant à la fois le modèle du système et le modèle de mesures. Ainsi, à partir des données du système à l'instant k , nous calculons une estimée des variables d'état aux instants k et $k+1$.

En utilisant les données du système à l'instant $k+1$, nous calculons une estimée des variables d'état aux instants $k+1$ et $k+2$.

$$[\hat{X}^{(1)}(k+1)] = [C]^{-1}Y(k+1) \quad (3.18)$$

$$[\hat{X}^{(2)}(k+2)] = [A][\hat{X}^{(1)}(k+1)] + [B]U(k+1) \quad (3.19)$$

Les variables d'état à l'instant $k+1$ peuvent être alors estimée à partir du système à l'instant k et à partir de mesures à l'instant $k+1$. L'estimée finale de $X(k+1)$, en cas de bon fonctionnement, est obtenue en effectuant l'intersection entre les deux estimées :

$$[\hat{X}(k+1)] = [\hat{X}^{(2)}(k+1)] \cap [\hat{X}^{(1)}(k+1)] \quad (3.20)$$

Notons que l'intersection entre $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ est vide si au moins une des intersections entre deux composantes de même indice de ces vecteurs est vide.

En cas de mauvais fonctionnement du système, en supposant que les mesures à l'instant k sont saines, l'estimée finale de $X(k+1)$ est celle calculée à l'instant k , c'est-à-dire $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$, car cette estimée est la seule à être cohérente avec le modèle du système.

De ce qui précède, l'état estimé peut être mis finalement, en cas de bon fonctionnement et de mauvais fonctionnement du système, sous la forme :

$$\begin{cases} [\hat{X}(k+1)] = [\hat{X}^{(2)}(k+1)] \cap [\hat{X}^{(1)}(k+1)] & \text{en bon fonctionnement} \\ [\hat{X}(k+1)] = [\hat{X}^{(2)}(k+1)] & \text{en mauvais fonctionnement} \end{cases} \quad (3.21)$$

3.3.1.2 Détection et localisation de défauts par estimation d'état

Généralement, la phase de détection et de localisation de défaut, dans le cas du diagnostic à base de modèle analytique, est liée à l'étape de génération de résidus qui consiste à construire, à partir d'un modèle de bon fonctionnement du processus et des mesures disponibles, des signaux révélateurs de la présence de défauts, appelés résidus. A partir de l'analyse de ces résidus, l'étape de prise de décision doit alors indiquer si un défaut est présent ou non. Il existe plusieurs méthodes pour la détection et la localisation de défauts. Celle que nous proposons dans ce paragraphe est basée sur l'estimation d'état. Pour cela, à chaque instant, la cohérence entre les estimées $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ est testée.

Comme les mesures à l'instant k sont supposées saines, l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ calculée à cet instant est alors cohérente avec le modèle du système. L'absence de défaut sur les mesures à l'instant k permet donc de considérer l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ comme référence pour la comparer ensuite avec l'estimée $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ calculée à partir des mesures à l'instant $k+1$.

Compte tenu de l'équation (3.20) et en se fondant sur la référence considérée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$, nous analysons l'estimée intervalle $[\hat{X}(k+1)]$ (3.20) ; deux situations sont possibles :

- Si $[\hat{X}(k+1)] \neq \emptyset$, les estimées $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ sont cohérentes. Les valeurs vraies des variables d'état à l'instant $k+1$ appartiennent à la fois à $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$. On déclare donc que les mesures à l'instant $k+1$ ne contiennent pas de défauts,
- Si $[\hat{X}(k+1)] = \emptyset$, les estimations $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ sont incohérentes.

Dans ce cas, les valeurs vraies des variables d'état n'appartiennent qu'à la référence $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$. On déclare donc que les mesures à l'instant $k+1$ sont affectées par un ou plusieurs défauts. Dans ce cas, l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+2)]$ (3.19) ne peut plus être considérée comme référence pour la comparer avec $[\hat{X}^{(1)}(k+2)]$ qui sera calculée à partir des mesures à l'instant $k+2$. Il est alors nécessaire d'éliminer l'effet des défauts de mesure sur l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+2)]$ puisqu'elle sera utilisée pour tester la cohérence des nouvelles mesures. On peut corriger cette estimée à partir du modèle du système (3.12) en remplaçant les matrices incertaines $A(\eta_A)$ et $B(\eta_B)$ par leurs valeurs intervalles $[A]$ et $[B]$, et en remplaçant aussi les variables d'état par leur estimée intervalle $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ considérée comme référence à l'instant $k+1$:

$$[\hat{X}^{(2)}(k+2)] = [A][\hat{X}^{(2)}(k+1)] + [B]U(k+1) \quad (3.22)$$

Pour localiser les mesures qui provoquent l'incohérence entre les estimées $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$, nous pouvons générer des résidus structurés (chaque résidu est alors sensible aux défauts affectant une seule mesure). Compte tenu de l'équation (3.13), en remplaçant la matrice incertaine $C(\eta_C)$ par sa valeur intervalle $[C]$ et les variables d'état par leur estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$, on génère les résidus intervalles structurés suivants :

$$[r(k+1)] = [C][\hat{X}^{(2)}(k+1)] - Y(k+1) \quad (3.23)$$

Chaque composante du vecteur des résidus r_i ($i = 1 \dots n$) reflète la différence entre une estimée intervalle, cohérente avec le modèle du système, de la sortie du $i^{\text{ème}}$ capteur et la $i^{\text{ème}}$ mesure réelle qui peut être affectée par un ou plusieurs défauts. De ce fait, si la $i^{\text{ème}}$ composant du r est anormale, on déduit que la $i^{\text{ème}}$ mesure est en défaut. Rappelons qu'un résidu intervalle est considéré normal s'il contient la valeur 0, sinon ce résidu est anormal et révèle donc la présence d'un défaut.

Notons que pour mettre en œuvre la méthode proposée, il suffit de supposer qu'à l'instant initial le système est en bon fonctionnement.

3.3.1.3 Exemple

Considérons le système linéaire dynamique décrit par les équations (3.12) et (3.13) où :

$$A(\eta_A(k)) \in [A] = \begin{pmatrix} 0.45 & -0.29 & [0.182, 0.218] \\ [-0.087, -0.073] & 0.66 & -0.08 \\ 0.12 & [0.109, 0.131] & [0.35, 0.39] \end{pmatrix},$$

$$B(\eta_B(k)) \in [B] = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \\ [0.91, 1.09] \end{pmatrix},$$

$$C(\eta_C(k)) \in [C] = \begin{pmatrix} -5.25 & [-1.635, -1.365] & 1.12 \\ [0.92, 1.07] & 0.2 & -5 \\ -2 & -1.3 & [0.91, 1.09] \end{pmatrix}$$

L'entrée $U(k)$ appliquée au système est représentée sur la figure 3.2.

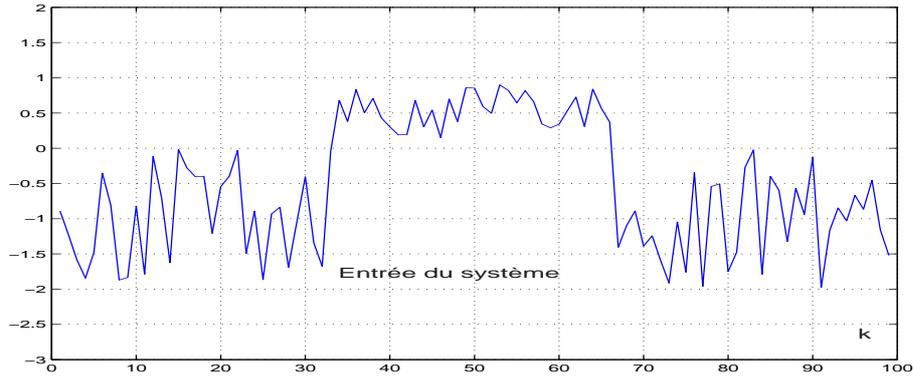


FIG. 3.2 – Entrée appliquée au système

Dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$, $[70, 80]$ interviennent respectivement des défauts f_1 sur y_1 , f_2 sur y_2 et f_3 sur y_3 . Les sorties mesurées sont représentées sur la figure 3.3.

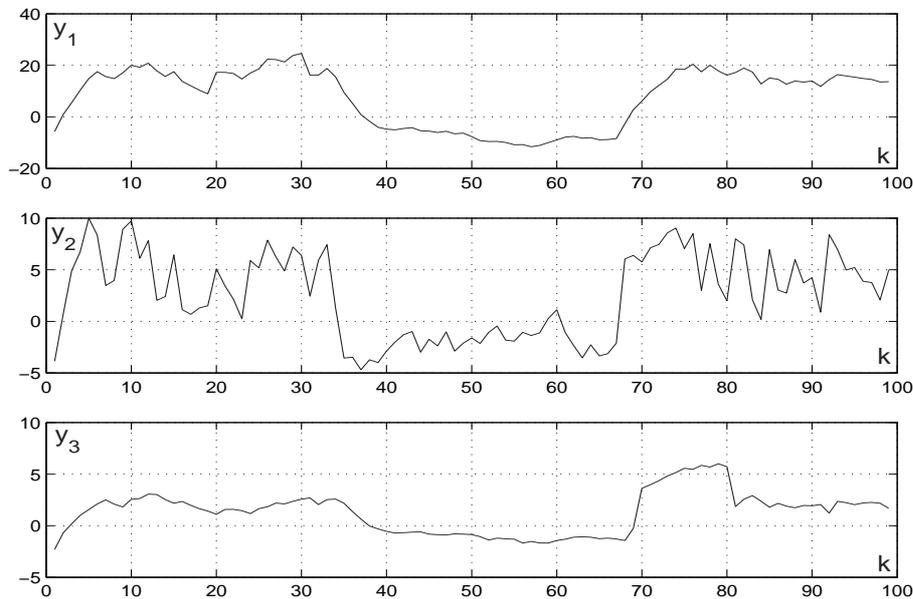


FIG. 3.3 – Sorties mesurées

Aux différents instants, les équations (3.20), (3.21) et (3.23) permettent de détecter et localiser les mesures affectées par les défauts et de donner une estimée des variables d'état cohérente avec le modèle du système. Les résidus intervalles structurés calculés

selon l'équation (3.23) sont montrés à la figure 3.4, il apparaît clairement que les défauts sont détectés et localisés dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$ et $[70, 80]$ où les résidus intervalles ne contiennent pas la valeur 0. La figure 3.5 visualise l'état estimé sous forme intervalle et montre que l'état du système sans défaut, tracé par une ligne pointillée, est toujours inclus dans l'enveloppe estimée.

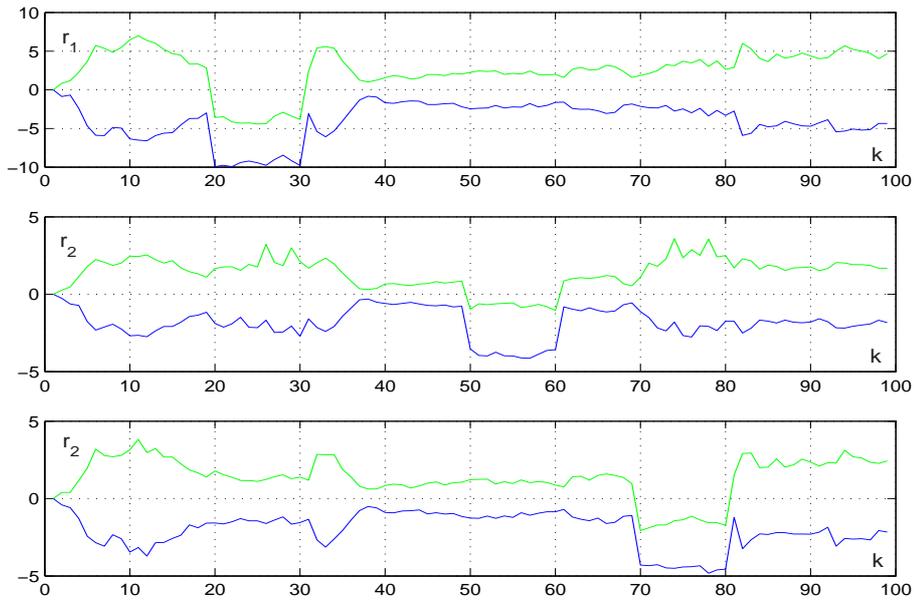


FIG. 3.4 – Résidus

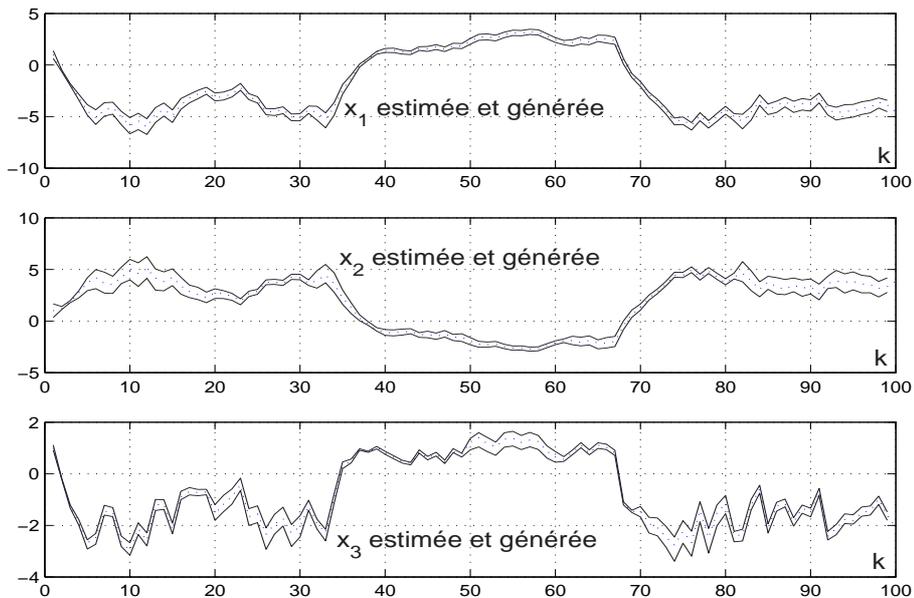


FIG. 3.5 – Variables d'état estimées

3.3.2 Cas des matrices d'observation rectangulaire

Nous traitons dans ce paragraphe le problème de la validation de données des systèmes dynamiques linéaires dans le cas où les variables d'état sont partiellement mesurées. Pour cela, nous présentons tout d'abord un algorithme permettant de calculer une estimée des variables d'état du système [ADMR04b]. Puis, en se basant sur l'état estimé, nous proposons une méthode de détection et localisation de défauts de mesures. Enfin, un exemple académique illustrant la méthode proposée est présenté.

3.3.2.1 Estimation d'état

Considérons de nouveau la classe des systèmes dynamiques représentés par les équations d'état discrètes (3.12) et (3.13) :

$$X(k+1) = A(\eta_A(k))X(k) + B(\eta_B(k))U(k) \quad (3.24)$$

$$Y(k) = C(\eta_C(k))X(k) \quad (3.25)$$

$$A(\eta_A(k)) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad B(\eta_B(k)) \in \mathbb{R}^{n,q}, \quad C(\eta_C(k)) \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad m < n$$

Compte tenu de la deuxième forme statique ; en empilant les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie sur un horizon temporel $[k, k+s]$, nous obtenons la forme matricielle (3.11) :

$$M(\eta_A, \eta_C)X(k, s) = b(\eta_B) \quad (3.26)$$

où :

$$b(\eta_B) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(\eta_B) & 0 \\ 0 & I_{(s+1)m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(k, s-1) \\ Y(k, s) \end{pmatrix}, \quad M(\eta_A, \eta_C) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\eta_A) \\ C_s(\eta_C) \end{pmatrix}$$

Notons que l'horizon d'observation s doit être choisi de façon à observer une redondance d'informations (le nombre de lignes de la matrice $M(\eta_A, \eta_C)$ doit être supérieur au nombre de ses colonnes). Cette contrainte se traduit par l'inégalité suivante :

$$(s+1)m + s.n \geq (s+1)n + m \Rightarrow s \geq \frac{n}{m}, \quad s \in \mathbb{N}^* \quad (3.27)$$

nous choisissons ici la plus petite valeur de s vérifiant l'inégalité (3.27).

Comme les matrices $A(\eta_A(k))$, $B(\eta_B(k))$ et $C(\eta_C(k))$, intervenant dans les expressions des matrices $\tilde{A}(\eta_A)$, $\tilde{B}(\eta_B)$ et $\tilde{C}(\eta_C)$, sont incertaines mais bornées, on peut les remplacer par leurs bornes inférieures et supérieures, ce qui permet d'écrire l'équation (3.26) sous la forme intervalle suivante :

$$[M]X(k, s) = [b] \quad (3.28)$$

Cette équation intervalle, dans laquelle la matrice $[M] \in \mathbb{IR}^{sn+(s+1)m, (s+1)n}$ a plus de

lignes que de colonnes, peut être résolue par plusieurs méthodes. Citons, parmi ces méthodes, la propagation des contraintes et la programmation linéaire. Dans le but d'obtenir une estimée intervalle des variables d'état $X(k, s)$ avec des rayons les plus petits possibles, nous devons éviter de calculer cette estimée en passant par le calcul de l'inverse généralisée de la matrice $[M]$. En effet, le principal inconvénient des méthodes approximatives permettant de calculer l'inverse d'une matrice intervalle (voir chapitre 1), est l'augmentation du pessimisme proportionnellement à la taille de la matrice intervalle à inverser. Pour éviter cela, nous proposons un algorithme séquentiel permettant de calculer une estimée de $X(k, s)$ sans passer par le calcul de l'inverse généralisée de la matrice verticale $[M]$ (on appelle matrice verticale toute matrice dont le nombre de lignes est supérieur au nombre de ses colonnes) [ADMR04c]. Comme aucune méthode ne peut être considérée meilleure par rapport aux autres de façon générale, trois méthodes de calcul ont été retenues : l'élimination de Gauss, l'itération de Gauss-Seidel et l'itération de Krawczyk (voir chapitre 1 [Neu90]). Ces trois méthodes permettent de calculer une estimée de $X(k, s)$ si la matrice $[M]$ est carrée. L'algorithme séquentiel décrit ci-dessous est une adaptation de ces méthodes pour résoudre l'équation (3.28).

L'estimation d'état s'effectue sur une fenêtre d'observation $[k, k + s]$, l'indice k variant ensuite d'un instant initial k_0 à l'instant $k_f - s$ où k_f est l'instant final. Pour une fenêtre d'observation courante, les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

Étape 1

Nous considérons la première matrice carrée inversible $[M^{(1)}] = [M(i, j)]$ où $(i, j) = 1 \dots (s + 1)n$ ainsi que le vecteur correspondant $[b^{(1)}] = [b(i)]$ où $i = 1 \dots (s + 1)n$. Une estimée de $X(k, s)$ est calculée en résolvant l'équation $[M^{(1)}]X(k, s) = [b^{(1)}]$ par les trois méthodes mentionnées précédemment. On note respectivement $[\hat{X}_G^{(1)}(k, s)]$, $[\hat{X}_{GS}^{(1)}(k, s)]$ et $[\hat{X}_K^{(1)}(k, s)]$ les estimées calculées par l'élimination de Gauss, l'itération de Gauss-Seidel et la méthode de Krawczyk. Pour affiner l'estimation, l'intersection des trois estimées précédentes est ensuite calculée :

$$[\hat{X}^{(1)}(k, s)] = [\hat{X}_G^{(1)}(k, s)] \cap [\hat{X}_{GS}^{(1)}(k, s)] \cap [\hat{X}_K^{(1)}(k, s)] \quad (3.29)$$

Étape $i + 1$, $i = 1, \dots, (s + 1)m - n$

A l'étape i , une nouvelle contrainte du système $[M]X(k, s) = [H]$, à savoir la contrainte $(s + 1)n + i$, remplace successivement chacune des contraintes du système $[M^{(1)}]X(k, s) = [H^{(1)}]$ et à chaque remplacement, on calcule une estimée des variables d'état comme cela a été fait à la première étape. Ensuite l'estimée des variables d'état considérée à cette étape est obtenue en effectuant l'intersection entre les différentes estimées calculées. Notons que

les mesures utilisées à l'étape 1 sont supposées saines.

En cas de bon fonctionnement du système, l'estimée finale de $X(k, s)$ est calculée en effectuant l'intersection entre les différentes estimées obtenues à l'aide des trois algorithmes précités et en effectuant l'ensemble des substitutions de lignes :

$$\begin{aligned} [\hat{X}(k, s)] &= \bigcap_{i=1}^{(s+1)m-n+1} [\hat{X}^{(i)}(k, s)] \\ [\hat{X}^{(i)}(k, s)] &= [\hat{X}_G^{(i)}(k, s)] \cap [\hat{X}_{GS}^{(i)}(k, s)] \cap [\hat{X}_k^{(i)}(k, s)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

En cas de mauvais fonctionnement du système (présence d'un ou de plusieurs défauts), en supposant que les mesures permettant de calculer l'estimée $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ (issue de la première étape) sont saines, l'estimée finale considérée de $X(k, s)$ est celle calculée à la première étape car elle est la seule à être cohérente avec le modèle du système compte tenu du fait qu'elle a été calculée en utilisant des mesures saines.

De ce qui précède, l'état estimé peut alors être mis, en cas de bon fonctionnement et de mauvais fonctionnement du système, sous la forme :

$$\begin{cases} [\hat{X}(k, s)] = \bigcap_{i=1}^{(s+1)m-n+1} [\hat{X}^{(i)}(k, s)] & \text{en bon fonctionnement} \\ [\hat{X}(k, s)] = [\hat{X}_G^{(1)}(k, s)] \cap [\hat{X}_{GS}^{(1)}(k, s)] \cap [\hat{X}_k^{(1)}(k, s)] & \text{en mauvais fonctionnement} \end{cases} \quad (3.31)$$

En cas de fonctionnement anormal du système et pour calculer une estimée $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ cohérente avec le modèle du système lorsque la fenêtre temporelle d'observation est décalée d'un pas d'échantillonnage $\forall k$, on doit détecter et localiser les défauts et corriger ensuite a posteriori les mesures en défaut.

3.3.2.2 Détection et localisation de défauts par estimation d'état

Pour détecter une anomalie dans un ensemble de données, un indicateur doit permettre de prendre une décision sur la présence de cette anomalie. La détection et la localisation de défauts, affectant les mesures dans l'équation (3.28), peuvent être réalisées en s'appuyant sur l'estimation d'état ou la technique de l'espace de parité qui sera expliquée par la suite. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la détection et à la localisation de défauts par le biais de l'estimation d'état. Pour cela, à chaque étape de calcul de l'estimation d'état $X(k, s)$ dans la fenêtre d'observation, la cohérence entre l'estimée issue de cette étape et l'estimée issue de la première étape est testée.

La procédure que nous proposons ici permet de corriger a posteriori la mesure en

défaut après détection et localisation d'un défaut sur cette mesure dans la fenêtre d'observation courante.

Compte tenu de (3.29) et en supposant qu'il n'y a pas de défaut dans l'intervalle temporel $[k, k + s - 1]$, nous pouvons calculer une estimée $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ cohérente avec le modèle du système. En effet, nous formulons l'hypothèse qu'il n'y a pas de défaut dans l'intervalle temporel $[k_0, k_0 + s - 1]$ où k_0 est l'instant initial. Lorsque la fenêtre temporelle d'observation est décalée d'un pas d'échantillonnage, cette hypothèse reste valable $\forall k$ grâce à la correction en ligne qu'on propose pour les mesures en défaut. L'absence de défaut de mesures dans l'intervalle temporel $[k, k + s - 1]$ permet donc de considérer l'estimée issue de la première étape $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ comme référence pour comparer les estimations à venir dans les étapes suivantes.

En se fondant ensuite sur la référence $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$, nous définissons l'intervalle suivant :

$$[\tau] = [\hat{X}^{(1)}(k, s)] \cap [\hat{X}^{(j)}(k, s)] \quad (3.32)$$

Rappelons que l'intersection entre $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ et $[\hat{X}^{(j)}(k, s)]$ est vide si au moins une des intersections entre deux composantes de même indice de ces vecteurs est vide.

En analysant l'intervalle $[\tau]$ défini en (3.32), on construit un indicateur de défaut τ comme suit :

- 1- Si $[\tau] \neq \emptyset$, les estimations $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ et $[\hat{X}^{(j)}(k, s)]$ sont cohérentes. Les valeurs des variables d'état appartiennent à la fois à $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ et $[\hat{X}^{(j)}(k, s)]$. Les données intervenant dans l'équation $[M^{(j)}]X(k, s) = [b^{(j)}]$ sont déclarées valides et on pose $\tau = 0$.
- 2- Si $[\tau] = \emptyset$, les estimations $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ et $[\hat{X}^{(j)}(k, s)]$ sont incohérentes. Dans ce cas, les valeurs des variables d'état n'appartiennent qu'à la référence considérée $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ qui est cohérente avec le modèle du système. On déclare dans ce cas que la mesure n'intervenant que dans le calcul de $[\hat{X}^{(j)}(k, s)]$ est invalide et on pose $\tau = 1$.

Dans le second cas, il est nécessaire d'éliminer l'influence du défaut sur la mesure déclarée invalide, puisqu'elle sera utilisée pour tester la cohérence des nouvelles mesures dans les fenêtres d'observation à venir. En effet, l'élimination de l'influence du défaut sur la mesure déclarée invalide se réalise en ligne à chaque instant. Lorsqu'on localise une mesure aberrante $Y_i(k + s)$ (affectée par un ou plusieurs défauts), on la corrige a posteriori

en utilisant le modèle du système (3.25) et l'estimation de référence $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$. La mesure corrigée a posteriori $Y_{i,cor}(k+s)$ doit appartenir à l'estimation intervalle $[\hat{Y}_i(k+s)]$ calculée en remplaçant la matrice incertaine $C(\eta_C)$ par sa valeur intervalle $[C]$ et les variables d'état $X(k)$ par leur estimée intervalle $[\hat{X}^{(1)}(k, s)]$ ce qui donne :

$$[\hat{Y}_i(k+s)] = [C_i] [\hat{X}^{(1)}(k+s)] \quad (3.33)$$

où $[C_i]$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $[C]$. Toute les valeurs appartenant à l'intervalle défini par (3.33) sont satisfaisantes. Dans la suite du texte, nous choisissons le centre de l'intervalle $[\hat{Y}_i(k+s)]$ comme estimée de $Y_i(k+s)$.

Lorsque la stratégie décrite ci-dessus a été appliquée à l'ensemble des données d'une fenêtre d'observation courante, on glisse cette fenêtre d'un pas d'échantillonnage et on calcule la forme statique (3.28) relative à la nouvelle fenêtre d'observation. Comme on a remplacé les mesures déclarées invalides par leurs valeurs corrigées dans la fenêtre d'observation courante, on est sûr que la nouvelle fenêtre d'observation ne peut contenir de défauts que sur les mesures obtenues au nouvel instant, ce qui permet de répéter la stratégie proposée sur l'ensemble de l'intervalle temporel à tester.

Remarque 3.1 *Notons que le modèle considéré (3.24) et (3.25) peut contenir un bruit additif $\omega(k)$ sur les mesures et/ou une perturbation additive $\nu(k)$ sur l'état. En considérant que le bruit et la perturbation sont bornés, les équations (3.15, 3.28) restent valables si le vecteur $[b]$ prend en compte les bornes de ce bruit et de cette perturbation.*

3.3.2.3 Exemple

Considérons de nouveau l'exemple 3.3.1.3, mais cette fois avec deux capteurs Y_1 et Y_2 , la matrice d'observation $C(\eta_C) \in \mathbb{R}^{2,3}$ étant :

$$C(\eta_C(k)) \in [C] = \begin{pmatrix} -5.25 & [-1.635, -1.365] & 1.12 \\ [0.92, 1.07] & 0.2 & -5 \end{pmatrix}$$

L'entrée $U(k)$ du système est représentée sur la figure 3.6. Dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$, interviennent des défauts f_1 sur y_1 , f_2 sur y_2 ; les sorties affectées par les défauts sont représentées sur la figure 3.7.

Selon l'inégalité (3.27), ($s \geq \frac{n}{m} = 1.5$), on choisit la fenêtre d'observation $s = 2$. En empilant le vecteur d'état, de commande et de mesure sur l'horizon $[k, k+2]$ et en remplaçant les matrices incertaines par leurs valeurs intervalles, on obtient la forme statique intervalle (3.28) avec :

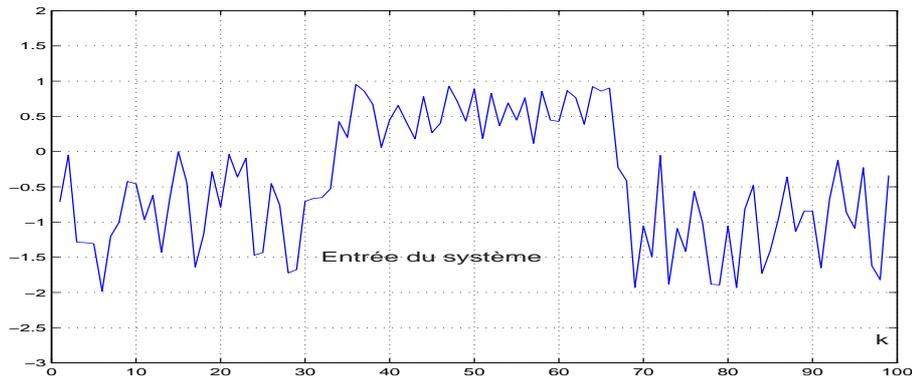


FIG. 3.6 – Entrée du système

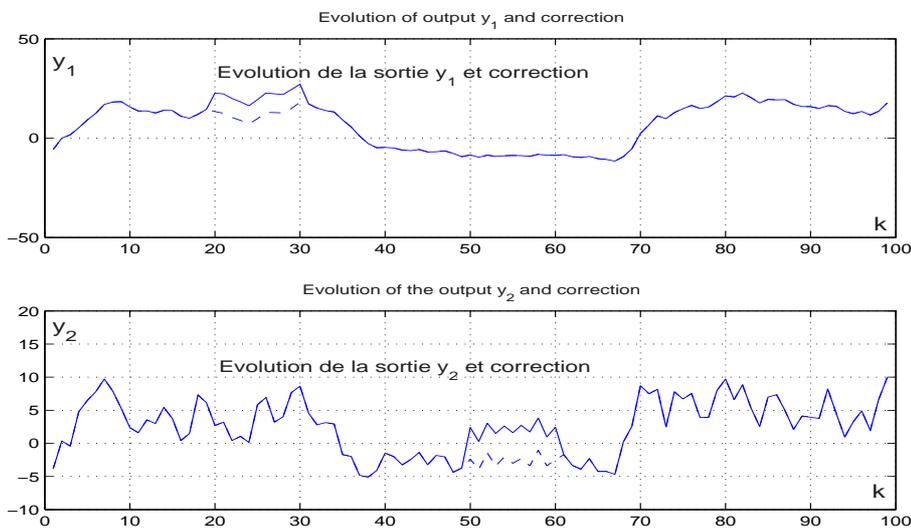


FIG. 3.7 – Sorties mesurées et corrigées

$$[M] = \begin{pmatrix} [A] & -I & 0 \\ 0 & [A] & -I \\ [C] & 0 & 0 \\ 0 & [C] & 0 \\ 0 & 0 & [C] \end{pmatrix}, [b] = \begin{pmatrix} -[B]U(k) \\ -[B]U(k+1) \\ Y(k) \\ Y(k+1) \\ Y(k+2) \end{pmatrix} \text{ et } X(k, 2) = \begin{pmatrix} X(k) \\ X(k+1) \\ X(k+2) \end{pmatrix}$$

En faisant varier k sur l'intervalle temporel à tester, les équations (3.28), (3.31), (3.32) et (3.33) permettent de détecter et localiser les mesures affectées par les défauts. La figure 3.8 montre les indicateurs de défauts relatifs aux mesures y_1 et y_2 . Il est clair que les défauts sont détectés et localisés.

Les mesures corrigées (selon l'équation 3.33) sont représentées sur la figure 3.7 en traits discontinus.

L'estimation d'état sous forme intervalle, cohérente avec le modèle du système, est représentée sur la figure 3.9. Il est clair que l'état du système sans défaut (traits discontinus)

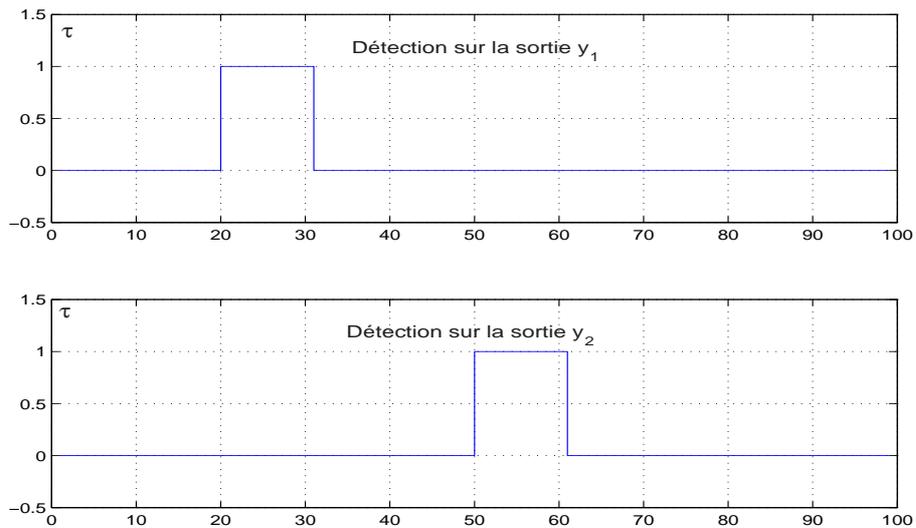


FIG. 3.8 – Indicateurs de défauts

est à l'intérieur de l'enveloppe estimée.

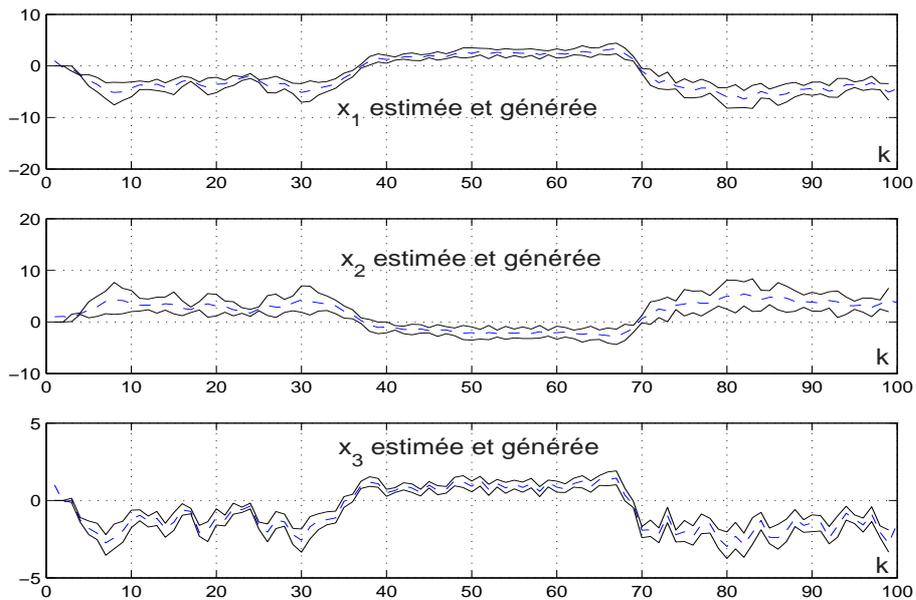


FIG. 3.9 – Variables d'état estimées

3.3.3 Cas des matrices d'observation verticale

Il existe parfois des situations où la matrice d'observation $C(\eta_C)$ possède plus de lignes que de colonnes avec $\text{rang}(C) = \text{nombre de colonnes}$, ce qui assure une redondance d'informations des mesures par rapport aux variables d'état. Dans cette partie, nous proposons un algorithme permettant de calculer une estimée intervalle des variables d'état dans le cas où la matrice d'observation est verticale. Ensuite, en se basant sur l'état estimé, nous présentons une méthode pour la détection et la localisation de défauts de mesures.

Puis, en s'appuyant sur l'espace de parité dans le cas incertain, nous proposons une autre méthode permettant également la détection de défauts affectant les mesures. Enfin, nous présentons un exemple académique pour illustrer les méthodes proposées.

3.3.3.1 Estimation d'état

Considérons les systèmes linéaires incertains décrits par les équations (3.24) et (3.25) avec $A(\eta_A(k)) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B(\eta_B(k)) \in \mathbb{R}^{n,q}$ et $C(\eta_C(k)) \in \mathbb{R}^{m,n}$, où $m > n$. En remplaçant les matrices incertaines $A(\eta_A(k))$, $B(\eta_B(k))$ et $C(\eta_C(k))$ par leurs bornes inférieures et supérieures, on obtient les équations intervalles suivantes :

$$X(k+1) = [A]X(k) + [B]U(k) \quad (3.34)$$

$$Y(k) = [C]X(k) \quad (3.35)$$

$$[A] \in \mathbb{IR}^{n,n}, \quad [B] \in \mathbb{IR}^{n,q}, \quad [C] \in \mathbb{IR}^{m,n}, \quad m > n$$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer, à partir de l'équation (3.35) dans laquelle la matrice $[C]$ possède plus de lignes que de colonnes, une estimée intervalle des variables d'état $X(k)$. Afin d'obtenir une estimée intervalle avec des rayons les plus petits possibles, nous allons adapter les méthodes mentionnées précédemment (élimination de Gauss, itération de Gauss-Seidel et itération de Krawczyk) de manière à pouvoir exploiter l'équation (3.35). Notons que lors de la résolution de l'équation (3.35), l'augmentation du pessimisme (effet d'enveloppement) est proportionnelle à la taille de la matrice intervalle $[C]$ à inverser. La plus petite matrice carrée inversible que l'on peut extraire de $[C]$ autorisant le calcul d'une estimée des variables d'état est de dimension n . En prenant en compte toutes les contraintes de l'équation (3.35), nous proposons un algorithme séquentiel (similaire à celui proposé dans le cas d'une matrice d'observation sous-déterminée) permettant de calculer une estimée intervalle des variables d'état. Les différentes étapes de l'algorithme sont les suivantes :

Etape 1

Compte tenu des n premières contraintes de l'équation (3.35), et en supposant que les n premières lignes de $[C]$ forment une matrice carrée inversible, nous pouvons écrire :

$$[X^{(1)}(k)] = [C^{(1)}]^{-1}Y^{(1)}(k) \quad (3.36)$$

avec $[C^{(1)}] = [C(i, j)]$, $(i, j) = \{1 \dots n\}$ et $Y^{(1)} = Y(i)$, $i = 1 \dots n$.

La résolution de l'équation intervalle (3.36) par les méthodes mentionnées précédemment permet de calculer trois estimées intervalles des variables d'état. En effectuant l'intersection entre ces estimées, pour affiner l'estimée, nous obtenons une estimée $[\hat{X}^{(1,1)}(k)]$:

$$[\hat{X}^{(1,1)}(k)] = \underbrace{[\hat{X}_G^{(1,1)}(k)]}_{Gauss} \cap \underbrace{[\hat{X}_{GS}^{(1,1)}(k)]}_{Gauss-Seidel} \cap \underbrace{[\hat{X}_K^{(1,1)}(k)]}_{Krawczyk} \quad (3.37)$$

Etape $i + 1, i = 1, \dots, m - n$

A l'étape i , on remplace la $n^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $[C^{(1)}]$ de l'équation (3.36) par la $(n + i)^{\text{ème}}$ ligne de $[C]$. On remplace également la $n^{\text{ème}}$ composante du vecteur $Y^{(1)}(k)$ par la $(n + i)^{\text{ème}}$ composante de $Y(k)$, ce qui donne l'équation intervalle :

$$[X^{(i)}(k)] = [C^{(i)}]^{-1}Y^{(i)}(k) \quad (3.38)$$

La résolution de cette équation, comme cela a été fait à l'étape 1, permet d'obtenir une estimée $[\hat{X}^{1,i}(k)]$:

$$[\hat{X}^{(1,i)}(k)] = \underbrace{[\hat{X}_G^{(1,i)}(k)]}_{Gauss} \cap \underbrace{[\hat{X}_{GS}^{(1,i)}(k)]}_{Gauss-Seidel} \cap \underbrace{[\hat{X}_K^{(1,i)}(k)]}_{Krawczyk} \quad (3.39)$$

En effectuant l'intersection entre les estimées calculées lors de toutes les étapes on obtient l'estimée $[\hat{X}^{(1)}(k)]$:

$$[\hat{X}^{(1)}(k)] = \bigcap_{i=1}^{m-n+1} [\hat{X}^{(i)}(k)] \quad (3.40)$$

En remplaçant dans l'équation (3.34) les variables d'état par l'estimée $[\hat{X}^{(1)}(k)]$ calculée à partir de mesures, on déduit par prédiction une estimée d'état à l'instant $k + 1$:

$$[\hat{X}^{(2)}(k + 1)] = [A][\hat{X}^{(1)}(k)] + [B]U(k) \quad (3.41)$$

Ainsi, à partir des mesures du système à l'instant k , nous calculons une estimée des variables d'état aux instants k et $k + 1$.

En utilisant les mesures à l'instant $k + 1$ nous pouvons calculer alors, comme précédemment, une estimée des variables d'état aux instants $k + 1$ et $k + 2$.

$$[\hat{X}^{(1)}(k + 1)] = [C]^{-1}Y(k + 1) \quad (3.42)$$

$$[\hat{X}^{(2)}(k + 2)] = [A]\hat{X}^{(1)}(k + 1) + [B]U(k + 1) \quad (3.43)$$

En cas de bon fonctionnement du système, l'estimée finale de $X(k + 1)$ peut être

calculée en effectuant l'intersection entre l'estimée $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ calculée à partir du système et l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ calculée à partir des mesures :

$$[\hat{X}(k+1)] = [\hat{X}^{(2)}(k+1)] \cap [\hat{X}^{(1)}(k+1)] \quad (3.44)$$

En cas de mauvais fonctionnement du système, en supposant que les mesures à l'instant initial k sont saines, l'estimée finale de $X(k+1)$ considérée est celle $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ calculée à partir du système car celle ci est la seule à être cohérente avec le modèle du système.

De ce qui précède, l'état estimé peut être mis alors sous la forme :

$$\begin{cases} [\hat{X}(k+1)] = [\hat{X}^{(2)}(k+1)] \cap [\hat{X}^{(1)}(k+1)] & \text{en bon fonctionnement} \\ [\hat{X}(k+1)] = [\hat{X}^{(2)}(k+1)] & \text{en mauvais fonctionnement} \end{cases} \quad (3.45)$$

En cas de mauvais fonctionnement du système et afin fournir une estimée d'état $[\hat{X}^{(2)}(k+2)]$ cohérente avec le modèle du système et pouvant servir de référence pour l'instant suivant, il est nécessaire de détecter et localiser les défauts affectant les mesures.

3.3.3.2 Détection et localisation de défauts de mesures

Il existe diverses approches pour la détection et la localisation de défauts. Dans ce paragraphe nous allons nous focaliser sur l'approche basée sur l'estimation d'état. Pour cela, à chaque instant, on teste la cohérence entre les estimées $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ (3.41) et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ (3.42).

L'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ est calculée à partir du modèle du système et des mesures à l'instant k . Comme les mesures à l'instant k sont supposées saines, l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ est alors cohérente avec le modèle du système et peut être utilisée comme référence pour la comparer ensuite avec l'estimée $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ calculée à partir des mesures à l'instant $k+1$. En analysant l'estimée intervalle $[\hat{X}(k+1)]$ (3.44) obtenue en effectuant l'intersection entre $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$, on peut distinguer deux situations :

- Si $[\hat{X}(k+1)] \neq \emptyset$, les estimées $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ sont cohérentes. Ainsi, on déclare que les mesures à l'instant $k+1$ ne contiennent pas de défauts,
- Si $[\hat{X}(k+1)] = \emptyset$, les estimations $[\hat{X}^{(2)}(k+1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k+1)]$ sont incohérentes. On déclare donc que les mesures à l'instant $k+1$ sont affectées par un ou plusieurs défauts. Dans ce cas, l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k+2)]$ (3.43) ne peut plus être considérée comme référence pour la comparer avec $[\hat{X}^{(1)}(k+2)]$ qui sera calculée à partir des

mesures à l'instant $k + 2$. Il est alors nécessaire d'éliminer l'effet des défauts des mesures sur l'estimée $[\hat{X}^{(2)}(k + 2)]$ puisqu'elle sera utilisée pour tester la cohérence des nouvelles mesures. On peut corriger cette estimée à partir de l'équation (3.34) en remplaçant les variables d'état par leur estimée intervalle $[\hat{X}^{(2)}(k + 1)]$ considérée comme référence à l'instant $k + 1$:

$$[\hat{X}^{(2)}(k + 2)] = [A][\hat{X}^{(2)}(k + 1)] + [B]U(k + 1) \quad (3.46)$$

Pour localiser les mesures qui provoquent l'incohérence entre les estimées $[\hat{X}^{(2)}(k + 1)]$ et $[\hat{X}^{(1)}(k + 1)]$, on peut générer des résidus structurés comme cela a été fait dans le cas d'une matrice d'observation inversible. En remplaçant, dans l'équation (3.35), les variables d'état par leur estimée $[\hat{X}^{(2)}(k + 1)]$, on peut calculer une estimée des sorties des capteurs. En faisant la différence entre cette estimée et les mesures réelles, on génère les résidus structurés suivants :

$$[r(k + 1)] = [C][\hat{X}^{(2)}(k + 1)] - Y(k + 1) \quad (3.47)$$

3.3.3.3 Exemple

Considérons de nouveau l'exemple du paragraphe 3.3.1.3 mais cette fois avec une matrice d'observation de la forme :

$$C(\eta_C(k)) \in [C] = \begin{pmatrix} -5.25 & [-1.65, -1.35] & 1.12 \\ [0.9, 1.1] & 0.2 & -5 \\ -2 & -1.3 & [0.9, 1.1] \\ [-2.2, -1.8] & 0.7 & -0.6 \\ -1 & [-0.33, -0.27] & 4 \\ -3 & 1.8 & [-1.54, -1.26] \end{pmatrix}$$

L'entrée $U(k)$ du système est représentée sur la figure 3.10. Dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$ et $[70, 80]$ interviennent des défauts f_1 sur y_1 , f_2 sur y_2 et f_3 sur y_5 ; les sorties affectées par les défauts sont représentées sur la figure 3.11.

Les équations (3.40)-(3.45) permettent de calculer une estimée intervalle des variables d'état cohérente avec le modèle du système considéré. Cette estimée est montrée sur la figure 3.12. L'analyse de l'estimée $[\hat{X}(k + 1)]$ (voir équation 3.44) permet de détecter les défauts affectant les mesures et de proposer, selon l'équation (3.46) une correction de l'estimée calculée lors de la détection de ces défauts.

De plus, en s'appuyant sur l'équation (3.47), on peut générer des résidus intervalles structurés permettant de localiser les mesures affectées par les défauts :

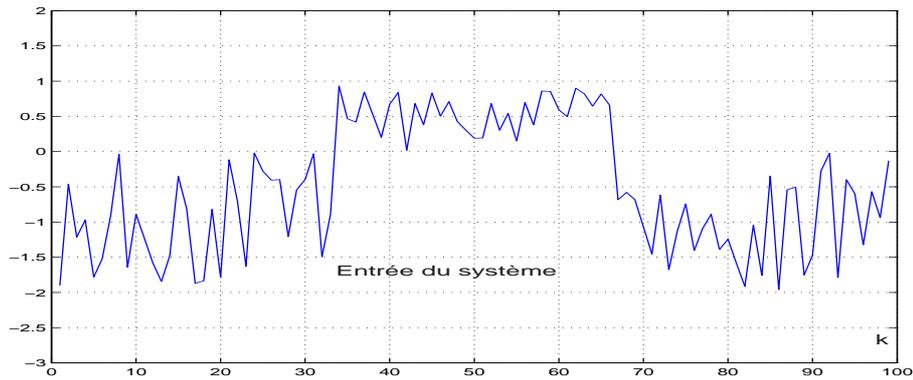


FIG. 3.10 – Entrée du système

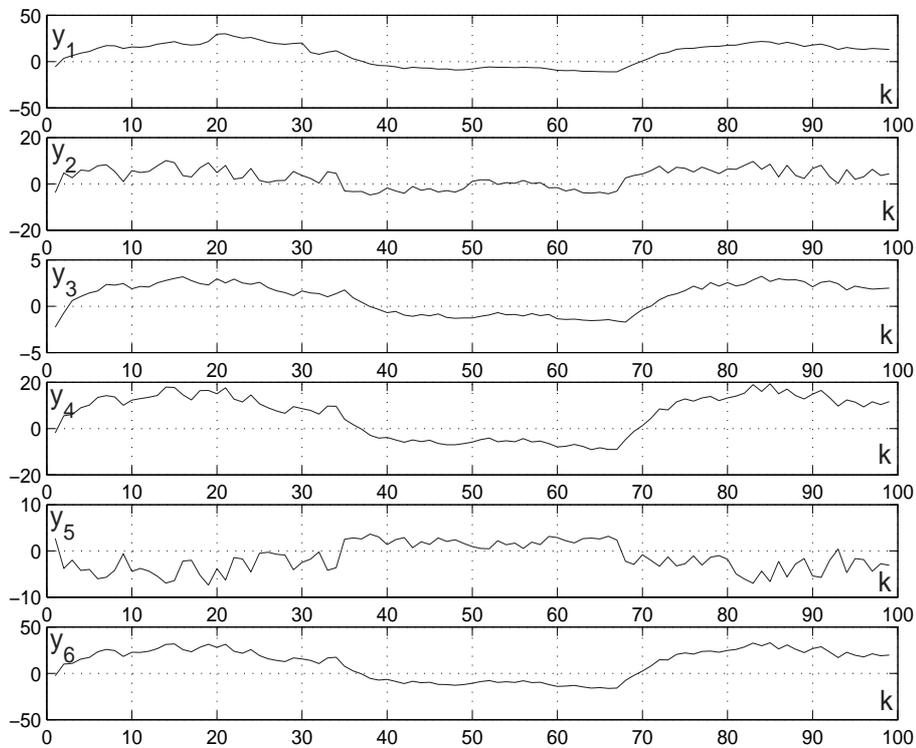


FIG. 3.11 – Sorties du système

$$\begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ [r_3] \\ [r_4] \\ [r_5] \\ [r_6] \end{pmatrix} = [C][\hat{X}^{(2)}(k+1)] - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

La figure 3.13 montre les résidus structurés ; le résidu $[r_1]$ ne contient pas la valeur zéro dans l'intervalle temporel $[20, 30]$ ainsi la mesure y_1 est affecté par le défaut f_1 . De même

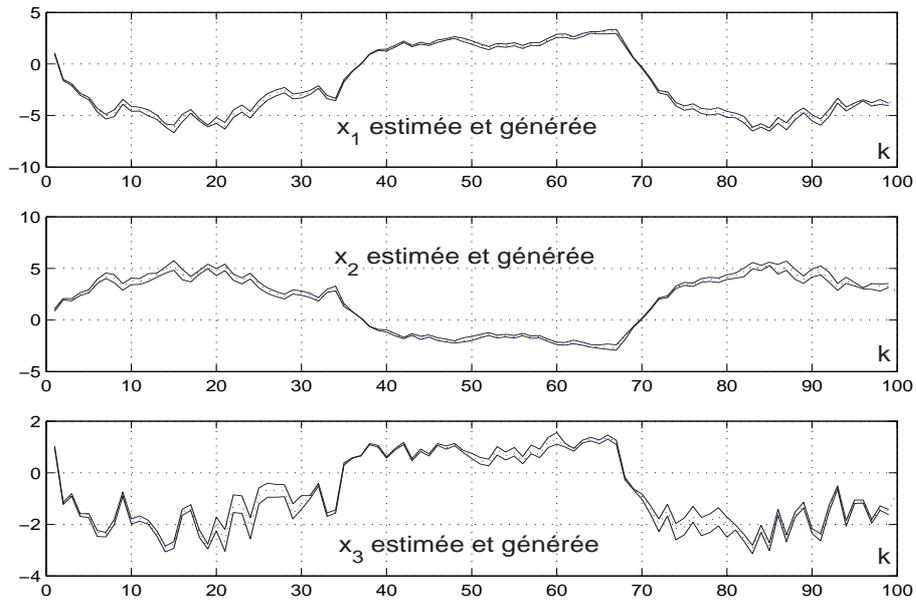


FIG. 3.12 – Variables d'état estimées

les résidus $[r_2]$ et $[r_5]$ permettent de localiser respectivement les défauts f_2 et f_3 sur les mesures y_2 et y_5 . Tous les résidus restant sont normaux car ils contiennent la valeur 0 à chaque instant.

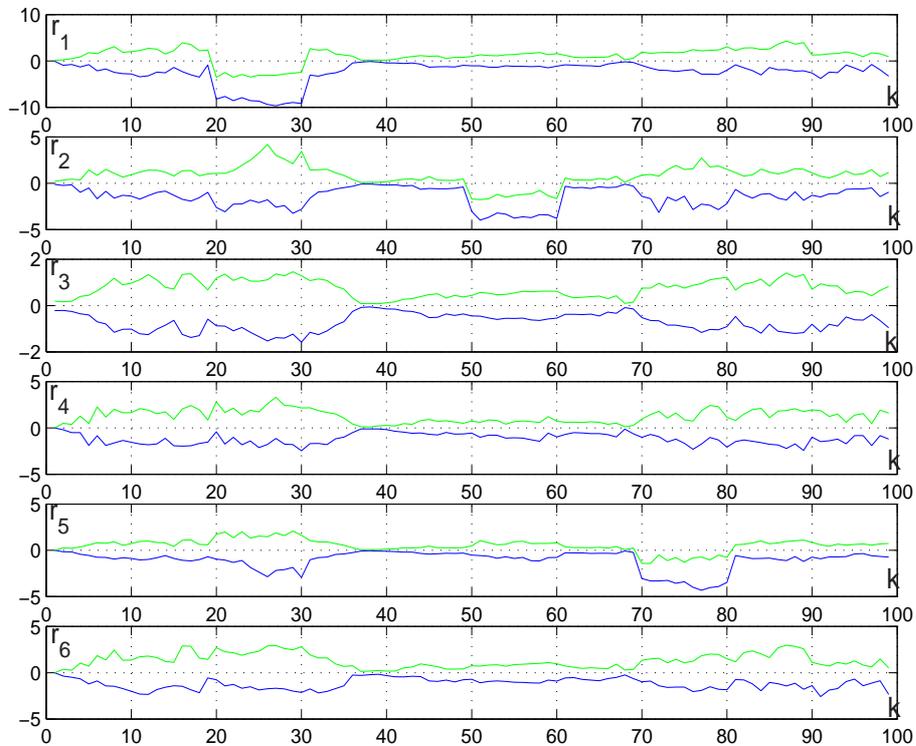


FIG. 3.13 – Résidus structurés

3.4 Génération des résidus par espace de parité dans le cas incertain

La phase de génération des résidus constitue une étape essentielle dans une procédure de validation de données quelque soit l'approche adoptée. Les méthodes exposées précédemment consistent toujours, dans un premier temps, à générer des indicateurs de défauts appelés résidus. L'objectif de ce paragraphe est de développer une méthode fiable de génération de résidus dans le cas de modèles à paramètres incertains en utilisant une approche par espace de parité. Cette approche, largement répandue dans le domaine du diagnostic de systèmes, reste essentiellement limitée aux modèles certains [Mir79], [Cho80], [MVV88] mis à part quelques travaux proposés par [Lou82] dans le cas multi-modèle ou [Fra89] pour des systèmes à entrées inconnues. L'objectif est maintenant de s'intéresser à des modèles plus généraux où les incertitudes affectent à la fois le modèle du système et les mesures. En effet, les résidus générés par l'espace de parité ne sont que les composantes du vecteur parité qui est établi à partir des mesures des sorties et des signaux de commande des actionneurs (grandeurs connues) [Sta01]. Dans un premier temps, la génération du vecteur parité dans le cas d'un modèle certain est présentée afin d'en comprendre le principe fondamental et les différentes difficultés s'y rattachant. Ensuite, nous développons une extension au cas des systèmes incertains. Puis, dans le but de détecter les défauts affectant les mesures du système, une analyse du vecteur parité est effectuée.

3.4.1 Vecteur parité d'un système certain

Intéressons-nous, dans un premier temps, au cas d'un système statique, sachant que l'extension au cadre dynamique est pratiquement immédiate en utilisant l'une des deux formes statiques proposées dans les paragraphes 3.2.1 et 3.2.2. Considérons le cas général d'une équation de mesures à modèle statique linéaire certain :

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= CX(k) + E(k) + F D(k) \\
 X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{m,n}, D \in \mathbb{R}^p, E \in \mathbb{R}^m, F \in \mathbb{R}^{m,p}, m > n
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

où $Y(k)$ est le vecteur de mesure, $X(k)$ le vecteur des variables à mesurer, $D(k)$ le vecteur des défauts pouvant affecter certains capteurs et $E(k)$ le vecteur des bruits de mesure, C est la matrice caractérisant le système de mesure et F est la matrice qui traduit la direction des défauts.

On définit le vecteur parité $P(k)$, projection du vecteur des mesures $Y(k)$, sous sa

forme de calcul et sous sa forme d'explication :

$$P(k) = WY(k) \quad (3.50)$$

$$P(k) = W E(k) + WF D(k) \quad (3.51)$$

où W est une matrice de projection, appelée aussi matrice de parité, orthogonale à la matrice C . Les vecteurs ligne de W sont orthogonaux aux vecteurs colonnes de C et forment une base de l'espace de parité de dimension $(m - n)$. L'espace \mathcal{W} dans \mathbb{R}^n engendré par les lignes de W est donc le complémentaire de l'espace d'observation \mathcal{C} dans \mathbb{R}^m engendré par les colonnes de C (voir l'interprétation géométrique sur la figure 3.14). Notons que la forme de calcul (3.50) permet de calculer numériquement le vecteur parité à partir des mesures tandis que la forme d'explication (3.51) exprime l'influence des erreurs de mesure et des défauts.

En supposant que la matrice C est de plein rang colonne, hypothèse assez peu restrictive, on déduit que :

$$W \in \mathbb{R}^{m-n,m}, \quad P(k) \in \mathbb{R}^{m-n}$$

La matrice de parité W est donc de rang $(m - n)$, ce qui veut dire que l'on obtient $m - n$ relations de parité indépendantes. La détermination de W peut être effectuée par plusieurs méthodes [BJL⁺90], [Fra90] et notons que W n'est pas unique, car il existe une infinité de façons de choisir une base dans l'espace de parité.

En l'absence des bruits de mesure $E(k)$ et de défauts $D(k)$ le vecteur parité est nul (sur la figure 3.14, $Y(k)$ est dans l'espace \mathcal{C} et $Y_{\mathcal{W}}(k) = 0$). En présence d'un défaut, les composantes du vecteur parité ne sont plus nulles (sur la figure 3.14, $Y_{\mathcal{W}}(k) \neq 0$).

3.4.2 Vecteur parité d'un système à paramètres incertains

Considérons maintenant le cas d'une équation de mesure à modèle statique incertain :

$$\begin{aligned} Y(k) &= C(\eta_C(k))X(k) + E(\eta_E(k)) + F D(\eta_F(k)) \\ C(\eta_C(k)) &= C_0 + \sum_{i=1}^l \eta_i(k)C_i, \quad |\eta_i| \leq 1, \quad \eta_C(k) \in \mathbb{R}^l \\ C(\eta_C(k)) &\in \mathbb{R}^{m,n}, \quad D(\eta_F(k)) \in \mathbb{R}^p, \quad E(\eta_E(k)) \in \mathbb{R}^m, \quad F \in \mathbb{R}^{m,p}, \quad m > n \end{aligned} \quad (3.52)$$

où C_0 est la partie invariante de $C(\eta_C(k))$ (la valeur nominale). Les matrices de distribution C_i traduisent l'amplitude des incertitudes affectant les éléments de la matrice d'observation et sont supposées linéaires en les variables incertaines η_i . Le bruit de mesure $E(\eta_E(k))$ est supposé borné sans considérer aucun lien entre ses valeurs à deux instants

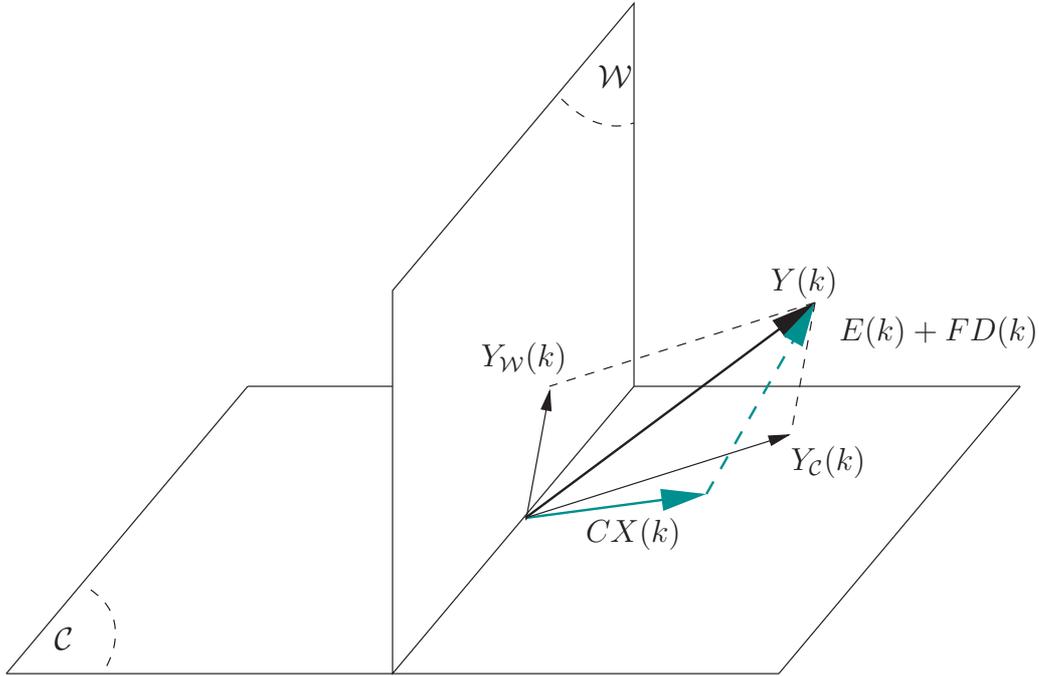


FIG. 3.14 – Décomposition du vecteur des mesures par projection orthogonale $Y(k) = Y_W(k) + Y_C(k)$

différents. $\eta_E(k)$ et $\eta_F(k)$ sont deux vecteurs constitués de variables bornées et normalisées.

L'objectif est d'obtenir un vecteur parité en déterminant cette fois-ci une matrice de parité $W(\eta_C(k))$ qui n'est plus forcément constante et qui dépend des paramètres incertains $\eta_C(k)$, tout en permettant d'éliminer les variables d'état inconnues $X(k)$ en assurant :

$$W(\eta_C(k))C(\eta_C(k)) = 0 \quad (3.53)$$

Pour illustrer le principe de l'obtention du vecteur parité dans le cas incertain, considérons tout d'abord le cas où $\eta_C \in \mathbb{R}$ et la dépendance de C vis-à-vis de cette incertitude est affine :

$$C(\eta_C(k)) = C_0 + \eta_C(k)C_1 \quad (3.54)$$

$$|\eta_C| \leq 1, \quad C_0 \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Il est bien sûr supposé que la matrice $C(\eta_C(k))$ est de plein rang colonne (différents outils pour tester le rang d'une matrice incertaine sont proposés dans l'annexe 3). En faisant l'hypothèse que le rang de la matrice $C(\eta_C(k))$ est invariant sur l'espace de variation des variables bornées, on peut considérer que le rang de la matrice incertaine $C(\eta_C(k))$ est égal au rang de la matrice certaine C_0 . Cette hypothèse n'est guère contraignante dans la mesure où nous nous intéressons à des incertitudes paramétriques ne changeant pas les tendances comportementales du système physique. Il en résulte une faible chance d'abou-

tir à des changements de signe de paramètres ou à des annulations de paramètres pouvant modifier l'observabilité ou le nombre de relations de redondance du système. La matrice $W(\eta_C(k))$ doit être choisie de plein rang ligne de façon à éviter la présence de relations de parité redondantes. Le nombre de relations indépendantes correspond au nombre de lignes de la matrice $C(\eta_C(k))$ auquel est soustrait son rang. Cette matrice de parité est donc constituée de $m - \text{rang}(C_0)$ lignes indépendantes.

Différentes techniques peuvent être utilisées pour résoudre (3.53), Par exemple, l'utilisation du logiciel de calcul formel Maple permet de calculer directement le noyau de la matrice $C(\eta_C(k))$ [AMR00]. Dans [JIA00], les auteurs utilisent une approche reposant sur un développement en série de $W(\eta_C(k))$ complétée par une troncature du vecteur parité, ce qui conduit à une surestimation de l'enveloppe caractérisant ce vecteur. Nous nous intéressons ici à la solution intervalle exacte de l'équation (3.53). La solution la plus simple consiste à considérer que la matrice de parité $W(\eta_C(k))$ prend une forme matricielle polynomiale en $\eta_C(k)$ d'ordre q :

$$W(\eta_C(k)) = W_0 + \eta_C(k)W_1 + \dots + \eta_C^q(k)W_q \quad (3.55)$$

Gantmacher [Gan77] justifie cette structure en expliquant que la matrice $W(\eta_C(k))$ peut être toujours choisie de manière à ce qu'elle dépende de puissances de $\eta_C(k)$ lorsque $C(\eta_C)$ est polynomiale en η_C . Comte tenu des relations (3.53), (3.54) et (3.55) et pour q quelconque nous obtenons, par identification polynomiale, la relation matricielle équivalente suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} W_0 & W_1 & \dots & W_q \end{pmatrix}}_W \underbrace{\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_0 & C_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_0 & C_1 \end{pmatrix}}_{\varphi} = 0 \quad (3.56)$$

La solution de l'équation linéaire (3.56) ne pose pas de problème particulier ; l'existence de la solution est liée à la valeur de q [Gan77]. Plus précisément, la matrice φ constituée des blocs C_0 et C_1 ne doit pas être de plein rang ligne pour que le vecteur W existe. Il est clair que $\varphi \in \mathbb{R}^{(q+1)m, (q+2)n}$ d'où la condition suffisante pour l'existence de la solution de (3.56) :

$$q > \frac{2n - m}{m - n}, \quad q \in \mathbb{N}^* \quad (3.57)$$

Une fois la matrice de parité $W(\eta_C(k))$ déterminée, la forme de calcul du vecteur parité $P(k)$ est définie par :

$$P(\eta_C, k) = W(\eta_C(k))Y(k) \quad (3.58)$$

La relation (3.56) traduit le fait que les lignes de W engendrent le complément orthogonal de l'espace colonne de la matrice φ . Ainsi, il est possible d'obtenir la matrice W en faisant la différence entre la matrice identité et la matrice de projection $\varphi(\varphi^T\varphi)^{-1}\varphi^T$ du sous-espace $\mathbb{R}^{(q+1)m, (q+2)n}$. Il en découle que le nombre de lignes de W est inférieur ou égal à $(q+1)m$. La taille de W dépend alors du rang de la matrice $(I - \varphi(\varphi^T\varphi)^{-1}\varphi^T)$.

Compte tenu de l'équation (3.55) et dans le but de garder uniquement $m - \text{rang}(C_0)$ lignes indépendantes de W , nous effectuons une décomposition en valeurs singulières de W_0 ce qui entraîne :

$$W(\eta_C(k)) = U \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T + \eta_C(k)W_1 + \dots + \eta_C^q(k)W_q \quad (3.59)$$

où S est une matrice diagonale et inversible, $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$ sont deux matrices orthogonales. Ainsi la matrice de parité Ω , obtenue après la décomposition, peut être écrite sous la forme :

$$\Omega(\eta_C(k)) = \begin{pmatrix} SV_1^T \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_C(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} \\ \Omega_{2,1} \end{pmatrix} + \dots + \eta_C^q(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,q} \\ \Omega_{2,q} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

où $\Omega(\eta_C(k)) = U^T W(\eta_C(k))$ et $U^T W_i = \begin{pmatrix} \Omega_{1,i} \\ \Omega_{2,i} \end{pmatrix}$ avec $i = (1, 2, \dots, q)$.

Le principe de résolution de l'équation (3.53), dans le cas vectoriel où $\eta_C(k) \in \mathbb{R}^l$ reste le même que dans le cas scalaire $\eta_C(k) \in \mathbb{R}$; seule la technique change à cause de la complexité de ce cas. En effet, le calcul de la matrice de projection se base essentiellement sur la détermination de la matrice φ correspondante, or pour un nombre l de paramètres et un degré q de polynôme $W(\eta_C(k))$, la structure de la matrice ne peut pas être déduite par une simple extension de la forme (3.56). Dans ce qui suit, nous présentons un algorithme calculant d'une manière systématique la matrice φ quelque soit le nombre de paramètres incertains η_C , ce qui permet par la suite d'en déduire les coefficients et l'ordre de la matrice de parité.

Dans un premier temps, nous considérons les notations et les définitions que nous utilisons dans l'algorithme que nous proposons :

Notation et définition

- pour chaque monôme $\sigma_R = t_1^{n_1} \dots t_j^{n_j} \dots t_s^{n_s}$ de polynôme $R = (t_1 \dots t_s)$ dans $t = (t_1 \dots t_s)$, un vecteur ligne appartenant à \mathbb{R}^q est associé, il est appelé un

vecteur code du monôme σ_R et égal à $(n_1 \dots n_j \dots n_s)$.

- la matrice $\varphi_{ij} \in \mathbb{R}^{m,l}$ est une sous-matrice de φ avec $i = 1 \dots r_{lq}$, $j = 1 \dots r_{l(q+1)}$ où $r_{(l)q}$ est le nombre de monômes d'un polynôme contenant l variables et de degré q .
- $H_{r_{lq}} \in \mathbb{R}^{r_{lq},l}$ est une matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne notée $H_{i,r_{lq}}$ est le vecteur code du $i^{\text{ème}}$ monôme d'un polynôme contenant l variables et de degré q .
- z_i est la $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur $Z \in \mathbb{R}^l$.
- si une des composantes du vecteur Z est différente de zéro, son indice sera noté $Ind(Z)$.

L'algorithme suivant permet de déterminer les matrices W et φ pour l et q donnés, ce qui permet ensuite de résoudre le problème d'orthogonalité $W\varphi = 0$ de la même façon que dans le cas où les variables incertaines η_i sont des scalaires :

$$\underbrace{(W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{r_{lq}})}_W \varphi = 0$$

Algorithme de calcul de la matrice φ

initialisation

$$\varphi = 0, \quad i = 1, \quad j = 1$$

étape 1

$$Z = H_{j,r_{l(q+1)}} - H_{i,r_{lq}}$$

étape 2

si au moins une composante de Z est négative ou $\|Z\|_1 > 1$ **alors** :

$$j := j + 1$$

si $j := r_{l(q+1)} + 1$ **alors** :

$$j := 1$$

$$i := i + 1$$

sinon

aller à l'étape 1

fin si

sinon

si $Z = 0$ **alors** :

$$\varphi_{ij} = C_0$$

sinon

$$\varphi_{ij} = C_{Ind(Z)}$$

fin si

fin si

étape 3

$i := i + 1$

étape 4

si $i := r_{lq} + 1$ **alors** :

$W_{r_{lq}}$ est calculée comme cela a été fait dans le cas scalaire

fin

sinon

aller à l'étape 1

fin si

Dans le but d'apporter d'avantage de clarté au fonctionnement de l'algorithme ci-dessus, nous proposons un exemple d'un modèle avec deux paramètres incertains η_1 et η_2 ($l=2$), nous supposons que le degré de la matrice de parité est égal à 2. Ainsi, les expressions de $W(\eta_1, \eta_2)$ et de $C(\eta_1, \eta_2)$ peuvent être écrites sous la forme :

$$W(\eta_{C_1}, \eta_{C_2}) = W_0 + \eta_{c_1} W_1 + \eta_{c_2} W_2 + \eta_{c_1} \eta_{c_2} W_3 + \eta_{c_1}^2 W_4 + \eta_{c_2}^2 W_5 \quad (3.61)$$

$$C(\eta_1, \eta_2) = C_0 + \eta_1 C_1 + \eta_2 C_2 \quad (3.62)$$

les monômes de $W(\eta_{C_1}, \eta_{C_2})$ et les codes correspondants sont :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow [0, 0], & \eta_1 &\rightarrow [1, 0], & \eta_2 &\rightarrow [0, 1] \\ \eta_1 \eta_2 &\rightarrow [1, 1], & \eta_1^2 &\rightarrow [2, 0], & \eta_2^2 &\rightarrow [0, 2] \end{aligned}$$

Nous cherchons à résoudre alors les deux équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} &W(\eta_1, \eta_2)C(\eta_1, \eta_2) = 0 \\ &\left(W_0 \ W_1 \ W_2 \ W_3 \ W_4 \ W_5 \right) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

En utilisant l'algorithme proposé, nous obtenons la structure suivante de la matrice φ :

$$\varphi = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

où les matrice H_{ij} sont les suivantes :

$$H_{22} = \begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_1^2 & \eta_1\eta_2 & \eta_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$H_{23} = \begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_1^2 & \eta_1\eta_2 & \eta_2^2 & \eta_1^3 & \eta_2\eta_2\eta_1^2 & \eta_1\eta_2^2 & \eta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Ce résultat peut être vérifié comme suit :

$$\begin{aligned} W(\eta_1, \eta_2) C(\eta_1, \eta_2) &= W_0 C_0 + \eta_1 (W_1 C_0 + W_0 C_1) + \\ &+ \eta_2 (W_2 C_0 + W_0 C_2) + \eta_1 \eta_2 (W_1 C_2 + W_2 C_1 + W_3 C_0) + \\ &+ \eta_1^2 (W_1 C_1 + W_4 C_0) + \eta_2^2 (W_2 C_2 + W_5 C_0) + \\ &+ \eta_1 \eta_2^2 (W_3 C_2 + W_5 C_1) + \eta_1^2 \eta_2 (W_3 C_1 + W_4 C_2) + \\ &+ \eta_2^3 W_5 C_2 + \eta_1^3 W_4 C_1 = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur parité de cet exemple est donné par :

$$\begin{aligned} P_v(\eta_C, k) &= \left(\begin{pmatrix} SV_1^T \\ 0 \end{pmatrix} + f_1(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} \\ \Omega_{2,1} \end{pmatrix} + f_2(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,2} \\ \Omega_{2,2} \end{pmatrix} + f_3(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,3} \\ \Omega_{2,3} \end{pmatrix} + \right. \\ &\left. + f_4(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,4} \\ \Omega_{2,4} \end{pmatrix} + f_5(k) \begin{pmatrix} \Omega_{1,5} \\ \Omega_{2,5} \end{pmatrix} \right) Y(k) \end{aligned} \quad (3.64)$$

où : $f_1 = \eta_{C_1}(k)$, $f_2 = \eta_{C_2}(k)$, $f_3 = \eta_{C_1}(k)\eta_{C_2}(k)$, $f_4 = \eta_{C_1}^2(k)$, $f_5 = \eta_{C_2}^2(k)$

A chaque instant, le vecteur parité s'explique alors sous la forme :

$$P_v(\eta_C, k) = \left(\begin{pmatrix} SV_1^T \\ 0 \end{pmatrix} + f_1(\eta_C(k)) \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} \\ \Omega_{2,1} \end{pmatrix} + \cdots + f_{r_{lq}}(\eta_C(k)) \begin{pmatrix} \Omega_{1,r_{lq}} \\ \Omega_{2,r_{lq}} \end{pmatrix} \right) Y(k) \quad (3.65)$$

où $r_{lq} \in \mathbb{N}^*$ dépend de q et de l , $P_v(k) = U^T P(k)$ et f_i , avec $i = 1, 2, \dots, r_{lq}$, représente les fonctions des monômes de $W(\eta_C)$.

Notons que l'équation (3.65) permet de décomposer le vecteur parité en deux parties $P_{v_1}(\eta_C, k)$ et $P_{v_2}(\eta_C, k)$ avec :

$$P_{v_1}(\eta_C, k) = (SV_1^T + f_1(\eta_C(k))\Omega_{1,1} + \cdots + f_{r_{lq}}(\eta_C(k))\Omega_{1,r_{lq}}) Y(k) \quad (3.66)$$

$$P_{v_2}(\eta_C, k) = (f_1(\eta_C(k))\Omega_{2,1} + \cdots + f_{r_{lq}}(\eta_C(k))\Omega_{2,r_{lq}}) Y(k) \quad (3.67)$$

3.4.3 Analyse du vecteur parité

Comme mentionné précédemment, pour les systèmes certains le vecteur parité est nul en l'absence de défauts. Dans le cas des systèmes incertains, et en adoptant l'approche bornante, le test de cohérence s'annonce de la manière suivante :

Existe-t-il une valeur du vecteur des paramètres incertains η_C pour laquelle le vecteur parité est nul ?

Supposons que le vecteur parité appartienne à un domaine $D(P_v(\eta_C, k))$ défini par :

$$D(P_v(\eta_C, k)) = \{P_v(\eta_C, k) / \underline{P}_v(k) \leq P_v(\eta_C, k) \leq \overline{P}_v(k)\} \quad (3.68)$$

où $\underline{P}_v(k)$ et $\overline{P}_v(k)$ désigne les bornes inférieures et supérieures du vecteur parité. Ce domaine représente l'ensemble des valeurs admissibles du vecteur parité (du vecteur des résidus). Le système sera considéré alors en bon fonctionnement si la condition suivante est satisfaite :

$$\exists \eta_{C_0} \in D(P_v(\eta_C, k)) / P_v(\eta_{C_0}, k) = 0 \quad (3.69)$$

Dans ce cas le test de cohérence revient à trouver les racines d'une fonction à plusieurs variables. Dans le cas général où l'expression mathématique est complexe, cette démarche nécessite un calcul souvent délicat. Nous préférons alors réaliser le test de cohérence en évaluant le vecteur parité pour les valeurs de paramètres admissibles. Ainsi d'une manière tout à fait équivalente, nous considérons que le système physique diagnostiqué est en bon fonctionnement si la condition suivante est satisfaite :

$$0 \in D_p(\eta_C, k) \text{ avec } D_p(\eta_C, k) = \{P_v(\eta_C, k) / \eta_C \in D(P_v(\eta_C, k))\} \quad (3.70)$$

Le test de cohérence des mesures se limite donc à vérifier si la valeur zéro appartient au domaine $D_p(\eta_C, k)$:

$$\underline{P}_v(k) \leq 0 \leq \overline{P}_v(k) \quad (3.71)$$

Dans le cas où l'une des composantes du vecteur parité ne contient pas la valeur zéro, la condition (3.71) n'est alors pas vérifiée ; toutes les mesures ou certaines d'entre elles ne sont donc pas cohérentes avec le modèle du système indiquant la présence d'un ou de plusieurs défauts.

Il est clair que $P_{v_2}(\eta_C, k)$ (3.67) est indépendant des mesures car $P_{v_2}(0, k) = 0$ quelque soit le vecteur de mesures considéré. Ainsi, cette partie du vecteur parité est insensible aux défauts pouvant affecter les mesures. La partie utile du vecteur parité $P_v(\eta_C, k)$ servant à détecter des défauts de mesures est alors $P_{v_1}(\eta_C, k)$ (3.66). Pour tester la cohérence de

cette partie, selon le test (3.71), on doit calculer ses bornes inférieures et supérieures. Compte tenu de l'équation (3.66), on peut déduire :

$$\underline{P}_{v_1}(k) = \inf_{\eta_C(k)} ((SV_1^T + f_1(\eta_C(k))\Omega_{1,1} + \dots + f_{r_{1q}}(\eta_C(k))\Omega_{1,r_{1q}}) Y(k)) \quad (3.72)$$

$$\overline{P}_{v_1}(k) = \sup_{\eta_C(k)} ((SV_1^T + f_1(\eta_C(k))\Omega_{1,1} + \dots + f_{r_{1q}}(\eta_C(k))\Omega_{1,r_{1q}}) Y(k)) \quad (3.73)$$

Un indicateur τ de présence de défaut peut être construit à partir des bornes inférieures et supérieures calculées à partir de (3.72) et (3.73). La règle de décision est la suivante :

$$\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \notin [P_{v_1,i}] & \text{présence de défaut} \\ 0 & \text{si } 0 \in [P_{v_1,i}] & \text{absence de défaut} \end{cases}, \quad i = \{1, \dots, m - \text{rang}(C_0)\} \quad (3.74)$$

3.4.4 Extension au cas des systèmes dynamiques

Compte tenu de la première et de la deuxième forme statique, les équations (3.8) et (3.11) permettent de représenter les systèmes dynamiques sous une forme statique. Ainsi, nous pouvons appliquer la démarche proposée pour calculer le vecteur parité comme cela a été fait dans le cas statique.

Considérons le modèle d'un système dynamique représenté sous forme discrète d'état :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A(\eta_A(k)) X(k) + B(\eta_B(k)) U(k) \\ Y(k) &= C(\eta_C(k)) X(k) + D(\eta_D(k)) U(k) + E(k) + D_f(k) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Les grandeurs $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ et $U(k) \in \mathbb{R}^q$ désignent respectivement le vecteur d'état, l'entrée et la sortie du système à l'instant k . Les incertitudes interviennent dans le modèle par l'intermédiaire du vecteur de paramètres $\eta \in \mathbb{R}^p$. Les matrices incertaines $A(\eta_A(k))$, $B(\eta_B(k))$, $C(\eta_C(k))$ et $D(\eta_D(k))$, linéaire par rapport aux incertitudes η , sont définies par :

$$\begin{aligned} A(\eta_A(k)) &= A_0 + \sum_{i=1}^p \eta_{A,i}(k) A_i, & B(\eta_B(k)) &= B_0 + \sum_{i=1}^p \eta_{B,i}(k) B_i \\ C(\eta_C(k)) &= C_0 + \sum_{i=1}^p \eta_{C,i}(k) C_i, & D(\eta_D(k)) &= D_0 + \sum_{i=1}^p \eta_{D,i}(k) D_i \end{aligned}$$

Les matrices A_0 , B_0 , C_0 et D_0 sont les valeurs nominales respectivement des matrices $A(\eta_A(k))$, $B(\eta_B(k))$, $C(\eta_C(k))$ et $D(\eta_D(k))$ dont les valeurs à l'instant k sont incertaines et susceptibles de subir des variations ayant des sens et des amplitudes qui dépendent à la fois des matrices A_i , B_i , C_i et D_i (dont les valeurs sont connues a priori) et des paramètres

$\eta_{z,i} z \in \{A, B, C, D\}$ et $i = 1 \dots p$.

3.4.4.1 Première forme statique

En empilant les mesures le long d'une fenêtre temporelle de taille s , nous obtenons la première forme statique :

$$Y(k, s) = \tilde{C}(\eta_A, \eta_C) X(k) + H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C)(k, s) + D_s(\eta_D)U(k, s-1) + E_s(k, s) + F_s(k, s)$$

$$\tilde{C}(\eta) \in \mathbb{R}^{(s+1)m, n}, \quad H_s(\eta) \in \mathbb{R}^{(s+1)m, sq}, \quad D_s(\eta) \in \mathbb{R}^{(s+1)m, q}$$
(3.76)

avec :

$$\tilde{C}(\eta_A, \eta_C) = \begin{pmatrix} C(\eta_C(k)) \\ C(\eta_C(k+1)) A(\eta_A(k)) \\ \vdots \\ C(\eta_C(k+s)) A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k)) \end{pmatrix},$$

$$H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{(s+1)m,1} & \alpha_{(s+1)m,2} & \dots & \alpha_{(s+1)m,sq} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{2,1} = C(\eta_C(k+1)) B(\eta_B(k)), \quad \alpha_{3,1} = C(\eta_C(k+2)) A(\eta_A(k+1)) B(\eta_B(k)),$$

$$\alpha_{3,2} = C(\eta_C(k+2)) B(\eta_B(k+1)),$$

$$\alpha_{(s+1)m,1} = C(\eta_C(k+s)) A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k+1)) B(\eta_B(k)),$$

$$\alpha_{(s+1)m,2} = C(\eta_C(k+s)) A(\eta_A(k+s-1)) \dots A(\eta_A(k+2)) B(\eta_B(k+1)),$$

$$\alpha_{(s+1)m,sq} = C(\eta_C(k+s)) B(\eta_B(k+s-1)).$$

$$D_s(k, s) = \left(D(\eta_D(k))^T \dots D(\eta_D(k+s))^T \right)^T$$

$$Y(k, s) = \left(Y(k)^T \ y(k+1)^T \ Y(k+2)^T \ \dots \ Y(k+s)^T \right)^T$$

$$F(k, s) = \left(D_f(k)^T \ D_f(k+1)^T \ D_f(k+2)^T \ \dots \ D_f(k+s)^T \right)^T$$

$$E(k, s) = \left(E(k)^T \ E(k+1)^T \ E(k+2)^T \ \dots \ E(k+s)^T \right)^T$$

$$U(k, s-1) = \left(U(k)^T \ U(k+1)^T \ U(k+2)^T \ \dots \ U(k+s-1)^T \right)^T.$$

L'équation (3.76) représente une relation faisant apparaître les variables inconnues représentées par le vecteur d'état, les mesures (entrées/ sorties) et les paramètres incertains du modèle. De la même manière que pour le cas statique, le vecteur parité est obtenu après élimination des variables d'état. Le problème qui se pose par la suite est le calcul de la matrice de projection relative à cette forme statique. En effet, pour des incertitudes

apparaissant d'une manière linéaire dans le modèle de départ, la première forme statique fait intervenir une matrice non linéaire en les incertitudes. La détermination de la matrice de projection nécessite alors un calcul symbolique fastidieux et très complexe. Le vecteur parité dans ce cas est donné par :

$$P(k+s) = W(\eta_A, \eta_C) \{Y(k, s) - H_s(\eta_A, \eta_B, \eta_C) U(k, s-1)\} = 0 \quad (3.77)$$

La structure de la matrice $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ est telle qu'elle possède $(s+1)m$ lignes pour n colonnes. Lorsque la valeur de s dépasse la partie entière de $n/m - 1$, le nombre de lignes de cette matrice est supérieur au nombre de colonnes, il est alors certain que $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ n'est pas de plein rang ligne, condition d'existence de la matrice de parité recherchée. Il existe donc toujours une taille de fenêtre minimale pour laquelle la matrice $W(\eta_A, \eta_B, \eta_C)$ existe, et plus la valeur de s augmente, plus le nombre de relations obtenues est important, la différence entre le nombre croissant de lignes et le nombre fixe de colonnes $(s+1)m - n$ augmentant linéairement avec s . En fonction des expressions des matrices constituant $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$, il est clair que $W(\eta_A, \eta_B, \eta_C)$ peut exister pour une valeur de s inférieure à la partie entière de $n/m - 1$.

3.4.4.2 Deuxième forme statique

Dans le but de résoudre les problèmes rencontrés dans le cas de la première forme statique relative au modèle incertain étudié, nous présentons dans cette section la deuxième forme statique qui est linéaire par rapport aux paramètres incertains. En empilant le vecteur d'état $X(k)$ et l'entrée $U(k)$ sur une fenêtre temporelle de taille s , on obtient la relation (3.10). En tenant compte des équations de la sortie du système aux mêmes instants, nous obtenons l'expression matricielle supplémentaire suivante :

$$Y(k, s) - F(k, s) - E(k, s) - D_s(k, s) = L_s(\eta_C(k)) X(k, s)^T \quad (3.78)$$

$$\text{avec } L_s(\eta_C) = \begin{pmatrix} C(\eta_C(k)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C(\eta_C(k+s)) \end{pmatrix}.$$

En regroupant les équations (3.10) et (3.78), nous obtenons la deuxième forme statique suivante :

$$M(\eta_A, \eta_C) X(k, s) = H(\eta_B) \begin{pmatrix} U(k, s-1) \\ Y(k, s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(k, s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E(k, s) \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$M(\eta_A, \eta_C) \in \mathbb{R}^{(sn+(s+1)m), (s+1)n}, \quad H(\eta_B) \in \mathbb{R}^{sn+(s+1)m, sq+(s+1)m}$$

$$\text{où : } M(\eta_A, \eta_C) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\eta_A) \\ L_s(\eta_C) \end{pmatrix}, H(\eta_B) = \begin{pmatrix} \tilde{B}(\eta_B) & 0 \\ 0 & I_{(s+1)m} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(\eta_A) = \begin{pmatrix} A(\eta_A(k)) & -I_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A(\eta_A(k+1)) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(\eta_A(k+s-1)) & -I_n \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}(\eta_B) = \begin{pmatrix} -B(\eta_B(k)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -B(\eta_B(k+1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -B(\eta_B(k+s-1)) \end{pmatrix}$$

Le vecteur parité dans ce cas peut être écrit comme suit :

$$\tilde{P}(k+s) = \tilde{W}(\eta_A, \eta_C) H(\eta_B) \begin{pmatrix} U(k, s-1) \\ Y(k, s) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.80)$$

Notons, d'une part, que η_z , $z \in \{A, B, C\}$ contient toutes les incertitudes affectant la matrice z et pouvant intervenir à n'importe quel instant de l'horizon temporel $[k, k+s]$ et que, d'autre part, une même incertitude exprimée à deux instants différents est en fait représentée par deux variables bornées indépendantes.

Par rapport au cas statique, le cas dynamique possède un degré de liberté supplémentaire défini par la taille de fenêtre temporelle s . La question est de savoir s'il existe toujours une taille de fenêtre s autorisant l'existence de la matrice de parité; et si oui, comment régler s de manière à obtenir le nombre de résidus voulu? Existe-t-il par exemple une solution $W(\eta_A, \eta_C)$ lorsque la recherche d'une matrice de parité certaine conduit à une impasse? En réalité, ce problème est lié au rang des matrices $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ (3.76) et $M(\eta_A, \eta_C)$ (3.79) qui conditionnent le nombre de relations de parité indépendantes calculables. Le rang d'une matrice incertaine peut être calculé en utilisant les méthodes mentionnées dans l'annexe (C), sinon on peut s'intéresser uniquement aux systèmes pour lesquels les matrices $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ ou $M(\eta_A, \eta_C)$ sont de même rang que leurs parties nominales.

En effet, la taille s de la fenêtre d'observation joue un rôle fondamental lors de la génération des matrices $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ et $M(\eta_A, \eta_C)$. Grace à s , les matrices $\tilde{C}(\eta_A, \eta_C)$ et $M(\eta_A, \eta_C)$ sont générés de manière à ce qu'elles aient plus de lignes que de colonnes.

Un autre critère permettant de choisir s est basé sur l'étude de l'influence de la taille de

la fenêtre d'observation sur l'existence d'une matrice de parité permettant un découplage total vis-à-vis du vecteur d'état. Il est à noter que certaines structures particulières des incertitudes permettent de choisir aisément la valeur de s . Dans [Adr00], l'auteur propose une méthode de découplage entre vecteur parité et vecteur d'état lorsque le système dynamique est décrit par une forme statique.

3.4.5 Exemple

Considérons une équation de mesure définie par (3.52). La matrice $C(\eta_C(k))$ considérée de la forme suivante :

$$C(\eta_C(k)) = \underbrace{\begin{pmatrix} -5.25 & -1.5 & 1.12 \\ 1 & 0.2 & -5 \\ -2 & -1.3 & 1 \\ -2 & 0.7 & -0.6 \\ -1 & -0.3 & 4 \\ -3 & 1.8 & -1.4 \end{pmatrix}}_{C_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.14 \end{pmatrix}}_{C_1} \eta_{C_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C_2} \eta_{C_2}$$

avec $|\eta_{C_1}| \leq 1$ et $|\eta_{C_2}| \leq 1$. Dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$, $[70, 80]$ interviennent respectivement des défauts f_1 sur y_1 , f_2 sur y_2 et f_3 sur y_3 . Les sorties mesurées sont représentées sur la figure 3.15.

Pour calculer le vecteur parité, nous devons tout d'abord calculer la matrice de parité W . Ce qui, selon l'équation (3.56), nécessite le calcul de la matrice φ . En supposant que la matrice de parité prend une forme matricielle polynomiale, en η_{C_1} et η_{C_2} , d'ordre 2 nous pouvons écrire :

$$W(\eta_{C_1}, \eta_{C_2}) = W_0 + \eta_{C_1} W_1 + \eta_{C_2} W_2 + \eta_{C_1} \eta_{C_2} W_3 + \eta_{C_1}^2 W_4 + \eta_{C_2}^2 W_5 \quad (3.81)$$

En calculant la matrice φ selon l'algorithme proposé en (3.4.2), l'équation permettant l'obtention de W_i avec $i = \{0, \dots, 5\}$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix} W_0 & W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 \end{pmatrix} = 0$$

La résolution de cette équation permet de trouver $W_i \in \mathbb{R}^{6,6}$:

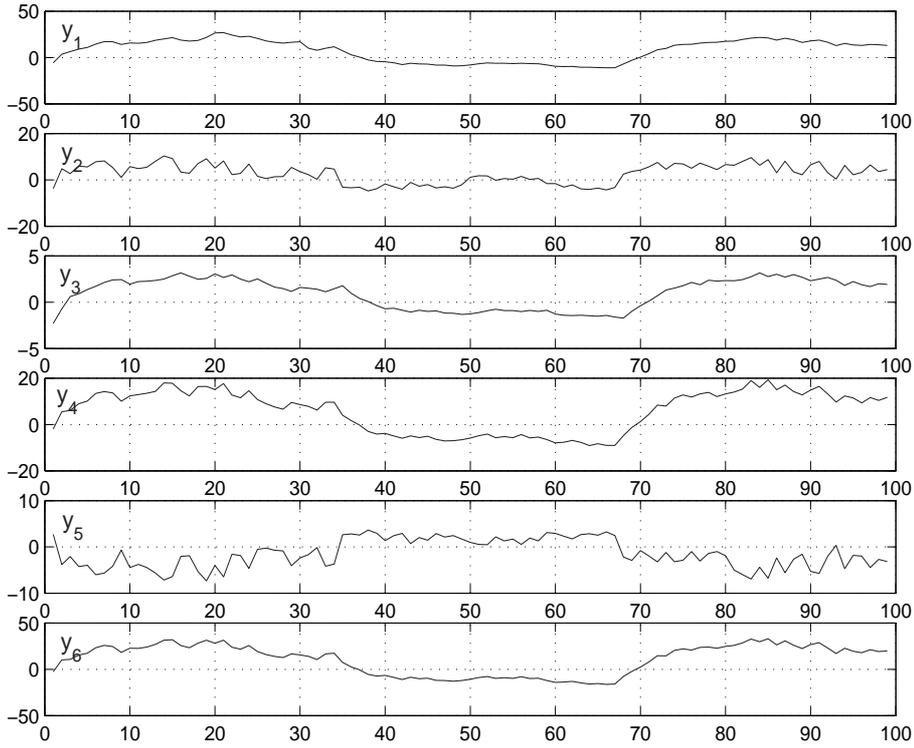


FIG. 3.15 – Mesures

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0.4773 & -0.0450 & -0.8347 & -0.2336 & -0.0578 & -0.1188 \\ 0 & -0.2535 & 0.0984 & -0.3031 & -0.3302 & 0.1620 \\ 0 & 0.3241 & -0.1102 & 0.3116 & 0.4211 & -0.1666 \\ 0 & -0.4240 & -0.0576 & 0.5762 & -0.5370 & -0.3081 \\ 0 & 0.1060 & -0.1137 & 0.4804 & 0.1431 & -0.2569 \\ 0 & 0.1178 & -0.0206 & 0.0183 & 0.1518 & -0.0098 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} -0.0045 & -0.0110 & 0.0018 & -0.0007 & 0.0076 & -0.0006 \\ -0.1118 & 0.4664 & 0.1368 & 0.0213 & 0.5946 & 0.0391 \\ -0.0409 & 0.1084 & 0.0341 & 0.1332 & 0.1465 & -0.0418 \\ 0.0053 & -0.0937 & -0.0277 & 0.1374 & -0.1203 & -0.0876 \\ -0.0445 & 0.3255 & 0.0957 & -0.2921 & 0.4179 & 0.1815 \\ -0.0616 & 0.0519 & 0.0156 & 0.4495 & 0.0742 & -0.2057 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} -0.0002 & 0 & 0 & 0.0003 & 0 & -0.0002 \\ 0.0028 & 0 & 0 & -0.0058 & 0 & 0.0145 \\ 0.0005 & 0 & 0 & -0.0005 & 0 & 0.0031 \\ -0.0005 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & -0.0029 \\ 0.0020 & 0 & 0 & -0.0050 & 0 & 0.0106 \\ 0.0006 & 0 & 0 & -0.0035 & 0 & 0.0031 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} -0.0007 & -0.0059 & -0.0182 & -0.0037 & 0.0026 & 0.0286 \\ 0.0155 & 0.1790 & -0.0456 & 0.0173 & 0.2366 & -0.0072 \\ -0.0695 & 0.4395 & 0.0705 & -0.0813 & 0.5572 & 0.0687 \\ 0.0182 & 0.1306 & -0.0808 & 0.0235 & 0.1569 & -0.0408 \\ 0.0062 & -0.3007 & 0.0100 & 0.0090 & -0.3960 & -0.0237 \\ 0.2903 & -0.0791 & -0.6008 & 0.3444 & -0.0952 & -0.3330 \end{pmatrix}$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 0.0002 & 0.0006 & -0.0003 & -0.0007 & 0.0011 & 0 \\ -0.0080 & -0.0116 & 0.0203 & 0.0155 & -0.0140 & -0.0045 \\ -0.0026 & -0.0011 & 0.0043 & 0.0048 & -0.0026 & 0.0047 \\ -0.0014 & 0.0021 & -0.0040 & 0.0031 & 0.0027 & -0.0020 \\ -0.0002 & -0.0100 & 0.0149 & 0.0006 & -0.0102 & -0.0005 \\ -0.0166 & -0.0069 & 0.0043 & 0.0336 & -0.0028 & -0.0302 \end{pmatrix}$$

$$W_5 = \begin{pmatrix} 0 & -0.0015 & 0.0001 & 0 & -0.0009 & 0 \\ 0 & 0.0310 & -0.0063 & 0 & 0.0401 & 0 \\ 0 & 0.0096 & 0.0065 & 0 & 0.0128 & 0 \\ 0 & 0.0061 & -0.0028 & 0 & 0.0069 & 0 \\ 0 & 0.0012 & -0.0007 & 0 & 0.0008 & 0 \\ 0 & 0.0672 & -0.0423 & 0 & 0.0829 & 0 \end{pmatrix}$$

En effectuant une décomposition en valeurs singulières de W_0 et en s'appuyant sur les équations (3.65), (3.68), (3.66), (3.72) et (3.73) nous obtenons la partie $[P_{v_1}] \in \mathbb{R}^3$ servant à détecter les défauts affectant les mesures avec :

$$SV_1^T = \begin{pmatrix} 0.0283 & -0.61 & 0.0143 & 0.0985 & -0.7826 & -0.0671 \\ 0.4171 & 0.0232 & -0.8223 & 0.2059 & 0.0356 & -0.3231 \\ 0.2305 & -0.0602 & -0.2424 & -0.8687 & -0.0882 & 0.3468 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{1,1} = \begin{pmatrix} -0.0015 & 0.0033 & -0.0002 & -0.0046 & -0.0011 & -0.0131 \\ -0.0028 & -0.0125 & 0.0013 & -0.0102 & 0.0058 & 0.0055 \\ -0.0040 & -0.0006 & 0.0014 & 0.0174 & 0.0053 & -0.0096 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{2,1} = \begin{pmatrix} 0.000358 & 0 & 0 & 0.001279 & 0 & -0.000375 \\ -0.002088 & 0 & 0 & 0.000958 & 0 & -0.001142 \\ -0.000906 & 0 & 0 & 0.004491 & 0 & -0.001622 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{3,1} = \begin{pmatrix} -0.0021 & 0.0004 & -0.0014 & -0.0023 & -0.0012 & 0.0002 \\ -0.0047 & 0.0015 & -0.0253 & -0.0066 & 0.0026 & 0.0154 \\ 0.0072 & -0.0151 & 0.0085 & 0.0046 & 0.0008 & 0.0313 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{4,1} = \begin{pmatrix} 0.0004 & 0.0003 & -0.0001 & -0.0007 & -0.0002 & 0.0003 \\ 0.0004 & 0.0002 & -0.0002 & -0.0009 & 0.0010 & 0.0005 \\ -0.0003 & 0.0009 & -0.0002 & 0.0001 & 0.0005 & -0.0008 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{5,1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.0014 & 0.0005 & 0 & -0.0018 & 0 \\ 0 & -0.0018 & 0.0007 & 0 & -0.0018 & 0 \\ 0 & 0.0003 & -0.0012 & 0 & 0.0017 & 0 \end{pmatrix}$$

L'indicateur de défauts τ , établi selon la relation (3.74), et la partie $[P_{v_1}]$ du vecteur parité sont illustrés sur la figure 3.16. Il est clair que les défauts f_1 , f_2 et f_3 sont respectivement détectés dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$ et $[70, 80]$.

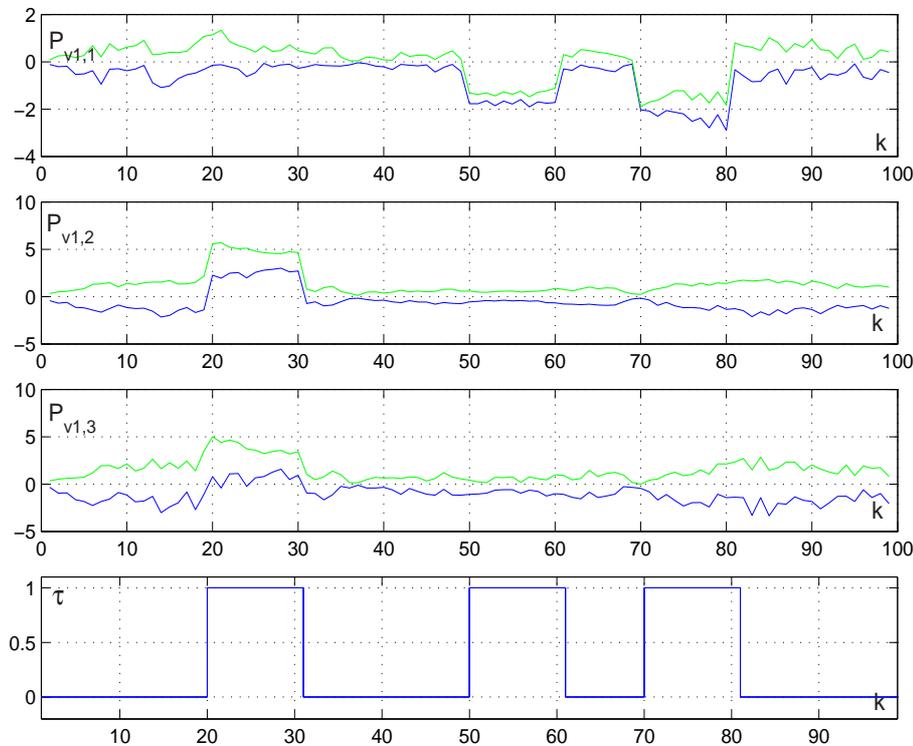


FIG. 3.16 – Vecteur parité et indicateur de défauts

3.5 Approche bornante : garantie, précision et justesse

Le diagnostic d'un système contenant des incertitudes repose sur le test de cohérence précédemment expliqué. Ce dernier se traduit par un test d'appartenance de l'élément 0 au domaine $D_p(\eta_C, k)$, calculé en utilisant la connaissance que l'on a sur le système physique. Par conséquent, le résultat d'un test de cohérence est directement sensible à la qualité du modèle mathématique. Une fausse alarme peut surgir dans le cas où le modèle représente à un instant donné un comportement qui ne correspond pas à celui du système

physique en bon fonctionnement. Parallèlement, un défaut peut ne pas être détecté si le comportement observé du système physique est perçu par le modèle comme étant normal. Ces deux problèmes s'expliquent par le fait qu'un modèle ne représente qu'approximativement le système physique réel. Certes, un modèle incertain permet de représenter d'une manière plus réaliste un système physique, mais sa précision est liée au niveau de connaissance que l'on a sur les incertitudes. En effet, le domaine $D(P_v(\eta_C, k))$ ne représente qu'une approximation du vrai domaine paramétrique noté $D^*(P_v(\eta_C, k))$ qui n'est généralement jamais connu d'une manière exacte. Le domaine $D(P_v(\eta_C, k))$ est obtenu soit en s'appuyant sur la connaissance physique du système étudié, soit en effectuant une procédure de caractérisation des incertitudes (identification des bornes des incertitudes). Dans ces conditions les deux situations suivantes se présentent :

- $D(P_v(\eta_C, k)) \subset D^*(P_v(\eta_C, k))$: Tous les comportements représentés par le modèle correspondent à des états de bon fonctionnement du système physique. Dans ce cas, une incohérence ne traduit pas nécessairement un comportement anormal. En effet, certaines valeurs paramétriques de $D^*(P_v(\eta_C, k))$ (correspondant à un comportement normal) n'appartenant pas au domaine $D(P_v(\eta_C, k))$ génèrent des comportements qui ne peuvent être expliqués par le modèle. Par conséquent, un test de cohérence effectué dans ces conditions peut générer une fausse alarme.
- $D(P_v(\eta_C, k)) \supset D^*(P_v(\eta_C, k))$: Les incertitudes du modèle représentées par le domaine des paramètres $D(P_v(\eta_C, k))$ permettent d'expliquer tous les comportements possibles du système physique en bon fonctionnement. Lorsque le comportement observé ne correspond à aucun des comportements fournis par le modèle, on peut en déduire d'une manière garantie l'existence d'un défaut. Par contre, une déviation paramétrique vers l'extérieur du domaine $D^*(P_v(\eta_C, k))$ en restant toujours à l'intérieur de $D(P_v(\eta_C, k))$ ne peut pas être détectée.

Pour conserver cette propriété de garantie, il suffit de choisir les bornes des incertitudes assez grandes pour être sûr que tous les comportements possibles du système en bon fonctionnement sont représentés par le modèle. Dans ces conditions, une incohérence traduit nécessairement un comportement anormal et le modèle, pour lequel il ne peut y avoir de fausses alarmes, est alors qualifié de juste [Plo98] ou complet. Si la notion de justesse est très attrayante dans le cadre du diagnostic de systèmes, elle est cependant étroitement liée à la notion de précision. Un modèle incertain est d'autant plus précis que le domaine $D^*(P_v(\eta_C, k))$ qu'il induit restreint le nombre de comportements inaccessibles au système physique en l'absence d'un défaut. Au niveau de la phase de détection un modèle précis engendre un domaine $D^*(P_v(\eta_C, k))$ de taille moins importante qu'un modèle dit imprécis. Ce qui aura pour conséquences de restreindre le nombre de non-détections.

Notons toutefois que la notion de justesse, essentielle au diagnostic dans le cas de procédures bon fonctionnement et défendue dans le cadre de ce travail, peut être remise en cause en pratique suivant les objectifs souhaités. Dans le cas d'un système nécessitant une surveillance très étroite (centrale nucléaire), si des techniques de diagnostic plus traditionnelles nécessitant un compromis fausses alarmes/non-détection sont utilisées, il est alors préférable d'obtenir un grand nombre de fausses alarmes plutôt que de laisser passer une anomalie risquant de s'aggraver. Dans ces conditions la précision est primordiale. Inversement, sur une chaîne de production, des fausses alarmes intempestives réduisent la confiance de l'opérateur envers le module de surveillance au point que celui-ci puisse s'en désintéresser. La justesse du modèle, associé à la propriété de garantie de l'approche bornante génère une approximation extérieure du domaine de bon fonctionnement est alors intéressante.

Soulignons que pour un modèle juste, seule la présence d'un défaut est garantie, mais l'approche proposée ne donne en aucun cas l'assurance de son absence. Si l'élément 0 n'appartient pas au domaine $D^*(P_v(\eta_C, k))$, alors il est certain qu'un défaut est présent. En revanche, dans le cas contraire, même si la conclusion qui s'impose est de considérer le système sain, il est tout à fait possible :

- qu'un défaut de faible amplitude soit tout de même présent mais masqué par les incertitudes. En effet, plus la taille des incertitudes est grande, plus l'amplitude d'un défaut doit être grande pour qu'il soit détectable.
- qu'un défaut soit structurellement non détectable. En effet, lorsque l'expression mathématique du vecteur parité ne fait pas intervenir certaines mesures, les défauts affectant celles-ci ne sont pas détectables.

3.6 Conclusion

Dans un premier temps, deux formes permettant de représenter les systèmes linéaires incertains dynamiques sous une forme statique ont été mises en évidence. Ensuite, le problème de la validation de données de ces systèmes a été étudié dans trois cas.

Le premier cas concerne les systèmes complètement mesurés. En s'appuyant sur la résolution des équations intervalles, un algorithme est proposé pour calculer une estimée des variables d'état. En se basant sur cette estimée une démarche pour la détection et la localisation de défauts est présentée.

Le deuxième cas traite des systèmes partiellement mesurés. En utilisant les deux formes statiques et en s'appuyant sur la résolution des équations de type intervalle, un algorithme séquentiel permettant de calculer une estimée des variables d'état sur une fenêtre d'obser-

vation $[k, k + s]$, est proposé. L'analyse de chaque étape du calcul de cette estimée permet de détecter et de localiser les défauts peuvent affecter les mesures.

Le troisième cas concerne les systèmes dont la dimension du vecteur de sortie est plus grande que la dimension du vecteur d'état. Une méthode séquentielle permettant de calculer une estimée des variables d'état est proposée. La détection de défauts est effectuée en analysant cette estimée. Dans le but de localiser les mesures affectées par des défauts, on génère des résidus structurés.

Le principe de l'espace de parité dans le cadre d'un modèle incertain a ensuite été présenté où nous avons proposé une méthode de calcul de la matrice de projection W dans le but de générer le vecteur parité. La méthode proposée fournit une forme polynomiale en les incertitudes et permet un découplage total par rapport aux variables inconnues représentées par le vecteur d'état. L'analyse du vecteur parité est effectué dans le but d'expliquer le principe de détection de défaut dans le cadre l'approche bornante.

Il faut retenir que pour la détection de défauts, l'approche par estimation d'état est utilisée dans le but de générer des résidus à partir de la reconstruction de l'état du système. Par contre dans l'approche par espace de parité, on contourne le problème lié à l'absence de connaissance sur l'état du système en formant des relations dans lesquelles l'influence de l'état du système est supprimée. De plus, l'approche par espace de parité n'autorise pas dans notre cas une localisation de défaut, ce qui réalisable avec l'approche passant par l'estimation d'état.

Les méthodes proposées dans ce chapitre ne font usage d'aucune connaissance a priori sur les lois de distribution statistique des erreurs affectant les mesures et n'utilisent que des opérations de l'arithmétique des intervalles.

4

Validation de données d'un convertisseur série résonnant

Sommaire

4.1	Introduction	152
4.2	Principe de fonctionnement	153
4.3	Modèle d'état	156
4.4	Estimation d'état	161
4.5	Défauts de convertisseur	163
4.5.1	Transistor en court-circuit dû à une surintensité du courant	163
4.5.2	Blocage de transistor	163
4.5.3	Diode bloquée	164
4.6	Détection et localisation de défauts	164
4.7	Conclusion	167

4.1 Introduction

De nombreux travaux en électronique de puissance ont été effectués sur les convertisseurs à résonance [JRC88], [HKHGKY92], [CW98]. L'intérêt suscité par ces convertisseurs réside dans leurs avantages par rapport aux convertisseurs conventionnels. Ces derniers sont de plus en plus remplacés dans l'industrie et plus particulièrement dans les applications aérospatiales par des convertisseurs à résonance. On peut citer parmi les avantages, la réduction du poids et du volume, les faibles contraintes et pertes dans les interrupteurs, et les faibles perturbations électromagnétiques et radioélectriques. En général, dans les circuits des convertisseurs, l'énergie transitant de la source vers la charge est stockée sous forme électromagnétique dans une inductance. L'augmentation de la fréquence des convertisseurs classiques conduit à une augmentation des contraintes sur les interrupteurs et à des pertes par commutation, entraînant ainsi la dégradation du rendement. Dans les convertisseurs à résonance, l'étage intermédiaire de stockage d'énergie est constitué par un circuit oscillant LC , excité par un onduleur, le courant est ensuite redressé puis filtré avant de parvenir à la charge.

Grâce au courant alternatif qui circule dans le circuit oscillant, les interrupteurs du pont onduleur peuvent fonctionner en commutation douce, et par conséquent les contraintes sur les interrupteurs deviennent minimales, ainsi que les pertes par commutation. Dans ces conditions de commutation le convertisseur peut fonctionner à haute fréquence sans altérer le rendement.

Le fonctionnement à haute fréquence impose la nécessité de maîtriser l'énergie qui transite par le circuit oscillant. Par conséquent, il est nécessaire de détecter et localiser les défauts qui peuvent affecter ce circuit et éliminer ensuite ses influences par une action de commande appropriée.

Parmi les différentes topologies des convertisseurs à résonance, notre choix s'est porté sur la configuration pont complet puisqu'elle permet une grande flexibilité au niveau de la commande par rapport à la configuration simple pont.

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer la performance des différentes méthodes proposées dans le chapitre précédent à travers un modèle linéaire du convertisseur série résonnant. Nous détaillons dans un premier temps le principe de fonctionnement de ce convertisseur, puis le modèle utilisé pour réaliser la validation de données dans le cas incertain. Ensuite, nous appliquons les méthodes proposées dans le chapitre précédent pour détecter et localiser les défauts affectant les mesures et ensuite corriger a posteriori les mesures en défaut et donner une estimée des variables d'état cohérente avec le modèle du

convertisseur.

4.2 Principe de fonctionnement

Le convertisseur série résonnant pont complet représenté par le schéma de la figure 4.1, présente sept modes de topologies différentes (tableau 4.1). Son fonctionnement peut être représenté par une série de commutations entre circuits linéaires.

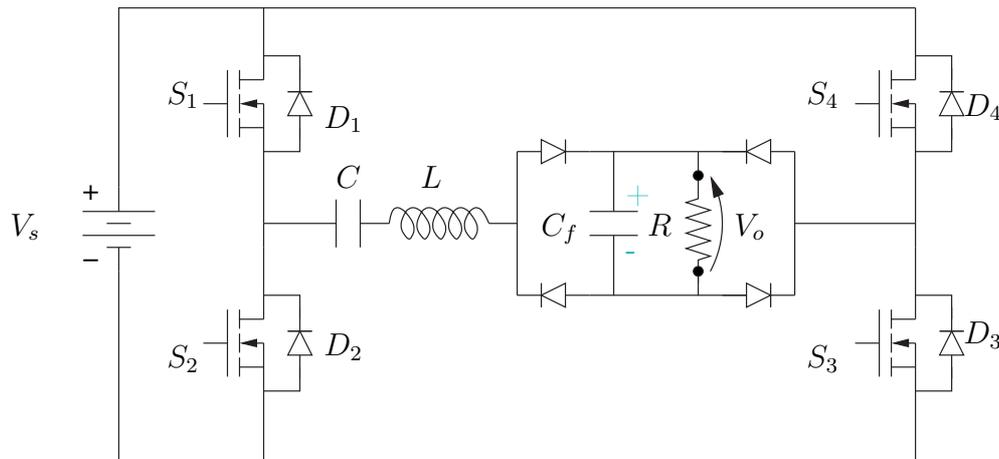
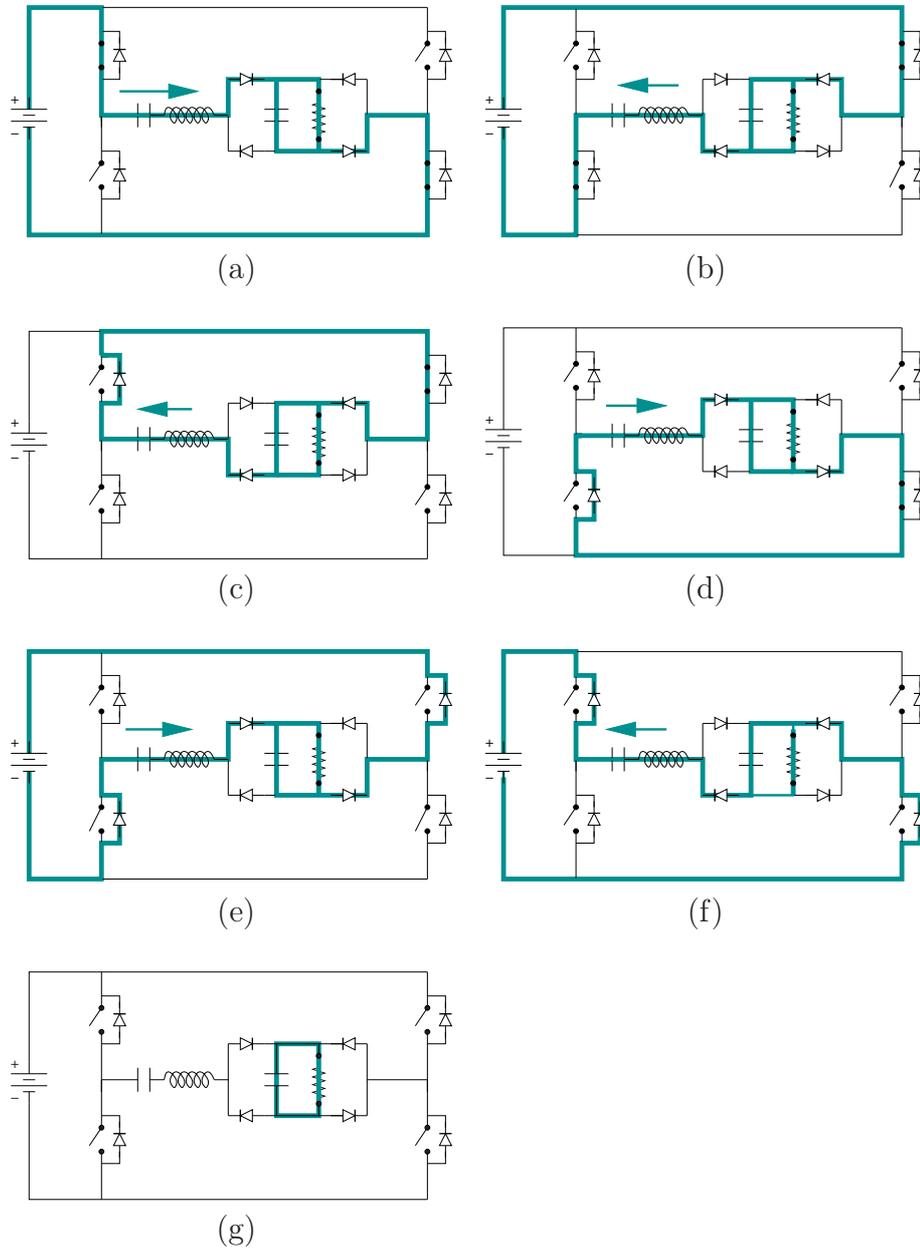
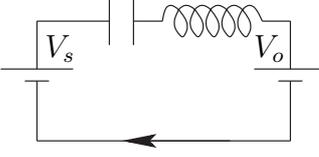
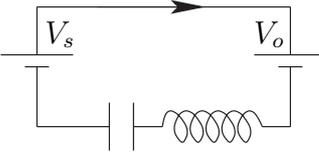
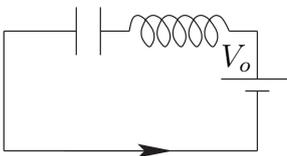
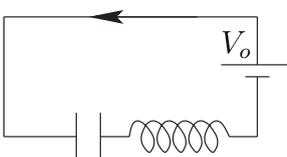
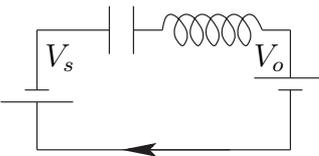
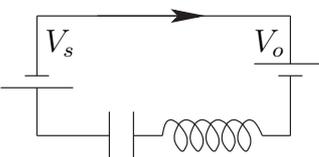
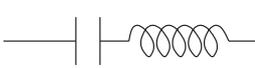


FIG. 4.1 – Schéma d'un convertisseur série résonnant

En mode de conduction continue, on peut distinguer trois phases différentes. La phase active pendant laquelle l'énergie est véhiculée de la source vers la charge à travers le circuit oscillant. Elle est obtenue en fermant les interrupteurs ($S_1 S_3$) et en ouvrant ($S_2 S_4$) pour l'alternance positive du courant. Pour l'alternance négative, les interrupteurs ($S_1 S_3$) sont ouverts et ($S_2 S_4$) formés. La deuxième phase est la phase de roue libre. Pendant cette phase, le circuit résonnant est court-circuité par ($S_3 D_2$) ou ($S_1 D_4$) fermés pour l'alternance positive du courant, et par ($S_4 D_1$) ou ($S_2 D_3$) fermés pour l'alternance négative du courant. Le circuit oscillant n'étant pas alimenté par la source de tension, l'énergie du circuit résonnant est absorbée progressivement par la charge à travers le redresseur et le filtre de sortie. En dernier lieu, la phase de restitution d'énergie pendant laquelle une partie de l'énergie du circuit oscillant est restituée à la source et ceci en ouvrant tous les interrupteurs ($S_1 S_2 S_3 S_4$), le courant passe alors par ($D_2 D_4$) pendant l'alternance positive, et par ($D_1 D_3$) pendant l'alternance négative. Lorsqu'il y a plus d'énergie dans le circuit oscillant, le convertisseur fonctionnera en mode de conduction discontinu. Les différentes phases de fonctionnement avec les équations correspondantes sont données par les schémas du tableau (4.2).



TAB. 4.1 – Chemin suivi par le courant : (a) et (b) phase active, (c) et (d) roue libre, (e) et (f) phase de restitution, (g) phase de conduction discontinue

modes	circuits équivalents	équations
phase active	 <p>phase 1 : S_1, S_3</p>	$V_s - V_o = V_c + L \frac{di}{dt}$
	 <p>phase 2 : S_2, S_4</p>	$-V_s + V_o = V_c + L \frac{di}{dt}$
roue libre	 <p>phase 3 : S_4, D_1</p>	$-V_o = V_c + L \frac{di}{dt}$
	 <p>phase 4 : S_3, D_2</p>	$V_o = V_c + L \frac{di}{dt}$
phase de restitution	 <p>phase 5 : D_2, D_4</p>	$-V_s - V_o = V_c + L \frac{di}{dt}$
	 <p>phase 6 : D_1, D_3</p>	$V_s + V_o = V_c + L \frac{di}{dt}$
mode de conduction discontinue	 <p>phase 7 : S et D inactifs</p>	$L \frac{di}{dt} = 0, i = 0$

TAB. 4.2 – Différentes phases de fonctionnement du convertisseur à résonance série

4.3 Modèle d'état

La modélisation a été effectuée en faisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. L'inductance, les capacités et la source de tension sont supposées parfaites, de même que les interrupteurs.

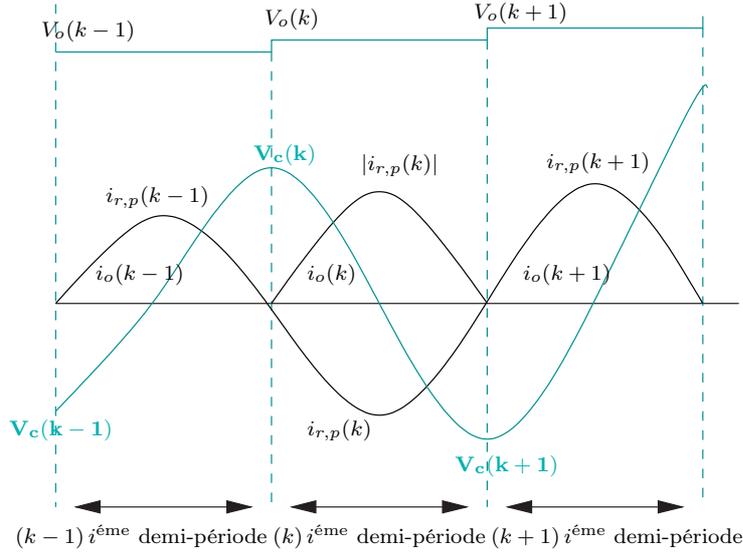


FIG. 4.2 – Définition discrète des variables d'état

Afin d'obtenir un outil analytique simple et efficace pour l'analyse, un modèle dynamique discret est développé. Les variables discrètes d'état sont définies, comme dans la figure 4.2, par la valeur moyenne $i_o(k)$ de la valeur absolue du courant résonnant pendant la $k^{\text{ème}}$ demi-période et la tension aux bornes du filtre de sortie C_f notée V_o . En appliquant les **lois de Kirchhoff** aux circuits équivalents du tableau 4.2, on obtient :

$$\text{sgn}(i_r(t)) U(k) V_s(t) = v_c(t) + L \frac{di_r(t)}{dt} + \text{sgn}(i_r(t)) V_o(t), \text{ pour } \frac{kT}{2} \leq t < \frac{(k+1)T}{2} \quad (4.1)$$

avec :

$$\text{sgn}(i_r(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_r(t) > 0 \\ -1 & \text{si } i_r(t) < 0 \end{cases}$$

$U(k)$ dénote les différentes phases de fonctionnement du convertisseur. La phase active, pendant laquelle l'amplitude du circuit résonnant augmente, est obtenue en posant $U(k) = 1$. La commande $U(k) = 0$ correspond à la roue libre durant laquelle l'amplitude du courant dans le circuit résonnant diminue et, lorsque cette amplitude s'annule, on obtient le mode de conduction discontinue. La phase de restitution d'énergie vers la

source correspond à $U(k) = -1$. L'amplitude du courant dans le circuit oscillant diminue plus rapidement pendant cette phase de restitution que pendant la phase de roue libre.

La relation dynamique entre la tension de la capacité du circuit résonant C et le courant de l'inductance L est donnée par :

$$i_r(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (4.2)$$

En ce qui concerne le circuit équivalent du filtre de sortie. L'équation dynamique de la tension de sortie $V_o(t)$ est donnée par :

$$C_f \frac{dV_o(t)}{dt} + \frac{V_o(t)}{R} = |i_r(t)| \quad (4.3)$$

Puisque la tension de sortie $V_o(t)$, pendant la demi-période de résonance, peut être considérée comme constante [KS83], la valeur absolue du courant de résonance $i_r(t)$ peut être déduite, pour la $k^{\text{ème}}$ demi-période, de (4.1) et (4.2) comme suit :

$$|i_r(t)| = \frac{V_c^*(k) + V_s U(k) - V_o(k)}{Z} \sin[\omega_r(t - kT/2)], \text{ pour } \frac{kT}{2} \leq t < \frac{(k+1)T}{2} \quad (4.4)$$

avec :

$$\begin{cases} Z = \sqrt{\frac{L}{C}} & : \text{impédance caractéristique (Ohms)} \\ \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} & : \text{fréquence angulaire de résonance (radian/sec)} \\ T = 2\pi\sqrt{LC} & : \text{période de résonance} \\ V_c^*(k) & : \text{valeur absolue de } V_c(k) \end{cases}$$

Compte tenu des équations (4.2), (4.3) et (4.4), on peut écrire :

$$V_c^*(k+1) = \frac{1}{CZ} \int_{kT/2}^{(k+1)T/2} (V_c^*(k) + V_s U(k) - V_o(k)) \sin \left[\omega_r \left(t - \frac{kT}{2} \right) \right] dt - V_c^*(k) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} V_o(k+1) = \frac{1}{C_o Z} \int_{kT/2}^{(k+1)T/2} (V_c^*(k) + V_s U(k) - V_o(k)) \sin \left[\omega_r \left(t - \frac{kT}{2} \right) \right] dt + \\ + V_o(k) - \frac{1}{C_o} \int_{kT/2}^{(k+1)T/2} \frac{V_o(k)}{R} dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

Compte tenu de l'équation (4.4), la valeur moyenne $i_o(k)$ de la valeur absolue du courant résonnant pendant la $k^{\text{ème}}$ demi-période peut être déduite :

$$i_o(k) \equiv \frac{2}{\pi} |i_{r,p}(t)|, \quad \text{pour } \frac{kT}{2} \leq t < \frac{(k+1)T}{2}$$

$$i_o(k) = \frac{2}{\pi} \frac{V_c^*(k) + V_s U(k) - V_o(k)}{Z} \quad (4.7)$$

où $|i_{r,p}(t)|$ dénote la valeur absolue du pic du courant résonnant $i_r(t)$.

La résolution des équations (4.5) et (4.6) permet d'obtenir $V_c^*(k+1)$ et $V_o(k+1)$ comme suit :

$$V_c^*(k+1) = V_c^*(k) - 2V_o(k) + 2V_s U(k) \quad (4.8)$$

$$V_o(k+1) = \Gamma V_c^*(k) + (1 - \Gamma - \Psi)V_o(k) + \Gamma V_s U(k) \quad (4.9)$$

où $\Gamma = 2C/C_o$ et $\Psi = \pi Z\Gamma/(2R)$.

En éliminant $V_c^*(k)$ entre les équations (4.7), (4.8) et (4.9), on obtient un modèle d'état sous forme discrète [JRC88] :

$$\begin{pmatrix} i_o(k+1) \\ V_o(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\Gamma) - \frac{2}{Z\pi}(2-\Psi) \\ \frac{Z\pi\Gamma}{2} & (1-\Psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_o(k) \\ V_o(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4V_s}{Z\pi} \\ 0 \end{pmatrix} U^*(k) \quad (4.10)$$

où : $U^*(k) = \frac{U(k) + U(k+1)}{2}$

Sous la condition $\Gamma \ll 1$ et $\Psi \ll 1$, c'est-à-dire $C_o \gg C$, le modèle précédent peut être écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} i_o(k+1) \\ V_o(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{Z\pi} \\ \frac{Z\pi\Gamma}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_o(k) \\ V_o(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4V_s}{Z\pi} \\ 0 \end{pmatrix} U^*(k) \quad (4.11)$$

Il est clair que la détermination de $V_o(k+1)$ ne nécessite que la connaissance de $i_o(k)$ et $V_o(k)$, par contre la détermination de $i_o(k+1)$ est conditionnée en plus par la valeur moyenne des phases de fonctionnement des $k^{\text{ème}}$ et $(k+1)^{\text{ème}}$ demi-périodes de résonance. Les différentes valeurs possibles de $U^*(k)$ selon les différentes phases de fonctionnement

$U^*(k)$	$U(k)$	$U(k+1)$
1	A	A
0.5	A R.l.	R.l. A
0	A R.l. Res	Res R.l. A
-0.5	R.l. Res	Res R.l.
-1	Res	Res

TAB. 4.3 – Valeurs possibles de $U^*(k)$, A=Active, R.l.=Roue libre, Res=Restitution

(active, roue libre, restitution d'énergie) sont représentées dans le tableau 4.3.

La pente de la moyenne de la valeur absolue du courant résonnant entre la $k^{\text{ème}}$ et la $(k+1)^{\text{ème}}$ demi période de résonance peut être aisément déduite du modèle (4.11) :

$$S(k, k+1) \equiv \frac{i_o(k+1) - i_o(k)}{T/2} = \frac{8}{\pi ZT} (V_s U^*(k) - V_o(k)) \quad (4.12)$$

Il est clair que la pente $S(k, k+1)$ peut être contrôlée directement par $U^*(k)$. Ainsi, la pente $S(k, k+1)$, comme $U^*(k)$, peut prendre une des cinq valeurs possibles (voir tableau 4.3). Pour que l'amplitude de i_o augmente, la pente $S(k, k+1)$ doit être positive, ainsi l'équation (4.12) permet de déduire que :

$$U^*(k) > \frac{V_o(k)}{V_s} \Leftrightarrow U(k+1) > \frac{2V_o(k)}{V_s} - U(k) \quad (4.13)$$

Si $U(k) = 1$ et $V_o(k) > V_s/2$ dès la $k^{\text{ème}}$ demi-période de résonance, seule la phase active peut être utilisée pour la $(k+1)^{\text{ème}}$ demi-période de résonance pour augmenter le courant résonnant. Toutefois, si $U(k) = 1$ et $V_o(k) < V_s/2$, la phase active et la phase de roue libre peuvent être toutes les deux utilisées pour la $(k+1)^{\text{ème}}$ demi-période de résonance. Dans ce cas, la pente du courant dans la séquence phase roue libre suivie par une phase active est moins raide que celle obtenue dans la séquence phase active suivie par phase active. La pente est ainsi déterminée comme étant la moyenne des pentes obtenues pour les séquences ne contenant que le mode actif d'une part et pour celles n'incluant que le mode roue libre d'autre part. Ce type de pente de courant doit être vu comme étant une pente intermédiaire de courant. Notons que des phénomènes similaires peuvent être observés pour des combinaisons des trois modes de fonctionnement de base. Si ce type de pente intermédiaire de courant est correctement utilisé, on peut s'attendre à une

amélioration de la commande du courant. La commande $U(k)$ et celle appliquée réellement au convertisseur $U^*(k)$ sont illustrées sur la figure 4.3.

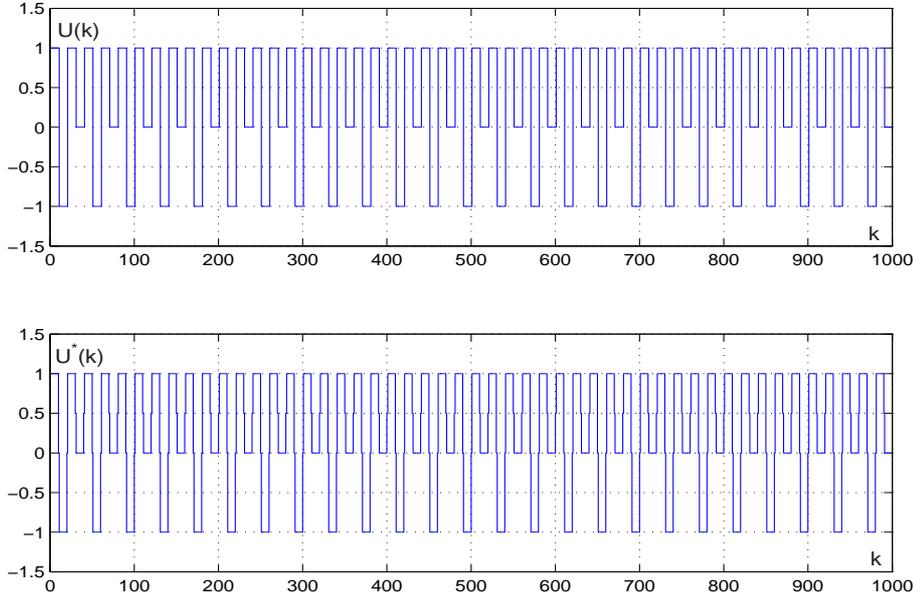


FIG. 4.3 – Commande du convertisseur

En pratique, à cause de l'impossibilité de produire des composants électroniques idéaux, les fabricants donnent les valeurs de ces éléments avec une certaine précision technologique ε . Avec cette précision, on comprend que la valeur d'un élément E est comprise dans l'intervalle $[E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon]$ (E_0 est la valeur nominale de E). De plus, les valeurs des composants électroniques dépendent de plusieurs facteurs notamment la température et le champ magnétique. En conclusion, la valeur d'un composant électronique n'a que peu de chance de valoir effectivement sa valeur nominale E_0 , donnée par le fabricant, à cause des diverses perturbations précitées.

Le modèle (4.11) est un modèle déterministe où les valeurs des composants électroniques R , C , C_o et L sont connues exactement. Pour prendre en compte les diverses perturbations pouvant affecter ces composants, le modèle (4.11) doit être mis sous forme incertaine. Pour cela, on remplace les éléments C , C_o et L , dans le modèle (4.11), par leurs valeurs permettant d'appréhender les perturbations qui les affectent au cours du temps :

$$\begin{aligned}
 C \text{ remplacé par : } & \tilde{C} + \Delta_C \eta_C(k), & \text{avec } |\eta_C| \leq 1 \forall k \\
 C_o \text{ remplacé par : } & \tilde{C}_o + \Delta_{C_o} \eta_{C_o}(k), & \text{avec } |\eta_{C_o}| \leq 1 \forall k \\
 L \text{ remplacé par : } & \tilde{L} + \Delta_L \eta_L(k), & \text{avec } |\eta_L(k)| \leq 1 \forall k
 \end{aligned}$$

où Δ_C , Δ_{C_o} et Δ_L dénotent respectivement l'amplitude de l'incertitude issue de diverses perturbations affectant C , C_o et L ; \tilde{C} , \tilde{C}_o et \tilde{L} sont leurs valeurs nominales données par

le fabricant. η_C , η_{C_o} et η_L sont des variables incertaines bornées et normalisées. Ainsi le modèle (4.11) peut être représenté sous la forme incertaine suivante :

$$\begin{pmatrix} i_o(k+1) \\ V_o(k+1) \end{pmatrix} = A(\eta_L(k), \eta_C(k), \eta_{C_o}(k)) \begin{pmatrix} i_o(k) \\ V_o(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4V_s}{\pi Z(\eta_L(k), \eta_C(k))} \\ 0 \end{pmatrix} U^*(k) \quad (4.14)$$

$$\text{où : } A(\eta_L(k), \eta_C(k), \eta_{C_o}(k)) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{\pi Z(\eta_L(k), \eta_C(k))} \\ \frac{\pi Z(\eta_L(k), \eta_C(k)) \Gamma(\eta_C(k), \eta_{C_o}(k))}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z(\eta_L(k), \eta_C(k)) = \sqrt{\frac{\tilde{L} + \Delta L \eta_L(k)}{\tilde{C} + \Delta C \eta_C(k)}}, \quad \Gamma(\eta_C(k), \eta_{C_o}(k)) = \frac{2(\tilde{C} + \Delta C \eta_C(k))}{\tilde{C}_o + \Delta C_o \eta_{C_o}(k)}.$$

Considérons que le courant et la tension sont mesurés par des capteurs incertains, ainsi le modèle décrivant ces mesures est incertain :

$$Y(k) = \mathcal{C}(\eta_1(k), \eta_2(k)) \begin{pmatrix} i_o(k) \\ V_o(k) \end{pmatrix}, \quad |\eta_1(k)| \leq 1, \quad |\eta_2(k)| \leq 1 \quad (4.15)$$

où : $\mathcal{C}(\eta_1(k), \eta_2(k)) = \begin{pmatrix} 1 + a_1 \eta_1(k) & 0 \\ 0 & 1 + a_2 \eta_2(k) \end{pmatrix}$, a_1 et a_2 sont les amplitudes des variations maximales des incertitudes affectant les capteurs mesurant le courant et la tension. η_1 et η_2 sont des variables incertaines bornées et normalisées.

Ainsi, nous avons décrit le convertisseur représenté à la figure 4.1 et les capteurs servant à mesurer les variables d'état considérées par un modèle linéaire dynamique incertain (équations 4.14 et 4.15). Dans ce qui suit, nous réalisons la démarche de validation de données proposée dans le chapitre précédent sur le modèle du convertisseur ainsi obtenu. Pour cela, nous proposons une estimée des variables d'état et en se basant sur cette estimée nous détectons et localisons les défauts affectant ce système.

4.4 Estimation d'état

Compte tenu des équations (4.15), on peut calculer, à partir des mesures, une estimée des variables d'état :

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_o^{(1)}(k) \\ \hat{V}_o^{(1)}(k) \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1}(\eta_1(k), \eta_2(k)) Y(k) \quad (4.16)$$

puisqu'on ne peut connaître exactement les valeurs des variables incertaines η_1 et η_2 à chaque instant, mais on sait qu'elles sont bornées, on les remplace par leurs bornes inférieures et supérieures, ce qui permet d'obtenir une estimée des variables d'état sous une forme intervalle :

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(1)}(k)] \\ [\hat{V}_o^{(1)}(k)] \end{pmatrix} = [\mathcal{C}]^{-1}Y(k) \quad (4.17)$$

$$\text{où : } [\mathcal{C}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{C}_{1,1} - a_1, \mathcal{C}_{1,1} + a_1] & 0 \\ 0 & [\mathcal{C}_{2,2} - a_2, \mathcal{C}_{2,2} + a_2] \end{pmatrix}.$$

En résolvant l'équation (4.17), on obtient une estimée des variables d'état à l'instant k .

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(1)}(k)] \\ [\hat{V}_o^{(1)}(k)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{[\mathcal{C}_{1,1} - a_1, \mathcal{C}_{1,1} + a_1]} & 0 \\ 0 & \frac{1}{[\mathcal{C}_{2,2} - a_2, \mathcal{C}_{2,2} + a_2]} \end{pmatrix} Y(k) \quad (4.18)$$

Compte tenu de l'équation (4.14), en remplaçant les variables d'état par leurs estimées intervalles calculées à partir de mesures à l'instant k et les matrices incertaines par leurs bornes inférieures et supérieures, nous déduisons une estimée intervalle des variables d'état à l'instant $k + 1$:

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{[Z]\pi} \\ \frac{[Z]\pi[\Gamma]}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(1)}(k)] \\ [\hat{V}_o^{(1)}(k)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4V_s}{\pi[Z]} \\ 0 \end{pmatrix} U^*(k) \quad (4.19)$$

où :

$$[Z] = \sqrt{\frac{[\tilde{L} - \Delta_L, \tilde{L} + \Delta_L]}{[\tilde{C} - \Delta_C, \tilde{C} + \Delta_C]}} = \sqrt{\frac{[L]}{[C]}}, \quad [\Gamma] = \frac{2([\tilde{C} - \Delta_C, \tilde{C} + \Delta_C]}{[\tilde{C}_o - \Delta_{C_o}, \tilde{C}_o + \Delta_{C_o}]} = \frac{2([C]}{[C_o]}.$$

En utilisant le courant et la tension mesurés à l'instant $k + 1$, nous calculons une estimée des variables d'état à instant $k + 1$. Comme cela a été fait précédemment, nous calculons à partir de l'équation (4.14) une estimée intervalle des variables d'état à l'instant $k + 2$.

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(1)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(1)}(k+1)] \end{pmatrix} = [\mathcal{C}]^{-1}Y(k+1) \quad (4.20)$$

L'estimée des variables d'état à l'instant $k + 1$ est calculée, en cas de bon fonctionnement, en effectuant l'intersection entre l'estimée calculée à partir du système et des

mesures à l'instant k avec l'estimée calculée à partir de mesures à l'instant $k + 1$

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o(k+1)] \\ [\hat{V}_o(k+1)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+1)] \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(1)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(1)}(k+1)] \end{pmatrix} = [\tau] \quad (4.21)$$

Rappelons que l'intersection entre deux vecteurs intervalles est vide si au moins une des intersections entre deux composantes de même indice de ces vecteurs est vide.

En cas de mauvais fonctionnement du convertisseur, en supposant que les mesures à l'instant k sont saines, l'estimée finale des variables d'état à l'instant $k + 1$ est celle calculée à partir du modèle du convertisseur et des mesures à l'instant k car cette estimée est la seule à être cohérente avec le modèle du convertisseur.

4.5 Défauts de convertisseur

Les trois principaux défauts du convertisseur sont les suivants :

4.5.1 Transistor en court-circuit dû à une surintensité du courant

Ce type de défaut est très important parce qu'il peut causer d'autres défauts dans le circuit du convertisseur, de plus ce défaut est irréversible. L'origine de ce type de défaut est dû à :

- un vieillissement du composant,
- un dépassement des limites de la valeur nominale de tension ou de courant pendant une longue période,
- une résistance de charge trop petite,
- un court-circuit d'un autre transistor.

Notons qu'il est plus probable de rencontrer ce type de défaut pendant la phase d'augmentation du courant que pendant sa phase de diminution. Prenons par exemple le transistor S_1 : ce transistor peut être en court-circuit pendant la conduction de S_1S_3 juste avant la phase de roue libre où S_1D_4 est en fonctionnement.

4.5.2 Blocage de transistor

Un transistor est bloqué, c'est-à-dire ne s'allume pas bien malgré qu'il soit polarisé. Dans ce cas le transistor n'a aucun rôle.

4.5.3 Diode bloquée

Une diode bloquée est une diode polarisée mais qui ne permet pas au courant de passer. Ainsi, plusieurs cycles ne sont pas possibles (phase de roue libre). Même, si ce défaut est peu fréquent, il est utile de le considérer parce que ce défaut influence les variables d'état.

L'occurrence de tous les défauts mentionnés précédemment entraîne une modification du fonctionnement du convertisseur et induit ainsi un changement de valeurs des variables d'état. Une méthode faisant usage d'une banque de modèles associés aux différents types de défauts pouvant intervenir sur le convertisseur est proposée dans [BCDR92] pour détecter et localiser les défauts. Cette méthode repose sur une comparaison entre l'état estimé du convertisseur et l'état mesuré. Nous nous intéressons uniquement, dans cette étude, aux défauts survenant sur les mesures (deux défauts ont été insérés ; f_1 sur y_1 dans l'intervalle temporel [50,100] et f_2 sur y_2 dans l'intervalle temporel [600,650]). Notons qu'un module permettant de séparer les défauts de convertisseur des défauts de mesure est proposé dans [Cat92].

4.6 Détection et localisation de défauts

A partir de l'équation (4.18) et sous l'hypothèse qu'il n'y pas de défaut à l'instant k , on peut considérer l'estimée calculée à partir de (4.19) comme référence, pour la comparer ensuite avec l'estimée calculée, à partir de mesures, à l'instant $k+1$. Ainsi, deux situations sont possibles :

- Si $[\tau] \neq \emptyset$ (4.21), l'estimée des variables d'état, calculée à partir de mesures à l'instant $k+1$, est cohérente avec l'estimée calculée à partir du modèle du convertisseur et des mesures à l'instant k . On déclare alors que les mesures à l'instant $k+1$ sont valides (absence de défauts),
- Si $[\tau] = \emptyset$, l'estimée des variable d'état, calculée à partir de mesures à l'instant $k+1$, est incohérente avec l'estimée calculée à partir du modèle du convertisseur et des mesures à l'instant k . Dans ce cas, les vraies valeurs des variables d'état n'appartiennent qu'à la référence considérée à l'instant k . On déclare alors que les mesures à l'instant $k+1$ sont invalides (présence de défauts).

Dans le cas de détection de défauts, l'estimée des variables d'état à partir des modèles du système et des mesures à l'instant $k+1$ (4.22) ne peut plus être considérée comme référence pour l'estimée qui sera calculée à l'instant $k+2$.

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+2)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{[Z]\pi} \\ \frac{[Z]\pi[\Gamma]}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(1)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(1)}(k+1)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4V_s}{\pi[Z]} \\ 0 \end{pmatrix} U^*(k+1) \quad (4.22)$$

Nous pouvons corriger cette estimée afin qu'elle soit considérée comme référence pour l'instant $k+2$ en utilisant le modèle du convertisseur et la référence considérée à l'instant $k+1$. En remplaçant, dans l'équation (4.14), les matrices incertaines par leurs valeurs intervalles et les variables d'état par leurs estimées intervalles calculées à partir du modèle du convertisseur et des mesures à l'instant k (4.19) :

$$\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+2)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{[Z]\pi} \\ \frac{[Z]\pi[\Gamma]}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+1)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4V_s}{\pi[Z]} \\ 0 \end{pmatrix} U^*(k+1) \quad (4.23)$$

Avec $\tilde{L} = 298 \mu H$, $\Delta_L = 0.05\tilde{L}$, $\tilde{C} = 0.121 \mu F$, $\Delta_C = 0.05\tilde{C}$, $\tilde{C}_o = 83 \mu F$, $\Delta_{C_o} = 0.05\tilde{C}_o$, $R = 10 \text{ Ohm}$, $\Delta_R = 0.05\tilde{R}$, et $a_1 = a_2 = 0.1$, les mesures sont montrées sur la figure 4.4. Une estimée des variables d'état cohérente avec le modèle du convertisseur est proposée et illustrée par la figure 4.5.

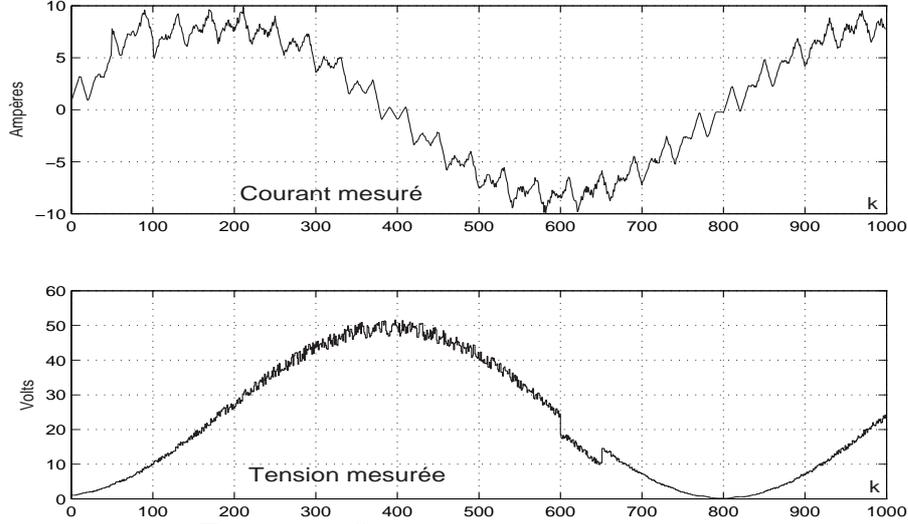


FIG. 4.4 – Courant et tension mesurés

Pour localiser les mesures qui sont en défaut, nous pouvons générer des résidus structurés intervalles. Compte tenu de l'équation (4.15), en remplaçant la matrice incertaine $\mathcal{C}(\eta_1, \eta_2)$ par sa valeur intervalle $[C]$ et les variables d'état par leur estimée $\begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+1)] \end{pmatrix}$,

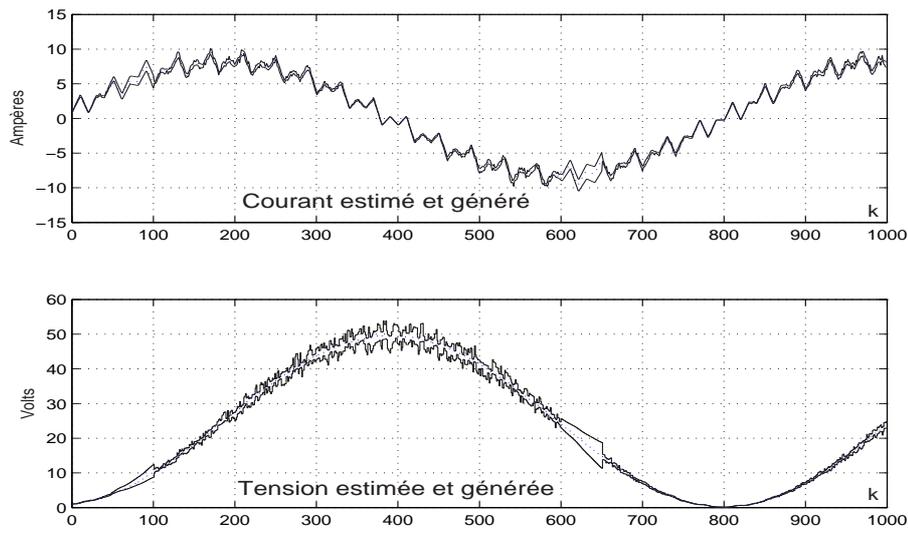


FIG. 4.5 – Courant et tension estimés et générés

on obtient les résidus intervalles suivants :

$$\begin{pmatrix} [r_1(k+1)] \\ [r_2(k+1)] \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} [\hat{i}_o^{(2)}(k+1)] \\ [\hat{V}_o^{(2)}(k+1)] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Y_1(k+1) \\ Y_2(k+1) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Les résidus générés sont montrés sur la figure 4.6. Il est clair que le résidu structuré r_1 qui est sensible aux défauts du capteur de courant est anormal (ne contient pas la valeur 0) dans l'intervalle temporel $[50, 100]$, ainsi le défaut f_1 est détecté et localisé. Il en est de même pour le résidu structuré r_2 qui est sensible aux défauts du capteur de tension. Ce résidu est anormal dans l'intervalle temporel $[600, 650]$, ce qui permet de détecter et localiser le défaut f_2 .

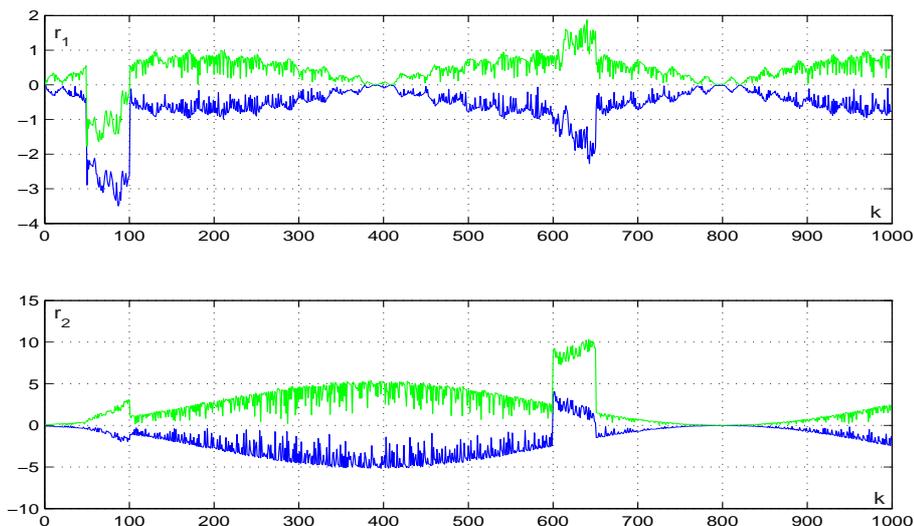


FIG. 4.6 – Les résidus

4.7 Conclusion

Dans un premier temps, nous avons détaillé le principe de fonctionnement d'un convertisseur série résonnant. Puis, un modèle linéaire permettant de décrire les différentes phases de fonctionnement de ce convertisseur et capable de prendre en compte les incertitudes affectant les différents éléments constituant le convertisseur a été présenté. Ensuite, en utilisant les méthodes de validation de données développées dans le chapitre précédent, nous avons proposé une estimation des variables d'état et une démarche de détection et localisation de défauts de mesures.

Grâce à la propriété garantissant l'inclusion des valeurs réelles dans l'enveloppe estimée, l'approche bornante ne génère aucune fausse alarme supplémentaire, autre que celles induites par les incertitudes du modèle. Notons que même si le modèle est a priori simple, le nombre de paramètres incertains et leur amplitude restent toutefois importants par rapport au faible degré de redondance du système étudié. Ceci implique que l'amplitude des défauts doit être suffisamment importante pour que ces derniers puissent être détectables. Il va alors de soi qu'il apparaît des scénarios où il n'est toujours pas possible de localiser correctement un défaut.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, notre intérêt s'est porté sur le problème de la validation de données des systèmes présentant des incertitudes. Les incertitudes pouvant être recensées sur le modèle du système ou les mesures délivrées par les capteurs du système ou encore simultanément sur le système et les mesures.

Les méthodes de validation de données à base de redondance analytique exploitent la connaissance d'un modèle du système à surveiller. La difficulté réside dans le fait que ce modèle est pris pour référence et qu'à partir du moment où les mesures prélevées sur le système ne sont plus cohérentes avec celui-ci, la présence d'un défaut est suspectée. En effet un modèle du système se révèle en pratique approximatif, d'où la difficulté de différencier un défaut des conséquences d'une erreur de modélisation. Dans ces conditions, plutôt que de construire des seuils de détection a priori, il est préférable de prendre en compte ces erreurs sous forme d'incertitudes paramétriques dès la phase de modélisation, pour ensuite pouvoir naturellement générer ces seuils. Le modèle incertain est alors certes imprécis, mais il reproduit un ensemble de comportements jugés admissibles, c'est-à-dire représentatifs du système lorsque celui-ci n'est affecté par aucun défaut. Quelle que soit la méthode sur laquelle repose la procédure de validation de données, elle ne peut en aucun cas réduire l'imprécision du modèle, ainsi les résultats feront nécessairement apparaître des non-détections. Celles-ci sont directement liées, d'une part à la précision du modèle, d'autre part à la capacité à conserver au mieux l'information lorsque la méthode employée la conditionne sous forme de résidus. L'avantage de l'approche bornante utilisée au cours de ce mémoire provient du fait que les incertitudes paramétriques sont considérées comme porteuses d'information. Pour cela, elles sont intégrées dans le processus de génération de résidus et dans la réalisation des tests de cohérence. De plus, la propriété de garantie propre à l'approche bornante certifie que si le modèle utilisé est juste, c'est-à-dire représentatif de tous les comportements sains du système, alors une incohérence constatée durant la procédure de détection témoigne nécessairement de la présence d'un défaut.

Le fait que la représentation ensembliste soit moins riche que la représentation probabiliste, puisque seul le support des incertitudes est considéré, permet de traiter une

plus grande classe de systèmes incertains. L'approche bornante ne fait usage d'aucune loi de distribution ou hypothèse sur la manière dont les paramètres incertains sont distribués. Cette simplification permet de s'intéresser au cas d'incertitudes multiplicatives intervenant sur n'importe quelle matrice de la représentation d'état. Notons que la prise en compte des dépendances entre incertitudes est non seulement possible mais vivement recommandée de manière à limiter le pessimisme des tests de cohérence en ce qui concerne les objectifs de la validation de données. Lors de la mise en œuvre de la validation de données, l'utilisation de l'approche bornante pour la génération des résidus ne permet pas de calculer de manière exacte le domaine de ces résidus. L'objectif est alors d'en rechercher une approximation la moins pessimiste possible pour limiter le nombre de non-détection. Ainsi, l'approche bornante n'est pas la panacée des méthodes de validation de données. Elle présente aussi bien des avantages que des inconvénients. Mais si l'on se limite au cas des modèles incertains, l'approche bornante reste la méthode la plus indiquée.

Dans le cas des systèmes statiques incertains, une nouvelle approche du problème de réconciliation de mesures est proposée en s'appuyant sur l'analyse par intervalle. La méthode proposée est aisée à mettre en œuvre. Elle permet de valider les mesures et de donner une estimée des variables intervenant dans le modèle du système sur la base de la connaissance des intervalles dans lesquels varient les erreurs de mesure. On s'affranchit ainsi de la connaissance a priori des lois de distribution statistique des erreurs de mesure. La mise en œuvre de cette méthode passe par une étape préalable de modélisation des capteurs prenant en compte le caractère incertain des mesures. L'approche proposée ne tient en compte que le cas des systèmes complètement mesurés et devrait pouvoir s'étendre aux systèmes partiellement mesurés et à certains systèmes non linéaires, en particulier les systèmes multilinéaires décrits par des équations de bilan en flux total et en flux partiel.

Les systèmes dynamiques incertains sont étudiés dans trois cas. Le premier cas concerne les systèmes complètement mesurés, le deuxième concerne les systèmes partiellement mesurés et le troisième concerne les systèmes dont la dimension du vecteur de sortie est plus grande que la dimension du vecteur d'état (redondance matérielles). Dans les trois cas, la procédure de la validation de données se base sur l'estimation d'état. Pour ce faire, en s'appuyant sur l'arithmétique des intervalles, on calcule une estimée intervalle des variables d'état. On adopte ensuite une démarche classique de détection et localisation de défaut.

Le principe de l'espace de parité dans le cadre d'un modèle incertain a ensuite été présenté où nous avons proposé une méthode de calcul de la matrice de projection permettant un découplage total par rapport aux variables d'état. La méthode proposée fournit une forme polynomiale en les incertitudes et permet de générer le vecteur parité. L'analyse

du vecteur parité est ensuite effectuée dans le but d'expliquer le principe de détection de défaut dans le cadre l'approche bornante. Le problème de la localisation de défauts, dans le cas de l'espace de parité, n'est pas évoqué, il serait alors intéressant d'étudier ce problème et de proposer un algorithme permettant d'isoler les défauts détectables.

Tout au long de ce mémoire, seule une approche orientée bon fonctionnement a été considérée dans le cadre de l'étape de localisation. Une approche orientée mauvais fonctionnement est aussi envisageable, où il faudrait construire un ou plusieurs modèles incertains représentatifs des différents défaut à localiser. Une cohérence entre le comportement observé du système surveillé et l'un de ces modèles conduit alors à déterminer l'organe ou le composant en défaut.

Enfin, nous avons supposé tout au long de ce document que les incertitudes affectant plusieurs paramètres dans un modèle sont représentées par des variables bornées indépendantes. Il serait important de s'intéresser dans la suite au cas où ces variables sont couplées.



Arithmétique d'intervalle

Nous présentons ici un majorant pour le rayon du produit de deux intervalles.

$$\begin{aligned} [a][b] &= \langle a; \vec{a} \rangle \langle b; \vec{b} \rangle \\ &= \left(a \left(\langle 1; \frac{\vec{a}}{|a|} \rangle \right) \right) \left(b \left(\langle 1; \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle \right) \right) \\ &= (ab) \left(\langle 1; \frac{\vec{a}}{|a|} \rangle \langle 1; \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle \right) \\ &= ab \left(\left(1 + \langle 0; \frac{\vec{a}}{|a|} \rangle \right) \left(1 + \langle 0; \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle \right) \right) \end{aligned}$$

On utilise la propriété de sous-distributivité de ce produit. Son développement donne alors l'inclusion suivante :

$$\begin{aligned} [a][b] &\subset ab \left(1 + \langle 0; \frac{\vec{a}}{|a|} \rangle + \langle 0; \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle + \langle 0; \frac{\vec{a}}{|a|} \rangle \langle 0; \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle \right) \\ [a][b] &\subset ab \left(\langle 1; \frac{\vec{a}}{|a|} + \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle + \langle 0; \frac{\vec{a}}{|a|} \frac{\vec{b}}{|b|} \rangle \right) \end{aligned}$$

$$[a][b] \subset ab \left(\left\langle 1; \frac{\vec{a}}{|a|} + \frac{\vec{b}}{|b|} + \frac{\vec{a}}{|a|} \frac{\vec{b}}{|b|} \right\rangle \right)$$

$$[a][b] \subset ab \left(\left\langle 1; \frac{\vec{a}|b| + |a|\vec{b} + \vec{a}\vec{b}}{|a||b|} \right\rangle \right)$$

B

Résolution des équations linéaires intervalles

B.1 Elimination de Gauss

Le pivot de Gauss est une méthode connue pour inverser un système d'équations linéaires carré. Cette extension à l'arithmétique d'intervalles est inspirée de [JKDW01].

Algorithme d'élimination de Gauss ($[A] \in \mathbb{IR}^{n,n}$, $[b] \in \mathbb{IR}^n$) \rightarrow $[X] \in \mathbb{IR}^n$:

```
pour  $i = 1$  à  $n - 1$  faire
  si  $0 \in [a_{i,i}]$  alors
    retourner  $X = \mathbb{IR}^n$ 
  sinon
    pour  $j = i + 1$  à  $n$  faire
       $[\alpha_j] := \frac{[a_{j,i}]}{[a_{i,i}]}$ 
       $[b_j] := [b_j] - [\alpha_j][b_i]$ 
      pour  $k = i + 1$  à  $n$  faire
         $[a_{i,k}] = [a_{i,k}] - [\alpha_j][a_{i,k}]$ 
      fin pour
    fin pour
  fin si
fin pour
```

```

pour  $i = n$  à 1 faire
     $[x_i] = \frac{([b_i] - \sum_{j=i+1}^n [a_{i,j}][x_j])}{[a_{i,i}]}$ 
fin pour
    
```

B.2 Algorithme de Gauss-Seidel

Algorithme Gauss-Seidel ($[A] \in \mathbb{IR}^{n,n}$, $[b] \in \mathbb{IR}^n$) \rightarrow $[X] \in \mathbb{IR}^n$:

Amélioration = faux

Vide = faux

faire

pour $i = 1$ à n **faire**

aux = $[b_i]$

pour $j = 1$ à n **faire**

si $j \neq i$ **alors**

aux = aux - $[a_{i,j}][X_j]$

fin si

fin pour

aux = $\frac{aux}{[a_{i,i}]}$

$[X'_i] = aux \cap [X_i]$

si $[X'_i] = \emptyset$ **alors** Vide = vrai

sinon

si amélioration significative entre $[X'_i]$ et $[X_i]$

Amélioration = vrai

fin si

fin si

$[X_i] = [X'_i]$

fin pour

tant que ("Amélioration" est faux ou "Vide" est vrai)

La variable booléenne "Amélioration" est fixée à vrai si l'amélioration est significative et à faux sinon. La variable booléenne "Vide" est fixée à vrai si l'intersection entre aux et $[X_i]$ est vide et à faux sinon.

B.3 Algorithme de Krawczyk

Algorithme de Krawczyk ($[A] \in \mathbb{IR}^{n,n}$, $[B] \in \mathbb{IR}^n$) \rightarrow $[X] \in \mathbb{IR}^n$:

```

flag = 0
C = (c([A]))-1
mul = C * [B]
E = I - C[A]
β = maxi ∑k |Ei,k| où k = 1...n
    si β ≥ 1 alors
        flag = 1
    fin si
α =  $\frac{\|\infty\|}{1-\beta}$ 
[X] = ([-α, α], ... [-α, α])T
σ' = inf
σ = ∑k radius([Xk])
fac =  $\frac{(1+\beta)}{2}$ 
tant que σ < fac * σ' faire
    [X] = (mul + E[X]) ∩ [X]
    σ' = σ
    σ = ∑k radius([Xk])
fin tant que

```

B.4 Algorithme de propagation de contrainte

La stratégie retenue dans cet algorithme est celle du « largest first ». On initialise une liste L qui reçoit les indices des variables que l'on ne doit pas traiter, c'est-à-dire : si la variable n vient d'être traitée et qu'il n'y a pas eu de changement, alors on met n dans L , sinon on vide L .

Algorithme de propagation de contraintes ($[A] \in \mathbb{IR}^{m,n}$, $[B] \in \mathbb{IR}^m$) \rightarrow $[X] \in \mathbb{IR}^n$:

```

tant que liste  $L$  des indices des variables non vide faire
     $i$  = indice de la variable du plus grand domaine
    pour  $j = 1$  à  $n$  faire
        la nouvelle évaluation du domaine de  $X_i$  est :
         $[X'_i] = \frac{1}{[a_{j,i}]} \left\{ [b_j] - \sum_{k=1, k \neq j}^m [a_{j,k}] [X_k] \right\}$ 
         $[X_i] = [X_i] \cap [X'_i]$ 
        si l'amélioration entre  $[X_i]$  et  $[X'_i]$  est significative alors
            vider  $L$ 
        sinon
            mettre  $i$  dans  $L$ 
        fin si

```

fin pour
fin tant que

B.5 Contracteur par programmation linéaire

On considère le CSP défini par :

$$H : (AX - B = 0, X \in [X], B \in [B]), \quad A \in \mathbb{R}^{m,n}$$

où A est certaine mais pas nécessairement carrée et B est incertain ($B \in [B]$). Dans ce cas, il est possible de transformer ce problème en $2m$ problèmes de programmation linéaire, de façon à utiliser les performances des algorithmes existants pour résoudre ce type de problème.

Le vecteur $[X]$ est consistant avec le problème H si et seulement s'il existe $B \in [B]$ tel que $AX - B = 0$. En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \exists B \in [B] \mid AX - B = 0 \\ \Leftrightarrow AX \in [B] \\ \Leftrightarrow \begin{cases} AX \geq \underline{B} \\ AX \leq \overline{B} \end{cases} \end{aligned}$$

Le plus petit pavé $[\mathbb{P}]$ contenant tous les solutions X peut être calculé en résolvant les $2m$ problèmes de programmation linéaire :

$$\underline{\mathbb{P}} = \arg \min X_i \mid \begin{pmatrix} -A \\ A \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} -\underline{B} \\ \overline{B} \end{pmatrix}, \quad X \in [X], \quad i = 1 \dots m$$

$$\overline{\mathbb{P}} = \arg \max X_i \mid \begin{pmatrix} -A \\ A \end{pmatrix} X \leq \begin{pmatrix} -\underline{B} \\ \overline{B} \end{pmatrix}, \quad X \in [X], \quad i = 1 \dots m$$

de sorte que :

$$\mathcal{R} : \begin{pmatrix} A \\ [B] \\ [X] \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A \\ [B] \\ [\underline{P}, \overline{P}] \end{pmatrix}$$

C

Rang et valeurs propres d'une matrice incertaine

L'objectif est de déterminer des domaines simples contenant les valeurs propres (ou singulières) d'une matrice incertaine afin de déterminer si pour certaines combinaisons des paramètres incertains, une ou plusieurs d'entre elles peuvent s'annuler. Ainsi, une condition suffisante pour qu'une matrice $A(\eta)$ soit de plein rang est qu'aucun de ces domaines ne contienne 0.

C.1 Inégalités de Weyl et de Weinmann

Dans un premier temps, une méthode basée sur l'inégalité de Weyl est présentée. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; $\lambda_i(A)$ désigne sa $i^{\text{ième}}$ valeur propre et ν_i le vecteur propre associé : $A\nu_i = \lambda_i(A)\nu_i$.

Rappelons tout d'abord une propriété triviale : soit B une matrice carrée complexe vérifiant $B = \alpha A$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lambda_i(B) = \alpha \lambda_i(A)$. Ce résultat reste valide lorsque le coefficient α est remplacé par une variable bornée $\eta \in [-1, 1]$:

$$B = \eta A \Rightarrow \lambda_i(B) = \eta \lambda_i(A) \tag{C.1}$$

Considérons maintenant deux matrices certaines hermitiennes (une matrice A est her-

mitienne lorsque $A^* = A$ où A^* est la transposée du conjugué de A , dans le cas de matrices réelles, une matrice hermitienne est une matrice symétrique) A et B d'ordre n . Les valeurs propres de la somme $A + B$ obéissent à l'inégalité de Weyl :

$$\lambda_i(A) + \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_i(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_{\max}(B)$$

où λ_{\min} et λ_{\max} correspondent aux plus petite et grande valeurs propres de B . De manière plus générale, dans le cas d'une somme de matrices hermitiennes, on déduit que :

$$\lambda_i(A) + \sum_j \lambda_{\min}(A_j) \leq \lambda_i\left(A + \sum_j A_j\right) \leq \lambda_i(A) + \sum_j \lambda_{\max}(A_j) \quad (\text{C.2})$$

Dans le cas où les matrices considérées ne sont pas hermitiennes, des résultats issus des travaux de Bendixon et Bromwich permettent là aussi d'obtenir des majorations des valeurs propres de ces matrices et de leur somme. Soit A une matrice carrée certaine complexe d'ordre n . Cette matrice peut se décomposer sous la forme d'une matrice hermitienne A_h et d'une matrice non-hermitienne A_{nh} définies par :

$$A_h = 0.5(A + A^*), \quad A_{nh} = 0.5(A - A^*)$$

où A^* représente la transposée du conjugué de A . Les valeurs propres de la matrice A appartiennent au rectangle défini dans le plan complexe par :

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A_h) &\leq \operatorname{Re}(\lambda(A)) \leq \lambda_{\max}(A_h) \\ \min\left(\frac{1}{i}\lambda(A_{nh})\right) &\leq \operatorname{Im}(\lambda(A)) \leq \max\left(\frac{1}{i}\lambda(A_{nh})\right) \end{aligned}$$

Les travaux de Weinmann ont permis de montrer que la partie réelle des valeurs propres de la somme de deux matrices carrées certaines de \mathbb{R}^n est bornée par :

$$\lambda_{\min}(A_h) + \lambda_{\min}(B_h) \leq \operatorname{Re}(\lambda(A + B)) \leq \lambda_{\max}(A_h) + \lambda_{\max}(B_h)$$

Là aussi, cette relation peut être étendue au cas d'un nombre quelconque de matrices :

$$\sum_i \lambda_{\min}(A_{hi}) \leq \operatorname{Re}\left(\lambda\left(\sum_i A_i\right)\right) \leq \sum_i \lambda_{\max}(A_{hi}) \quad (\text{C.3})$$

Dans le cas où la matrice A n'est pas carrée, l'étude se fait sur ses valeurs singulières :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$$

La matrice AA^* (tout comme A^*A) étant hermitienne, certains résultats vus précédemment peuvent être directement réutilisés.

Ces différentes inégalités permettent d'étudier les valeurs propres d'une matrice incertaine. Par exemple, pour une matrice réelle, carrée et de la forme :

$$A(\eta) = A_0 + \sum_{i=1}^r \eta_i A_i$$

Si chacune des matrices réelles A_i , $i \in \{0, \dots, r\}$ est symétrique (donc hermitienne), l'inégalité (C.1) et la propriété (C.2) peuvent être exploitées. En supposant que les variables bornées η_i soient normalisées, la $j^{\text{ième}}$ valeur propre $\lambda_j(\eta_i A_i)$ est forcément élément de l'intervalle $[-|\lambda_j(A_i)|, |\lambda_j(A_i)|]$. Les valeurs propres maximale et minimale de $\eta_i A_i$ sont donc données par : $\lambda_{\max}(\eta_i A_i) = -\lambda_{\min}(\eta_i A_i) = \max_j (|\lambda_j(A_i)|)$. Des bornes encadrant les valeurs propres de la matrice $A(\eta)$ peuvent donc être données par :

$$\lambda_j(A_0) - \sum_{i=1}^r \lambda_{\max}(A_i) \leq \lambda_j(A(\eta)) \leq \lambda_j(A_0) + \sum_{i=1}^r \lambda_{\max}(A_i)$$

Dans le cas où la matrice $A(\eta)$ n'est pas hermitienne, le résultat (C.3) peut être exploité, sachant que cette fois, seule une majoration globale de toutes les valeurs propres à la fois sera possible. Pour chaque matrice A_i , $i \in \{0, \dots, r\}$, la matrice hermitienne A_{hi} associée est déterminée ainsi que ses valeurs propres. Puisque les valeurs maximale et minimale des valeurs propres de $\eta_i A_{hi}$ sont données par $\lambda_{\max}(\eta_i A_{hi}) = -\lambda_{\min}(\eta_i A_{hi}) = \max_j (|\lambda_j(A_{hi})|)$, l'inégalité suivante est obtenue :

$$\lambda_{\min}(A_{h0}) - \sum_{i=1}^r \lambda_{\max}(A_{hi}) \leq \operatorname{Re} \left(\lambda \left(A_0 + \sum_{i=1}^r \eta_i A_i \right) \right) \leq \lambda_{\max}(A_{h0}) + \sum_{i=1}^r \lambda_{\max}(A_{hi})$$

Cette technique conduit à définir un seul domaine de majoration pour l'ensemble des valeurs propres de la matrice $A(\eta)$. L'inconvénient est que si cette matrice possède à la fois des valeurs propres positives et négatives, alors l'intervalle précédent contient 0 et il n'est pas possible de savoir si certaines d'entre elles s'annulent pour des valeurs particulières des paramètres incertains.

C.2 Disques de Gerschgorin

Soit A une matrice carrée complexe et certaine d'ordre n dont les éléments d'indices (i, j) sont notés a_{ij} . Chaque valeur propre de A est située dans un des disques de Gerschgorin de centre $c_i = a_{ii}$ et de rayon r_i défini au choix à partir des coefficients de la $i^{\text{ième}}$ ligne ou $i^{\text{ième}}$ colonne de A :

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \text{ ou } r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$$

Toutes les valeurs propres sont donc contenues dans la réunion des différents disques obtenus et définis par $|c_i - \lambda| \leq r_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons que la réunion U_k de k de ces disques n'ait aucun point commun avec la réunion \tilde{U}_{n-k} des $n - k$ disques restants, alors k valeurs propres sont contenues dans U_k et $n - k$ dans \tilde{U}_{n-k} . Par conséquent, toute réunion de k disques de Gerschgorin formant un domaine séparé contient exactement k valeurs propres de A . Si tous les disques sont disjoints, alors chaque disque contient nécessairement une valeur propre d'après la propriété précédente. Chaque valeur propre est dans au moins un des disques, mais dans le cas où plusieurs d'entre eux sont sécants, on ne peut plus garantir que chaque disque contienne bien une valeur propre.

Une méthode proche des disques de Gerschgorin, appelée ovales de Cassini, permet elle aussi d'évaluer les valeurs propres d'une matrice certaine complexe A . Elles appartiennent au domaine du plan complexe formé par la réunion des régions intérieures aux $n(n+1)/2$ ovales de Cassini $O(c_i, c_j, r_i, r_j)$ définis par :

$$|c_i - \lambda| |c_j - \lambda| \leq r_i r_j, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$$

Les disques de Gerschgorin permettent donc de définir un domaine dans lequel sont nécessairement situées les valeurs propres de A . Dans notre cas, la seule chose qui nous intéresse est de savoir si une valeur propre peut prendre la valeur 0. Il est donc possible de ne s'intéresser qu'à la partie réelle des valeurs propres et dans ce cas ne travailler que sur les intervalles de Gerschgorin définis par $[c_i - r_i, c_i + r_i]$. Chaque partie réelle des valeurs propres de A est située dans un des intervalles de Gerschgorin de centre $c_i = a_{ii}$ et de rayon r_i , et donc dans la réunion de ces intervalles.

Utilisons ceci dans le cadre d'une matrice incertaine définie comme suit :

$$A(\eta) = A_0 + \eta A_1, \quad \eta \in [-1, 1]$$

Pour chaque ligne (ou colonne) d'indice i de la matrice $A(\eta)$, le centre et le rayon de l'intervalle de Gerschgorin sont donnés par :

$$c_i(\eta) = a_{0,ii} + \eta a_{1,ii} \text{ et } r_i(\eta) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |a_{0,ij} + \eta a_{1,ij}|$$

Pour une valeur particulière de η , le $i^{\text{ième}}$ intervalle de Gerschgorin est donc défini par :

$$\left[a_{0,ii} + \eta a_{1,ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |a_{0,ij} + \eta a_{1,ij}|, a_{0,ii} + \eta a_{1,ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |a_{0,ij} + \eta a_{1,ij}| \right]$$

Pour déterminer le domaine obtenu pour η élément de $[-1, 1]$, il suffit de réaliser la réunion des intervalles précédents. La variable η appartenant à un domaine fermé et borné, cette réunion est donc aussi un intervalle donné par :

$$\left[\inf_{\eta} \left(a_{0,ii} + \eta a_{1,ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |a_{0,ij} + \eta a_{1,ij}| \right), \sup_{\eta} \left(a_{0,ii} + \eta a_{1,ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r |a_{0,ij} + \eta a_{1,ij}| \right) \right]$$

Si aucun de ces n intervalles ne contient 0, alors $A(\eta)$ est de plein rang quelles que soient les incertitudes. Attention cependant, l'évaluation des bornes inférieure et supérieure de ces deux fonctions d'inclusion est soumise au problème de dépendance entre variables bornées et peut donc nécessiter la mise en œuvre de techniques limitant le pessimisme des intervalles obtenus.

Bibliographie

- [AAF89] D.J. Atkinson, P.P. Acarnley et J.W. Finch. Parameter identification techniques for induction motor drives. In *3rd European Conference on Power Electronics and Applications*, pages 307–312, Aachen, Germany, 1989.
- [ADMR02] M. Alhaj Dibo, D. Maquin et J. Ragot. Réconciliation de données par estimation d'état en utilisant l'approche bornante. In *Système d'Information Modélisation, Optimisation Commande en Génie des Procédés, SIMO'2002*, Toulouse, France, 2002.
- [ADMR03a] M. Alhaj Dibo, D. Maquin et J. Ragot. Data reconciliation using interval analysis. In *5ème Congrès International Pluridisciplinaire Qualité et Sécurité de Fonctionnement, QUALITA'2003*, pages 577–584, Nancy, France, 2003.
- [ADMR03b] M. Alhaj Dibo, D. Maquin et J. Ragot. Validation de données par approche bornante. In *Journées Doctorales d'Automatique*, pages 347–352, Valenciennes, France, 2003.
- [ADMR04a] M. Alhaj Dibo, D. Maquin et J. Ragot. Data reconciliation : a robust approach using contaminated distribution. Application in mineral processing for multicomponent products. In *11th Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM'2004*, Nancy, France, 2004.
- [ADMR04b] M. Alhaj Dibo, D. Maquin et J. Ragot. Data validation of uncertain dynamic systems. In *15th International Workshop on Principles of Diagnosis*, pages 117–122, Carcassonne, France, 2004.
- [ADMR04c] M. Alhaj Dibo, D. Maquin et J. Ragot. Validation de données des systèmes dynamiques incertains. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2004*, Douz, Tunisie, 2004.
- [Adr00] O. Adrot. *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2000.

- [Aka74] H. Akaike. Markovian representation of stochastic processes and its application to the analysis of autoregressive moving average processes. *Annals Institute Statistical Mathematics*, 26 :363–387, 1974.
- [Alm91] G.A. Almsy. Principles of dynamic balancing. *AIChE Journal*, 36 :1321–1330, 1991.
- [ALMR96] A. Abdollahzadeh, M. Luong, D. Maquin et J. Ragot. Influence de la précision des capteurs sur la précision de l'état d'un système. Application au choix de la précision des capteurs. In *Colloque national, Simulation, Optimisation et Commande en Génie des procédés, SIMO96*, pages 183–188, Toulouse, France, 1996.
- [AM79] B.D.O. Anderson et J.B. Moore. *Optimal filtering*. Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Thomas Kailath, 1979.
- [AMR99] O. Adrot, D. Maquin et J. Ragot. Estimation d'état généralisé sur horizon glissant. Application au diagnostic. In *Troisième Conférence Internationale sur l'Automatisation Industrielle*, pages 22.5–22.8, Montréal, Canada, 1999.
- [AMR00] O. Adrot, D. Maquin et J. Ragot. Diagnosis of an uncertain static system. In *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4150–4154, Darling Harbour, Australia, 2000.
- [APR02] O. Adrot, S. Ploix et J. Ragot. Caractérisation des incertitudes dans un modèle linéaire statique. *Journal Européen des Systèmes Automatisés, APII-JESA*, 36(6) :799–824, 2002.
- [Arm99] J. Armengol. *Application of modal interval analysis to the simulation of the behaviour of dynamic systems with uncertain parameters*. PhD thesis, Université de Girones, 1999.
- [Asc82] G. Asch. *Les capteurs en instrumentation industrielle*. Dunod, 1982.
- [ATMVDLR99] J. Armengol, L. Trave-Massuyes, J. Vehi et J.L. De La Rosa. A survey on interval model simulators and their properties related to fault detection. In *14th World Congress of International Federation of Automatic Control, IFAC Beijing'99*, pages 511–519, China, 1999.
- [ATMVS99] J. Armengol, L. Trave-Massuyes, J. Vehi et M.A. Sainz. Semiquantitative simulation using modal interval analysis. In *14th World Congress of International Federation of Automatic Control IFAC Beijing'99*, pages 521–526, China, 1999.
- [ATMVS00] J. Armengol, L. Trave-Massuyes, J. Vehi et M.A. Sainz. Interval model-based fault detection using multiple sliding time windows. In *14 IFAC*

-
- Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 168–173, Budapest, Hungary, 2000.
- [AVASH03] J. Armengol, J. Vehi, M. Angel Sainz et P. Herrero. Fault detection in a pilot plant using interval models and multiple sliding time windows. In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 729–734, Washington, USA, 2003.
- [BCDR92] C. S. Berendsen, G. Champenois, J. Davoine et G. Rostaing. How to detect and to localize a fault in a DC/DC converter? In *International Conference on Power Electronics and Motion Control*, pages 536–541, San Diego, USA, 1992.
- [Bea71] R.V. Beard. *Failure accommodation in linear systems through self-reorganisation*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics, Cambridge, Massachusetts, 1971.
- [Bea99] O. Beaumont. *Algorithmique pour les intervalles : comment obtenir un résultat sûr quand les données sont incertaines*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 1999.
- [BGLS02] J.F. Bonnans, J. Ch. Gilbert, C. Lemarchal et C.A. Sagastizbal. *Numerical Optimisation : Theoretical and Practical Aspect*. Springer, 2002.
- [BJL⁺90] M. Brunet, D. Jaume, M. Labarrère, A. Rault et M. Vergé. *Détection et diagnostic de pannes - Approche par modélisation*. Traité des Nouvelles Technologies. Hermès, 1990.
- [BMR98] A. Boukhris, D. Mandel et J. Ragot. Data validation using interval algebra. In *IEE International Conference on Control, CONTROL'98*, pages 404–409, Swansea, United Swansea, United Kingdom, 1998.
- [BN93] M. Basseville et I.V. Nikiforov. *Detection of abrupt changes - Theory and application*. Information and system sciences series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [BS88] V. Broman et M.J. Shensa. A compact algorithm for the intersection and approximation of n-dimensional polytopes. In *12th IMACS World Congress*, pages 473–476, Paris, France, 1988.
- [Cat92] S. Catellani. *Etude sur la détection et la localisation de défauts en temps réel dans les éléments de puissance d'une association convertisseur-machine*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1992.
- [CCH83] C.M. Crowe, Y.A.G. Campos et A. Hrymak. Reconciliation of process

- flow rates by matrix projection, I : linear case. *AIChE Journal*, 29 :881–888, 1983.
- [CCS97] V. Cocquempot, J.P. Cassar et M. Staroswiecki. How does the time window size influence the sensitivity/robustness trade-off of optimal structured residuals? In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 329–334, Hull, United Kingdom, 1997.
- [Cer93] V. Cerone. Parameter bounds for armax models from records with bounded errors in variables. *International Journal of Control*, 56(1) :225–235, 1993.
- [Cer96] V. Cerone. Errors-in-variables models in parameter bounding. In Plenum Press, editor, *Bounding approaches to system identification*, chapitre 18. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., New York and London, 1996.
- [CFW75] R.N. Clark, D.C. Fosth et W.M. Walton. Detecting instrument malfunctions in control systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 11(4) :465–473, 1975.
- [CG88] T. Clément et S. Gentil. Recursive membership set estimation for armax models : an output-error approach. In *12th IMACS World Congress*, pages 484–486, Paris, France, 1988.
- [CGT93] P. Coirault, J-D. Gabano et J-C. Trigeassou. Maintenance prédictive d'un entraînement électrique par identification paramétrique. *Diagnostic et sûreté de fonctionnement*, 3(1) :69–95, 1993.
- [CHC91] B. Cordier, C.T. Huynh et J.P. Cassar. Supervision system design for a petroleum production application. In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes*, pages 289–293, Baden-Baden, Allemagne, 1991.
- [Cho80] E.Y. Chow. *A failure detection system design methodology*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1980.
- [Cla78] R.N. Clark. Instrument fault detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 14(3) :456–465, 1978.
- [CSC95] J.P. Cassar, M. Staroswiecki et V. Cocquempot. Optimal residual design for model-based fault detection and isolation. In *3rd European Control Conference*, pages 1986–1992, Rome, Italy, 1995.
- [CSF92] J.P. Cassar, M. Staroswiecki et R. Ferhati. Multivalued logic voting scheme for residual evaluation in failure detection and isolation systems.

-
- In *Proceeding of the IFAC/IFIP/IMACS Symposium on Artificial Intelligence in Real Time Control*, pages 573–579, Delft, Pays Bas, 1992.
- [CW84] E.Y. Chow et A.S. Willsky. Analytical redundancy and the design of robust failure detection system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29(7) :603–614, 1984.
- [CW98] J. Cheng et A.F. Witulski. LLC parallel resonant converter design by scaling the lc converter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(3) :924–933, July 1998.
- [CYL95] I.C. Chang, C.C. Yu et C.T. Liou. Model-based approach for fault diagnosis. Part 2. extension to interval systems. *Industrial Engineering Chemical Research*, pages 828–844, 1995.
- [CZ90] J. Chen et H-Y Zhang. Parity vector approach for detecting failures in dynamic systems. *International Journal of Systems Science*, 21(4) :765–770, 1990.
- [DDD79] M.N. Desai, J.C. Deckert et J.J. Deyst. Dual sensor failure identification using analytic redundancy. *Journal of Guidance and Control*, 2(3) :213–220, 1979.
- [DDD77] J.C. Deckert, M.N. Desai, J.J. Deyst et A.S. Willsky. F-8 dfbw sensor failure identification using analytic redundancy. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5) :795–803, 1977.
- [DGH79] K.C. Daly, E. Gai et J.V. Harrison. Generalised likelihood test for fdi in redundant sensor configuration. *Journal of Guidance and Control*, 2(1) :9–17, 1979.
- [Did97] O. Didrit. *Analyse par intervalles pour l'automatique ; résolution globale et garantie de problèmes non-linéaires en robotique et en commande robuste*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1997.
- [EW70] F.A. Evans et J.C. Wilcox. Experimental strapdown redundant sensor inertialnavigation system. *Journal of Spacecraft Rockets*, 7 :1070–1074, 1970.
- [FCK99] X. Feng, G.F. Corliss et R.W. Kelnhofer. A new interval bounding algorithm for parameter estimation from bounded-error data. In *14th World Congress of International Federation of Automatic Control, IFAC Beijing'99*, pages 349–354, China, 1999.
- [FH82] E. Fogel et Y.F. Huang. On the value of information in system identification-bounded noise case. *Automatica*, 18(2) :229–238, 1982.

- [Fra87] P.M. Frank. *Fault diagnosis in dynamic systems via state estimation - A survey*, volume 1 of *System fault diagnosis, reliability and related knowledge-based approaches*, pages 35–98. Tzafestas S., Singh M., Schmidt G. (Eds), Reidel Dordrecht Press, 1987.
- [Fra89] P.M. Frank. Robust fault diagnosis using unknown input observer schemes. In Clark R.N. Patton R.J., Frank P.M., editor, *Fault diagnosis in dynamic systems : theory and application*, International Series in Systems and Control Engineering. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1989.
- [Fra90] P.M. Frank. Fault diagnosis in dynamical systems using analytical and knowledge based redundancy - a survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459–474, 1990.
- [Fra96] P.M. Frank. Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results. *European Journal of Control EUCA*, 2 :6–28, 1996.
- [Gan77] F.R. Gantmacher. *The theory of matrices*. Chelsea, New-York, 1977.
- [Ger88] J. Gertler. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. *IEEE Control Systems Magazine*, 8(6) :3–11, 1988.
- [Ger91] J. Gertler. Analytical redundancy methods in fault detection and isolation. In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 9–22, Baden Baden, Germany, 1991.
- [Ger98] J. Gertler. *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker, New York, USA, 1998.
- [GS90] J. Gertler et D. Singer. A new structural framework for parity equations-based failure detection and isolation. *Automatica*, 26(2) :381–388, 1990.
- [Ham86] M. Hammad. *Validation des mesures et détection des capteurs défaillants dans un système de contrôle-commande*. PhD thesis, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, France, 1986.
- [Han92] E.R. Hansen. *Global optimization using interval analysis*. Marcel Dekker, New York, USA, 1992.
- [Han97] E.R. Hansen. The l-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In *SIAM*, 1997.
- [HBM97] D. Hodouin, C. Bazin et S. Makni. Dynamic material balance : application to industrial flotation circuits. *Minerals and Metallurgical Processing*, 14(2) :401–408, 1997.

-
- [HCL79] P.G. Ham, G.W. Cleavves et J.K. Lowlor. Operation data reconciliation : An aid to improved plant performance. In *10th Word Petroleum Congr.*, page 281, Bucarest, Roumanie, 1979.
- [HDBL03] G. Heyen, D. Dempf, M. H. Bauer et T. List. Online monitoring and optimisation of a ketene manufacturing plant. In *IcheaP-6, The Sixth Italian Conference on Chemical and Process Engineering*, Pisa, Italy, 2003.
- [HI96] T. Höfling et R. Isermann. Fault detection based on adaptative parity equations and single-parameter tracking. *Control Engineering Practice*, 4(10) :1361–1369, 1996.
- [HKHGKY92] J. Ho Ko, S.S. Hong, M. Go Kim et M.J. Youn. Modeling and improved current control of series resonant converter withe nonperiodic integral cycle mode. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 7(2) :280–288, april 1992.
- [HMK96] G. Heyen, E. Maréchal et B. Kalitventzeff. Sensitivity calculation and variance analysis in plant measurement recociliation. In *Computer and Chemical Engineering*, volume 20S, pages 539–544, 1996.
- [HP94] T Höfling et T. Pfeufer. Detection of additive and multiplicative faults, parity space vs. parameter estimation. In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 539–544, Helsinki, Finland, 1994.
- [HSG01] M.Z. Hadj-Sadok et J.L. Gouzé. Estimation models of activated sludge process with interval observers. *Journal of Process Control*, 11(3) :299–310, 2001.
- [IB96] R. Isermann et P. Ballé. Trends in the application of model based fault detection and diagnosis of technical process. In *13th Triennial World Congress IFAC*, pages 1–12, San Francisco, USA, 1996.
- [Ise84] R. Isermann. Process fault detection based on modeling and estimation methods - a survey. *Automatica*, 20 :387–404, 1984.
- [Ise97] R. Isermann. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods - advanced methods and applications. In *IMEKO World Congress, New Measurements - Challenges and Visions*, pages 1–28, Tampere, Finland, 1997.
- [Jau00] L. Jaulin. *Le calcul ensembliste par analyse par intervalles et ses applications*. Habilitation à diriger des recherches, Université d’Angers, 2000.
- [JIA00] H. Janati-Idrissi et Maquin D. Adrot, O. Recherche du vecteur parité pour un système statique incertain. In *Conférence Internationale Francophone d’Automatique, CIFA ’2000*, pages 532–537, Lille, France, 2000.

- [JKDW01] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit et E. Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer, 2001.
- [Jon73] H.L. Jones. *Failure detection in linear systems*. PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1973.
- [JRC88] G. B. Joung, C. T. Rim et G. H. Cho. Modeling of quantum series resonant converters-controlled by integral cycle mode. In *IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, pages 640–647, 1988.
- [JW93] L. Jaulin et E. Walter. Guaranteed nonlinear parameter estimation from bounded-error data via interval analysis. *Mathematics and Computers in Simulation*, (35) :123–137, 1993.
- [JW96] L. Jaulin et E. Walter. Guaranteed nonlinear set estimation via interval analysis. In *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. Bounding approaches to system identification*, chapitre 23, pages 363–381. Plenum Press, New York and London, 1996.
- [Kai80] T. Kailath. *Linear systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [KCT95] D. Kérignard, P. Coirault et J.C. Trigeassou. Estimation des paramètres électriques d’une machine asynchrone. In *2nd International Conference on Industrial Automation*, volume 2, pages 577–582, 1995.
- [KD61] D.R. Kuehn et H. Davidson. Computer control. (ii) mathematics of control. *Chem. Eng. Prog.*, 57(6), 1961.
- [Kel97] R.W. Kelnhofer. *Application of Interval Methods to Parameter Set Estimation From Bounded Data*. PhD thesis, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 1997.
- [KG80] J.C. Knepper et J.W. Gorman. Statistical analysis of constrained data sets. *AIChE Journal*, 26 :260–264, 1980.
- [Kie99] M. Kieffer. *Estimation ensembliste par analyse d’intervalle, application à la localisation d’un véhicule*. PhD thesis, Université Paris Sud, Orsay, France, 1999.
- [KLT03] M.G. Karpovisky, L.B. Levitin et A. Trachtenberg. Data verification with generalized error-control codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(7), 2003.
- [KR00] Z. Kulpa et K. Roslaniec. Solution sets for systems of linear interval equations. *CAMES*, 7(4) :625–639, 2000.

-
- [Kra91] F. Kratz. *Utilisation des techniques de redondance matérielles et analytiques à la détection de panne de capteurs. Application aux centrales nucléaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy, France, 1991.
- [KS83] R.J. King et T.A. Stuart. A large-signal dynamic simulation for the series resonant converter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-19(6) :859–870, 1983.
- [LEL92] M.J. Liebman, T.F. Edgar et L.S. Lasdon. Efficient data reconciliation and estimation for dynamic process using programming techniques. *Computers and Chemical Engineering*, 16 :963–986, 1992.
- [LG94] L. Ljung et T. Glad. On global identifiability for arbitrary model parametrization. *Automatica*, 30(2) :265–276, 1994.
- [LL93] L. Loron et G. Laliberte. Application of the extended kalman filter to parameters estimation of induction motors. In *Power Electronics and Applications EPE'93*, pages 85–90, Brighton, United Kingdom, 1993.
- [Lou82] X.C. Lou. *A system failure detection method : the failure projection method*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1982.
- [LWV86] X-C. Lou, A.S. Willsky et G.C. Verghese. Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems. *Automatica*, 22(3) :333–344, 1986.
- [Man98] D. Mandel. *Diagnostic à base de redondance analytique. Application à un réseau urbain de distribution d'eau potable*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 1998.
- [Mas86] M.A. Massoumnia. *A geometric approach for failure detection and identification in linear systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- [MB82] M. Milanese et G. Belforte. Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors : linear families of models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-27(2) :408–413, 1982.
- [MBR91] D. Maquin, G. Bloch et J. Ragot. Data reconciliation for measurement. *European Journal of Diagnosis and Safety in Automation*, 1(2) :145–181, 1991.
- [Mir79] L.A Mironovski. Functional diagnosis of linear dynamic systems. *Automatika i Telemekhanika*, (8) :120–128, 1979.

- [MMR99] G. Mourot, D. Maquin et J. Ragot. Simultaneous state and parameter estimation. Application to rainfall data validation. In *14th World Congress of International Federation of Automatic Control, IFAC Beijing'99*, pages 165–170, China, 1999.
- [MN88] S.H. Mo et J.P. Norton. Recursive parameter-bounding algorithms which compute polytope bounds. In *12th IMACS World Congress*, volume 2, pages 477–480, Paris, France, 1988.
- [MN90] S.H. Mo et J.P. Norton. Fast and robust algorithm to compute exact polytope parameter bounds. *Mathematics and Computers in Simulation*, 32 :481–493, 1990.
- [MNPLW96] M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier et E. Walter. *Bounding approaches to system identification*. Plenum Press, New York and London, 1996.
- [Moo66] R.E. Moore. *Interval analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1966.
- [Moo79] R.E. Moore. *Methods and applications of interval analysis. Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1979.
- [MR91] D. Maquin et J. Ragot. Comparison of gross error detection methods in process data. In *30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2254–2261, Brighton, United Kingdom, 1991.
- [MR03] D. Maquin et J. Ragot. Validation de données issues de systèmes de mesure incertain. *Journal Européen des Systèmes Automatisés, RS-série JESA, numéro spécial « Applications des outils de calculs ensemblistes »*, 37(9) :1163–1179, 2003.
- [MSD76] R.S.H. Mah, G.M. Stanley et D.W. Downing. Reconciliation and rectification of process flow and inventory data. *Ind. & Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, 15 :175–183, 1976.
- [MV96] M. Milanese et A. Vicino. Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty : an overview. In *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. Bounding approaches to system identification*, chapitre 2, pages 5–27. Plenum Press, New York and London, 1996.
- [MVV88] M.A. Massoumnia et W.E. Vander Velde. Generating parity relations for detecting and identifying control system component failures. *Journal Guidance, Control and Dynamics*, 11(1) :60–65, 1988.
- [Neu90] A. Neumaier. *Interval methods for systems of equations*. Encyclopedia

-
- of Mathematics and its Applications. G.-C. ROTA, Cambridge, United Kingdom, 1990.
- [Neu98] A. Neumaier. Solving ill-conditioned and singular linear systems : A tutorial on regularization. *SIAM*, 40 :636–666, 1998.
- [NH93] S. Narasimhan et P. Harikumar. A method to incorporate bounds in data reconciliation and gross error detection. *Computers and Chemical Engineering*, 17(11) :1115–1120, 1993.
- [NJ00] S. Narasimhan et C. Jordache. *Data reconciliation and gross error detection*. Gulf publishing company, Houston, Texas, 2000.
- [Nun97] W. Nuninger. *Stratégie de diagnostic robuste à l'aide de la redondance analytique*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 1997.
- [PAR99] S. Ploix, O. Adrot et J. Ragot. Parameter uncertainty computation in static linear models. In *38th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'99*, pages 1916–1921, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [PC91] R.J. Patton et J. Chen. A review of parity space approaches to fault diagnosis. In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 65–81, Baden Baden, Germany, 1991.
- [PF88] C.C.D. Pai et G.D. Fisher. Application of Broyden's method to reconciliation of nonlinearly constrained data. *AIChE Journal*, 34 :873–876, 1988.
- [PFC89] R.J. Patton, P.M. Frank et R.N. Clark. *Fault diagnosis in dynamic systems : theory and application*. International Series in Systems and Control Engineering. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1989.
- [Plo98] S. Ploix. *Diagnostic des systèmes incertains : l'approche bornante*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 1998.
- [PLW88] H. Piet-Lahanier et E. Walter. Practical implementation of an exact and recursive algorithm for characterizing likelihood sets. In *12th IMACS World Congress*, volume 2, pages 481–483, Paris, France, 1988.
- [PLW90] H. Piet-Lahanier et E. Walter. Exact recursive characterization of feasible parameter sets in the linear case. *Math. and Comput. in Simul.*, 32 :495–504, 1990.
- [PLW94] H. Piet-Lahanier et E. Walter. Bounded error tracking of time-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8) :1661–1664, 1994.

- [PQT00] V. Puig, J. Quevedo et S. Tornil. Robust fault detection : active versus passive approaches. In *IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Process*, pages 155–161, Budapest, Hungary, 2000.
- [PS77] J.E. Potter et M.C. Suman. Thresholdless redundancy management with arrays of skewed instruments. In *Agardograph 224, Integrity in Electronic flight control systems*, pages 15.1–15.24, 1977.
- [PSQ99] V. Puig, J. Saludes et J. Quevedo. A new algorithm for adaptive threshold generation in robust fault detection based on a sliding window and global optimization. In *European Control Conference ECC'99*, pages CD-ROM, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [RBM97] J. Ragot, A. Boukhris et D. Mandel. A propos de l'algèbre des intervalles-Application à la validation de données. In *Rencontres Francophones sur la Logique Floue, Cépaduès Editions, LFA '97*, pages 341–348, Lyon, France, 1997.
- [RDMB90] J. Ragot, M. Darouach, D. Maquin et G. Bloch. *Validation de données et diagnostic*. Traité des Nouvelles Technologies, Hermès, 1990.
- [RG03] A. Rapaport et J.L. Gouzé. Parallelotopic and practical observers for non linear uncertain systems. *Int. Journal. Control*, 76(3) :237–251, 2003.
- [RGB95] P.P. Robet, M. Gautier et C. Bergmann. Estimation of the synchronous drive electrical parameters. In *4th IEEE Conference on Control Applications, CCA '95*, Albany, New York, USA, 1995.
- [Rip65] D.L. Ripps. Adjustment of experimental data. *Chemical Engineering Progress*, 55(61) :8–13, 1965.
- [Rip99] P. Ripoll. *Conception d'un système de diagnostic flou appliqué au moteur automobile*. PhD thesis, Université de Savoie, France, 1999.
- [RMA99] J. Ragot, D. Maquin et O. Adrot. LMI approach for data reconciliation. In *38th Conference of Metallurgists Symposium Optimization and Control in Minerals, Metals and Materials Processing, SIM'99*, pages 87–100, Quebec, Canada, 1999.
- [RMAD03] J. Ragot, D. Maquin et M. Alhaj Dibo. Sensor fault detection and isolation. A blind approach. In *5th International Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Applications*, pages 157–163, Aveiro, Portugal, 2003.
- [RMAD04] J. Ragot, D. Maquin et M. Alhaj Dibo. Détection de défauts de capteurs : une approche aveugle. In *3ème Colloque Interdisciplinaire en Instrumentation, C2I 2004*, pages 101–108, Cachan, France, 2004.

-
- [RMAD05] J. Ragot, D. Maquin et M. Alhaj Dibo. Linear mass balance equilibration : a new approach for an old problem. *ISA Transactions*, 44(1) :23–35, 2005.
- [Rum83] S.M. Rump. *Solving Algebraic Systems with High Accuracy*. eds. U. Kulisch and W. Miranker Academic Press, 1983.
- [SCC91] M. Staroswiecki, V. Cocquempot et J.P. Cassar. Observer based and parity space approach for failure detection and identification. In *IMACS Symposium, MCTS'91*, pages 536–541, Lille, France, 1991.
- [SCC93] M. Staroswiecki, J.P. Cassar et V. Cocquempot. A general approach for multicriteria optimization of structured residuals. In *TOOLDIAG'93, International Conference on Fault Diagnosis*, pages 800–807, Toulouse, France, 1993.
- [Sha95] S.P Shary. On optimal solution of interval linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32 :610–630, 1995.
- [Sta91] M. Staroswiecki. *Equivalence des résidus générés par la méthode de l'espace de parité et les méthodes utilisant les observateurs*. Exposé GRECO-CNRS, 1991.
- [Sta01] M. Staroswiecki. *Automatique et statistique pour le diagnostic*, chapitre 2 Redondance analytique, pages 43–67. *Traité IC2 Information - Commande - Communication*. Hermès, Paris, 2001.
- [Tri87] J.C. Trigeassou. *Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires*. PhD thesis, Université de Poitiers, France, 1987.
- [Vac69] V. Vaclavek. Studies on system engineering iii. Optimal choice of balance measurements in complicated chemical systems. *Chemical Engineering Science*, 24 :947–955, 1969.
- [VJ97] M. Vergé et D. Jaune. Détection de défauts par estimation d'état. In *AGI97*, Angers, France, 1997.
- [VN96] S.M. Veres et J.P. Norton. Parameter-bounding algorithms for linear errors-in-variables models. In *Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., Bounding approaches to system identification*, chapitre 17, pages 275–288. Plenum Press, New York and London, 1996.
- [Wal75] D. Waltz. Generating semantic descriptions from drawings of scenes with shadows. In *P. H. Winston (ed), The Psychology of Computer Vision*, pages 19–91. McGraw-Hill, NewYork, NY, USA, 1975.

- [WDC75] A.S. Willsky, J.J. Deys et B.S. Crowford. Two self-test methods applied to an inertial system problem. *Journal of Spacecraft Rockets*, 12 :434–437, 1975.
- [WH82] K. Watanabe et D.M. Himmelblau. Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal of Systems Science*, 13 :137–158, 1982.
- [Wil76] A.S. Willsky. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. *Automatica*, 12 :601–611, 1976.
- [WPL87] E. Walter et H. Piet-Lahanier. Exact and recursive description of feasible parameter set for bounded error models. In *26th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1921–1922, Los Angeles, CA, USA, 1987.
- [YSW03] W. Yan, H. Shao et X. Wang. Novel data reconciliation method based on kernel principal component analysis. In *American Control Conference*, pages 2503–2504, Colorado, 2003.
- [YY96] I. Yoshiteru et T. Yasunori. Data reconciliation combined with data evaluation by sensor network. In *35th Conference on Decision and Control, IEEE*, pages 138–141, Japan, 1996.
- [ZL87] L.V. Zai et T.A. Lipo. An extended Kalman filter approach to rotor time constant measurement in PWM induction motor drives. In *IEEE Industry Applications Society*, pages 177–183, 1987.
- [Zwi95] G. Zwingelstein. *Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels*. Diagnostic et Maintenance. Traité des Nouvelles technologies, Hermès, 1995.

Résumé : Pour fonctionner correctement, les systèmes de commande et de surveillance des processus ont besoin de recevoir des données cohérentes représentatives de l'état de fonctionnement de ces processus. Malheureusement, l'ensemble des données prélevées sur un processus ne constitue pas une représentation exacte de son fonctionnement parce que les données sont sujettes à des erreurs de différentes natures. Il est donc nécessaire de tester la validité des données acquises avant de les utiliser. Le problème majeur rencontré lors d'une procédure de validation de données ou de diagnostic réside dans le fait qu'un modèle ne définit qu'un comportement approché du processus qu'il est censé représenter. Ces approximations proviennent des erreurs de modélisation qui peuvent être expliquées par l'impossibilité d'identifier exactement les paramètres d'un système réel à cause de la précision limitée de son instrumentation. En outre, le comportement de tout système réel change au cours du temps d'une manière non prévisible en raison de l'environnement, des modes opératoires,.... La représentation d'un système réel par un modèle incertain constitue une bonne solution pour prendre en compte le caractère incertain des paramètres du modèle du système. Plusieurs approches ont été développées pour analyser de tels modèles. Citons notamment l'approche probabiliste et l'approche bornante. L'objectif de cette thèse est de proposer, en utilisant l'approche bornante, des méthodes de validation de données des systèmes incertains.

Mots-clés : validation de données, réconciliation de données, diagnostic de systèmes, modèle incertain, relation de parité, approche bornante, analyse par intervalles.

Abstract: To function correctly, the control and the monitoring systems of the processes require to receive consistent data representative of the operating condition of these processes. Unfortunately, the data taken on a process does not constitute an exact representation of its operation because the data are subject to errors of various natures. Therefore, it is necessary to test the validity of the data gathered before using them. The major problem encountered at the time of a procedure of data validation or diagnosis is that a model of a process defines only one approximate behavior of the process which it is supposed to represent. These approximations come from the errors of modeling which can be explained by the impossibility of identifying exactly the parameters of a real system because of the limited precision of its instrumentation. Moreover, the behavior of any real system changes in the time in a nonforeseeable way because of the environment, of the procedures.... The representation of a real system by an uncertain model constitutes a good solution to take into account the uncertain character of the parameters model of the system. Several approaches were developed to analyse such models, as the probabilistic approach and the bounding approach. The objective of this thesis is to propose, by using the bounding approach, a methods of data validation for the uncertain systems.

Keywords: data validation, data reconciliation, fault diagnosis, uncertain model, parity relation, bounding approach, interval analysis.

