



# Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 décembre 2004

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

(spécialité automatique et traitement du signal)

par

Abdelkader AKHENAK

### Composition du jury

<i>Président :</i>	M. DAROUACH	Professeur à l'Université de Nancy I
<i>Rapporteurs :</i>	N. K. M'SIRDI	Professeur à l'Université de Versailles St Quentin
	F. ROTELLA	Professeur à l'ENI de Tarbes
<i>Examineurs :</i>	M. KINNAERT	Professeur à l'Université Libre de Bruxelles
	D. MAQUIN	Professeur à l'INPL, Nancy
	J. RAGOT	Professeur à l'INPL, Nancy

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN - UMR 7039) au sein du groupe thématique "Sûreté de Fonctionnement et Diagnostic des Systèmes" sous la direction de Messieurs les Professeurs Didier Maquin et José Ragot.

Je tiens à leur témoigner ma profonde gratitude pour l'accueil, le suivi et l'aide précieuse qu'ils m'ont apportés tout au long de ce travail. Je leur suis très reconnaissant pour la confiance qu'ils m'ont témoignée tout au long de mes travaux de recherche.

J'exprime ma gratitude à Messieurs les Professeurs Frédéric Rotella et Nacer M'sirdi d'avoir accepté de rapporter sur mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont voulu porter à ce travail. Leur lecture approfondie du mémoire, leurs remarques et interrogations judicieuses m'ont été très précieuses.

Je remercie également Monsieur le Professeur Mohamed Darouach d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'assurer la présidence du jury. Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Michel Kinnaert pour sa participation au jury et pour ses remarques fructueuses.

Je tiens particulièrement à remercier tous les membres du CRAN et tous les doctorants pour leur sympathie et l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su entretenir tout au long de mon séjour parmi eux et tout particulièrement Marjorie Schwartz pour sa constante disponibilité.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à l'élaboration de ce travail.



*Je dédie cette thèse  
à mes chers parents.  
à toute ma famille,  
à toutes et à tous mes ami(e)s*



# Table des matières

Table des figures

xi

Références personnelles
-------------------------

1

Introduction générale
-----------------------

Chapitre 1
------------

Généralités sur les systèmes linéaires
--

1.1	Introduction . . . . .	9
1.2	Natures des incertitudes . . . . .	10
1.2.1	Système autonome . . . . .	10
1.2.2	Système non autonome . . . . .	11
1.3	Stabilité . . . . .	11
1.3.1	Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe . . . . .	12
1.3.2	Fonctions de Lyapunov . . . . .	14
1.4	Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles . . . . .	18
1.4.1	Analyse convexe . . . . .	18
1.4.2	Problèmes classiques LMI . . . . .	18
1.4.3	Écriture de contraintes sous forme LMI . . . . .	20
1.4.4	Régions LMIs . . . . .	20
1.4.5	Placement de pôles par approche LMI . . . . .	21
1.5	Observabilité et observateurs . . . . .	22
1.5.1	Observabilité . . . . .	24
1.5.2	Observabilité des systèmes linéaires . . . . .	24
1.5.3	Synthèse d'observateur pour un système linéaire certain . . . . .	25
1.6	Commande à structure variable (mode glissant) . . . . .	27

1.6.1	Introduction . . . . .	27
1.6.2	Exemple 1 . . . . .	28
1.6.3	Exemple 2 . . . . .	29
1.7	Conclusion . . . . .	30

**Chapitre 2**

**Observateurs de systèmes linéaires**

2.1	Introduction au développement d'observateurs continus . . . . .	35
2.2	Observateur à entrées inconnues . . . . .	35
2.2.1	Reconstruction d'état en éliminant les entrées inconnues . . . . .	36
2.2.2	Principe de la reconstruction . . . . .	37
2.2.3	Conditions de convergence de l'observateur . . . . .	38
2.2.4	Méthodes de résolution . . . . .	39
2.2.4.1	Linéarisation par rapport aux variables . . . . .	39
2.2.4.2	Changement de variables . . . . .	40
2.2.5	Placement de pôles . . . . .	40
2.2.6	Exemple . . . . .	41
2.2.7	Conclusion . . . . .	44
2.3	Introduction au développement d'observateurs discontinus . . . . .	45
2.4	Méthodes de conception d'observateurs discontinus . . . . .	46
2.4.1	Observateur d'Utkin . . . . .	46
2.4.2	Observateur de Walcott et Žak . . . . .	48
2.4.3	Exemple d'application . . . . .	50
2.5	Observateur à mode glissant utilisant une forme canonique . . . . .	51
2.5.1	Simplification de l'équation de sortie . . . . .	52
2.5.2	Découplage de la fonction inconnue . . . . .	53
2.6	Synthèse d'un observateur à mode glissant . . . . .	55
2.7	Conclusion . . . . .	59

**Chapitre 3**

**Sur l'analyse des systèmes multimodèles**

3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Obtention d'une structure multimodèle . . . . .	64
3.3	Différentes structures multimodèle . . . . .	65
3.3.1	Structure couplée . . . . .	65

---

3.3.2	Structure découplée . . . . .	66
3.3.3	Structure hiérarchisée . . . . .	67
3.3.4	Recherche des modèles locaux par identification . . . . .	68
3.3.5	Recherche des modèles locaux par linéarisation . . . . .	69
3.4	Optimisation paramétrique . . . . .	70
3.4.1	Algorithme du gradient . . . . .	71
3.4.2	Algorithme de Newton . . . . .	71
3.4.3	Algorithme de Gauss-Newton . . . . .	71
3.5	Exemple d'illustration . . . . .	72
3.6	Stabilité des multimodèles . . . . .	76
3.6.1	Stabilité quadratique . . . . .	76
3.6.2	Stabilité relaxée . . . . .	77
3.7	Stabilité des multimodèles incertains . . . . .	78
3.8	Modélisation d'un système non linéaire industriel par un multimodèle . . .	80
3.8.1	Description du système "turbo-réacteur" . . . . .	80
3.8.2	Représentation du turbo-réacteur par un multimodèle . . . . .	83
3.8.2.1	Représentation multimodèle des fonctions coefficients . . .	83
3.8.2.2	Simulation du modèle non linéaire . . . . .	89
3.8.2.3	Multimodèle du turbo-réacteur . . . . .	90
3.8.3	Simulation du modèle du turboréacteur . . . . .	94
3.8.4	Conclusion . . . . .	94

<b>Chapitre 4</b>
-------------------

<b>Conception de multiobservateurs</b>
--

4.1	Introduction . . . . .	98
4.2	Méthode de conception d'un multiobservateur . . . . .	100
4.2.1	Variables de décision mesurables . . . . .	100
4.2.2	Variables de décision non mesurables . . . . .	102
4.2.3	Affectation des valeurs propres d'un multiobservateur . . . . .	104
4.2.4	Exemple d'application . . . . .	105
4.3	Conception d'un multiobservateur à entrées inconnues . . . . .	108
4.3.1	Matrices d'influence d'entrées inconnues identiques . . . . .	108
4.3.1.1	Convergence globale du multiobservateur . . . . .	110
4.3.1.2	Méthode de résolution . . . . .	111
4.3.1.3	Placement de pôles . . . . .	112

4.3.2	Matrices d'influence des entrées inconnues différentes . . . . .	113
4.3.2.1	Convergence globale du multiobservateur . . . . .	115
4.3.2.2	Méthode de résolution . . . . .	115
4.3.2.3	Placement de pôles . . . . .	116
4.4	Estimation des entrées inconnues . . . . .	117
4.5	Exemple d'application . . . . .	118
4.6	Conclusion . . . . .	121

## **Chapitre 5**

### **Conception de multiobservateurs à mode glissant**

5.1	Introduction . . . . .	125
5.2	Différentes approches de conception de multiobservateur . . . . .	126
5.2.1	1 <sup>ère</sup> approche : extension de l'observateur de Walcott et Zak . . . . .	126
5.2.2	2 <sup>ème</sup> approche : relaxation de certaines conditions d'existence . . . . .	133
5.2.2.1	Principe de reconstruction . . . . .	133
5.2.2.2	Convergence du multiobservateur . . . . .	134
5.2.3	3 <sup>ème</sup> approche : élimination des contraintes structurelles . . . . .	135
5.2.3.1	Convergence du multiobservateur . . . . .	136
5.2.3.2	Méthode de résolution . . . . .	137
5.2.4	Estimation des entrées inconnues . . . . .	138
5.2.5	Exemple de simulation . . . . .	139
5.3	Multiobservateur pour un multimodèle incertain . . . . .	143
5.3.1	Formulation du problème . . . . .	143
5.3.2	Conception du multiobservateur . . . . .	144
5.3.2.1	Convergence du multiobservateur . . . . .	145
5.3.2.2	Relaxation des conditions de stabilité . . . . .	146
5.3.3	Exemple de simulation . . . . .	148
5.4	Multiobservateur en présence d'entrées inconnues et d'incertitudes de modèle	151
5.4.1	Principe de reconstruction . . . . .	151
5.4.2	Convergence du multiobservateur . . . . .	152
5.5	Conclusion . . . . .	154

## **Chapitre 6**

### **Diagnostic à base de multiobservateurs**

6.1	Introduction . . . . .	157
-----	------------------------	-----

---

6.2	Surveillance utilisant les modèles . . . . .	158
6.2.1	Redondance physique ou matérielle . . . . .	158
6.2.2	Redondance analytique . . . . .	159
6.2.3	Détection de défauts . . . . .	159
6.2.4	Localisation et caractérisation des défauts . . . . .	160
6.2.5	Prise de décision . . . . .	160
6.3	Diagnostic à base d'observateur . . . . .	160
6.3.1	Détection par observateur unique . . . . .	162
6.3.2	Détection par un banc d'observateurs . . . . .	162
6.3.3	Détection par observateur généralisé . . . . .	163
6.3.4	Détection de défauts actionneurs . . . . .	163
6.4	Détection et isolation de défauts sur un turbo-réacteur d'avion . . . . .	164
6.4.1	Génération de résidus . . . . .	164
6.4.2	Détection de défauts capteurs . . . . .	165
6.4.2.1	Elaboration de la table de signatures . . . . .	167
6.4.3	Détection et localisation de défauts capteurs par un banc de mul- tiobservateurs . . . . .	169
6.4.3.1	Simulation sans défauts . . . . .	169
6.4.3.2	Simulation en présence de défauts . . . . .	171
6.4.3.3	Analyse des résidus . . . . .	175
6.4.3.4	Principe de la localisation de défauts . . . . .	175
6.4.3.5	Evaluation des résidus . . . . .	175
6.4.3.6	Localisation de défauts . . . . .	176
6.4.4	Performance de la procédure de diagnostic utilisée . . . . .	179
6.4.5	Détection de défaut actionneur . . . . .	182
6.5	Conclusion . . . . .	184

<b>Conclusion</b>
-------------------



## Table des figures

1.1	Plan de phase du système . . . . .	17
1.2	Exemples de régions LMI . . . . .	21
1.3	Diagramme structurel . . . . .	23
1.4	Diagramme structurel . . . . .	26
1.5	Plan de phase ainsi que l'ensemble final de bornes . . . . .	27
1.6	Plans de phase pour différentes commandes . . . . .	29
1.7	Plans de phase d'un système à structure variable. . . . .	30
2.1	Région LMI . . . . .	41
2.2	Entrée connue $u(t)$ . . . . .	43
2.3	Entrée inconnue $\bar{u}(t)$ . . . . .	43
2.4	Erreurs d'estimation d'état . . . . .	43
2.5	Entrée connue $u(t)$ . . . . .	51
2.6	Entrée inconnue $\bar{u}(t)$ . . . . .	51
2.7	Erreurs d'estimation d'état . . . . .	51
3.1	Architecture d'un multimodèle à modèles locaux couplés . . . . .	66
3.2	Architecture d'un multimodèle à modèles locaux découplés . . . . .	67
3.3	Architecture d'un multimodèle hiérarchique . . . . .	68
3.4	Evolution du critère d'optimisation . . . . .	73
3.5	Entrée $u(t)$ et les fonctions d'activation . . . . .	74
3.6	États du modèle non linéaire et ceux du multimodèle . . . . .	74
3.7	États du modèle non linéaire et ceux du modèle linéaire . . . . .	74
3.8	Section d'un turbo-réacteur . . . . .	80
3.9	Fonctions coefficients et leurs fonctions d'activation . . . . .	88
3.10	Commande $u(t)$ . . . . .	89
3.11	Les sorties du modèle tabulé et celles du modèle non linéaire . . . . .	90
3.12	Fonctions d'activation $\nu_i(u(t))$ . . . . .	92
3.13	$y_1(t)$ du modèle non linéaire et du multimodèle . . . . .	94

3.14	$y_2(t)$ du modèle non linéaire et du multimodèle . . . . .	94
3.15	$y_3(t)$ du modèle non linéaire et du multimodèle . . . . .	94
3.16	$y_4(t)$ du modèle non linéaire et du multimodèle . . . . .	94
4.1	Entrée et fonctions d'activation . . . . .	106
4.2	Convergence asymptotique des erreurs d'estimation d'état . . . . .	106
4.3	Entrées connue $u(t)$ et inconnue $\bar{u}(t)$ . . . . .	120
4.4	Résultats des estimations . . . . .	120
5.1	Système à trois cuves . . . . .	139
5.2	Débit $Q_1(t)$ du système . . . . .	141
5.3	Débit $Q_2(t)$ du système . . . . .	141
5.4	Entrée inconnue $\bar{u}(t)$ et son estimée . . . . .	141
5.5	Estimation d'état d'un système à trois réservoirs . . . . .	142
5.6	Entrée $u(t)$ . . . . .	150
5.7	Estimation d'état d'un multimodèle incertain . . . . .	150
5.8	Erreurs d'estimation d'état d'un multimodèle incertain . . . . .	150
6.1	Principe de la génération de résidus . . . . .	158
6.2	Détection par observateur unique . . . . .	162
6.3	Détection par un banc d'observateurs . . . . .	162
6.4	Détection par observateurs généralisés . . . . .	163
6.5	Détection par observateurs à entrées inconnues . . . . .	164
6.6	Génération de résidus . . . . .	165
6.7	Entrée appliquée au turboréacteur et au multiobservateur . . . . .	170
6.8	Les sorties du turboréacteur et leurs estimations . . . . .	170
6.9	Evolution des résidus en l'absence de défauts . . . . .	170
6.10	Perturbations sur les mesures . . . . .	171
6.11	Résidus $r_{ij}(t)$ en présence de défauts . . . . .	172
6.12	Résidus $r_{ij}(t)$ en présence de défauts . . . . .	173
6.13	Résidus $r_{ij}(t)$ en présence de défauts . . . . .	174
6.14	Matrice de signatures expérimentales $z_{ij}^*(t)$ . . . . .	177
6.15	Matrice de signatures expérimentales $z_{ij}^*(t)$ . . . . .	178
6.16	Distance entre les signatures théoriques et expérimentales en l'absence de bruits . . . . .	179
6.17	Distance entre les signatures théoriques et expérimentales en présence de bruits . . . . .	179

---

6.18	Distance entre les signatures théoriques et expérimentales en présence de bruits . . . . .	181
6.19	Banc de multiobservateurs pour la génération de résidus $r(t)$ . . . . .	182
6.20	Sorties du turboréacteur et leurs estimées en présence de défauts . . . . .	184
6.21	Défaut actionneur estimé et l'entrée $u(t)$ appliquée au turboréacteur . . . . .	184



# Références personnelles

## Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs*, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantic, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, 2004.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model*, 11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM 2004, Nancy, France, September, 8-10 2004.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Estimation d'état et d'entrées inconnues d'un système non linéaire représenté par un multimodèle*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2004, Douz, Tunisie, 22-24 Novembre 2004.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Design of robust fuzzy observer for uncertain Takagi-Sugeno models*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Fuzz-IEEE, Budapest, Hungary, 25-29 July, 2004.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Sliding mode multiple observer for fault detection and isolation*, 42th IEEE Conference on Decision and Control, pp. Vol. 1, pp. 953-958, Hawaii, USA, December 9-12, 2003.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *State estimation via Multiple observer with unknown input. Application to the three tank system*, 5th IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess, pp. 245-251, Washington, USA, June 9-11 2003.

## **Congrès nationaux avec comité de lecture et actes**

- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Multiobservateur à modes glissants*, Journées Doctorales d'Automatique, pp. 89-94, Valenciennes, France, 25-27 Juin 2003.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Multiple observer with unknown input. Application to a three tank system*, IAR Annual meeting, Grenoble, France, 21 November 2002.
- A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Conception d'un observateur flou à entrées inconnues*, Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Nantes, France, 18-19 Novembre 2004.

# Introduction générale

Un système est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. La modélisation regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. Le modélisation théorique requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Les systèmes physiques sont souvent complexes et difficilement exploitables, notamment pour la commande et le diagnostic des systèmes.

Le grand problème de l'automaticien est de représenter ces systèmes physiques avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable.

En automatique, pour décrire le comportement d'un système, une hypothèse communément faite est la linéarité du système, car les techniques d'analyse des modèles linéaires, dits LTI, ont été largement développées dans la littérature. Cependant, l'hypothèse de linéarité n'est vérifiée que dans une plage de fonctionnement restreinte autour d'un point d'équilibre du système. Alors, les performances du modèle se dégradent dès qu'on s'en éloigne et la recherche d'un modèle plus adapté et notamment non linéaire devient nécessaire.

La structure mathématique qui puisse remédier à l'inconvénient cité ci-dessus, tout en gardant la simplicité mathématique des modèles LTI, est l'approche globale, dite multi-modèle; c'est une représentation polytopique convexe pouvant être obtenue soit directement à partir d'un modèle mathématique non linéaire par transformation directe d'un modèle affine [Morè 00] ou par linéarisation autour de différents points de fonctionnement [Murr 97], soit à partir de données sur les entrées et les sorties d'un système physique [Gass 00b].

Modéliser un processus n'est pas une fin en soi; ce qui est demandé au processus est la réalisation d'une mission particulière de production. Pour que cette production soit garan-

tie en quantité et qualité, il faut que toute anomalie de fonctionnement soit rapidement détectée puis prise en compte dans la stratégie de conduite du système considéré. Cette anomalie peut avoir comme l'origine des défauts de système, capteur, d'organes de commande (actionneur), des bruits, ... La non-détection à temps d'une anomalie peut entraîner des accidents provoquant des dangers humains et des dégâts matériels considérables.

La détection de défaut est une opération délicate puisqu'il faut, dans un contexte soumis aux aléas de fonctionnement du système et aux perturbations de l'environnement, décider d'une façon binaire et avec certitude s'il y a défaut ou non. Les acteurs de l'aéronautique et du nucléaire ont fait largement usage de la redondance analytique. Celle-ci repose sur la disponibilité d'un modèle de connaissance ou de représentation. Elle consiste à utiliser des informations supplémentaires issues de modèles générant des grandeurs homogènes à celles provenant des capteurs. Elle a pour conséquence d'augmenter la sûreté d'un système de détection en comparant un capteur matériel par un capteur informationnel (analytique). Son champ d'application ne se limite pas aux pannes de capteurs mais peut être étendu aux pannes d'actionneurs ou du système lui-même. Parmi les techniques permettant de générer des redondances analytiques nous avons retenu celles qui sont basées sur la connaissance de modèles permettant la conception d'observateur d'état et en particulier les multiobservateurs dédiés aux systèmes non linéaires représentés sous forme multimodèle.

De façon générale, la connaissance, entière ou partielle, de l'état d'un système est une exigence importante qui intervient dans les domaines de la commande, du diagnostic et de la surveillance des systèmes. Sur le plan pratique, cette exigence s'avère difficile à satisfaire directement dans la plupart des cas. Ceci est dû, d'une part, au fait que les variables d'état n'ont pas toujours une signification physique et leur mesure directe est impossible à réaliser. D'autre part, lorsqu'une variable d'état existe physiquement, sa mesure peut être délicate à effectuer d'un point de vue technique (capteur nécessaire indisponible ou de précision insuffisante ...). De plus d'un point de vue économique, il est souvent souhaitable d'installer un minimum de capteurs afin de réduire les coûts d'instrumentation et de maintenance. Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande, de diagnostic ou de surveillance demande l'utilisation de variables d'état non mesurées, il est indispensable, de reconstruire entièrement ou partiellement, le vecteur d'état du système. Ce problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé observateur d'état (multiobservateur pour les systèmes représentés par des multimodèles), dont le rôle est de fournir en temps réel une estimation du vecteur d'état du système étudié en fonction des entrées connues, des sorties et du modèle dynamique de celui-ci.

---

# Organisation

Ce mémoire, décomposé en six chapitres, est organisé de la façon suivante :

## Chapitre 1

Après un bref rappel des différents types d'incertitudes pouvant affecter un système physique, ce chapitre est consacré aux notions et aux outils utilisés le long de ce document. On y trouve un rappel de définition de la stabilité au sens de Lyapunov ainsi que de l'observabilité des systèmes linéaires. Nous présentons également l'outil numérique LMI. Enfin, nous présentons le concept du mode glissant ainsi que ses particularités propres à travers deux exemples académiques.

## Chapitre 2

Ce chapitre est consacré aux méthodes de reconstruction d'état des systèmes linéaires affectés par des perturbations. Nous avons regroupé ces méthodes selon la nature de l'observateur utilisé. La première est consacrée à la synthèse d'observateurs à entrées inconnues continus, la seconde à la synthèse d'observateur discontinus (observateur doté d'un terme glissant).

## Chapitre 3

Le troisième chapitre est dédié à l'étude de l'approche multimodèle qui permet de représenter un système dynamique non linéaire comme la combinaison d'un ensemble de modèles linéaires ou affines valables dans des zones de fonctionnement. Les différentes structures les plus utilisées (modèles locaux couplés, découplés et hiérarchisés) sont décrites. L'analyse de la stabilité des multimodèles incertains a été considérée.

Pour illustrer cette approche, nous avons montré comment, à partir d'un modèle tabulé (turbo-réacteur d'un avion "Snecma"), présentant des commutations entre zones de fonctionnement et des non-linéarités entre les variables, construire un multimodèle composé de trois modèles locaux linéaires.

## Chapitre 4

Ce chapitre est consacré à la conception de multiobservateur à structure continue. Nous avons proposé une structure de multiobservateur qui est une somme (pondérée par des fonctions d'activation) d'observateurs locaux de type de Luenberger. Ces fonctions d'activation peuvent être les mêmes que celles utilisées pour décrire le multimodèle ou bien consi-

dérées comme des paramètres de synthèse du multiobservateur. L'inconvénient principal du multiobservateur proposé réside dans l'incapacité à reconstruire l'état du multimodèle lorsque le vecteur de sortie de ce dernier présente une forme multimodèle, c'est-à-dire,  $C_1 \neq C_2 \neq \dots \neq C_M$ .

## **Chapitre 5**

Ce chapitre traite l'estimation d'état et d'entrées inconnues par la synthèse de différents multiobservateurs pour des systèmes non linéaires, soumis à la présence d'entrées inconnues et d'incertitudes de modèles, représentés sous forme multimodèles.

Pour surmonter l'inconvénient principal des multiobservateur à structure continue, une alternative est de proposer une autre structure de multiobservateur, basé sur l'extension des observateur discontinus utilisé dans le deuxième chapitre de ce mémoire. Ainsi, nous avons montré que le multiobservateur à mode glissant est robuste vis-à-vis des perturbations, bornées en norme, de nature additive ou multiplicative.

La convergence du multiobservateur se traduit par la recherche d'une fonction de Lyapunov, peut être énoncée comme un problème d'optimisation convexe en terme de LMI qui dispose de méthodes et d'outils de résolution bien établis.

## **Chapitre 6**

Nous avons présenté dans ce dernier chapitre les différentes étapes indispensables à la surveillance des systèmes à partir d'un modèle. Nous nous sommes spécialement intéressés aux méthodes de détection et de localisation de défauts à base de banc de multiobservateurs, que nous avons testées sur le modèle d'un turbo-réacteur d'un avion "Snecma".

Une procédure de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs a été mise en place. La méthode de localisation est basée sur la génération préalable d'une matrice de signatures théoriques des défauts à détecter. L'utilisation d'un banc de multiobservateurs permet ensuite de constituer une matrice de signatures expérimentales. La localisation des défauts peut alors être obtenue en comparant les signatures théoriques et expérimentales.

# 1

## Généralités sur les systèmes linéaires

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Natures des incertitudes</b>	<b>10</b>
1.2.1	Système autonome	10
1.2.2	Système non autonome	11
<b>1.3</b>	<b>Stabilité</b>	<b>11</b>
1.3.1	Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe	12
1.3.2	Fonctions de Lyapunov	14
<b>1.4</b>	<b>Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles</b>	<b>18</b>
1.4.1	Analyse convexe	18
1.4.2	Problèmes classiques LMI	18
1.4.3	Écriture de contraintes sous forme LMI	20
1.4.4	Régions LMIs	20
1.4.5	Placement de pôles par approche LMI	21
<b>1.5</b>	<b>Observabilité et observateurs</b>	<b>22</b>
1.5.1	Observabilité	24
1.5.2	Observabilité des systèmes linéaires	24
1.5.3	Synthèse d'observateur pour un système linéaire certain	25

<b>1.6</b>	<b>Commande à structure variable (mode glissant) . . . . .</b>	<b>27</b>
1.6.1	Introduction . . . . .	27
1.6.2	Exemple 1 . . . . .	28
1.6.3	Exemple 2 . . . . .	29
<b>1.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>30</b>

---

## 1.1 Introduction

Au cours des deux dernières décennies, les performances des équipements industriels ont considérablement été augmentées. L'intégration de calculateurs performants dans les systèmes automatisés a permis de développer des algorithmes sophistiqués, tant au niveau de la commande qu'au niveau du traitement des données. Cependant, ces algorithmes deviennent inefficaces si les informations qu'ils utilisent sont erronées. Dans ce dernier cas, les performances du système s'en trouvent dégradées, mais pire encore, les conséquences au niveau des installations, de l'environnement et de la sécurité des personnes peuvent être dramatiques.

Deux points jouent un rôle important en automatique. Le premier est la stabilité du système à étudier. En général, la stabilité est analysée à partir de son modèle qui peut être linéaire ou non linéaire. Mais comme les systèmes physiques ne sont jamais parfaitement modélisés, il existe donc des incertitudes sur sa structure (dimension) et ses paramètres (valeurs numériques). Il faut donc disposer de techniques d'étude qui prennent en compte ces incertitudes. Le deuxième point est la reconstruction de tout ou partie de l'état d'un système à l'aide d'observateurs. Ce point est important dans deux domaines de l'Automatique : la commande d'un système et sa surveillance qui utilisent tous les deux la connaissance de l'état de ce système.

La reconstruction de l'état d'un système incertain (et par extension la reconstruction de sa sortie) est également un problème classique de l'Automatique. Luenberger [Luen 63] a étudié un reconstruteur d'état, auquel son nom a été attribué. L'observateur de Luenberger n'est pas toujours suffisant pour la détection de défauts, car l'erreur d'estimation (de l'état ou de la sortie) engendrée par cet observateur pour un système incertain ou à entrées inconnues ne converge pas forcément vers la valeur nulle. Pour remédier à ce problème, nous pouvons utiliser les observateurs de systèmes singuliers [Lewi 86] ou les observateurs à entrées inconnues [Chen 91]. Le problème de conception d'observateurs à action proportionnelle et intégrale, pour des systèmes linéaires à entrées inconnues, a été également considéré [Soff 96] [Jian 00].

Dans ce chapitre, nous présentons différents types d'incertitudes et différentes méthodes pour la conception d'un observateur de systèmes linéaires incertains. Nous étudions la synthèse de différents types d'observateur (continu et discontinu) et discutons la nature des erreurs d'estimation de l'état et de la sortie. Nous présentons un exemple académique permettant de comparer ces différents observateurs.

## 1.2 Natures des incertitudes

### 1.2.1 Système autonome

Nous présentons dans ce paragraphe trois types d'incertitudes qui peuvent affecter un système. Pour alléger la présentation, nous nous limitons au cas des systèmes linéaires pour lesquels les termes de commande ne sont pas pris en compte.

**Incertitudes non structurées paramétriques déterministes** : ce cas correspond à un système décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) \quad (1.1)$$

où  $\Delta A$  représente l'incertitude. Cette incertitude est généralement bornée en norme (désignée par  $\alpha$ ) par un scalaire  $a$  :

$$\|\Delta A\|_{\alpha} \leq a$$

Le qualificatif non structuré est justifié par le fait que certains paramètres de la matrice  $A$  varient (dans un intervalle) et que l'on ne dispose que d'une information globale sur ces variations. Ces incertitudes permettent de prendre en compte des dynamiques et des non-linéarités négligées dans le modèle [Chan 72].

**Incertitudes structurées non paramétriques stochastiques** : [Wonh 67] a présenté un système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + H(x)\dot{w}(t) \quad (1.2)$$

où  $\dot{w}(t)$  est un bruit blanc. Les éléments de  $H$  sont supposés linéaires par rapport à  $x(t)$ . Ces incertitudes peuvent être vues comme une perturbation aléatoire, intervenant sur une large bande de fréquences de la matrice  $A$  [Camo 95].

**Incertitudes structurées paramétriques déterministes** : dans ce cas, la structure des incertitudes est bien connue puisqu'elle affecte chaque paramètre du système. Le système peut être écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) \quad (1.3)$$

$$\text{où } \Delta A = \sum_{i=1}^q k_i E_i \quad (1.4)$$

Les  $k_i$  sont des paramètres incertains qui peuvent varier et la structure des matrices  $E_i$ , qui indique la façon dont les incertitudes agissent, est connue. Ces incertitudes sont dues aux variations de paramètres ou à la précision des estimations des paramètres. Ce modèle a été souvent utilisé pour des études de stabilité [Bien 92] [Gao 93].

### 1.2.2 Système non autonome

Nous pouvons maintenant examiner le cas d'un système muni d'une commande dont la matrice d'influence présente des incertitudes :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \quad (1.5)$$

où la matrice  $\Delta A$  est définie de la même façon que la matrice (1.3), la matrice  $B$  est connue et la matrice de perturbation d'entrée est définie par :

$$\Delta B = \sum_{i=1}^q k_i B_i \quad (1.6)$$

Sans atteinte à la généralité, nous pouvons considérer les mêmes paramètres incertains  $k_i$  que pour les perturbations de la matrice d'état. La structure des matrices  $B_i$  est également supposée connue.

**Remarque :** Dans la suite de ce mémoire, nous nous limiterons aux incertitudes bornées en norme (incertitudes non structurées)  $\Delta A$  ou  $\Delta B$  affectant la matrice d'état ou la matrice d'entrée.

## 1.3 Stabilité

Le problème de la stabilité des systèmes dynamiques est un sujet de préoccupation majeur du travail des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs depuis le siècle dernier. Beaucoup de livres ont été écrits dans ce domaine [Lyap 07], [Hahn 67], [Park 81] à la fois sur le plan théorique et sur le plan pratique.

Deux types d'études complémentaires peuvent être considérées : la conception de test pour savoir si un système est stable ou non, l'étude des lois de contre-réaction (retour d'état) qui permettent de rendre stable un système instable.

Les critères d'analyse de stabilité peuvent être classés en deux catégories : les critères fréquentiels (à partir des diagrammes de Bode ou de Nyquist, ...) et les critères temporels (cercles de Gerschgorin, deuxième méthode de Lyapunov, ...). Si un système est linéaire, invariant par rapport au temps, il est facile d'étudier la stabilité avec la plupart des critères existant dans la littérature (Nyquist, Hurwitz, ...). Mais le nombre de critères pouvant aisément être mis en oeuvre se réduit fortement si le système linéaire est à paramètres incertains. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques critères de stabilité qui peuvent être utilisés pour analyser les systèmes incertains linéaires ou non linéaires. D'une façon générale, les systèmes non linéaires sont les plus difficiles à étudier parce qu'il est délicat d'en faire l'étude dans le domaine fréquentiel (fonction de transfert difficile à exploiter).

Il est alors préférable d'avoir un critère utilisant le modèle du système dans le domaine temporel. Pour étudier ce problème, nous avons retenu les méthodes de Lyapunov.

**Définition 1.1** : un système est localement stable, si la stabilité peut être garantie autour d'une valeur particulière  $x_s$  d'état.

Bien sûr, si l'équilibre  $x_s$  est stable, il existe un petit domaine autour de ce point où le système est stable ; mais la taille de ce domaine est inconnue et nous n'avons pas prouvé la stabilité du domaine autour de l'état  $x_s$ .

**Définition 1.2** : une valeur particulière  $x_e$  de l'état d'un système, appelée état d'équilibre, est asymptotiquement stable si :

- il est stable,
- il existe  $r > 0$  tel que

$$\text{si } \|x_0\| < r \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x\| \rightarrow 0$$

Au contraire de la stabilité locale, la taille du sous-ensemble est connue et tout le sous-ensemble est stable.

**Définition 1.3** : Si un système est asymptotiquement stable pour n'importe quelle condition initiale dans l'espace d'état, on dira que le point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement stable.

Maintenant, nous allons présenter quelques critères de stabilité. Comme la plupart des critères présentés sont bien connus, nous ne donnons pas les preuves et renvoyons le lecteur aux références bibliographiques.

### 1.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

La méthode directe de Lyapunov s'appuie sur une observation physique fondamentale : si l'énergie totale d'un système, linéaire ou non linéaire, est continûment dissipée (on parle de système dissipatif), alors on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire dépendant de l'énergie pour étudier la stabilité d'un système donné [Khal 96], [Nare 89]. Considérons tout d'abord le système non linéaire en régime libre décrit par

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.7}$$

avec  $f(x(t)) \in \mathcal{C}^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Le système (1.7) est dit en équilibre autour de  $x_0$  si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps ;  $x_0$  est alors point d'équilibre.

**Définition 1.4** (*Point d'équilibre*) :  $x_0$  est appelé point d'équilibre du système (1.7) si  $f(x_0) = 0 \forall t > 0$ .

Par la suite, on considère que l'origine de l'espace d'état est point d'équilibre ( $x_0 = 0$ ) du système (1.7). Cette hypothèse très classique ne nuit en rien à la généralité du propos car si  $x_0 \neq 0$  est point d'équilibre de (1.7) alors  $x_0 = 0$  est point d'équilibre du système  $\dot{z}(t) = f(z(t) + x_0)$ .

**Définition 1.5** : une fonction continue  $\alpha(r) : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  est dite de classe  $\kappa$  si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Si  $a = \infty$  et  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ , la fonction est dite de classe  $\kappa_\infty$ .

**Théorème 1.1** [Isi99][Vid93] : soit une fonction scalaire  $V(x(t)) \in \mathcal{C}^1$  telle que

$$\alpha_1(x(t)) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(x(t)) \quad (1.8)$$

$\forall \|x(t)\| < d$ , où  $\alpha_1(t)$  et  $\alpha_2(t)$  sont des fonctions de classe  $\kappa$  définies sur  $[0, d)$ ,  $d \in \mathbb{R}^{+*}$

- Si  $\frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \leq 0$ ,  $\forall \|x(t)\| < d$ , alors le point d'équilibre ( $x_0 = 0$ ) et (1.7) est localement stable (il est globalement stable si, de plus,  $d = \infty$  et les fonctions  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  sont de classe  $\kappa_\infty$ ).
- Si  $\frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \leq -\alpha_0(\|x(t)\|)$ ,  $\forall \|x(t)\| < d$  avec  $\alpha_0(\cdot)$  fonction de classe  $\kappa$  définie sur  $[0, d)$ , alors le point d'équilibre de (1.7) est localement asymptotiquement stable.
- Si  $\frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \leq -\alpha_0(\|x(t)\|)$ ,  $\forall (d = \infty)$  et les fonctions  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  sont de classe  $\kappa_\infty$  alors le point d'équilibre de (1.7) est globalement asymptotiquement stable.
- Si  $\frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t)) \leq -\alpha_0(\|x(t)\|)$ ,  $\forall (d = \infty)$  et les fonctions  $\alpha_0(\cdot)$ ,  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  sont de classe  $\kappa_\infty$  de la forme :  
 $\alpha_1(\|x(t)\|) = a \|x(t)\|^p$ ,  $\alpha_2(\|x(t)\|) = b \|x(t)\|^p$ ,  $\alpha_0(\|x(t)\|) = c \|x(t)\|^p$  telle que  $a, b, c \geq 1$ , alors le point d'équilibre de (1.7) est globalement exponentiellement stable.

Pour des définitions relatives aux systèmes non linéaires discrets, le lecteur peut se référer par exemple à [Born 93].

### 1.3.2 Fonctions de Lyapunov

Dans le cas général, il n'existe pas de méthode pour trouver toutes les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction  $V(x(t))$  et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains,...).

L'étude de la stabilité à l'aide de ce type de fonction a constitué la base de très nombreux travaux jusqu'à maintenant. Ce type de fonction, adoptée pour étudier la stabilité des systèmes linéaires [Lien 04] et [Hua 04] et aussi utilisée dans le cas des multimodèle [Chad 01] et [Tana 98]. Dans le cas des systèmes incertains, quand aucune information n'est connue sur la vitesse d'évolution des paramètres incertains, c'est pratiquement la seule méthode possible.

Le choix le plus classique consiste à choisir une fonction de Lyapunov sous forme quadratique :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P > 0 \text{ et symétrique} \quad (1.9)$$

où  $x(t)$  représente la solution de l'équation d'état (1.7). La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire de la variable  $x(t)$  est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= 2x^T(t) P f(x(t)) \end{aligned}$$

**Définition 1.6** : pour le système (1.7), l'origine est dite quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative et vérifie la condition suivante :

$$\dot{V}(x(t)) = 2x^T(t) P f(x(t)) \leq -x^T(t) Q x(t)$$

L'inégalité précédente implique que  $\|x(t)\| < e^{-\alpha t}$  où  $\alpha = \lambda_{\min}(P^{-1}Q)$  et par conséquent l'origine est asymptotiquement stable. Si  $f(x(t)) = Ax(t)$  alors, la matrice  $A$  a des valeurs propres stables si et seulement si, il existe des matrices  $(P, Q)$  symétriques et définies positives vérifiant l'équation de Lyapunov suivante :

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.10)$$

Par conséquent, n'importe quel système linéaire stable est quadratiquement stable. Une matrice  $P$  symétrique définie positive et qui satisfait l'équation (1.10) sera appelée matrice

de Lyapunov pour la matrice  $A$ .

La méthode de Lyapunov peut également être utilisée pour examiner la robustesse des systèmes linéaires présentant des incertitudes de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \xi(x(t)) \quad (1.11)$$

où  $A$  est une matrice stable et  $\xi(\cdot)$  est une fonction qui représente des incertitudes. Soit la paire de matrices  $(P, Q)$  symétriques et définies positives, vérifiant l'équation de Lyapunov (1.10). Définissons

$$\mu = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.12)$$

Si la fonction incertaine satisfait :

$$\|\xi(x(t))\| \leq \frac{1}{2}\mu\|x(t)\| \quad (1.13)$$

alors le système (1.11) est stable. Ceci peut être démontré en utilisant  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$  comme fonction de Lyapunov. Sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire de  $x(t)$  étant :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x^T(t)PAx(t) + x^T(t)A^TPx(t) + 2x^T(t)P\xi(x(t)) \\ &= x^T(t)(A^TP + PA)x(t) + 2x^T(t)P\xi(x(t)) \\ \dot{V}(x(t)) &\leq -x^T(t)Qx(t) + 2\|Px(t)\|\|\xi(x(t))\| \end{aligned} \quad (1.14)$$

Notons que nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la dernière inégalité (1.14). De plus, l'inégalité de Rayleigh permet d'écrire :

$$\|Px(t)\| \leq \lambda_{\max}(P)\|x(t)\| \quad (1.15)$$

De même, on peut montrer que :

$$-x^T(t)Qx(t) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x(t)\|^2 \quad (1.16)$$

Partant de l'inégalité (1.14) et en utilisant (1.15) et (1.16), la fonction  $\dot{V}(x(t))$  peut être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|x(t)\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\|x(t)\|\|\xi(x(t))\| \\ &\leq -\lambda_{\max}(P)\|x(t)\|(\mu\|x(t)\| - 2\|\xi(x(t))\|) \end{aligned}$$

Ainsi, si la fonction  $\xi(\cdot)$  satisfait la condition (1.13), la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative, et la stabilité du système est garantie.

### Exemple

Considérons un système incertain décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D\xi(x(t)) \quad (1.17)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où  $\xi(t)$  est une fonction inconnue bornée et satisfait la condition suivante :

$$|\xi(x(t))| \leq 1 \quad \text{pour tout } t, x(t). \quad (1.18)$$

Soit  $P$  une matrice symétrique et définie positive et solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$A^T P + P A = -I \quad (1.19)$$

Pour montrer la stabilité de ce système incertain, considérons la fonction de Lyapunov suivante :  $V(x(t)) = x^T(t)P x(t)$  ; sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire du système est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)(A^T P + P A)x(t) + 2x^T(t)P D \xi(x(t)) \\ &\leq -\|x(t)\|^2 + 2|x^T(t)P D| |\xi(x(t))| \end{aligned} \quad (1.20)$$

Comme le terme  $x^T(t)P D$  est un scalaire, alors

$$\begin{aligned} |x^T(t)P D| &= \sqrt{x^T(t)P D D^T P x(t)} \\ &\leq \sqrt{\lambda_{\max}(P D D^T P)} \|x(t)\| \end{aligned} \quad (1.21)$$

Posons  $\delta = 2\sqrt{\lambda_{\max}(P D D^T P)}$ , à partir des équations (1.20) et (1.21) la fonction  $\dot{V}(x(t))$  devient :

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\|x(t)\| (\|x(t)\| - \delta |\xi(x(t))|) \leq -\|x(t)\| (\|x(t)\| - \delta) \quad (1.22)$$

Soit  $D_\delta$  un disque centré à l'origine est défini comme suit :

$$D_\delta = \{x(t) : \|x(t)\| < \delta\} \quad (1.23)$$

Alors, on peut facilement déduire à partir de l'équation (1.22) que le système (1.17) est stable si  $x(t) \notin D_\delta$ .

Considérons maintenant le cas particulier  $\xi(x(t)) = \sin(2t)$  qui satisfait la condition (1.18). Dans le plan de phase de la figure (1.1), on a représenté une simulation du système (1.17)

avec la condition initiale  $x_0 = [10 \ 0]$ . Le domaine  $D_\delta$  est donc un disque de rayon  $\delta = 1.2748$  (voir figure (1.1)).

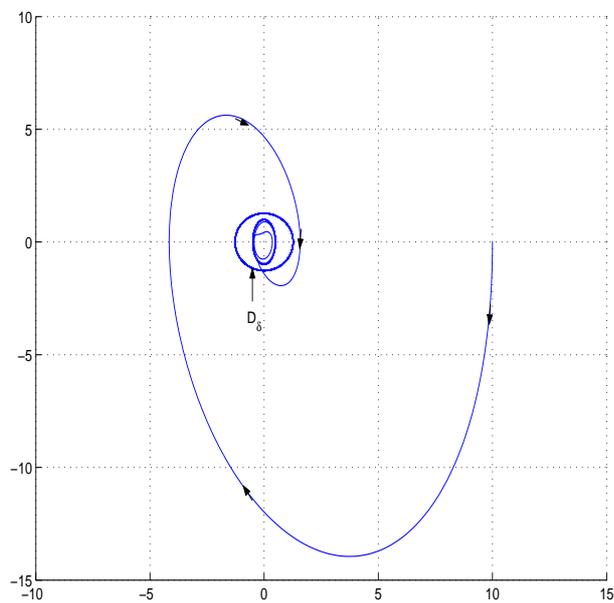


FIG. 1.1 – Plan de phase du système

## 1.4 Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles

### 1.4.1 Analyse convexe

La notion de convexité tient dans ce mémoire une place importante étant données les orientations choisies. En effet, les problèmes d'analyse et de synthèse dont il est question sont formulés, lorsque cela est possible, en termes d'optimisation convexe [Chad 02a]. La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

- les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables ;
- il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser ; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas.

**Définition 1.7** : *ensemble convexe.* Soit un ensemble  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{E}$  est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \mathcal{E} \quad (1.24)$$

**Définition 1.8** : *fonction convexe.* Soit une fonction  $f : \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\mathcal{E}$  un ensemble convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \quad (1.25)$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit :  $\min_{x \in \mathcal{E}} (f(x))$ , où  $\mathcal{E}$  est un ensemble convexe et  $f$  est une fonction convexe.

De même, une contrainte  $f_i(x) \leq 0$  est dite convexe si la fonction  $f_i$  est convexe. Un des avantages de la convexité est que toute optimisation d'une fonction convexe définie sur un ensemble convexe peut se traiter localement car toute solution locale devient globale.

### 1.4.2 Problèmes classiques LMI

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal objectif de réduire une grande variété de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMI ont vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexes ont été développées. Ces méthodes, appelées méthodes de point-intérieur, développées initialement par Karmarkar [Karm 84] pour la programmation linéaire, furent étendues ensuite par Nesterov et Nemirovskii [Nest 94] au cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives.

**Définition 1.9** : étant donnée une famille de matrices symétriques  $P_0$  et  $P_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  de  $\mathbb{R}^{p \times p}$  et un vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , une LMI stricte (resp. non stricte) en  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0) \quad (1.26)$$

Remarquons que l'ensemble  $E$  défini par  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 0\}$  est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Les trois problèmes d'optimisation convexe les plus rencontrés sous forme de LMI sont :

- **Problème de réalisabilité (Faisabilité)** : il s'agit de trouver un vecteur  $\mathcal{S}$  tel que la contrainte convexe  $F(x) > 0$  est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur  $x$  minimisant le scalaire  $t$  tel que :

$$-F(x) < t.I \quad (1.27)$$

Si la valeur minimale de  $t$  est négative, le problème est réalisable.

- **Problème de valeurs propres (EVP, Eigenvalue Problems)** : il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes} \end{array} \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

- **Problème de valeurs propres généralisées (GEVP, Generalized Eigenvalue Problems)** : il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, par rapport à une contrainte LMI :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes} \end{array} \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent alors être résolus par différents types de méthodes [Hass 99] et [Boyd 94] :

- Méthode des plans sécants
- Méthode de l'ellipsoïde
- Méthode du type simplexe
- Méthode des points intérieurs

### 1.4.3 Écriture de contraintes sous forme LMI

Parmi les exemples les plus classiques de contraintes de type LMI dont nous aurons besoin tout au long de ce mémoire, citons :

- **Complément de Schur** : soient trois matrices  $R(x) = R^T(x)$ ,  $Q(x) = Q^T(x)$  et  $S(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ . Les LMI suivantes sont équivalentes :

1. 
$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{pmatrix} > 0$$

2.  $R(x) > 0, Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0$

- **Contraintes quadratiques convexes** : la contrainte sur la norme  $\|Z(x)\| < 1$ , où  $Z(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  est affine par rapport à la variable  $x \in \mathbb{R}^p$  est représentée par :

$$\begin{pmatrix} I_p & Z(x) \\ Z^T(x) & I_q \end{pmatrix} > 0 \quad (1.30)$$

### 1.4.4 Régions LMIs

**Définition 1.10** [Chil 96] : une région  $\mathcal{S}$  du plan complexe est appelée une région LMI si il existe une matrice symétrique  $\alpha \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et une matrice  $\beta \in \mathbb{R}^{m \times m}$  telles que :

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathcal{C} : f_{\mathcal{S}}(z) < 0\} \quad (1.31)$$

avec  $f_{\mathcal{S}}(z) = \alpha + z\beta + z^*\beta^T$ . La notation  $z^*$  désigne le conjugué de  $z$ .  $f_{\mathcal{S}}(z)$  est appelée la fonction caractéristique de  $\mathcal{S}$ .

En d'autres termes, une région LMI est une région du plan complexe qui est caractérisée par une LMI en fonction de  $z$  et  $z^*$ , ou de  $a = \text{Re}(z)$  et  $b = \text{Im}(z)$ . Les régions LMI sont donc des ensembles convexes.

#### Exemples de régions LMI

En posant  $a = \text{Re}(z)$  et  $b = \text{Im}(z)$ , il vient

$$a = \frac{z^* + z}{2}, \quad \text{et} \quad b = \frac{z - z^*}{2j} \quad (1.32)$$

Le demi-plan gauche pouvant être caractérisé par  $a < 0$ , la fonction caractéristique du demi-plan complexe gauche est donnée par :

$$f_{\mathcal{S}}(z) = z^* + z \quad (1.33)$$

Considérons les trois régions du demi-plan complexe gauche illustrées sur la figure (1.2). La région  $\mathcal{S}_1$  du plan complexe,  $a < -\zeta$ , est une région LMI caractérisée par la fonction  $f_{\mathcal{S}_1}(z)$  suivante :

$$f_{\mathcal{S}_1}(z) = z^* + z + 2\zeta \quad (1.34)$$

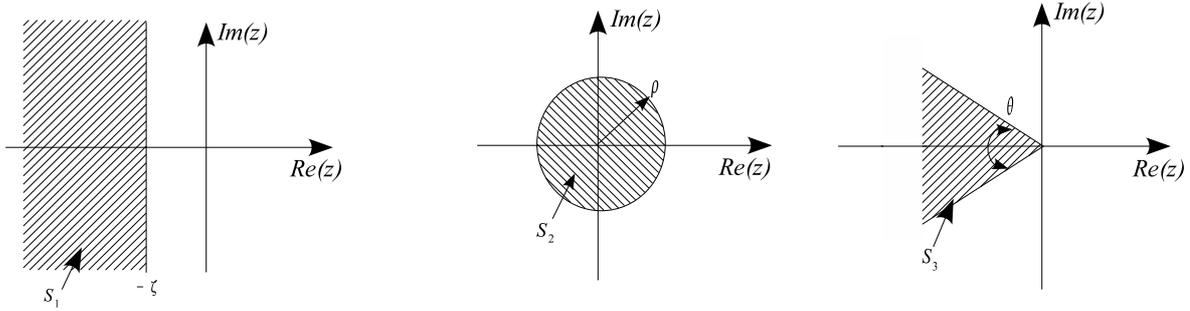


FIG. 1.2 – Exemples de régions LMI

Le disque centré à l'origine  $\mathcal{S}_2$  du plan complexe est une région caractérisée par la relation suivante :

$$z^*z - \rho^2 < 0 \quad (1.35)$$

soit encore en utilisant le complément de Schur :

$$f_{\mathcal{S}_2}(z) = \begin{pmatrix} -\rho & z \\ z^* & -\rho \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Le secteur  $\mathcal{S}_3$ ,  $a \tan(\theta) < -|b|$ , du plan complexe est une région LMI caractérisée par la fonction  $f_{\mathcal{S}_3}(z)$  suivante (en utilisant le complément de Schur) :

$$f_{\mathcal{S}_3}(z) = \begin{pmatrix} \sin \theta (z + z^*) & \cos \theta (z - z^*) \\ \cos \theta (z^* - z) & \sin \theta (z + z^*) \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

### 1.4.5 Placement de pôles par approche LMI

**Théorème 1.2** [Chil 96] : les valeurs propres d'une matrice réelle  $M$  sont placées dans une région LMI  $\mathcal{S}$  (1.31) du plan complexe si, et seulement si, il existe une matrice symétrique  $X$  telle que :

$$M_{\mathcal{S}}(M, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes MX + \beta^T \otimes XM^T < 0 \quad (1.38)$$

”  $\otimes$  ” dénote le produit matriciel de Kronecker.

En d'autres termes, les valeurs propres d'une matrice réelle  $M$  sont toutes dans une région du plan complexe, s'il existe une matrice  $X > 0$  telle que la LMI  $M_{\mathcal{S}}(M, X) < 0$  soit réalisable, où  $M_{\mathcal{S}}(M, X)$  est déterminée en effectuant la substitution suivante dans la fonction caractéristique  $\mathcal{S}$  :

$$(X, MX, XM^T) \leftrightarrow (1, z, z^*) \quad (1.39)$$

Les valeurs propres de la matrice  $M$  sont donc toutes dans la région  $\mathcal{S}_1$  du plan complexe si et seulement si :

$$\exists X > 0 : 2\zeta X + MX + XM^T < 0 \quad (1.40)$$

De même, les valeurs propres de la matrice  $M$  sont toutes dans la région  $\mathcal{S}_2$  du plan complexe si et seulement si :

$$\exists X > 0 : \begin{pmatrix} -\rho X & MX \\ XM^T & -\rho X \end{pmatrix} < 0 \quad (1.41)$$

Enfin, les valeurs propres de la matrice  $M$  sont toutes dans la région  $\mathcal{S}_3$  du plan complexe si et seulement si :

$$\exists X > 0 : \begin{pmatrix} \sin \theta (MX + XM^T) & \cos \theta (MX - XM^T) \\ \cos \theta (XM^T - MX) & \sin \theta (MX + XM^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (1.42)$$

**Théorème 1.3** [Chil 96] : *soient deux régions LMI  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  du plan complexe. Les valeurs propres de la matrice  $M$  sont toutes dans la région LMI  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  si et seulement si il existe une matrice symétrique  $X > 0$  solution du système*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{S}_1}(M, X) &< 0 \\ M_{\mathcal{S}_2}(M, X) &< 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Ces résultats seront utilisés dans le quatrième chapitre dans le cadre de la synthèse des gains des observateurs à entrées inconnues.

## 1.5 Observabilité et observateurs

L'observabilité d'un processus est un concept très important en Automatique. En effet, pour reconstruire l'état et la sortie d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

En général, pour des raisons de réalisabilité technique, de coût, etc... la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à l'instant donné  $t$ , l'état

$x(t)$  ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie  $y(t)$  à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité qui seront explicitées plus loin, cet état peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé :  $u([0, t])$ ,  $y([0, t])$ .

Le but d'un observateur est de fournir avec une précision garantie une estimation de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties passées. Cette estimation devant être obtenue en temps réel, l'observateur revêt usuellement la forme d'un système dynamique.

**Définition 1.11** [Foss 93] : on appelle observateur (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (1.44)$$

un système dynamique auxiliaire  $\mathcal{O}$  dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie  $\hat{x}(t)$  est l'état estimé :

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.45)$$

telle que l'erreur entre le vecteur d'état  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  tende asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (1.46)$$

Le schéma d'un tel observateur est donné sur la figure (1.3).

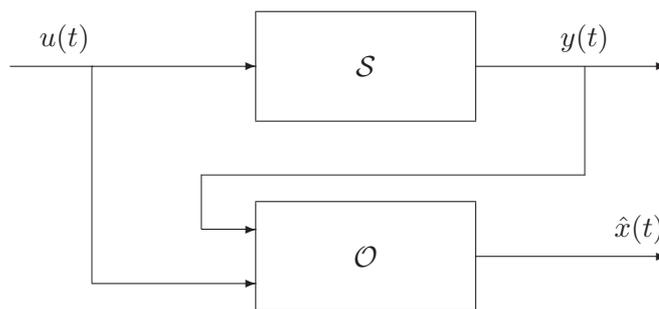


FIG. 1.3 – Diagramme structurel

Avant toute synthèse d'observateur, on doit se demander si sa conception est possible. La notion d'observabilité et certaines propriétés des entrées appliquées au système fournissent des conditions nécessaires à la synthèse d'un observateur. Nous discutons dans cette partie de l'observabilité des systèmes linéaires.

### 1.5.1 Observabilité

Le problème fondamental de l'analyse d'observabilité d'un système physique est de pouvoir dire si l'état du système peut être déterminé en fonction des entrées et des sorties. Dans l'affirmative, la théorie de l'estimation fournit alors des outils pour reconstruire cet état ; nous rappelons que la connaissance des composantes de l'état non mesurées est en général nécessaire pour régler un système ou pour détecter des fautes du système.

La valeur initiale de l'état d'un système est, en général, inconnue. On peut alors se poser la question : sous quelles conditions l'état du système peut-il être déterminé à partir des sorties et des entrées ? Ce problème est appelé problème d'observabilité. Fossard et Normand-Cyrot [Foss 93] ont donné une définition de l'observabilité à partir de la notion d'indiscernabilité.

**Définition 1.12** [Foss 93] : pour le système (1.44), deux états  $x_0$  et  $x'_0$  sont dit indiscernables si, pour toute fonction d'entrée  $u(t)$  et pour tout  $t \geq 0$ , les sorties  $(h(x(t)), x_0)$  et  $(h(x(t)), x'_0)$  qui en résultent sont égales.

**Définition 1.13** [Foss 93] : le système (1.44) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts  $\{x_0, x'_0\}$  indiscernables.

### 1.5.2 Observabilité des systèmes linéaires

Les critères d'observabilité d'un système linéaire sont décrits dans de nombreuses références [O'Rei 83], [Foll 85], [Born 92], etc. Nous présenterons uniquement ceux concernant les systèmes linéaires certains et réguliers. Considérons le système dynamique linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.47a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.47b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ . Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont des dimensions appropriées. La matrice d'observabilité du système (1.47) est définie [Foll 85] par :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

L'observabilité du système (1.47) est garantie si le rang de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  est égal à  $n$  [Kalm 60]. O'Reilly [O'Rei 83] a présenté un deuxième critère ; le système (1.47) est complètement observable si :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} sI - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

pour tout  $s$  complexe. Si un système linéaire est complètement observable, il est globalement observable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur d'état du système sont observables, et donc peuvent être reconstruites par un observateur. Si le système est non linéaire, nous devons distinguer l'observabilité globale de l'observabilité locale.

### 1.5.3 Synthèse d'observateur pour un système linéaire certain

Un observateur est utilisé dans le but d'estimer l'état ou une fonctionnelle linéaire de l'état (telle que la sortie d'un système) [Born 90], [Magn 91]. La comparaison de la sortie mesurée à son estimée permet de générer des signaux appelés "résidus" devant être capables de nous informer sur l'état de fonctionnement des capteurs et actionneurs ainsi que sur l'état du processus.

Comme l'indique la figure (1.3), un reconstituteur d'état ou estimateur est un système ayant comme entrées, les entrées et les sorties du processus et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus. Nous cherchons donc à estimer l'état d'un système linéaire déterministe défini par (1.47).

Le principe de construction d'un observateur consiste à corriger l'erreur d'estimation entre la sortie réelle et la sortie reconstruite. Cet observateur est défini par :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ &= (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{1.48}$$

où  $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$  est le gain de l'observateur (1.48). Compte tenu des équations d'état et de sortie de l'observateur (1.48) et du système (1.47), nous en déduisons le diagramme structurel présenté à la figure (1.4).

L'observateur est synthétisé de telle sorte que la différence entre l'état du système et son estimé tende vers zéro quand  $t$  tend vers  $\infty$ , donc si les valeurs propres de  $(A - KC)$  sont dans le demi-plan gauche du plan complexe. Le gain de l'observateur  $K$  peut être déterminé par la méthode de placement de pôles si le théorème suivant est vérifié :

**Théorème 1.4** : *les valeurs propres de  $(A - KC)$  peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire  $(A, C)$  est observable [Born 90].*

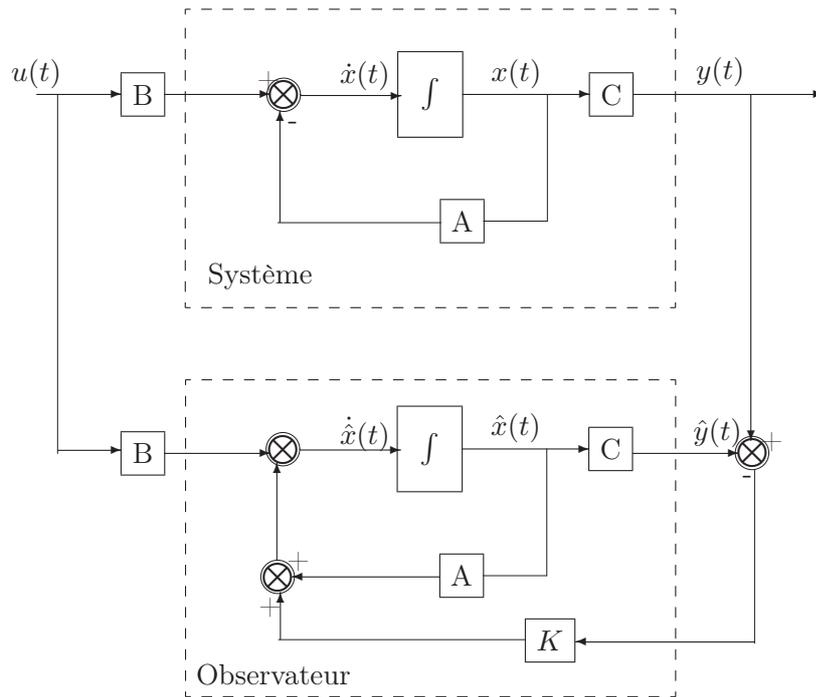


FIG. 1.4 – Diagramme structurel

Si la paire  $(A, C)$  est observable, alors une grande liberté est laissée à l'utilisateur pour fixer la matrice  $K$ . De façon générale, elle est choisie telle que les valeurs propres de la matrice  $(A - KC)$  soient dans le demi-plan gauche du plan complexe et que la partie réelle des valeurs propres soit plus grande, en valeur absolue, que la partie réelle des valeurs propres de la matrice d'état  $A$  ; dans ces conditions, la dynamique de l'erreur d'observation est donc plus rapide que celle du processus (système). Mais, il existe deux considérations contradictoires dont on doit tenir compte et qui interviennent dans le choix de la matrice  $K$  [Dieu 87] :

- les perturbations sur la paire  $(A, B)$  conduisent, si elles sont importantes, à choisir une valeur élevée de la matrice  $K$  afin de renforcer l'influence des mesures sur l'estimation d'état.
- le bruit entachant la mesure des grandeurs de sortie, amplifié par le gain, exige une petite valeur de  $K$ .

Le gain de l'observateur doit donc être choisi en effectuant un compromis pour satisfaire au mieux ces contraintes.

## 1.6 Commande à structure variable (mode glissant)

### 1.6.1 Introduction

La commande à structure variable est sans doute à mettre quelque peu à part parmi les divers types de commande pour deux raisons : d'une part parce que, au moins théoriquement, la commande appliquée au processus est fondamentalement discontinue, d'autre part parce que la dynamique du processus commandé dans le régime recherché, dit de glissement, ne dépend pas de la commande appliquée au processus. On pourrait ajouter également qu'elle se caractérise par des propriétés de robustesse, en particulier vis-à-vis des variations paramétriques du système.

Le concept de base est facile à comprendre. Il suffit d'imaginer un système dynamique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1.49)$$

continu par morceaux, où la fonction  $f(\cdot)$  est discontinue, de part et d'autre d'une *surface*  $S(x(t)) = 0$ , de sorte que :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f^+(x(t), u(t)) & \text{si } S(x(t)) > 0 \\ f^-(x(t), u(t)) & \text{si } S(x(t)) < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

Si les trajectoires correspondant à ces équations sont telles qu'elles soient toujours dirigées vers la surface  $S(x) = 0$ , il est intuitif qu'une fois sur cette surface on ne peut plus la quitter et qu'on est "condamné" à évoluer sur celle-ci.

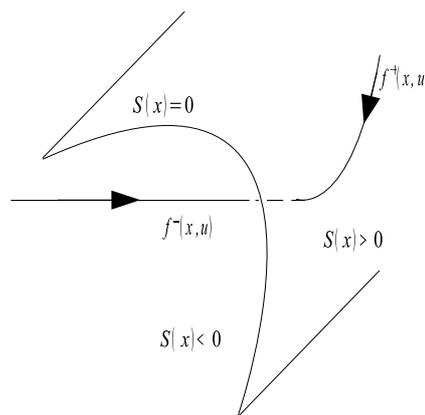


FIG. 1.5 – Plan de phase ainsi que l'ensemble final de bornes

Un système défini par les équations (1.50) est dit à structure variable du fait que, par suite de la discontinuité, on peut considérer qu'il y a plusieurs définitions possibles des

équations d'évolution; bien plus, le mouvement résultant sur la surface est fondamentalement différent de chacun des mouvements hors de la surface... et ne s'explique pas du reste par la théorie des équations différentielles ordinaires.

Le principe de base de l'approche des systèmes à structure variable est expliqué d'une façon simple en considérant la conception de régulateur (correcteur) par retour d'état pour le système linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.51)$$

La structure du retour d'état est la suivante :

$$u(t) = k^T x(t) \quad (1.52)$$

où les différentes procédures de conception permettent de choisir les paramètres  $k$  (placement de pôles par exemple). Les systèmes à structure variable sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation. Ce choix permet de commuter à tout instant entre chaque structure, en combinant les propriétés utiles de chacune de ces structures, afin d'avoir un comportement désiré du système. Les deux exemples suivants, de dimension 2, sont présentés pour illustrer ce propos.

L'idée de changer de structure est naturelle et la première utilisation de cette approche peut être trouvée dans des références publiées il y a plusieurs années [Flug 56], [Leto 57], [Masl 56] et [Ostr 56].

L'avantage de cette approche est la possibilité de combiner les propriétés utiles de chaque structure. De plus, un système à structure variable peut posséder de nouvelles propriétés non présentes dans chacune des structures utilisées; par exemple, un système asymptotiquement stable peut être constitué de deux structures dont aucune n'est asymptotiquement stable [Utki 81]. Nous présentons deux exemples pour montrer les avantages de changement de structure pendant une phase de commande.

### 1.6.2 Exemple 1

Soit un système du second ordre défini par :

$$\ddot{x}(t) = -u(t)x(t) \quad (1.53)$$

où  $u(t)$  est la commande (entrée) du système et  $x(t)$  est la variable d'état. Le comportement du système (1.53) dépend de la valeur de la commande  $u(t)$ . Cette dernière peut avoir deux valeurs  $\alpha_1^2$ ,  $\alpha_2^2$ . Pour des grandes valeurs de la commande  $\alpha_1^2$ , la figure (1.6-a) donne la représentation dans le plan de phase du comportement du système. Dans le cas

où la commande change et prend la valeur  $\alpha_2^2$  nettement inférieure à  $\alpha_1^2$ , le système change de structure et sa représentation dans le plan de phase est donnée par la figure (1.6-b). Les plans de phase présentés sur les figures (1.6-a) et (1.6-b), montrent qu'aucune structure n'est asymptotiquement stable. Cependant, la stabilité asymptotique est réalisée (garantie) si la structure du système change selon une logique de commutation définie comme suit [Utki 77] :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha_1^2 & \text{si } x(t) \dot{x}(t) > 0 \\ \alpha_2^2 & \text{si } x(t) \dot{x}(t) < 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

Le choix d'une fonction de commutation dépendant du produit  $x(t)\dot{x}(t)$  divise le plan de phase en quatre quadrants représentés à la figure (1.6-c). Il en résulte un comportement stable convergeant vers l'origine présenté par la figure (1.6-c).

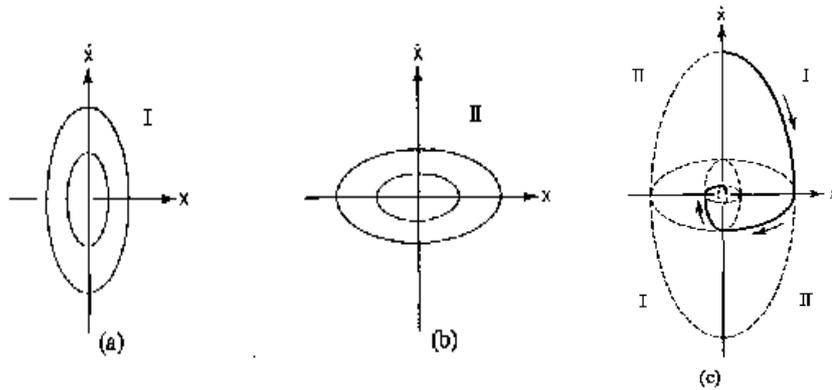


FIG. 1.6 – Plans de phase pour différentes commandes

### 1.6.3 Exemple 2

Pour mieux cerner l'intérêt du mode de glissement, considérons le système du second ordre défini par l'équation d'état suivante :

$$\ddot{x}(t) - \xi \dot{x}(t) + \psi x(t) = 0 \quad \xi > 0 \quad (1.55)$$

où la commande par retour d'état correspond au terme  $u(t) = \psi x(t)$ . La contre-réaction est positive quand  $\psi = \alpha > 0$ , elle est négative quand  $\psi = -\alpha < 0$ . Les deux structures sont instables, voir les figures (1.7-a) et (1.7-b).

Par contre, si la variable  $\psi$  suit une logique de commutation définie par l'équation suivante

$$\psi \begin{cases} \alpha, & \text{si } x(t)s(t) > 0 \\ -\alpha, & \text{si } x(t)s(t) < 0 \end{cases}, \quad \text{où } s(t) = cx(t) + \dot{x}(t) \quad (1.56)$$

$$c = \lambda = -\frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha}$$

alors les trajectoires de phase sont dirigées vers la ligne de commutation  $s(t) = cx(t) + \dot{x}(t) = 0$  voir la figure (1.7-c). Donc, le système à structure variable résultant est asymptotiquement stable. Comme nous l'avons expliqué précédemment, de nouvelles propriétés du système sont obtenues en composant une trajectoire à partir des trajectoires de différentes structures instables. Un aspect bien plus fondamental des systèmes à structure variable est la possibilité d'obtenir la trajectoire non inhérente à partir de n'importe laquelle de ces différentes structures. Ces trajectoires décrivent un nouveau type de mouvement qui est appelé le mode de glissement [Utki 77].

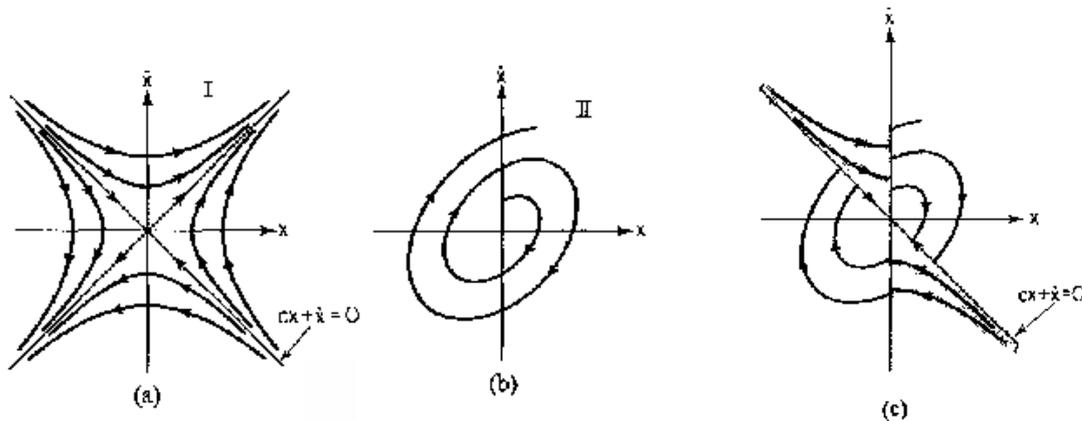


FIG. 1.7 – Plans de phase d'un système à structure variable.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils fondamentaux que nous allons utiliser dans ce mémoire, à savoir, l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires par la méthode de Lyapunov et l'utilisation des inégalités linéaires matricielles (LMI). Nous avons présenté également la notion d'observabilité et d'observateur.

A la fin de cette première partie, nous avons introduit la notion de mode glissant qui présente des avantages multiples concernant sa robustesse aux différentes perturbations qui peuvent affecter un système linéaire ou non linéaire ; deux exemples ont été donnés pour expliquer cette notion.



# 2

## Observateurs de systèmes linéaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction au développement d'observateurs continus . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.2</b>	<b>Observateur à entrées inconnues . . . . .</b>	<b>35</b>
2.2.1	Reconstruction d'état en éliminant les entrées inconnues . . . .	36
2.2.2	Principe de la reconstruction . . . . .	37
2.2.3	Conditions de convergence de l'observateur . . . . .	38
2.2.4	Méthodes de résolution . . . . .	39
2.2.5	Placement de pôles . . . . .	40
2.2.6	Exemple . . . . .	41
2.2.7	Conclusion . . . . .	44
<b>2.3</b>	<b>Introduction au développement d'observateurs discontinus .</b>	<b>45</b>
<b>2.4</b>	<b>Méthodes de conception d'observateurs discontinus . . . . .</b>	<b>46</b>
2.4.1	Observateur d'Utkin . . . . .	46
2.4.2	Observateur de Walcott et Žak . . . . .	48
2.4.3	Exemple d'application . . . . .	50
<b>2.5</b>	<b>Observateur à mode glissant utilisant une forme canonique .</b>	<b>51</b>
2.5.1	Simplification de l'équation de sortie . . . . .	52
2.5.2	Découplage de la fonction inconnue . . . . .	53

<b>2.6</b>	<b>Synthèse d'un observateur à mode glissant . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>59</b>

---

## 2.1 Introduction au développement d'observateurs continus

Le problème du contrôle optimal de procédé, lorsque certaines composantes du vecteur d'état ne sont pas mesurables, a sans doute initié les premiers travaux sur les observateurs. Ces derniers permettent l'élaboration d'un modèle d'estimation d'état utilisant les grandeurs accessibles du système, telle que ses entrées et ses sorties. Dans le cas déterministe, ce modèle est appelé observateur d'état [Luen 64] et [Will 1968] et dans le cas d'un système stochastique ce modèle est appelé filtre [Kalm 60], [Aoki 67] et [Newm 70].

Cette estimation d'état utilise les sorties mesurées du système, ses entrées et son modèle. Lorsqu'un système est complètement observable, la reconstruction d'état peut être effectuée soit par un observateur d'ordre complet (l'ordre de l'observateur et le même que celui du système), soit par un observateur d'ordre réduit (l'ordre de l'observateur et plus petit que celui du système).

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état vers zéro, nécessite une détermination très précise des matrices de l'observateur. Raymond [Raym 76] a montré qu'une faible erreur sur les paramètres des matrices  $A$  et  $B$  d'un système pouvait engendrer une importante erreur de reconstruction (obtenue en comparant l'estimation à la valeur mesurée). Plusieurs auteurs ont présenté des techniques d'estimation d'état basées sur la conception d'observateurs à actions proportionnelle et intégrale pour des systèmes linéaires incertains [Busa 00] et des systèmes singuliers [Koen 02][Gao 04].

En présence d'entrées inconnues et de défauts de capteurs, il existe plusieurs techniques d'estimation d'état qui feront l'objet de la suite de ce chapitre.

## 2.2 Observateur à entrées inconnues

Un processus physique est souvent soumis à des perturbations qui ont comme origine des bruits dûs à l'environnement du processus, des incertitudes de mesures, des défauts de capteurs ou d'actionneurs ; ces perturbations ont des effets néfastes sur le comportement normal du processus et leur estimation peut servir à concevoir un système de commande capable d'en minimiser les effets. Les perturbations sont appelées entrées inconnues lorsqu'elles affectent l'entrée du processus et leur présence peut rendre difficile l'estimation de l'état du système.

Plusieurs travaux ont été réalisés concernant l'estimation de l'état et de la sortie en présence d'entrées inconnues ; ils peuvent être regroupés en deux catégories. La première

suppose la connaissance a priori d'informations sur ces entrées non mesurables ; en particulier, Johnson [John 75] propose une approche polynomiale et Meditch [Medi 71] suggère d'approcher les entrées inconnues par la réponse d'un système dynamique connu. La deuxième catégorie procède soit par estimation de l'entrée inconnue [Xion 03], soit par son élimination complète des équations du système [Dass 00] et [Valc 99].

Parmi les techniques ne nécessitant pas l'élimination des entrées inconnues, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes de conception d'observateur capable de reconstruire entièrement l'état d'un système linéaire en présence d'entrées inconnues [Wang 75] [More 01] ; Kobayashi [Koba 82], Lyubchik [Lyub 93] et Liu [Liu 02] utilisent une méthode d'inversion de modèle pour l'estimation d'état.

Parmi les techniques qui permettent l'élimination des entrées inconnues, celle de Kudva [Kudv 80] s'intéresse, dans le cas des systèmes linéaires, aux conditions d'existence de l'observateur d'un système à entrées inconnues en se basant sur la technique d'inverse généralisée de matrice. Guan a procédé à l'élimination des entrées inconnues des équations d'état d'un système linéaire continu [Guan 91]. Beaucoup d'autres variantes existent, mais la grande majorité d'entre elles ont été développées pour des systèmes linéaires.

Koenig [Koen 02] a présenté une méthode simple pour concevoir un observateur à action proportionnelle et intégrale pour des systèmes singuliers à entrées inconnues. Des conditions suffisantes d'existence de cet observateur ont été établies.

Des observateurs d'ordre réduit ont été considérés par plusieurs auteurs durant ces dernières années [Yang 88] [Zasa 00] [Koen 01]. Cependant, Yang et Wilde [Yang 88] ont démontré que l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein peut avoir une vitesse de convergence plus rapide que l'observateur d'ordre réduit.

L'utilisation d'observateurs à entrées inconnues pour le diagnostic de défaut et les systèmes de surveillance de processus a également attiré beaucoup d'attention [Wata 82], [Saif 93], [Dass 00], [Koen 01] et [Guer 04]. Dassanayake [Dass 00] a considéré un observateur, en éliminant les entrées inconnues dans les équations d'état, pour pouvoir détecter et isoler plusieurs défauts de capteurs, en présence d'entrées inconnues, sur un moteur (turbo-réacteur).

### 2.2.1 Reconstruction d'état en éliminant les entrées inconnues

La reconstruction de l'état d'un système dynamique linéaire dont une partie des entrées n'est pas mesurable a un grand intérêt dans la pratique. Dans de telles circonstances, un observateur conventionnel, qui exige la connaissance de toutes les entrées, ne peut pas être

utilisé directement. L'observateur à entrées inconnues (UIO) a été développé pour estimer l'état d'un système, en dépit de l'existence des entrées inconnues ou des perturbations en les éliminant dans les équations d'état. Ce type d'observateurs a suscité l'attention de beaucoup de chercheurs [John 75], [Hou 92], [Daro 94], [More 01] et [Liu 02].

Dans cette section, nous montrons que les conditions de convergence d'un observateur à entrées inconnues sont solutions d'inégalités bilinéaires matricielles (BMI) qui peuvent être linéarisées par différentes techniques pour obtenir des inégalités linéaires matricielles (LMI).

### 2.2.2 Principe de la reconstruction

Considérons le système dynamique linéaire soumis à l'influence d'entrées inconnues décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées connues,  $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $q < n$ , est le vecteur des entrées inconnues et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur des sorties mesurables.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état du système linéaire,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée,  $R \in \mathbb{R}^{n \times q}$  est la matrice d'influence des entrées inconnues et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie.

On suppose que la matrice  $R$  est de plein rang colonne et que la paire  $(A, C)$  est observable. L'objectif est l'estimation complète du vecteur d'état malgré la présence des entrées inconnues  $\bar{u}(t)$ . Ainsi, considérons l'observateur d'ordre plein [Chen 91] :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation du vecteur d'état  $x(t)$ . Pour que cette estimation soit garantie, il faut que  $\hat{x}(t)$  approche asymptotiquement  $x(t)$  c'est-à-dire qu'il faut que l'erreur d'estimation d'état :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.3)$$

tende vers zéro asymptotiquement. L'équation de la dynamique d'évolution de cette erreur s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{z}(t) + EC\dot{x}(t) = (I + EC)\dot{x}(t) - \dot{z}(t) \\ &= (I + EC)(Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t)) - (Nz(t) + Gu(t) + Ly(t)) \\ &= (I + EC)(Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t)) - (N\hat{x}(t) + Gu(t) + (L + NE)Cx(t)) \end{aligned}$$

Posons  $P = I + EC$ , on obtient alors :

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + (PB - G)u(t) + PR\bar{u}(t) + (PA - NP - LC)x(t)$$

L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si :

$$LC = PA - NP \quad (2.4a)$$

$$G = PB \quad (2.4b)$$

$$PR = 0 \quad (2.4c)$$

$$N \text{ est stable}^1 \quad (2.4d)$$

La solution numérique du système d'équation (2.4) est basée sur le calcul de la pseudo-inverse de la matrice  $(CR)$ , cela est possible si la matrices  $(CR)$  soit de plein rang ligne [Rote 95].

$$E = -R(CR)^T((CR)(CR)^T)^{-1} \quad (2.5a)$$

$$P = I - R(CR)^T((CR)(CR)^T)^{-1}C \quad (2.5b)$$

$$G = PB \quad (2.5c)$$

$$N = PA - KC \quad (2.5d)$$

$$L = K - NE \quad (2.5e)$$

$$N \text{ est stable} \quad (2.5f)$$

Donc, si le système d'équation (2.5) est satisfait, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état se réduit à :

$$\dot{e}(t) = Ne(t) \quad (2.6)$$

Compte tenu des propriétés de  $N$ , l'erreur d'estimation d'état converge bien asymptotiquement vers zéro.

### 2.2.3 Conditions de convergence de l'observateur

Dans cette partie, nous développons les conditions suffisantes pour la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état vers la valeur nulle. D'après (2.6), cette convergence est garantie s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , telle que :

$$N^T X + XN < 0 \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Par abus de langage, on dira qu'une matrice est stable si ses valeurs propres sont à parties réelles négatives

Comme  $N = PA - KC$ , l'inégalité (2.7) devient :

$$(PA - KC)^T X + X(PA - KC) < 0 \quad (2.8)$$

On remarque malheureusement que l'inégalité précédente (2.8) présente l'inconvénient d'être non linéaire (bilinéaire) par rapport aux variables  $K$  et  $X$ . Deux méthodes de résolution peuvent être utilisées :

- Linéarisation par rapport aux variables  $K$  et  $X$ ,
- Changement de variables.

## 2.2.4 Méthodes de résolution

Des méthodes de résolution ont été proposées pour résoudre les inégalité matricielles non linéaires et en particulier bilinéaires [Chad 02].

### 2.2.4.1 Linéarisation par rapport aux variables

On peut utiliser une méthode "locale", basée sur la linéarisation des inégalités, par rapport aux variables  $K$  et  $X$ , autour de valeurs initiales  $K_0$  et  $X_0$  "bien choisies". On pose :

$$K = K_0 + \partial K \quad \text{et} \quad X = X_0 + \partial X \quad (2.9)$$

A partir de l'inégalité (2.8), on obtient :

$$\begin{cases} \left( (PA - (K_0 + \partial K)C) + (PA - (K_0 + \partial K)C)^T \right) (X_0 + \partial X) + \\ \quad (X_0 + \partial X) \left( (PA - (K_0 + \partial K)C) + (PA - (K_0 + \partial K)C)^T \right) < 0 \\ X_0 + \partial X > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

en négligeant les termes du second ordre de l'inégalité (2.10), on obtient alors :

$$\begin{cases} \left( (PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T \right) \partial X + \partial X \left( (PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T \right) - \\ \quad \partial K C X_0 - (C X_0)^T \partial K^T - C^T \partial K^T X_0 - X_0 \partial K C + \\ \left( (PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T \right) X_0 + X_0 \left( (PA - K_0C) + (PA - K_0C)^T \right) < 0 \\ X_0 + \partial X > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Le système (2.11) est alors un problème de type de LMI (*inégalité linéaire matricielle*) et sa résolution par rapport à  $\partial K$  et  $\partial X$  est standard [Boyd 94]. Notons que le choix des valeurs initiales  $K_0$  et  $X_0$  demeure l'inconvénient principal de cette méthode et d'ailleurs la convergence vers une solution n'est pas toujours garantie. Malheureusement, d'un point

de vue pratique, on peut être amené à examiner divers choix de valeurs initiales afin d'obtenir une solution.

**Remarque :** Le système LMI (2.11) n'est valide qu'au voisinage de  $K_0$  et de  $X_0$ ; ceci nous a encouragé, afin d'améliorer la résolution, à proposer, pour limiter les variations des matrices  $\delta K$  et  $\delta X$ , les contraintes additionnelles suivantes :

$$\begin{cases} \|\partial K_0\| < \varepsilon \|K_0\| \\ \|\partial X_0\| < \varepsilon \|X_0\| \end{cases}, \text{ avec } 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.12)$$

La formulation LMI de ces contraintes (2.12) est décrite par les inégalité matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \|X_0\| I_{n \times n} & \partial X \\ \partial X & \varepsilon \|X_0\| I_{n \times n} \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \|K_0\| I_{n \times n} & \partial K \\ \partial K & \varepsilon \|K_0\| I_{m \times m} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

Si les systèmes LMI (2.11) et (2.13) sont réalisables, l'observateur (2.2) estime alors asymptotiquement l'état du système linéaire à entrées inconnues (2.1).

#### 2.2.4.2 Changement de variables

Pour surmonter les inconvénients de la méthode précédente, une méthode basée sur un changement de variables s'avère plus intéressante. Pour cela, considérons le changement de variables suivant :

$$W = XK \quad (2.14)$$

L'inégalité obtenue après ce changement de variables s'écrit de la manière suivante :

$$(PA)^T X + X(PA) - (C^T W^T + WC) < 0 \quad (2.15)$$

La solution du problème initial est obtenu en deux étapes. On résoud tout d'abord l'inégalité matricielle linéaire (2.15) par rapport aux inconnues  $X$  et  $W$ . On déduit ensuite la valeur du gain  $K$  par la formule :

$$K = X^{-1}W \quad (2.16)$$

#### 2.2.5 Placement de pôles

Dans cette partie, nous examinons comment améliorer le fonctionnement de l'observateur en particulier en ce qui concerne la vitesse de convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. Pour une meilleure estimation de l'état, la dynamique de l'observateur est choisie

plus rapide que celle du système. Pour cela, on fixe les valeurs propres de l'observateur dans le demi-plan gauche du plan complexe de sorte que leurs parties réelles soient plus grandes en valeur absolue que celles de la matrice d'état  $A$ .

Pour assurer une certaine dynamique de convergence de l'erreur d'estimation d'état, on définit la région complexe  $S(\alpha, \beta)$  par l'intersection d'un cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon égal à  $\beta$  et la moitié gauche de la région limitée par une droite verticale de coordonnées égale à  $-\alpha$  où  $\alpha$  est une constante positive.

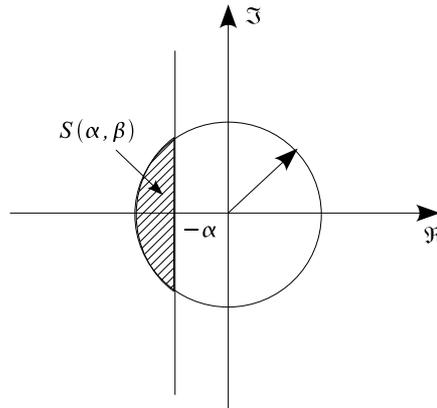


FIG. 2.1 – Région LMI

**Corollaire 2.2.1** : les valeurs propres de la matrice  $N$  sont dans la région LMI  $S(\alpha, \beta)$  s'il existe des matrices  $\partial X$  et  $\partial K$  telle que :

$$\begin{bmatrix} -\beta(X_0 + \partial X) & N_0^T X - (\partial K C)^T X_0 \\ X N_0 - X_0 (\partial K C) & -\beta(X_0 + \partial X) \end{bmatrix} < 0$$

$$N_0^T \partial X + \partial X N_0 - C^T \partial K^T X_0 - X_0 \partial K C + N_0^T X_0 + X_0 N_0 + 2\alpha(X_0 + \partial X) < 0 \quad (2.17)$$

avec  $\begin{cases} N_0 = PA - K_0 C \\ X = X_0 + \partial X \end{cases}$ .

### 2.2.6 Exemple

Considérons un système dynamique linéaire à entrées inconnues modélisé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.01 \\ 0.1 & -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [1 \ 1 \ 1]$$

On notera que la matrice  $R$  est de plein rang colonne et que la paire  $(A, C)$  est observable. L'observateur d'état qui reconstruit complètement le vecteur d'état du système (2.18) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

S'il existe une matrice de Lyapunov  $X$  et un gain  $K$  satisfaisant les contraintes (2.5) et (2.8), l'observateur (2.19) estime asymptotiquement le vecteur d'état du système (2.18).

En utilisant la deuxième méthode de résolution (changement de variables), les conditions de convergence sont les suivantes :

$$E = -R(CR)^T((CR)(CR)^T)^{-1} \quad (2.20a)$$

$$P = I - R(CR)^T((CR)(CR)^T)^{-1}C \quad (2.20b)$$

$$G = PB \quad (2.20c)$$

$$N = PA - KC \quad (2.20d)$$

$$L = K - NE \quad (2.20e)$$

$$W = XK \quad (2.20f)$$

$$(PA)^T X + X(PA) - (C^T W^T + WC) < 0 \quad (2.20g)$$

1. la relation (2.20a) détermine complètement la matrice  $E$  de l'observateur, on en déduit alors les valeurs des matrices  $P$  et  $G$ .
2. le calcul des matrices  $W$  et  $X$  est effectué par la résolution de l'inégalité (2.20g) dans laquelle nous avons remplacé la matrice  $N$  par sa valeur issue de (2.20d), on en déduit par un calcul direct la valeurs de la matrice  $K = X^{-1}W$  (2.20f).
3. les matrices  $N$  et  $L$  sont déterminées directement à partir des relations (2.20d) et (2.20e).

Une solution satisfaisant les contraintes (2.20) est la suivante :

$$E = \begin{bmatrix} -0.33 \\ -0.33 \\ -0.33 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.66 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 0.66 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 0.66 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -0.33 \\ -0.16 \\ -0.16 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.41 & -0.08 & -0.01 \\ 0.23 & -0.03 & 0.33 \\ 0.003 & -0.06 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.35 \\ -0.34 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0.18 \\ -0.16 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

La figure (2.2) montre l'entrée connue appliquée au système et la figure (2.3) montre l'entrée inconnue  $\bar{u}(t)$ , les conditions initiales sont  $x_0 = [1.5 \ 0 \ 0]^T$  et  $\hat{x}_0 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ . Les figures (2.4) visualisent les erreurs d'estimation d'état. On observe la bonne qualité de l'estimation, sauf au voisinage de l'origine des temps, cela est dû au choix des valeurs initiales de l'observateur d'état.

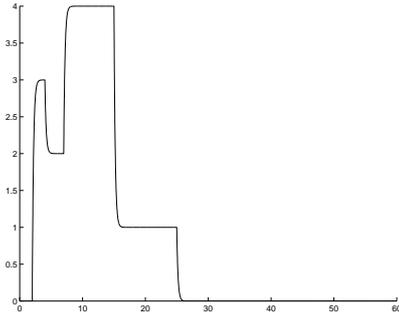


FIG. 2.2 – Entrée connue  $u(t)$

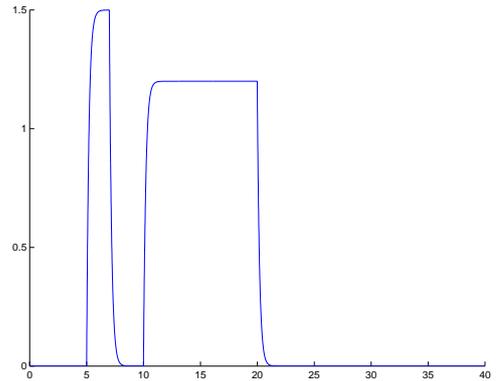
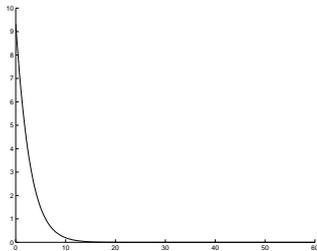
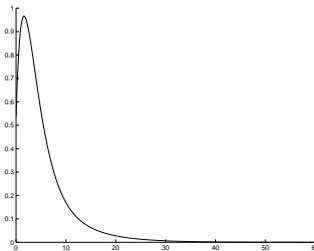


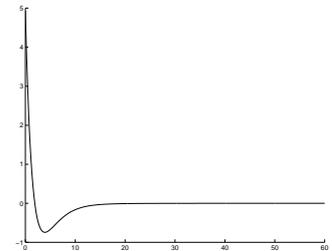
FIG. 2.3 – Entrée inconnue  $\bar{u}(t)$



$\hat{x}_1(t) - x_1(t)$



$\hat{x}_2(t) - x_2(t)$



$\hat{x}_3(t) - x_3(t)$

FIG. 2.4 – Erreurs d'estimation d'état

### 2.2.7 Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré comment concevoir un observateur pour un système dynamique linéaire soumis à l'influence d'entrées inconnues. La détermination du gain de l'observateur pour garantir sa convergence et assurer certaines performances dynamiques conduit à la résolution d'un problème du type BMI (inégalités bilinéaires matricielles).

La résolution de ces contraintes BMI est effectuée par deux méthodes :

- la première est dite méthode locale qui consiste à linéariser l'inégalité (2.8) par rapport aux variables autour de valeurs initiales "bien choisies". L'inconvénient principal de cette méthode réside dans le choix des valeurs initiales des matrices  $K$  et  $X$  et du domaine de validité de la solution.
- la deuxième, basée sur un changement de variables et qu'on peut qualifier de méthode globale permet une détermination plus aisée des matrices décrivant l'observateur.

Un tel changement de variable n'est pas toujours possible, cela dépend de la structure de l'équation bilinéaire initiale. Nous verrons ultérieurement des situations où seule la première méthode peut être employée.

## 2.3 Introduction au développement d'observateurs discontinus

Ces dernières années, le problème de commande ou de diagnostic des systèmes dynamiques incertains soumis à des perturbations externes a fait l'objet d'un grand intérêt. Dans la pratique, il n'est pas toujours possible de mesurer le vecteur d'état ; dans ce cas, on utilise une méthode de conception basée seulement sur les sorties mesurées et les entrées connues.

Du point de vue de la commande robuste, les propriétés souhaitables des systèmes de commande à structure variable, particulièrement avec un mode glissant, sont bien développées [Utki 92] [DeCa 88]. Malgré l'activité fructueuse de la recherche et de développement de la théorie de la commande à structure variable et son insensibilité par rapport aux incertitudes ou aux entrées inconnues, peu d'auteurs ont considéré l'application des principes fondamentaux au problème de conception d'observateur. [Utki 81] présente une méthode de conception d'un observateur à structure discontinue pour lequel l'erreur entre les sorties estimées et mesurées est forcée à converger vers zéro. Dorling et Zinober [Dorl 86] explorent l'application pratique de cet observateur à un système incertain et examinent les difficultés du choix d'un gain approprié glissant. Walcott et al. [Walc 87], Walcott et Zac [Walc 88] et Zak [Zak 90] présentent une méthode de conception d'observateur basée sur l'approche de Lyapunov et, sous des hypothèses appropriées, montrent la décroissance asymptotique de l'erreur d'estimation d'état en présence de non-linearités/incertitudes bornées.

Récemment, Ha [Ha 03] a présenté une méthodologie pour concevoir un contrôleur à mode glissant, pour un système linéaire incertain, basé sur la technique de placement de pôles en utilisant un observateur à mode glissant. Xiong [Xion 01] a considéré un observateur à mode glissant pour l'estimation d'état d'un système non linéaire incertain, les incertitudes sont considérées comme étant des entrées inconnues. Islam [Isla 03] a proposé une évaluation théorique et expérimentale d'un observateur à mode glissant pour mesurer la position et la vitesse sur un moteur à reluctance commutée.

Dans cette partie, on cherche à construire un observateur à mode glissant s'appuyant sur les contributions existantes décrites ci-dessus ; la section 2 de cette partie fournit un rappel détaillé des approches de conception d'Utkin [Utki 92] et de Walcott et Zac [Walc 86] [Walc 88]. Dans la section 3, nous nous sommes intéressés à la méthodologie développée par Edwards et Spurgeon [Edwa 94] [Edwa 00] pour déterminer l'expression du gain d'un observateur et qui surmonte les inconvénients de l'observateur de Walcott et Zak [Walc 88] ; une approche de Lyapunov est utilisée pour assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état. La résolution des inégalités de Lyapunov

conduit à la résolution d'un problème de type LMI.

## 2.4 Méthodes de conception d'observateurs discontinus

Considérons un système dynamique incertain décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x, u, t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $x(t)$  représente le vecteur d'état,  $u(t)$  est le vecteur d'entrées connues du système et  $y(t)$  est la sortie mesurée,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  avec  $p \geq m$ . La fonction inconnue  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente les incertitudes et satisfait les conditions suivantes :

$$\|f(x, u, t)\| \leq \rho, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, t \geq 0 \quad (2.22)$$

En outre, la matrice  $C$  est supposée de plein rang ligne. Le problème considéré ici est la reconstruction du vecteur d'état en dépit de la présence des entrées inconnues.

### 2.4.1 Observateur d'Utkin

Considérons tout d'abord le système (2.21) et supposons que la paire  $(A, C)$  soit observable et que la fonction  $f(x, u, t) \equiv 0$ . La reconstruction des états s'appuyant sur les sorties mesurées, il est naturel d'effectuer un changement de coordonnées pour que les sorties du système apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état. Sans perte de généralité, la matrice de sortie peut être écrite comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

où  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  avec  $\det(C_2) \neq 0$ . Alors, la matrice de transformation

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

est non singulière et, dans ce nouveau système de coordonnées, on peut facilement vérifier que la nouvelle matrice de sortie s'écrit comme suit :

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Les nouvelles matrices d'état et de commande s'écrivent :

$$A = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Le système nominal peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}y(t) + B_1u(t) \\ \dot{y}(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}y(t) + B_2u(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

où

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Tx(t) \quad \text{et} \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$$

L'observateur proposé par Utkin [Utki 81] a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = A_{11}\hat{x}_1(t) + A_{12}\hat{y}(t) + B_1u(t) + Lv(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + A_{22}\hat{y}(t) + B_2u(t) - v(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $(\hat{x}_1(t), \hat{y}(t))$  sont les estimés de  $(x_1(t), y(t))$ ,  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$  est le gain de l'observateur et les composantes du vecteur discontinu  $v(t)$  sont définies par l'équation :

$$v_i(t) = M \operatorname{sgn}(\hat{y}_i(t) - y_i(t)) \quad \text{pour} \quad M \in \mathbb{R}_+ \quad (2.27)$$

où  $\hat{y}_i(t)$  et  $y_i(t)$  sont respectivement les composantes des vecteur  $\hat{y}(t)$  et  $y(t)$  et  $\operatorname{sgn}$  représente la fonction signe. Désignons par  $e_1(t)$  et  $e_y(t)$  les erreurs d'estimation d'état et de sortie :

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \hat{x}_1(t) - x_1(t) \\ e_y(t) &= \hat{y}(t) - y(t) \end{aligned} \quad (2.28)$$

A partir des équations (2.25), (2.26) et (2.28), le système suivant peut être obtenu :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t) + A_{12}e_y(t) + Lv(t) \\ \dot{e}_y(t) = A_{21}e_1(t) + A_{22}e_y(t) - v(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

Comme la paire  $(A, C)$  est observable, la paire  $(A_{11}, A_{21})$  l'est également. Par conséquent,  $L$  peut être choisi pour que les valeurs propres de la matrice  $A_{11} + LA_{21}$  soient dans le demi-plan gauche du plan complexe. Définissons maintenant le nouveau changement de variable :

$$T_s = \begin{bmatrix} I_{n-p} & L \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Après ce changement de variable, les erreurs d'estimation s'écrivent :

$$\dot{e}'_1(t) = A'_{11}e'_1(t) + A'_{12}e_y(t) \quad (2.30)$$

$$\dot{e}_y(t) = A_{21}e'_1(t) + A'_{22}e_y(t) - v(t) \quad (2.31)$$

avec  $e'_1(t) = e_1(t) + Le_y(t)$  et  $A'_{11} = A_{11} + LA_{21}$ ,  $A'_{12} = A_{12} + LA_{22} - A'_{11}L$  et  $A'_{22} = A_{22} - A_{21}L$ . On peut montrer, en utilisant la théorie des perturbations singulières, que pour un  $M$  assez grand, un mouvement glissant peut prendre naissance sur l'erreur de sortie (2.31). Donc, après un temps fini  $t_s$ , l'erreur  $e_y(t)$  et sa dérivée sont nulles ( $e_y(t) = 0$ ,  $\dot{e}_y(t) = 0$ ). L'équation (2.30) devient :

$$\dot{e}'_1(t) = A'_{11}e'_1(t) \quad (2.32)$$

En choisissant correctement la matrice de gain  $L$  (pour que la matrice  $A'_{11}$  soit stable), le système d'équations des erreurs (2.30-2.31) est stable, c'est-à-dire  $e'_1(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Par conséquent  $\hat{x}_1(t) \rightarrow x_1(t)$  et l'autre composante du vecteur d'état  $x_2(t)$  peut être reconstruite dans le système de coordonnées originales comme suit :

$$\hat{x}_2(t) = C_2^{-1}(y(t) - C_1\hat{x}_1(t)) \quad (2.33)$$

La difficulté pratique principale de cette approche réside dans le choix d'un gain approprié  $M$  pour induire un mouvement glissant dans un temps fini. Dorling et Zinober [Dorl 86] montrent la nécessité de modifier le gain  $M$  pendant l'intervalle de temps afin de réduire les commutations excessives.

## 2.4.2 Observateur de Walcott et Żak

Le problème considéré par Walcott et Żak [Walc 86] [Walc 88] est l'estimation d'état d'un système décrit par (2.21) de sorte que l'erreur tende vers zéro d'une façon exponentielle malgré la présence des incertitudes considérées. Dans cette partie, on suppose que :

$$f(x, u, t) = R\xi(x, t) \quad (2.34)$$

où la fonction  $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^q$  est une fonction bornée et inconnue, telle que :

$$\|\xi(x(t), t)\| \leq \rho, \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

On considère qu'il existe une matrice  $G \in \mathbb{R}^{n \times p}$  telle que la matrice  $A_0 = (A - GC)$  a des valeurs propres stables, une paire de matrices de Lyapunov ( $P, Q$ ) symétriques et définies positives et une matrice  $F$  respectant la contrainte structurelle suivante :

$$\begin{aligned} (A - GC)^T P + P(A - GC) &= -Q \\ C^T F^T &= PR \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'observateur proposé est de la forme

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + v(t) \quad (2.36)$$

$$v(t) = \begin{cases} -\rho \frac{P^{-1}C^T F^T F C e(t)}{\|F C e(t)\|} & \text{si } F C e(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.37)$$

où

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (2.38)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état engendrée par cet observateur est régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + v(t) - (Ax(t) + Bu(t) + R\xi(x, t)) \\ &= (A - GC)e(t) + v(t) - R\xi(x, t) \end{aligned}$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t)$$

Sa dérivée le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \\ &= \left( (A - GC)e(t) + v(t) - R\xi(x, t) \right)^T Pe(t) + e^T(t)P \left( (A - GC)e(t) + v(t) - R\xi(x, t) \right) \\ &= -e^T(t)Qe(t) + 2e^T(t)Pv(t) - 2e^T(t)PR\xi(x, t) \\ &= -e^T(t)Qe(t) + 2e^T(t)Pv(t) - 2e^T(t)C^T F^T \xi(x, t) \end{aligned}$$

Pour continuer la démonstration, on distingue deux cas.

**Cas 1 :** Lorsque  $F C e(t) \neq 0$ , en remplaçant l'expression de  $v(t)$  par l'équation (2.37), la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= -e^T(t)Qe(t) - 2e^T(t)\rho \frac{C^T F^T F C e(t)}{\|F C e(t)\|} - 2e^T(t)C^T F^T \xi(x, t) \\ &= -e^T(t)Qe(t) - 2\rho\|F C e(t)\| - 2e^T(t)C^T F^T \xi(x, t) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction inconnue  $\xi(x, t)$  est bornée par un scalaire positif  $\rho$ , la dérivée de la fonction de Lyapunov peut être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &\leq -e^T(t)Qe(t) - 2\rho\|F C e(t)\| + 2\rho\|F C e(t)\| \\ &\leq -e^T(t)Qe(t) < 0 \end{aligned}$$

**Cas 2 :** Lorsque  $F C e(t) = 0$ , en remplaçant l'expression de  $v(t)$  par l'équation (2.37), la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V}(e(t)) = -e^T(t)Qe(t) < 0$$

Donc, dans les deux cas, nous avons bien montré que la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative ce qui montre que l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro.

Pour garantir la convergence asymptotique de l'observateur, on doit vérifier que :

- la paire  $(A, C)$  est observable,
- il existe une paire de matrices de Lyapunov  $(P, Q)$  et une matrice  $F$  respectant les contraintes (2.35).

### 2.4.3 Exemple d'application

Considérons un système linéaire soumis à l'influence d'une entrée inconnue et modélisé sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\xi(x, t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.39)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarquera que la matrice  $R$  est de plein rang colonne et que la paire  $(A, C)$  est observable. L'observateur d'état, qui reconstruit complètement le vecteur d'état du système (2.39) est le suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + v(t) \quad (2.40)$$

$$\text{où } Ce(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad \text{et} \quad v(t) = \begin{cases} -\rho \frac{P^{-1}C^T F^T F C e(t)}{\|F C e(t)\|} & \text{si } F C e(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.41)$$

Les matrices de l'observateur (2.40) sont déterminées, en utilisant la méthode de changement de variables évoqué précédemment, par la résolution des contraintes (2.35). Les valeurs numériques sont les suivantes :

$$\text{avec : } \rho = 1.5, \quad P = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.10 & 0.01 \\ 0.10 & 0.1 & 0.10 \\ 0.01 & 0.10 & 0.73 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2.04 & -2.01 \\ 1.54 & 0.19 \\ 2.80 & -2.17 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad F = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.53 \end{bmatrix}$$

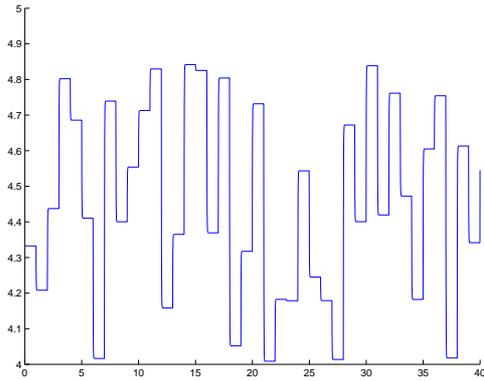


FIG. 2.5 – Entrée connue  $u(t)$

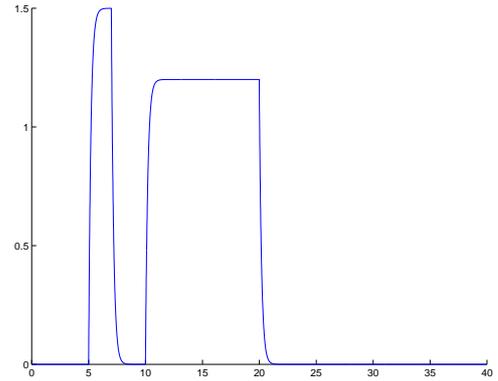


FIG. 2.6 – Entrée inconnue  $\bar{u}(t)$

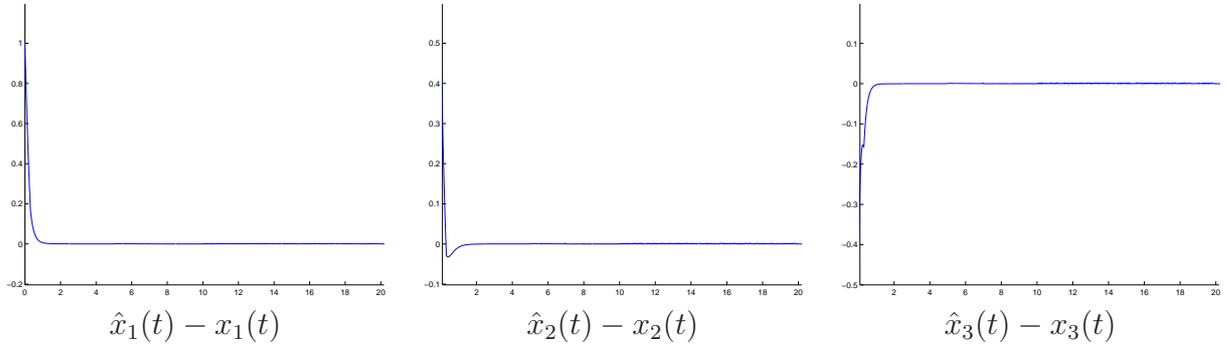


FIG. 2.7 – Erreurs d'estimation d'état

Les figures (2.5) et (2.6) montrent respectivement les entrées connue et inconnue du système (2.39). Les figures (2.7) visualisent l'erreur d'estimation d'état entre les états générés par le système (2.39) et leurs estimations respectives générées par l'observateur (2.40), on constate, sur cet exemple que les états estimés convergent asymptotiquement vers les états du système.

L'inconvénient majeur de l'observateur de Walcott et Zak survient lorsque le terme  $FCe(t) = 0$  alors que l'erreur d'estimation de la sortie  $Ce(t) \neq 0$ , C'est-à-dire lorsque la matrice  $F$  est orthogonale au vecteur  $Ce(t)$ . Dans ce cas de figure, la convergence de l'observateur n'est pas garantie.

## 2.5 Observateur à mode glissant utilisant une forme canonique

Edward et Spurgeon [Edwa 94] [Edwa 00] ont présenté une méthode de conception d'un observateur à mode glissant, basée sur la structure de l'observateur de Walcott et Zak

[Walc 88], tout en évitant l'inconvénient majeur de l'observateur de Walcott et Zak signalé précédemment.

Pour cela, considérons de nouveau le système dynamique présenté au paragraphe précédent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\xi(x, u, t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.42)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$  où  $p \geq q$ . On suppose que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $R$  sont de plein rang et la fonction  $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  est une fonction bornée inconnue telle que :

$$\|\xi(x, u, t)\| \leq \rho \quad (2.43)$$

Avant de passer à l'estimation du vecteur d'état et de sortie du système (2.42), nous allons procéder à deux changements de coordonnées du vecteur d'état.

### 2.5.1 Simplification de l'équation de sortie

Supposons que le système décrit ci-dessus soit observable, au sens particulier où la paire  $(A, C)$  est observable. Il est assez naturel d'effectuer un changement de coordonnées pour que les sorties du système apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état. Sans perte de généralité, la matrice de sortie peut être écrite [Walc 88] :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

où  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  et  $\det(C_2) \neq 0$ . Effectuons alors le changement de coordonnées suivant :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{T}x(t) \quad (2.45)$$

où  $\tilde{T}$  est une matrice non singulière définie de la manière suivante :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, on peut facilement vérifier que la nouvelle matrice de sortie s'écrit :

$$\tilde{C} = C\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Les autres matrices se transforment de la manière suivante :

$$\tilde{A} = \tilde{T}A\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \tilde{T}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{R} = \tilde{T}R = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Le système (2.42) peut alors être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{R}\xi(x, u, t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) = \tilde{x}_2(t) \end{cases} \quad (2.49)$$

Le changement de coordonnées permet donc d'exprimer directement le vecteur de sortie en fonction d'une partie du vecteur d'état.

Les contraintes (2.35) et les matrices de Lyapunov ( $P, Q$ ) subissent alors les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} (\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C})^T \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C}) &= -\tilde{Q} \\ \tilde{C}^T F^T &= \tilde{P}\tilde{R} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{cases} \tilde{P} = (\tilde{T}^{-1})^T P \tilde{T}^{-1} \\ \tilde{Q} = (\tilde{T}^{-1})^T Q \tilde{T}^{-1} \\ \tilde{G} = \tilde{T}^{-1} G \end{cases} \quad (2.51)$$

### 2.5.2 Découplage de la fonction inconnue

Nous pouvons maintenant utiliser un résultat établi par Walcott et Zak concernant la conception d'un observateur robuste par rapport à la présence d'entrées inconnues ou d'incertitudes de modèle.

Soit le modèle linéaire ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{R}, \tilde{C}$ ) défini par l'équation d'état (2.49) où  $\tilde{A}$  est une matrice stable, et soit ( $\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{C}$ ) lié à ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{R}, \tilde{C}$ ) par le changement de coordonnées suivant :

$$\bar{x}(t) = \bar{T}\tilde{x}(t) \quad (2.52)$$

Le quadruplet ( $\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{C}$ ) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \bar{A} = \bar{T}\tilde{A}\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \bar{T}\tilde{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{R} = \bar{T}\tilde{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{C} = \tilde{C}\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.53)$$

Les contraintes (2.50) et les matrices ( $\tilde{P}, \tilde{Q}$ ) deviennent :

$$\begin{aligned} (\bar{A} - \bar{G}\bar{C})^T \bar{P} + \bar{P}(\bar{A} - \bar{G}\bar{C}) &= -\bar{Q} \\ \bar{C}^T F^T &= \bar{P}\bar{R} \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{cases} \bar{P} = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{P} \bar{T}^{-1} \\ \bar{Q} = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{Q} \bar{T}^{-1} \\ \bar{G} = \bar{T}^{-1} \tilde{G} \end{cases} \quad (2.55)$$

**Proposition 1 :** soit le modèle linéaire  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{R}, \tilde{C})$  défini par l'équation d'état (2.49) pour lequel il existe une paire de matrices  $(\tilde{P}, F)$  définies par les contraintes (2.35) et (2.51), alors il existe une transformation non singulière  $\bar{T}$  telle que les nouvelles coordonnées du quadruplet  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{C})$  et la paire  $(\bar{P}, F)$  correspondante ont les propriétés suivantes :

1.  $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$  où  $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  est une matrice stable.

2.  $\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^* F^T \end{bmatrix}$  où  $P_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  avec  $P_{22}^* = (P_{22}^*)^T > 0$ .

3.  $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$ .

4. La matrice de Lyapunov a une structure bloc-diagonale  $\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}$  avec  $\bar{P}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  et  $\bar{P}_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ .

**Démonstration :** soit la paire  $(\tilde{P}, F)$  associée au modèle linéaire  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{R}, \tilde{C})$  et soit la matrice de Lyapunov  $\tilde{P}$  écrite sous la forme suivante :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{P}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)} \text{ est régulière} \\ \tilde{P}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p} \text{ et } \tilde{P}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p} \end{cases} \quad (2.56)$$

Le changement de coordonnées utilise la matrice de transformation  $\bar{T}$  suivante :

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

qui est non singulière, la matrice  $\tilde{P}_{11}$  étant une matrice symétrique définie positive  $\tilde{P}_{11} = \tilde{P}_{11}^T > 0$ . Dans les nouvelles coordonnées, on obtient :  $\bar{C} = \tilde{C} \bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$ . Ainsi, la propriété 3 est satisfaite.

A partir de l'équation (2.51) on obtient :  $\tilde{R} = \tilde{P}^{-1} \tilde{C}^T F^T$ . Si l'on note :

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

on obtient :

$$\bar{R} = \bar{T} \tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} F^T = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^* F^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Ainsi, la deuxième propriété explicitant le découplage des entrées inconnues (fonction incertaine) est prouvée.

S'il existe une matrice de Lyapunov  $\tilde{P}$  qui satisfait les contraintes (2.51), alors la matrice  $\bar{P} = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{P} \bar{T}^{-1}$  représente la matrice de Lyapunov pour la matrice d'état  $\bar{A}_0 = \bar{A} - \bar{G}\bar{C}$  et satisfait la contrainte  $\bar{C}^T F^T = \bar{P}\bar{R}$ . En utilisant un calcul direct, on peut aisément trouver :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & 0 \\ -\tilde{P}_{12}^T \tilde{P}_{11}^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & -\tilde{P}_{11}^{-1} \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

où  $\bar{P}_2 = \tilde{P}_{22} - \tilde{P}_{12}^T \tilde{P}_{11}^{-1} \tilde{P}_{12}$ . Ainsi, la matrice  $\bar{P}$  a la structure bloc-diagonale indiquée à la propriété 4.

Enfin, en remplaçant la matrice  $\bar{P}$  (2.60) dans la contrainte (2.54), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{011} & \bar{A}_{012} \\ \bar{A}_{021} & \bar{A}_{022} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{011} & \bar{A}_{012} \\ \bar{A}_{021} & \bar{A}_{022} \end{bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_{011}^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 \bar{A}_{011} < 0 \\ \bar{A}_{022}^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 \bar{A}_{022} < 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

avec  $\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{011} & \bar{A}_{012} \\ \bar{A}_{021} & \bar{A}_{022} \end{bmatrix}$

Or on a  $\bar{A}_{011} = \bar{A}_{11} - (\bar{G}\bar{C})_{11} = \bar{A}_{11}$ , car  $(\bar{G}\bar{C})_{11} = 0 \forall G \in \mathbb{R}^{n \times p}$  parce que  $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$  et par conséquent la matrice  $\bar{A}_{11}$  est stable. Ainsi la propriété 1 est prouvée.

## 2.6 Synthèse d'un observateur à mode glissant

Soit un système (2.49) décrit par  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{R}, \tilde{C})$  pour lequel il existe une paire de matrices de Lyapunov  $(\tilde{P}, \tilde{Q})$  vérifiant les contraintes (2.62) suivantes :

$$\begin{aligned} (\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C})^T \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C}) &= -\tilde{Q} \\ \tilde{C}^T F^T &= \tilde{P}\tilde{R} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Alors, il existe une transformation non singulière  $\bar{T}$  de telle sorte que le système linéaire soumis à l'influence des entrées inconnues ou bien aux incertitudes de modèle défini par

$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{C})$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1u(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_2u(t) + \bar{R}_2\xi(x, u, t) \\ y(t) = \bar{x}_2(t) \end{cases} \quad (2.63)$$

On constate que  $\bar{x}_1(t)$  ne dépend pas explicitement de la fonction inconnue (incertaine) et que la deuxième composante du vecteur d'état n'est autre que la sortie mesurable  $y(t)$ . L'observateur proposé par Edwards et Spurgeon [Edwa 94] a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\hat{x}_1(t) + \bar{A}_{12}\hat{x}_2(t) + \bar{B}_1u(t) - \bar{A}_{12}e_y(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) = \bar{A}_{21}\hat{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\hat{y}(t) + \bar{B}_2u(t) - (\bar{A}_{22} - \bar{A}_{22}^s)e_y(t) + \nu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}_2(t) \end{cases} \quad (2.64)$$

où  $\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}^T$  représente le vecteur d'état estimé,  $\bar{A}_{22}^s$  est une matrice stable arbitraire et la variable  $\nu(t)$  est définie comme suit :

$$\nu(t) = \begin{cases} -\rho \|\bar{R}_2\| \frac{P_2 e_y(t)}{\|P_2 e_y(t)\|} & \text{si } e_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } e_y(t) = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

avec  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  matrice symétrique et définie positive, solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$P_2 \bar{A}_{22}^s + (\bar{A}_{22}^s)^T P_2 = -Q_2 \quad (2.66)$$

Notons que les erreurs d'estimation d'état et de sortie sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{cases} e_1(t) = \hat{x}_1(t) - \bar{x}_1(t) \\ e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \end{cases} \quad (2.67)$$

et que leurs dynamiques vérifient respectivement :

$$\dot{e}_1(t) = \bar{A}_{11}e_1(t) \quad (2.68)$$

$$\dot{e}_y(t) = \bar{A}_{21}e_1(t) + \bar{A}_{22}^s e_y(t) + \nu(t) - \bar{R}_2\xi(x, u, t) \quad (2.69)$$

Afin de démontrer la convergence asymptotique de l'observateur (2.64), considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e_1(t), e_y(t)) = e_1^T(t)P_1e_1(t) + e_y^T(t)P_2e_y(t) \quad (2.70)$$

Sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire du système (2.68)(2.69) en utilisant l'équation (2.65) et la contrainte (2.54) s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1(t), e_y(t)) = & e_1^T(t) (\bar{A}_{11}^T P_1 + P_1 \bar{A}_{11}) e_1(t) + e_y^T(t) \left( (\bar{A}_{22}^s)^T P_2 + P_2 \bar{A}_{22}^s \right) e_y(t) + \\ & e_1^T(t) \bar{A}_{21}^T P_2 e_y(t) + e_y^T(t) P_2 \bar{A}_{21} e_1(t) + 2e_y^T(t) P_2 \nu(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_2 \xi(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.71)$$

**Proposition 2 :** il existe une matrice symétrique définie positive  $P_2$ , telle que les erreurs d'estimation (2.68) et (2.69) tendent asymptotiquement vers zéro.

**Démonstration :** soient  $Q_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  et  $Q_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  des matrices symétriques et définies positives. Définissons la matrice  $\hat{Q}$  symétrique et définie positive :

$$\hat{Q} = \bar{A}_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21} + Q_1 \quad (2.72)$$

Soit  $P_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  une matrice définie symétrique et positive, choisie comme unique solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\bar{A}_{11}^T P_1 + P_1 \bar{A}_{11} = -\hat{Q} \quad (2.73)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov tenant compte de l'expression (2.73) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1(t), e_y(t)) = & -e_1^T(t) \hat{Q} e_1(t) - e_y^T(t) Q_2 e_y(t) + e_1^T(t) \bar{A}_{21}^T P_2 e_y(t) + \\ & e_y^T(t) P_2 \bar{A}_{21} e_1(t) + 2e_y(t)^T P_2 \nu(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_2 \xi(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

On peut vérifier aisément que :

$$\begin{aligned} & (e_y(t) - Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21} e_1)^T Q_2 (e_y(t) - Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21} e_1) = \\ & e_y^T(t) Q_2 e_y(t) - e_1^T(t) \bar{A}_{21}^T P_2 e_y(t) - e_y(t)^T P_2 \bar{A}_{21} e_1(t) + e_1^T(t) \bar{A}_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21} e_1(t) \end{aligned} \quad (2.75)$$

En utilisant la relation (2.75), la dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1(t), e_y(t)) = & -e_1^T(t) \hat{Q} e_1(t) + e_1^T(t) \bar{A}_{21}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21} e_1(t) - \\ & \tilde{e}_y^T(t) Q_2 \tilde{e}_y(t) + 2e_y^T(t) P_2 \nu(t) - 2e_2^T P_2 \bar{R}_2 \xi(x, u, t) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{e}_y(t) = e_y(t) - Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21} e_1(t)$

En utilisant l'équation (2.72), la dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\dot{V}(e_1(t), e_y(t)) = -e_1^T(t) Q_1 e_1(t) - \tilde{e}_y^T(t) Q_2 \tilde{e}_y(t) + 2e_y^T(t) P_2 \nu(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_2 \xi(x, u, t)$$

1. Supposons que l'erreur de sortie  $e_y(t)$  soit non nulle. En utilisant l'expression (2.65) de la variable  $\nu(t)$ , la dérivée de la fonction  $V$  devient :

$$\dot{V}(e_1(t), e_y(t)) = -e_1^T(t)Q_1e_1(t) - \tilde{e}_y^T(t)Q_2\tilde{e}_y(t) - 2\rho \|\bar{R}_2\| \|e_y^T(t)P_2\| - 2e_y^T(t)P_2\bar{R}_2\xi(x, u, t)$$

En utilisant le fait que les entrées inconnues sont bornées, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1(t), e_y(t)) &\leq -e_1^T(t)Q_1e_1(t) - \tilde{e}_y^T(t)Q_2\tilde{e}_y(t) - 2\rho \|\bar{R}_2\| \|e_y^T(t)P_2\| + 2\rho \|\bar{R}_2\| \|e_y^T(t)P_2\| \\ &\leq -e_1^T(t)Q_1e_1(t) - \tilde{e}_y^T(t)Q_2\tilde{e}_y(t) < 0 \\ &\text{pour } (e_1(t), \tilde{e}_y(t)) \neq 0 \end{aligned}$$

2. Supposons maintenant que l'erreur de sortie soit nulle, la fonction  $\dot{V}(t)$  s'écrit alors :

$$\dot{V}(e_1(t), e_y(t)) = -e_1^T(t)Q_1e_1(t) - \tilde{e}_y^T(t)Q_2\tilde{e}_y(t) < 0$$

On a donc démontré que les erreurs  $e_1(t)$  et  $e_y(t)$  tendent vers zéro de façon asymptotique.

En résumé, pour le système dynamique incertain :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\xi(x, u, t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.76)$$

tel que  $\|\xi(x, u, t)\| \leq \rho$ , l'observateur proposé permettant de s'affranchir des incertitudes s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu - G_l(\hat{y}(t) - y(t)) + G_n\nu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.77)$$

$$\begin{cases} G_l = (\bar{T}\tilde{T})^{-1} \begin{pmatrix} \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{22} - \bar{A}_{22}^s \end{pmatrix}, \quad G_n = (\bar{T}\tilde{T})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix} \\ \nu(t) = \begin{cases} -\rho \|\bar{R}_2\| \frac{P_2Ce(t)}{\|P_2Ce(t)\|} & \text{si } Ce(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \end{cases} \quad (2.78)$$

La structure de l'observateur (2.77) est différente de celle de Walcott et Zak [Walc 88] (2.36) et (2.37), la variable glissante  $\nu(t)$ , qui compense les incertitudes du système (2.42), dépend de l'erreur de l'estimation de la sortie  $e_y(t)$ .

## 2.7 Conclusion

Dans cette section, nous avons montré l'utilisation du mode glissant dans la conception des observateurs pour une classe de systèmes linéaires incertains. Nous avons considéré la conception selon Walcott et Zak. L'inconvénient de cette méthode réside dans le calcul de la variable glissante, car dans le cas où la matrice  $F$  (2.35) est orthogonale au vecteur  $Ce(t)$ , la convergence de l'observateur n'est pas garantie. Pour remédier à ce problème, Edwards et Spurgeon ont élaboré un observateur, en utilisant la forme canonique du système, basé sur la structure de l'observateur de Walcott et Zak où le calcul de la variable glissante dépend de l'existence de quelques matrices appropriées et de l'erreur de sortie afin de résoudre cette difficulté. Enfin, nous avons montré que le problème de la convergence d'un observateur à mode glissant peut se traduire par un problème de type LMI.



# 3

## Sur l'analyse des systèmes multimodèles

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>63</b>
<b>3.2</b>	<b>Obtention d'une structure multimodèle</b>	<b>64</b>
<b>3.3</b>	<b>Différentes structures multimodèle</b>	<b>65</b>
3.3.1	Structure couplée	65
3.3.2	Structure découplée	66
3.3.3	Structure hiérarchisée	67
3.3.4	Recherche des modèles locaux par identification	68
3.3.5	Recherche des modèles locaux par linéarisation	69
<b>3.4</b>	<b>Optimisation paramétrique</b>	<b>70</b>
3.4.1	Algorithme du gradient	71
3.4.2	Algorithme de Newton	71
3.4.3	Algorithme de Gauss-Newton	71
<b>3.5</b>	<b>Exemple d'illustration</b>	<b>72</b>
<b>3.6</b>	<b>Stabilité des multimodèles</b>	<b>76</b>
3.6.1	Stabilité quadratique	76
3.6.2	Stabilité relaxée	77
<b>3.7</b>	<b>Stabilité des multimodèles incertains</b>	<b>78</b>

<b>3.8</b>	<b>Modélisation d'un système non linéaire industriel par un multimodèle . . . . .</b>	<b>80</b>
3.8.1	Description du système "turbo-réacteur" . . . . .	80
3.8.2	Représentation du turbo-réacteur par un multimodèle . . . . .	83
3.8.3	Simulation du modèle du turboréacteur . . . . .	94
3.8.4	Conclusion . . . . .	94

---

## 3.1 Introduction

La modélisation représente l'indispensable étape préliminaire à la conduite de processus industriels. Cette étape fondamentale est nécessaire que ce soit pour l'élaboration d'une loi de commande ou bien pour le développement d'une procédure de diagnostic. La modélisation d'un processus vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter d'une manière rigoureuse le comportement de ce processus dans un domaine de fonctionnement donné.

En fonction des connaissances a priori sur le processus à étudier, on peut envisager différents types de modèles en vue de représenter son comportement. Dans ce rapport, on se limitera à l'étude de la modélisation par l'approche multimodèle.

L'approche multimodèle a connu un intérêt certain depuis la publication des travaux de Johansen et Foss [Joha 92]. L'idée de l'approche multimodèle est d'appréhender le comportement non linéaire d'un système par un ensemble de modèles locaux (linéaires ou affines) caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement.

La motivation de cette approche découle du fait qu'il est souvent difficile de concevoir un modèle qui tient compte de toute la complexité du système étudié. Au départ, certains auteurs ont essayé de représenter des systèmes non linéaires avec des modèles linéaires par morceaux construits à partir d'un arbre de décision. Il en résulte une approximation discontinue du système due aux commutations entre les différents modèles linéaires. Malheureusement ces discontinuités peuvent être indésirables dans la majorité des applications industrielles. Pour remédier à ce problème, il est préférable d'assurer un passage progressif d'un modèle à un autre. On substitue aux fonctions de commutation à front raide des fonctions à pente douce, ce qui crée un chevauchement entre les zones de validité des modèles. Dans ce cas, les fonctions de commutation deviennent des fonctions à dérivées continues dont la pente détermine la vitesse de passage d'un modèle à un autre.

En 1985, Takagi et Sugeno ont proposé un modèle flou d'un système constitué d'un ensemble de règles "si prémisse alors conséquence", telle que la conséquence d'une règle est un modèle affine. Le modèle global s'obtient par l'agrégation des modèles locaux. Quelques années après, Jacob et al [Jaco 91] ont présenté l'approche multi-experts qui est la combinaison de différents experts par l'entremise de fonctions d'activation, tel qu'un expert est un modèle décrivant le comportement local d'un système. L'ensemble de toutes ces techniques conduit à un modèle global d'un système qui est une combinaison de modèles localement valables.

L'identification d'une structure multimodèle concerne la recherche d'une structure optimale et l'estimation des paramètres. Dans ce chapitre, on s'intéressera au choix de la structure du multimodèle et à l'optimisation paramétrique qui consiste à estimer les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux. Les raisons qui nous ont conduit à choisir comme méthode de modélisation l'approche multimodèle sont multiples ; la structure multimodèle permet de simplifier et d'étudier aisément :

- la stabilité d'un système non linéaire, grâce à l'outil numérique LMI qui permet de trouver des solutions aux équations de Lyapunov.
- la synthèse des correcteurs (constitué par exemple d'un retour d'état pour chaque modèle local) et la synthèse des multiobservateurs.

## 3.2 Obtention d'une structure multimodèle

Les multimodèles représentent les systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement. Selon l'information dont on dispose, trois méthodes distinctes peuvent être utilisées pour l'obtention d'un multimodèle. Si l'on ne dispose que des mesures des entrées et sorties du système, on procède par identification [Gass 00a] et [Gass 00b] en cherchant ou en imposant la structure du multimodèle. Si, en revanche, on dispose d'un modèle non linéaire explicite que l'on souhaite "simplifier" ou rendre plus manipulable on pourra procéder par linéarisation autour de différents points de fonctionnement (dans ce cas, il s'agit de modèles locaux affines dû à la présence de la constante provenant de la linéarisation) [Joha 92] ou par transformation polytopique convexe.

Illustrons la seconde approche en considérant un système statique non linéaire (3.1), pour lequel nous cherchons à déterminer une représentation multimodèle permettant de décrire le comportement de ce système.

$$y(t) = F(x(t)) \tag{3.1}$$

Supposons qu'on dispose d'un ensemble de  $M$  modèles locaux  $f_i(x(t))$  descriptifs du comportement du système dans différentes zones de fonctionnement. Ces modèles peuvent être construits par exemple à partir de connaissances physiques sur le fonctionnement du système dans ces zones. La validité locale de chaque modèle  $f_i$  est indiquée par une fonction de validité  $\omega_i(x(t))$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$ . Le modèle global s'obtient de la manière

suivante :

$$y_m(t) = \frac{\sum_{i=1}^M \omega_i(x(t)) f_i(x(t))}{\sum_{j=1}^M \omega_j(x(t))} \quad (3.2)$$

posons :

$$\mu_i(x(t)) = \frac{\omega_i(x(t))}{\sum_{j=1}^M \omega_j(x(t))} \quad (3.3)$$

En combinant les équations (3.2) et (3.3), on obtient l'expression générale d'une structure multimodèle [Joha 93] :

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(x(t)) f_i(x(t)) \quad (3.4)$$

La fonction d'activation  $\mu_i(x(t))$  détermine le degré d'activation du  $i^{\text{ème}}$  modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multimodèle). Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions sont généralement de forme triangulaire, sigmoïdale ou Gaussienne, et doivent satisfaire les propriétés suivantes (convexité) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \mu_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.3 Différentes structures multimodèle

On peut énumérer différentes formes de multimodèles selon que l'on fait la segmentation sur l'entrée ou sur la sortie (i. e. sur les variables d'état mesurables) et aussi selon la nature du couplage entre les modèles locaux associés aux zones de fonctionnement. Cependant, on peut noter trois structures de multimodèles :

1. structure couplée,
2. structure découplée,
3. structure hiérarchisée.

#### 3.3.1 Structure couplée

La représentation multimodèle est obtenue par interpolation de  $M$  modèles locaux linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\mu_i(\xi(t))$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  sont les fonctions d'activation et  $\xi(t)$  est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et éventuellement de la commande  $u(t)$ . Cette structure est la plus utilisée en analyse bien qu'en synthèse des multimodèles.

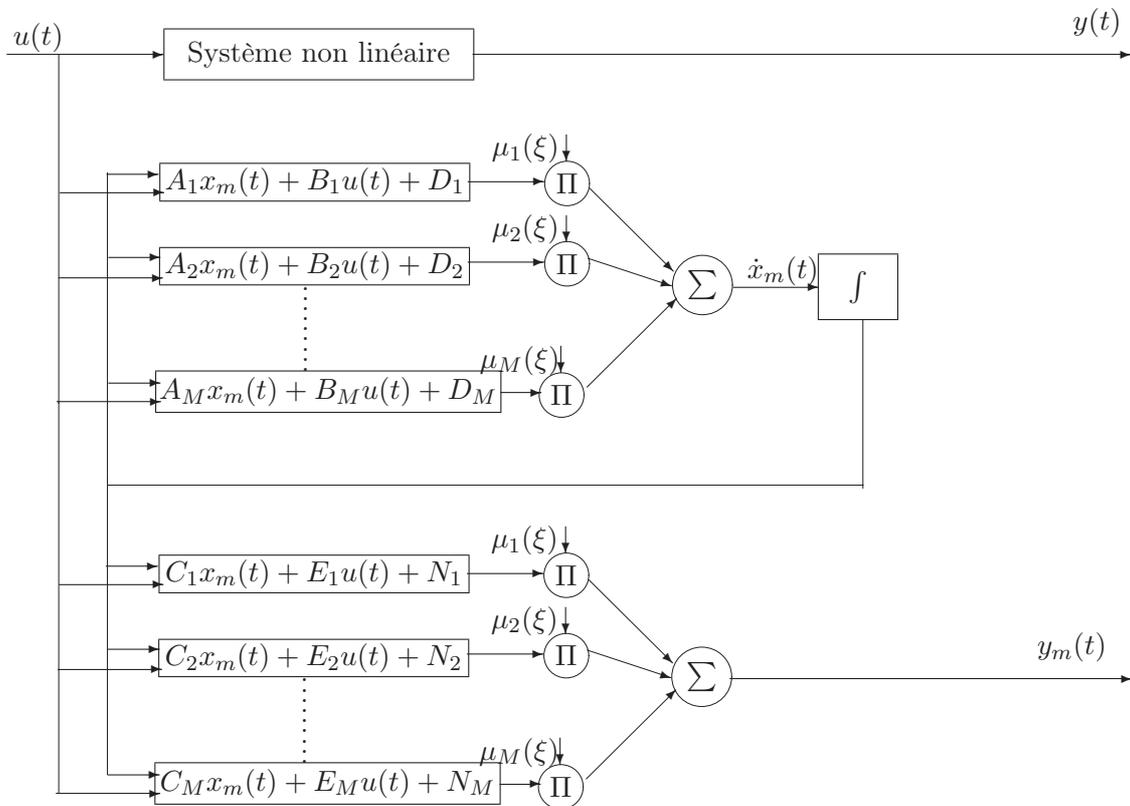


FIG. 3.1 – Architecture d'un multimodèle à modèles locaux couplés

### 3.3.2 Structure découplée

Une autre forme de multimodèle, proposée par Filev [File 91], résulte de l'agrégation de modèles locaux décrits d'une façon découplée. La différence entre cette structure et celle présentée au paragraphe précédent réside dans le fait que chaque modèle local est

indépendant de tous les autres (3.7) :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + D_i \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + E_i u(t) + N_i \end{cases} \quad (3.7)$$

Dans cette structure, la notion d'état local, correspondant à un domaine de fonctionnement, apparaît beaucoup clairement. Le multimodèle (modèle global) est ainsi donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) + D_i, & i \in \{1, \dots, M\} \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i x_i(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (3.8)$$

Rappelons que les variables locales  $x_i(t)$  n'ont pas forcément un sens physique. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $D_i$  ainsi que les fonctions d'activation  $\mu_i(\xi(t))$  sont calculées de la même façon que précédemment (structure couplée). Cette structure peut être vue comme la connexion parallèle de  $M$  modèles affines pondérés par leurs poids respectifs.

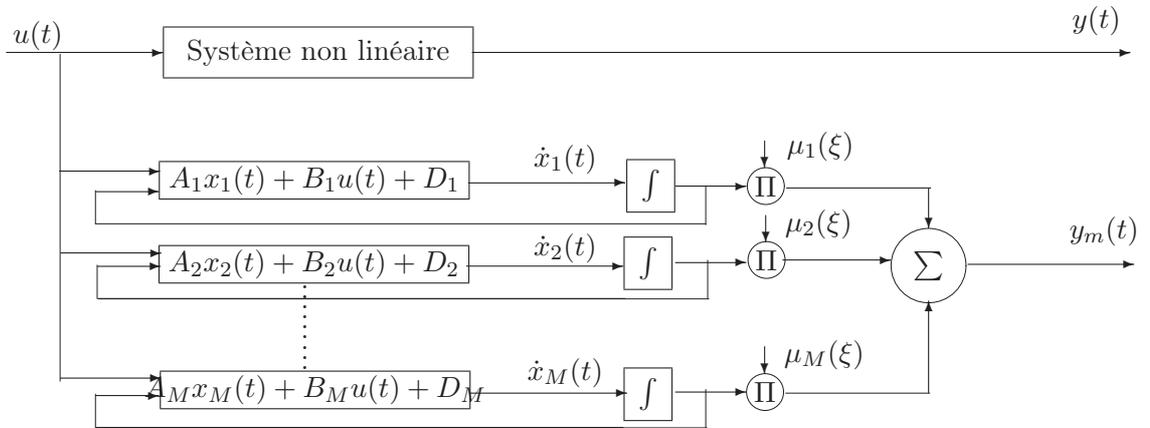


FIG. 3.2 – Architecture d'un multimodèle à modèles locaux découplés

### 3.3.3 Structure hiérarchisée

Bien que l'approche multimodèle ait connu un grand succès dans beaucoup de domaines (commande, diagnostic, ...), son application est limitée aux systèmes ayant peu de variables (dimension réduite). Le nombre de modèles locaux augmente d'une façon exponentielle avec l'augmentation du nombre de variables. Par exemple, un multimodèle à sortie unique avec  $n$  variables et  $m$  fonctions d'activation définies pour chaque variable

est composé de  $m^n$  modèles locaux. Les chercheurs ont étudié ce problème en utilisant différentes approches [Frie 81], [Brei 84] et [Hube 85].

Pour surmonter ce problème, Raju et al [Raju 91] ont proposé un multimodèle à structure hiérarchique afin de réduire le nombre de modèles locaux. La figure (1) montre un exemple typique d'un multimodèle hiérarchique qui comporte  $n$  entrées et  $n - 1$  sorties ; dans cette structure, les modèles locaux ont deux entrées chacun, le modèle global est alors composé de  $n$  modèles locaux ; pour plus de détails, voir [Wang 98], [Wei 00] et [Joo 02].

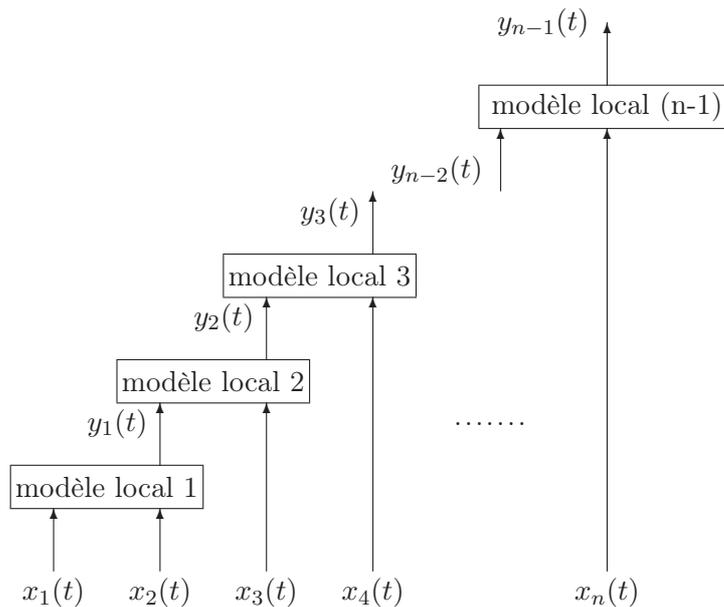


FIG. 3.3 – Architecture d'un multimodèle hiérarchique

### 3.3.4 Recherche des modèles locaux par identification

L'identification d'un système, en temps réel ou non, est une étape essentielle de n'importe quelle conception de système de commande ou de diagnostic. L'identification des systèmes linéaires a été étudiée depuis de très nombreuses années et beaucoup de méthodes permettent de conduire cette étude [Sark 84], [Knoc 86] et [Ljun 87].

Cependant, dans beaucoup de situations pratiques, l'hypothèse de linéarité ne peut pas être vérifiée et s'avère inappropriée en raison de l'existence d'éléments non linéaires et/ou variants dans le temps. Dans ce cas, il est difficile d'appliquer les méthodes conventionnelles d'identification. Ces dernières années, le développement de nouvelles méthodologies de commande dans le domaine de l'intelligence artificielle comme les réseaux de neurones et la théorie de la logique floue, ont fourni des outils alternatifs pour aborder le problème de l'identification des systèmes non linéaires [Gao 03], [Chen 03], [Ren 03], [Marc 02],

[Zhu 00], [Bout 00], [Griñ 00], [Hoja 00]. En particulier, depuis l'introduction de la notion de la logique floue par Zadeh [Zade 65], beaucoup de chercheurs ont montré l'intérêt de cette théorie pour l'identification des systèmes représentés par des multimodèles [Plam 04], [Drag 04], [Joha 03], [Abon 01], [Wu 99], [Joha 00].

En représentant un système non linéaire sous forme multimodèle, le problème de l'identification de systèmes non linéaires est réduit à l'identification des sous-systèmes définis par des modèles locaux linéaires. Les méthodes d'estimation basées sur les moindres carrés sont alors utilisées pour identifier les paramètres du multimodèle (modèles locaux) et ceux des fonctions d'activation. Cependant, cette méthode exige la connaissance des données entrées-sorties du système non linéaire autour de différents points de fonctionnement afin de pouvoir caractériser les modèles locaux.

### 3.3.5 Recherche des modèles locaux par linéarisation

Dans ce cas, on dispose de la forme analytique du modèle non linéaire du processus physique qu'on linéarise autour de différents points de fonctionnement judicieusement choisis [Abon 01] [Marc 99]. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = G(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $(F, G) \in \mathbb{R}^{2n}$  sont des fonctions non linéaires continues,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée. Par la suite, nous représenterons le système non linéaire (3.9) par un multimodèle, composé de plusieurs modèles locaux linéaires ou affines, tel que chaque modèle local est obtenu en linéarisant le système non linéaire autour d'un point de fonctionnement arbitraire  $(x_i, u_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

Dans ce cas, on considère le choix suggéré par Johansen et Foss [Joha 93], c'est-à-dire qu'on définit les modèles locaux comme le premier terme du développement en série de Taylor du système (3.9) [Gass 00b].

D'un point de vue mathématique, ceci correspond à approcher une fonction non linéaire par son plan tangent au point  $(x_i, u_i)$ . On suppose que les différents modèles locaux sont issus d'une linéarisation autour de  $M$  points de fonctionnement  $(x_i, u_i) \ i \in \{1, \dots, M\}$ . La formulation multimodèle est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (3.10)$$

avec

$$A_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad B_i = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad D_i = F(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i$$

$$C_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad E_i = \left. \frac{\partial G(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_i \\ u=u_i}}, \quad N_i = G(x_i, u_i) - C_i x_i - E_i u_i$$

Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux ( $M$ ) dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation, ces dernières devant satisfaire les propriétés (3.5).

### 3.4 Optimisation paramétrique

Lorsque le modèle du système est non linéaire par rapport aux paramètres, il n'existe pas de solution analytique afin d'estimer ces paramètres. On recourt à des techniques itératives d'optimisation non linéaire. Dans cette section, on s'intéresse à l'optimisation paramétrique d'une structure multimodèle.

Plusieurs méthodes d'optimisation peuvent être utilisées, selon les information disponibles a priori. Si la connaissance a priori sur les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux ne sont pas disponibles. Alors, ces paramètres doivent être optimisés au moyen d'une procédure itérative en raison des non-linéarités du modèle global (multimodèle) par rapport à ses paramètres.

Les méthodes d'identification de l'ensemble de tous les paramètres sont généralement basées sur la minimisation d'une fonctionnelle de l'écart entre la sortie estimée du multimodèle  $y_m(t)$  et la sortie mesurée du système  $y(t)$ . Le critère le plus utilisé est le critère qui représente l'écart quadratique entre les deux sorties indiquées.

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \theta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( y_m(t) - y(t) \right)^2 \quad (3.11)$$

où  $N$  est l'horizon d'observation et  $\theta$  est le vecteur de paramètres des modèles locaux et ceux des fonctions d'activation.

Les méthodes de minimisation du critère  $J(\theta)$  s'appuient, le plus souvent, sur un développement limitée du critère  $J(\theta)$  autour d'une valeur particulière du vecteur de paramètres  $\theta$  et d'une procédure itérative de modification progressive de la solution. Si l'on note  $k$  l'indice d'itération de la méthode de recherche et  $\theta(k)$  la valeur de la solution à l'itération  $k$ , la mise à jour de l'estimation s'effectue de la manière suivante :

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \eta D(k) \quad (3.12)$$

où  $\eta$  représente un facteur d'ajustement permettant de régler la vitesse de convergence vers la solution.  $D(k)$  est la direction de recherche dans l'espace paramétrique. Selon la façon dont  $D(k)$  est calculée, on distingue différentes méthodes d'optimisation dont les principales sont rappelées ci-dessus.

### 3.4.1 Algorithme du gradient

Cette méthode est basée sur un développement du critère  $J(\theta)$  (3.11) au premier ordre. La direction de recherche à l'itération  $k$  est spécifiée par le gradient  $G(\theta(k))$  du critère de la manière suivante :

$$D(k) = G(\theta(k)) = \left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta(k)} = \sum_{t=1}^N \left. \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta} \varepsilon(t, \theta) \right|_{\theta=\theta(k)} \quad (3.13)$$

$\eta$  dépend de la vitesse de convergence du critère. Généralement, il est calculé par une méthode heuristique qui consiste à augmenter  $\eta$  si le critère décroît et à le réduire dans le cas contraire [Gass 00b].

### 3.4.2 Algorithme de Newton

Cette fois, l'algorithme est basé sur le développement au deuxième ordre. La direction et le pas de recherche sont spécifiés simultanément par l'équation :

$$D(k) = H^{-1}(k)G(\theta(k)) \quad (3.14)$$

où  $H(k)$  est la matrice hessienne du critère défini par :

$$H(k) = \sum_{t=1}^N \left. \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta^T} + \sum_{t=1}^N \frac{\partial^2 \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta^2} \varepsilon(t, \theta) \right|_{\theta=\theta(k)} \quad (3.15)$$

Dans ce cas, le pas de recherche  $\eta = 1$ . L'inconvénient principal de cet algorithme réside dans le calcul de l'inversion du hessien à chaque itération.

### 3.4.3 Algorithme de Gauss-Newton

Afin de simplifier la méthode de Newton, On utilise une expression approchée du hessien en négligeant les termes du deuxième ordre, on obtient :

$$H_a = \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon(t, \theta)}{\partial \theta^T} \quad (3.16)$$

Le hessien étant défini positif, cet algorithme garantit la convergence vers un minimum. Cet algorithme est sensible au choix initial du vecteur des paramètres  $\theta$  et lorsque la dimension de l'espace des paramètres est très important, l'algorithme risque de converger vers des minimas locaux.

Dans ce mémoire, nous avons opté pour l'optimisation simultanée des paramètres des fonctions d'activation et des modèles locaux. Cette méthode présente l'inconvénient d'être lourde lorsque le nombre de paramètres est élevé. Les méthodes d'optimisation non linéaires sont très nombreuses et nous n'avons pas souhaité développer plus complètement cette partie. Notons cependant que Gasso a présenté plusieurs méthodes d'optimisation paramétrique d'une structure multimodèle [Gass 01], [Gass 00a] et [Gass 00b]. Pour simplifier le problème, soit il suppose que la position des points de fonctionnement est connue, soit il met en oeuvre une procédure à deux niveaux qui alterne entre l'optimisation du vecteur de paramètres des modèles locaux et celle du vecteur de paramètres des fonctions d'activation.

### 3.5 Exemple d'illustration

Soit à approcher un système dynamique non linéaire modélisé par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -u(t)x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t)x_1(t) + u(t) \end{cases} \quad (3.17)$$

Cet exemple illustre la mise en oeuvre de l'approximation d'un modèle non linéaire par plusieurs modèles locaux interpolés par des fonctions d'activation.

Pour cela, nous considérons un multimodèle composé de trois modèles locaux couplés et de trois fonctions d'activation de forme triangulaire.

$$\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(\xi(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \quad (3.18)$$

$$\text{avec : } x_m(t) = \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{bmatrix}$$

Les points de fonctionnement  $P_i$  initiaux sont choisis nuls, c'est-à-dire :

$$P_i = (x_{1i}, x_{2i}, u) = (0, 0, 0), \text{ pour } i \in \{1, \dots, 3\}$$

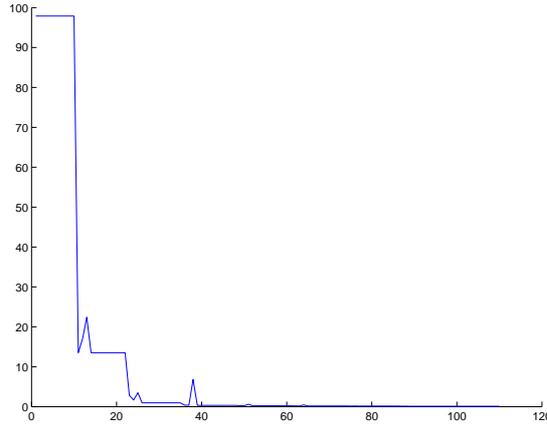


FIG. 3.4 – Evolution du critère d'optimisation

Le critère d'optimisation utilisé est défini par l'équation (3.11). La figure (3.4) montre la convergence du critère vers un minimum. Cette convergence est rapide, cela est dû au nombre réduit de modèles locaux ainsi que la dimension du modèle non linéaire. La mise à jour des paramètres a été effectuée par l'algorithme de Gauss-Newton en utilisant l'outil numérique "Matlab".

Les trois points de fonctionnement obtenus après optimisation sont :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.98 & 0.15 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.57 & 0.59 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0.99 & 1.39 & 0.97 \end{pmatrix}$$

Les matrices du multimodèle (3.18) sont alors :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.19 & 0 \\ -0.98 & -0.99 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.58 & 0 \\ -0.43 & -0.99 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.97 & 0 \\ -1.39 & -0.99 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0029 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0055 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.98 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.43 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0.96 \\ 1.39 \end{bmatrix}$$

La figure (3.5) montre l'évolution de l'entrée appliquée et les trois fonctions d'activation. Les figures (3.6) illustrent l'approximation des variables d'état du modèle non linéaire (3.17) par le multimodèle décrit par l'équation (3.18). Les figures (3.7) montrent la même approximation avec un modèle linéaire (multimodèle avec  $M = 1$ ).

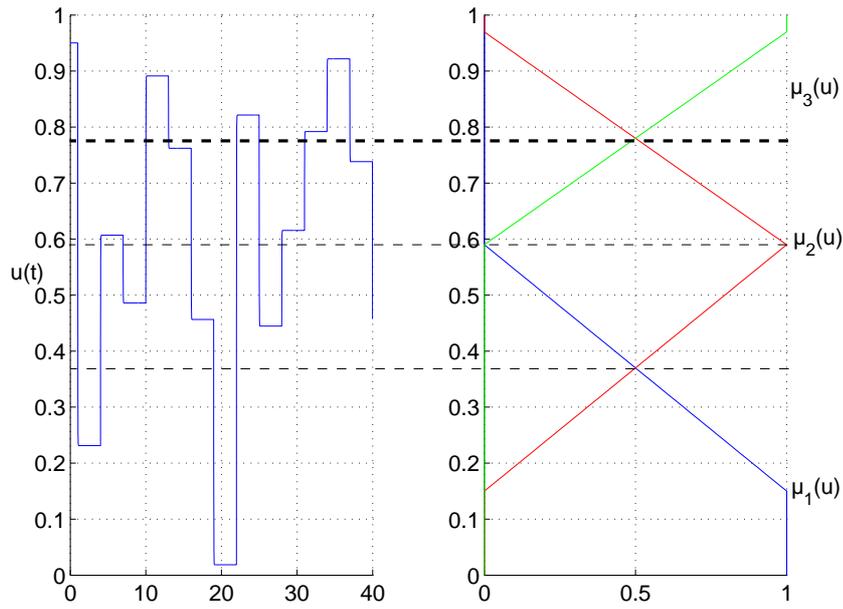


FIG. 3.5 – Entrée  $u(t)$  et les fonctions d'activation

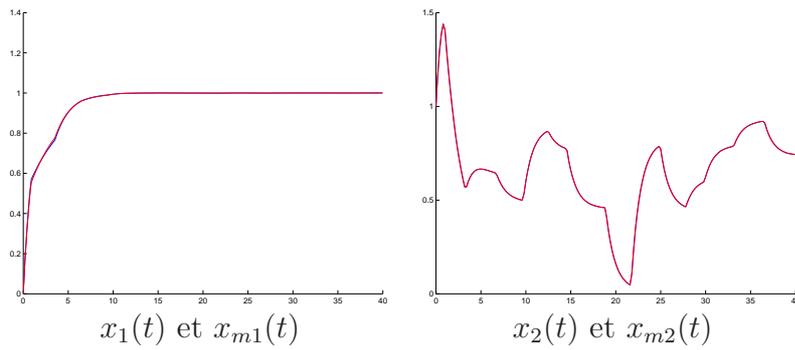


FIG. 3.6 – États du modèle non linéaire et ceux du multimodèle

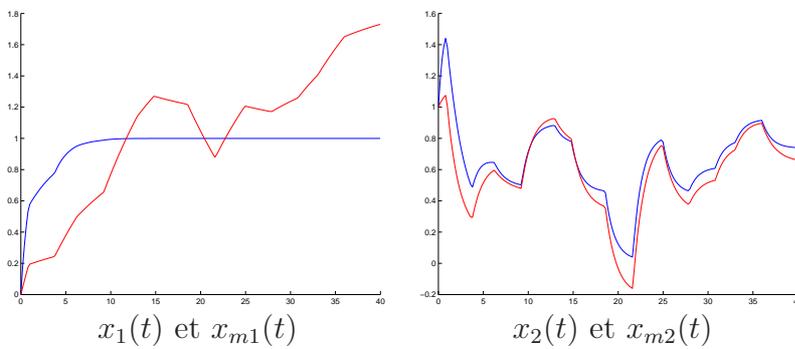


FIG. 3.7 – États du modèle non linéaire et ceux du modèle linéaire

Cette première partie du chapitre 3 a été consacrée à la présentation de l'approche multimodèle. Nous avons montré, à travers un exemple académique, la qualité de l'approximation d'un système dynamique non linéaire par un multimodèle.

Différentes structures de modèles locaux sont possibles : couplés (le plus couramment utilisé), découplés et hiérarchisés. Leur utilisation dépend de la nature et du cahier des charges de modélisation du phénomène.

## 3.6 Stabilité des multimodèles

La stabilité des multimodèles a été beaucoup étudiée. Tanaka et Sugeno ont présenté des conditions suffisantes de la stabilité [Tana 92] en utilisant une fonction quadratique de Lyapunov. La stabilité dépend de l'existence d'une matrice commune, symétrique et définie positive, qui garantit la stabilité de tous les modèles locaux. Ces conditions de stabilité peuvent être exprimées en utilisant des inégalités linéaires matricielles (LMI) [Boyd 94]. Dans cette section, nous présentons quelques conditions suffisantes de stabilité des multimodèles. L'approche proposée tout au long de ce mémoire repose sur les fonctions de Lyapunov quadratiques. Il s'agit de chercher une matrice symétrique et définie positive et sa fonction de Lyapunov associée telles que certaines conditions simples garantissent les propriétés de stabilité.

### 3.6.1 Stabilité quadratique

Considérons un système non linéaire en boucle ouverte et représenté sous forme multimodèle par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (3.19a)$$

$$\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_i(\xi(t)) \geq 0 \quad (3.19b)$$

Selon Tanaka et Sugeno [Tana 92], la stabilité d'un système représenté par l'équation (3.19) peut être vérifiée en utilisant le théorème suivant.

**Théorème 3.1** : *le multimodèle (3.19) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive telle que les LMI suivantes sont vérifiées [Boyd 94], [Tana 98] et [Chad 02] :*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.20)$$

Ce théorème offre une condition suffisante pour assurer la stabilité asymptotique du multimodèle (3.19). L'inégalité matricielle (3.20) peut être résolue en utilisant des outils numériques LMI. Ce résultat est obtenu en dérivant, le long de la trajectoire du multimodèle (3.19), la fonction de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$  (voir chapitre 1). L'existence de la matrice de Lyapunov  $P$  dépend de deux conditions :

- la première est liée à la stabilité de tous les modèles locaux. Il est nécessaire que chaque matrice  $A_i$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  ait des valeurs propres dans le demi-plan gauche du plan complexe.

- la deuxième condition est relative à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune aux  $M$  modèles locaux.

### 3.6.2 Stabilité relaxée

Dans le paragraphe précédent, l'existence d'une matrice, symétrique et définie positive  $P$ , commune pour toutes les inégalités (3.20) est indispensable pour assurer la stabilité asymptotique du multimodèle (3.19). Cependant, si le nombre de modèles locaux est grand, il peut être difficile de trouver une matrice commune qui garantisse la stabilité simultanée de tous les modèles locaux. De plus, ces contraintes sont souvent très conservatrices et il est bien connu que, dans beaucoup de cas, une matrice symétrique et définie positive commune n'existe pas, alors que le système (3.19) est stable.

Pour surmonter ce problème, de nombreux travaux ont été développés afin d'établir des conditions de stabilité relaxant certaines des contraintes précédentes. Par exemple, Johanson et al [Joha 98] considèrent une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux. Chai et al [Chai 98] ont proposé des conditions de stabilité asymptotique dépendantes de la nature de l'entrée et de la dynamique de la sortie. Jadbabaie [Jadb 99] utilise une fonction de Lyapunov non quadratique.

En utilisant la technique de Lyapunov et la formulation LMI, Chadli et al [Chad 00] [Chad 01] ont également établi des conditions suffisantes de stabilité asymptotique d'un multimodèle (3.19).

Afin de réduire le conservatisme de l'approche quadratique (fonction de Lyapunov quadratique), Chadli et al [Chad 02] ont présenté d'autres conditions de stabilité en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques de la forme :

$$V_i(x(t)) = x^T(t) P_i x(t), \quad i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.21a)$$

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_M(x(t))) \quad (3.21b)$$

où  $P_i$  sont des matrices symétriques et définies positives.

**Théorème 3.2** [Chad 02] : *supposons qu'il existe des matrices symétriques et définies positives  $P_i$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  et des scalaires positifs  $\tau_{ijk}$ , vérifiant les inégalités suivantes :*

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^M \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.22)$$

*alors le multimodèle (3.19) est globalement asymptotiquement stable.*

Ce résultat annoncé par Chadli et al [Chad 01] n'exige pas l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune aux différents modèles locaux et ne s'appuie que sur les fonctions locales de Lyapunov pour assurer la stabilité asymptotique globale du multimodèle (3.19), pour la démonstration du théorème le lecteur peut se référer à [Chad 02].

### 3.7 Stabilité des multimodèles incertains

Dans les paragraphes précédents, nous avons rappelé quelques conditions de stabilité concernant les systèmes non linéaires certains représentés sous forme multimodèle. Or, lorsque ces derniers sont soumis à l'influence de perturbations ou bien d'incertitudes de modèle, les conditions de stabilité trouvées (3.20) et (3.22) ne sont plus valables. Pour cela, considérons le multimodèle suivant, présentant des incertitudes sur les matrices d'état locales.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i + \Delta A_i(t))x(t) \quad (3.23)$$

où les matrices  $\Delta A_i(t)$  sont des matrices inconnues et variables dans le temps, la seule information dont nous disposons est la suivante :

$$\|\Delta A_i(t)\| \leq \delta_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.24)$$

où  $\delta_i$  est un scalaire positif.

**Théorème 3.3** *le multimodèle incertain (3.23) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique est définie positive  $P$  et un scalaire positif  $\beta$  solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$A_i^T P + P A_i + \beta P^2 + \beta^{-1} \delta_i^2 I_{n \times n} < 0, \quad \beta > 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.25)$$

**Preuve :** Fan et al [Fan 02] ont démontré la stabilité d'un système linéaire incertain avec retard. Dans cette partie, nous nous appuyons sur les travaux de ces derniers ainsi que ceux de Tanaka [Tana 01] afin de trouver les conditions suffisantes de stabilité asymptotique du multimodèle incertain (3.23). Pour cela, nous avons choisi la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

Sa dérivée par rapport aux temps le long de la trajectoire du système (3.23) est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( x^T(t) \left( (A_i + \Delta A_i(t))^T P + P (A_i + \Delta A_i(t)) \right) x(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( x^T(t) (A_i^T P + P A_i) x(t) + x^T(t) \Delta A_i^T(t) P x(t) + x^T(t) P \Delta A_i(t) x(t) \right) \end{aligned}$$

Pour continuer la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1** : pour toutes les matrices  $X$  et  $Y$  ayant des dimensions appropriées, la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \beta X^T X + \beta^{-1} Y^T Y, \text{ avec } \beta > 0 \quad (3.26)$$

En utilisant la relation (3.26) donnée par lemme précédent, la dérivée de la fonction de Lyapunov peut être majorée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( x^T(t) (A_i^T P + P A_i + \beta P^2) x(t) + \beta^{-1} x^T(t) \Delta A_i^T(t) \Delta A_i(t) x(t) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( x^T(t) (A_i^T P + P A_i + \beta P^2 + \beta^{-1} \delta_i^2 I_{n \times n}) x(t) \right) \end{aligned}$$

Donc, s'il existe une matrice  $P$  symétrique, définie positive et solution des inégalités (3.25), alors la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative ce qui garantit la stabilité du multimodèle (3.23). Les inégalités (3.25) sont non linéaires ; en utilisant le complément de Schur [Boyd 94], elles deviennent :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + \beta^{-1} \delta_i^2 I_{n \times n} & P \\ P & -\beta^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (3.27)$$

et peuvent donc être traitées par des outils LMI.

Dans cette section, après avoir rappelé quelques résultats concernant la stabilité quadratique des multimodèles, en s'appuyant sur l'étude de la stabilité des systèmes linéaires incertains, nous avons montré que la stabilité des multimodèles présentant des incertitudes de modèles bornées en norme est garantie sous réserve de l'existence d'une matrice de Lyapunov  $P$  et d'un scalaire positif  $\beta$  vérifiant l'inégalité linéaire matricielle (3.27).

## 3.8 Modélisation d'un système non linéaire industriel par un multimodèle

### 3.8.1 Description du système "turbo-réacteur"

Le développement de l'électronique et de l'informatique a favorisé l'utilisation de modèles mathématiques dans les domaines des sciences de l'ingénierie. L'aéronautique et plus particulièrement les constructeurs de moteurs d'avions n'ont pas échappé à cette règle. Les modèles peuvent être conçus pour répondre à des objectifs divers : dimensionnement, régulation, simulation, diagnostic, aide à la maintenance... Dans ce qui suit, les modèles ont comme finalité l'aide au diagnostic et à la validation des mesures.

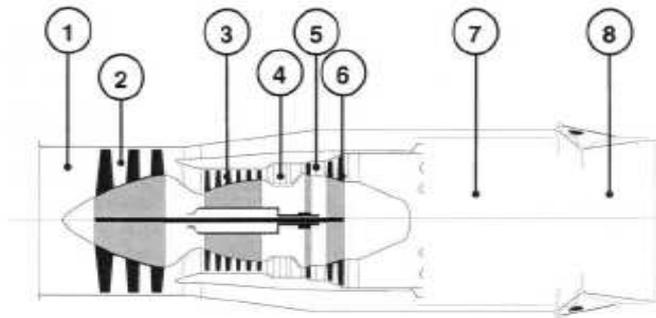


FIG. 3.8 – Section d'un turbo-réacteur

Nous nous intéressons à la modélisation d'un turboréacteur double corps. Ce type de moteur représenté par la figure (3.8) se décompose en plusieurs éléments :

- roue directrice d'entrée (1),
- compresseur basse pression (BP)(2),
- compresseur haute pression (HP) (3),
- chambre de combustion (4),
- turbine HP (5),
- turbine BP (6),
- canal d'éjection (7),
- tuyère variable existante sur certains moteurs militaires (8).

Nous rappelons succinctement le fonctionnement du moteur. L'air admis à l'entrée du moteur est contrôlé par la roue directrice d'entrée, puis compressé par les deux étages de compression (BP et HP). Ces derniers permettent à l'air d'atteindre la pression nécessaire

pour avoir une bonne combustion du mélange air-carburant dans la chambre. Le gaz ainsi chauffé prend de la vitesse et entraîne les turbines en rotation. Chaque turbine entraîne mécaniquement les compresseurs en rotation. Le gaz est ensuite détendu dans le canal d'éjection et la tuyère, ce qui a pour effet de lui donner plus de vitesse.

Le moteur possède un grand nombre d'équipements tel que les actionneurs et les capteurs qui permettent le changement et la surveillance de son état thermodynamique. Les capteurs sont destinés à la mesure du régime de rotation des compresseurs, des pressions et températures en différents points du moteur. Les principaux actionneurs sont : la vanne de débit carburant et les vérins des géométries variables (i.e. permettant de modifier la géométrie des étages compresseurs).

Le milieu des années 1960 et le début des années 1970 voient apparaître les premières publications parlant de modèles utiles à la commande. En 1971, Mueller [Muel 71] conçoit un modèle linéaire d'un réacteur double corps qui permet de trouver les conditions générales de stabilité, d'observabilité et de commandabilité du réacteur. A partir des années 1980, on voit apparaître les premiers travaux de régulation totalement numériques ; dès lors l'utilisation d'un modèle est devenu indispensable. Récemment, de nombreux auteurs utilisent cette notion de modèle pour faire de la commande [Häre 97] et [Trev 03], ou de diagnostic qui utilisent des modèles soit pour des simulations du moteur ou directement pour la détection et la localisation de défauts du moteur [Wu 04] et [Savy 03].

Il existe plusieurs types de modèles chez les motoristes : les modèles thermodynamiques stabilisés (statique), les modèles thermodynamiques transitoires, les modèles de corrélation des mesures et les modèles linéarisés en différents points de fonctionnement. Le modèle thermodynamique stabilisé est une représentation des phénomènes thermiques et thermodynamiques des différents étages du moteur lors du fonctionnement en régime stabilisé : chaque étage est relié au suivant par des équations de continuité. Le modèle thermodynamique transitoire est une représentation dynamique des phénomènes transitoires (essentiellement les échanges thermiques) entre les étages suivant : compresseur HP, chambre de combustion et turbine HP. Les modèles de corrélation entre les mesures sont des représentations polynomiales d'une mesure en fonction d'autres mesures aux instants précédents. Le modèle linéarisé en différents points de fonctionnement est souvent issu de la linéarisation des modèles thermodynamiques. Les deux premiers modèles sont utilisés pour dimensionner les étages du moteur en fonction des performances attendues par le client, et aussi pour la synthèse des correcteurs des asservissements.

Le moteur d'un avion est un système fortement non linéaire qu'il est difficile de représenter sans l'utilisation de tables de données ou d'algorithmes de commutation. La présence de

discontinuités dans les modèles n'est pas sans poser des problèmes de robustesse dans la régulation, ou dans la prise de décision en diagnostic. De plus, les méthodes du domaine de la commande et du diagnostic s'appuient de préférence sur des modèles analytiques continus (en opposition aux systèmes à événement discrets) entre les états et leur dérivées et entre les sorties et les états.

Nous nous sommes donc penchés sur la conception d'un modèle permettant d'obtenir des relations analytiques entre les états, leurs dérivées et la commande. La base de travail est un modèle non linéaire, présentant des coefficients fonctions d'une variable d'état données par le tableau (1), fourni par Snecma Moteur qui décrit de façon très succincte un moteur d'avion civil double corps. Nous avons donc un modèle SIMO (*Single Input Multiple Output*) qui est représenté par deux équations dynamiques :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = K_1(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_2(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) \\ \dot{x}_2(t) = K_3(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_4(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) \end{cases} \quad (3.28)$$

et par quatre équations statiques de sortie qui correspondent à quatre capteurs disponibles sur le réacteur :

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \\ y_3(t) = K_5(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_6(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) + y_{3R}(x_1(t)) \\ y_4(t) = K_7(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_8(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) + y_{4R}(x_1(t)) \end{cases} \quad (3.29)$$

Dans les équations des systèmes (3.28) et (3.29),  $x_1(t)$  représente le régime du compresseur basse pression,  $x_2(t)$  le régime du compresseur haute pression,  $y_3(t)$  la pression statique à la sortie du compresseur,  $y_4(t)$  la température de la chambre de combustion et  $u(t)$  le débit carburant. Les fonctions  $K_i(x_1(t))$ ,  $y_{2R}(x_1(t))$ ,  $y_{3R}(x_1(t))$ ,  $y_{4R}(x_1(t))$  et  $u_R(x_1(t))$  seront appelées dans la suite de cette thèse : *fonction coefficient*.

Les expressions analytiques des fonctions coefficients ne sont pas connues, par contre les valeurs de ces fonctions sont fournies pour 8 points de fonctionnement (voir tableau (3.1)). Pour des raisons de confidentialité les valeurs numériques ont été modifiées par Snecma Control System, la cohérence numérique du système a été conservée. Ainsi, les régimes de rotation des compresseurs sont donnés en pourcentage. La pression est exprimée en Bar, la température en Kelvin et le débit carburant en kg/s. Notre but est d'obtenir un modèle non linéaire qui décrit le fonctionnement du moteur en tous points. Nous allons pour cela utiliser la représentation multimodèle.

$x_1(t)$	33.58	49.30	59.60	64.46	75.02	79.89	89.19	93.48
$K_1$	0.8674	1.5000	2.2186	2.2989	1.8728	1.4068	1.2300	1.1320
$K_2$	0.04799	0.06927	0.07049	0.07255	0.07065	0.06575	0.06792	0.06931
$K_3$	-0.3266	-0.7633	-1.2828	-1.400	-1.1087	-0.9261	-1.1446	-1.2441
$K_4$	0.04884	0.04691	0.04237	0.03972	0.03521	0.03215	0.02889	0.02862
$K_5$	0.0615	0.1001	0.1416	0.1445	0.0998	0.07525	0.06125	0.05812
$K_6$	0.002531	0.003234	0.003161	0.003030	0.002917	0.003106	0.003054	0.003063
$K_7$	-9.23	-8.55	-9.83	-9.54	-5.625	-3.506	-1.656	-2.162
$K_8$	1.9926	1.1441	0.8702	0.7406	0.5477	0.4710	0.3578	0.3177
$y_{2R}$	56.94	69.09	74.25	76.80	82.50	86.93	93.11	95.03
$y_{3R}$	2.667	4.225	5.543	6.452	8.642	10.01	12.76	14.06
$y_{4R}$	630.0	649.3	680.5	712.5	776.5	824.2	899.5	930.2
$u_R$	155.1	259.0	364.3	451.6	675.9	840.4	1178.3	1346.9

TAB. 3.1 – Tableau des valeurs des fonctions coefficients

Par la suite, on considère que :  $y_{2R}(x_1) = K_9(x_1)$ ,  $y_{3R}(x_1) = K_{10}(x_1)$ ,  $y_{4R}(x_1) = K_{11}(x_1)$  et  $U_R(x_1) = K_{12}(x_1)$ .

### 3.8.2 Représentation du turbo-réacteur par un multimodèle

Dans la première partie de ce paragraphe, nous allons montrer comment, à partir des données entrées/sorties du tableau (3.1), approcher chaque fonction coefficient  $K_i(x_1)$ ,  $i = \{1, \dots, 12\}$  par un multimodèle. Les paramètres de chaque modèle local et ceux des fonctions d'activation sont identifiés par rapport aux différents points de fonctionnement, voir le tableau (3.1).

#### 3.8.2.1 Représentation multimodèle des fonctions coefficients

Avant de passer à l'approximation du modèle non linéaire par un multimodèle, une modélisation des fonctions coefficients semble donc une étape indispensable. Pour cela, on va modéliser les fonctions coefficients  $K_i(x_1)$  par des multimodèles composés de plusieurs modèles locaux. Chaque modèle local est valide dans un domaine de fonctionnement. La formulation mathématique de chaque fonction coefficient est donnée par l'équation :

$$\hat{K}_i(x_1(t)) = \sum_{j=1}^M \mu_{ij}(x_1(t))(\alpha_{ij}x_1(t) + \beta_{ij}), \quad i = \{1, \dots, 12\} \quad (3.30)$$

où  $\hat{K}_i(x_1)$  représente l'approximation des fonctions coefficients  $K_i(x_1(t))$ , l'indice  $i$  est relatif à la  $i^{\text{ème}}$  fonction coefficient, l'indice  $j$  correspond au  $j^{\text{ème}}$  modèle local de la fonction coefficient correspondante et  $M$  est le nombre de modèles locaux calculé d'une façon empirique. Les paramètres  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  ainsi que ceux des fonctions d'activation  $\mu_{ij}(x_1(t))$  sont à identifier par les méthodes d'optimisation paramétrique existantes. Notons que ces fonctions d'activation sont choisies dérivables et elles sont de forme gaussienne et sigmoïdale.

La méthode d'optimisation que nous avons choisie est basée sur la minimisation du critère quadratique défini par :

$$J_i(\theta) = \frac{\sum_{t=1}^N \left( K_i(x_1(t)) - \hat{K}_i(x_1(t)) \right)^2}{\sum_{t=1}^N \left( K_i(x_1(t)) \right)^2} \quad (3.31)$$

où  $J_i$  est le critère à minimiser relatif à la  $i^{\text{ème}}$  fonction coefficient,  $\theta = [\alpha_{ij} \quad \beta_{ij}]$  représente le vecteur des paramètres à identifier et  $N = 8$  est le nombre de régimes de fonctionnement <sup>1</sup>.

Les fonctions coefficients  $K_i(x_1(t))$  ayant des dynamiques différentes les unes des autres, la structure des multimodèles à construire sera différente pour chaque fonction coefficient.

M	$J_6$	$J_5$	$J_4$	$J_3$	$J_2$	$J_1$
4	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$8.47 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$	$6.86 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	0.012
2	$1 \cdot 10^{-4}$	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$2.78 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.035
1	$2.3 \cdot 10^{-3}$	0.074	$6.6 \cdot 10^{-4}$	0.23	$5.5 \cdot 10^{-3}$	3.86
M	$J_7$	$J_8$	$J_9$	$J_{10}$	$J_{11}$	$J_{12}$
4	$7.4 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$
3	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$2.9 \cdot 10^{-6}$	$5.1 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$
2	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$7.1 \cdot 10^{-6}$
1	$3.7 \cdot 10^{-3}$	0.015	0.04	$7.3 \cdot 10^{-5}$	0.007	0.001

TAB. 3.2 – Table comparative du critère  $J_i$

<sup>1</sup>L'indice de la somme de la formule (3.31) désigne en réalité le numéro du régime de fonctionnement parmi les 8 régimes correspondant aux 8 valeurs de  $x_1(t)$  du tableau (3.1)

Le tableau (3.2) montre qu'il existe une relation inversement proportionnelle entre le critère résiduel  $J_i$  (3.31) et le nombre  $M$  de modèles locaux choisis.

Cette étude comparative, aide au choix du nombre de modèles locaux pour une bonne approximation des fonctions coefficients  $K_i(x_1(t))$ . Le tableau (3.3) indique le nombre  $M$  de modèles locaux retenus pour chaque fonction  $\hat{K}_i(x_1(t))$  pour  $i = \{1, \dots, 12\}$ .

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$	$K_9$	$K_{10}$	$K_{11}$	$K_{12}$
M	3	3	3	2	3	3	3	2	2	2	2	2

TAB. 3.3 – Nombre de modèles locaux retenus pour chaque  $\hat{K}_i(x_1(t))$

Les paramètres  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  des modèles locaux obtenus après optimisation sont présentés sur le tableau (3.4).

Fonction $\hat{K}_i(x_1(t))$	$\alpha_{i1}$	$\alpha_{i2}$	$\alpha_{i3}$	$\beta_{i1}$	$\beta_{i2}$	$\beta_{i3}$
$\hat{K}_1(x_1(t))$	-0.04047	-0.00037	0.11230	5.0588	1.2314	-5.8506
$\hat{K}_2(x_1(t))$	-0.00003	0.00027	0.00134	0.07519	0.0424	0.00031
$\hat{K}_3(x_1(t))$	0.02394	-0.02435	0.028317	-3.04046	1.13799	-0.6829
$\hat{K}_4(x_1(t))$	0.00047	0.00085	-	-0.0234	0.04117	-
$\hat{K}_5(x_1(t))$	-0.00404	-0.00123	0.00234	0.4189	0.1777	-0.02158
$\hat{K}_6(x_1(t))$	-0.000049	-0.000002	0.000037	0.00590	0.00324	0.00122
$\hat{K}_7(x_1(t))$	-0.4575	0.66200	-1.5222	16.5531	-14.6319	13.8271
$\hat{K}_8(x_1(t))$	-0.05779	-0.0843	-	4.0511	12.5300	-
$\hat{K}_9(x_1(t))$	8.1252	4.8809	-	855.90	-17.841	-
$\hat{K}_{10}(x_1(t))$	0.6718	0.6578	-	34.157	31.048	-
$\hat{K}_{11}(x_1(t))$	-0.0474	0.0777	-	24.222	-0.0945	-
$\hat{K}_{12}(x_1(t))$	8.766	8.2391	-	370.93	124.52	-

TAB. 3.4 – Paramètres  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  des modèles locaux

**Remarque :** le choix de 4 modèles locaux pour tous les multimodèles,  $\hat{K}_i(x_1(t))$  pour  $i = \{1, \dots, 12\}$ , offre une très bonne approximation des fonctions coefficients, mais aussi une certaine complexité de modélisation et un grand nombre de paramètres à identifier. Nous avons donc fait un compromis entre ces trois dernières contraintes à savoir la complexité, le nombre de paramètres à identifier et la qualité de l'approximation.

Dans le cas d'une approximation à l'aide de trois modèles locaux  $j = 1, 3$ , les fonctions

d'activation  $\mu_{ij}$  ont été construites de la manière suivante :

$$\mu_{i1}(x_1(t)) = \frac{w_{i1}(x_1(t))}{\sum_{j=1}^3 w_{ij}(x_1(t))}, \quad \mu_{i2}(x_1(t)) = \frac{w_{i2}(x_1(t))}{\sum_{j=1}^3 w_{ij}(x_1(t))} \quad \text{et} \quad \mu_{i3}(x_1(t)) = \frac{w_{i3}(x_1(t))}{\sum_{j=1}^3 w_{ij}(x_1(t))}$$

$$w_{i1}(x_1(t)) = \exp\left(\frac{-(x_1(t) - B_{i1})^2}{2A_{i1}^2}\right), \quad w_{i2}(x_1(t)) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-A_{i2}}{x_1(t) - B_{i2}}\right)}$$

$$w_{i3}(x_1(t)) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-A_{i3}}{x_1(t) - B_{i3}}\right)}$$

Après identification, les paramètres obtenus sont regroupés dans la table (3.5).

	$\mu_{11}(x_1)$	$\mu_{12}(x_1)$	$\mu_{13}(x_1)$	$\mu_{21}(x_1)$	$\mu_{22}(x_1)$	$\mu_{23}(x_1)$	$\mu_{31}(x_1)$	$\mu_{32}(x_1)$	$\mu_{33}(x_1)$
A	-74.48	1.127	-0.312	4.120	0.110	-0.196	3.985	0.194	-0.691
B	38.651	80.254	58.656	75.673	96.139	36.225	73.016	88.548	43.464
	$\mu_{51}(x_1)$	$\mu_{52}(x_1)$	$\mu_{53}(x_1)$	$\mu_{61}(x_1)$	$\mu_{62}(x_1)$	$\mu_{63}(x_1)$	$\mu_{71}(x_1)$	$\mu_{72}(x_1)$	$\mu_{73}(x_1)$
A	5.110	0.519	-0.312	7.509	0.7488	-0.254	78.256	-0.158	-0.016
B	66.809	88.263	65.211	61.458	84.892	68.096	67.810	97.594	26.043

TAB. 3.5 – Paramètres des fonctions d'activation

Pour une approximation s'appuyant sur deux modèles locaux, les fonctions d'activation retenues sont :

$$\mu_{i1}(x_1(t)) = \exp\left(\frac{-(x_1(t) - b_{i1})^2}{2a_{i1}^2}\right) \quad \text{et} \quad \mu_{i2}(x_1(t)) = 1 - \mu_{i1}(x_1(t))$$

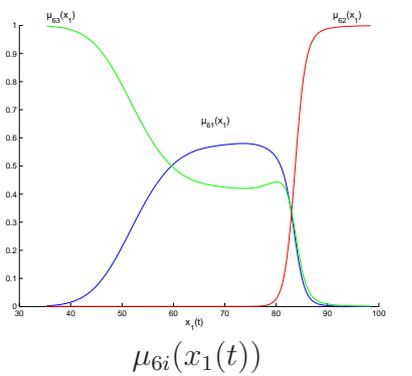
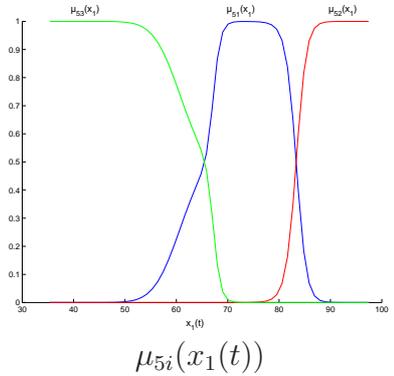
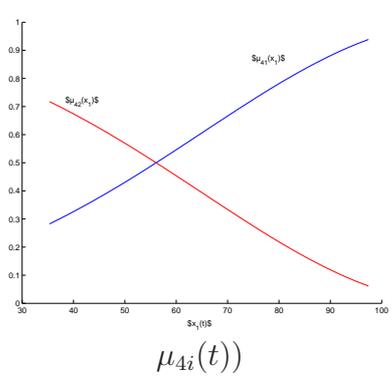
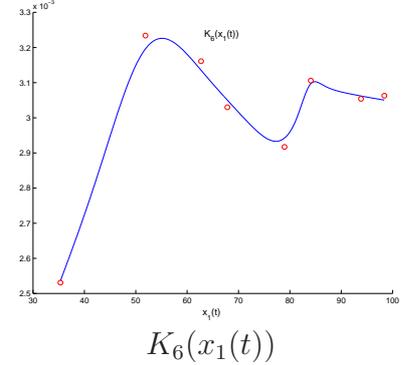
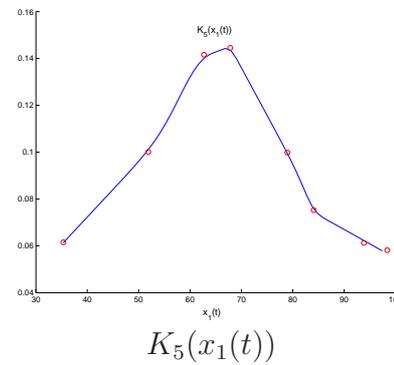
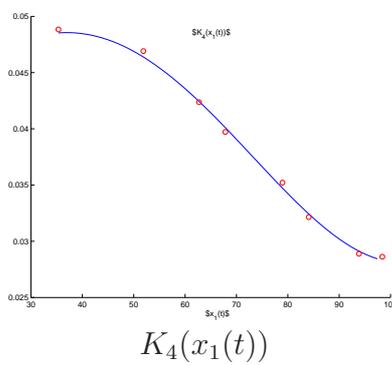
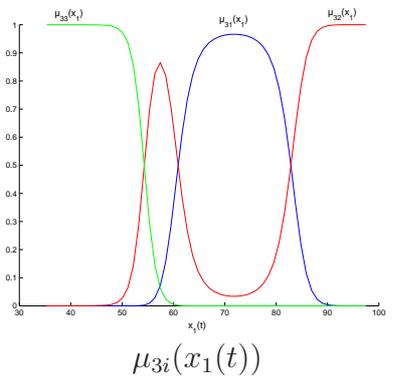
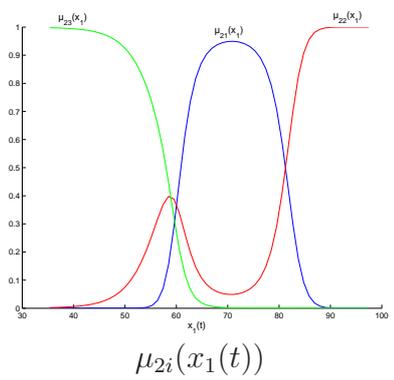
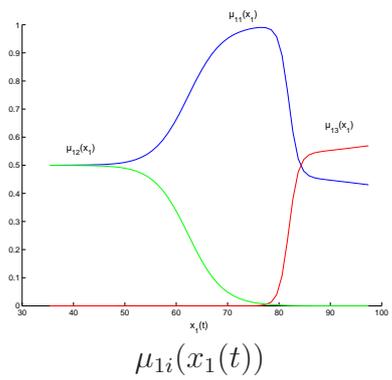
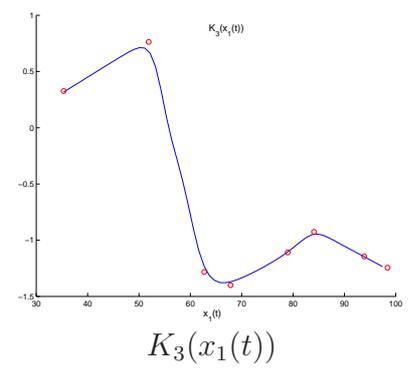
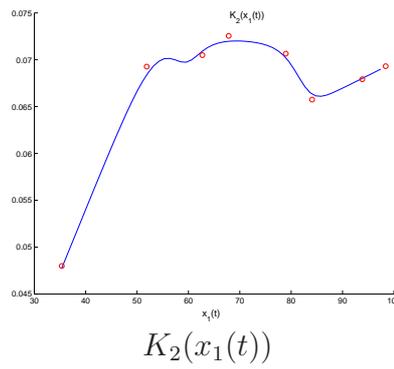
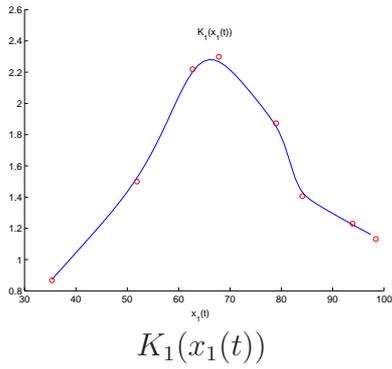
La table (3.6) regroupe les valeurs des paramètres identifiés.

	$\mu_{41}(x_1)$	$\mu_{81}(x_1)$	$\mu_{91}(x_1)$	$\mu_{101}(x_1)$	$\mu_{111}(x_1)$	$\mu_{121}(x_1)$
A	110.3	38.46	113.06	46.97	123.35	21.87
B	47.89	63.46	22.94	11.66	25.34	20.94

TAB. 3.6 – Paramètres des fonctions d'activation

Les résultats de l'identification sont montrés sur les figures (3.9). Après avoir optimisé les paramètres des fonctions d'activation et ceux des modèles locaux, par la minimisation du critère quadratique (3.31), on constate que les multimodèles  $\hat{K}_i(x_1(t))$  approximent bien les fonctions coefficients données par le tableau (3.1).

### 3.8. Modélisation d'un système non linéaire industriel par un multimodèle



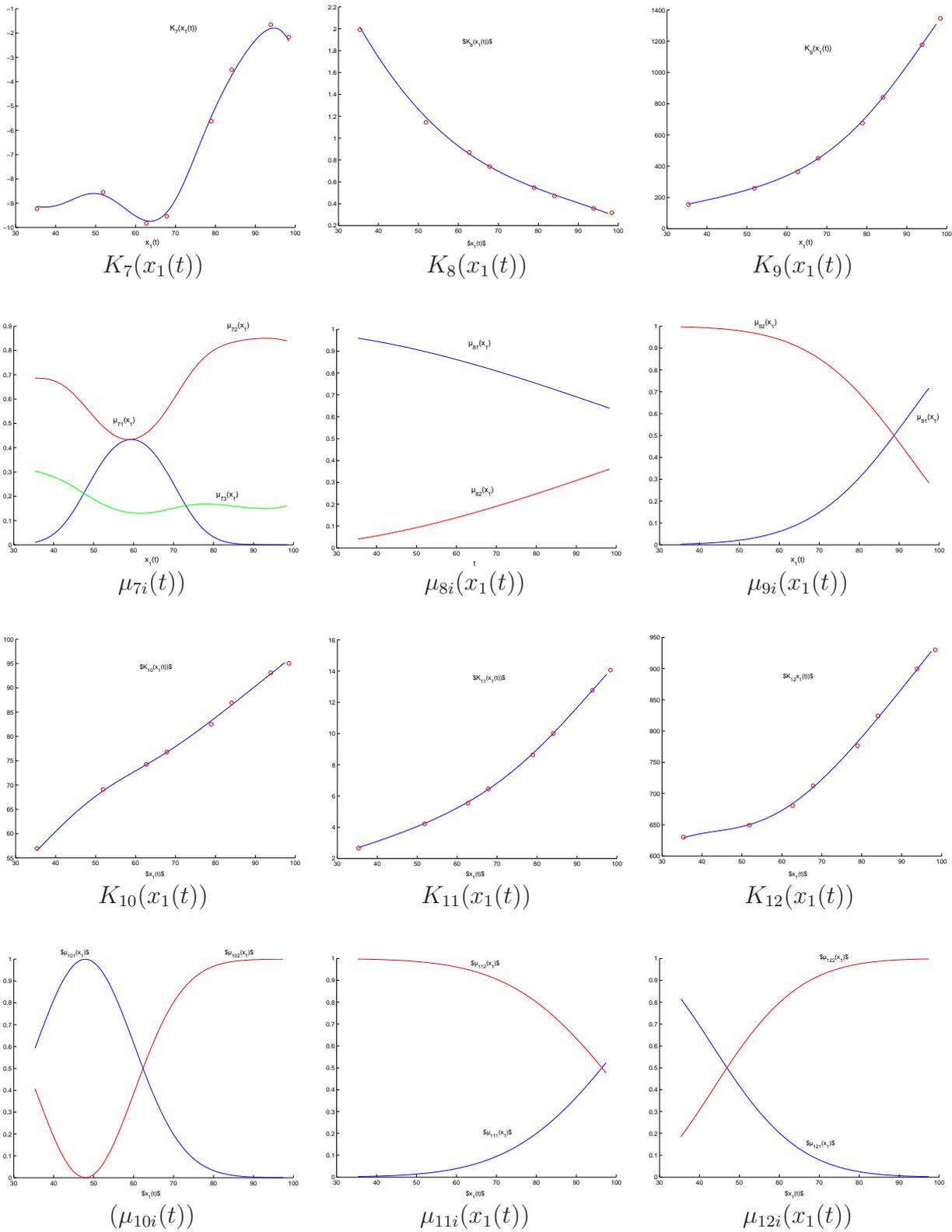


FIG. 3.9 – Fonctions coefficients et leurs fonctions d'activation

Notons que par la suite, pour des raisons de simplicité, on note  $x(t)$  et  $y(t)$  respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du modèle non linéaire, obtenu après approximation des fonctions coefficients.

### 3.8.2.2 Simulation du modèle non linéaire

En remplaçant les fonctions coefficients définies par le tableau (3.1) par leurs multimodèles correspondants  $\hat{K}_i(x_1(t))$ , on obtient un modèle non linéaire du turbo-réacteur :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \hat{K}_1(x_1(t)) (x_2(t) - \hat{K}_{10}(x_1(t))) + \hat{K}_2(x_1(t)) (u(t) - \hat{K}_9(x_1(t))) \\ \dot{x}_2(t) = \hat{K}_3(x_1(t)) (x_2(t) - \hat{K}_{10}(x_1(t))) + \hat{K}_4(x_1(t)) (u(t) - \hat{K}_9(x_1(t))) \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \\ y_3(t) = \hat{K}_5(x_1(t)) (x_2(t) - \hat{K}_{10}(x_1(t))) + \hat{K}_6(x_1(t)) (u(t) - \hat{K}_9(x_1(t))) + \hat{K}_{11}(x_1(t)) \\ y_4(t) = \hat{K}_7(x_1(t)) (x_2(t) - \hat{K}_{10}(x_1(t))) + \hat{K}_8(x_1(t)) (u(t) - \hat{K}_9(x_1(t))) + \hat{K}_{12}(x_1(t)) \end{cases} \quad (3.33)$$

La figure (3.10) montre l'évolution de l'entrée de commande  $u(t)$ , les figures (3.11) illustrent la superposition des composantes du vecteur de sortie du modèle non linéaire analytique (3.32), (3.33) et de sa description (3.28) et (3.29) à l'aide des valeurs tabulées du tableau (3.1) (les tracés sont parfaitement superposés).

En conclusion, le modèle proposé permet de substituer aux tables un modèle continu ; ainsi, lors de la simulation du modèle tout mécanisme d'extrapolation dans les tables est inutile, les multimodèles réalisent implicitement cette fonction.

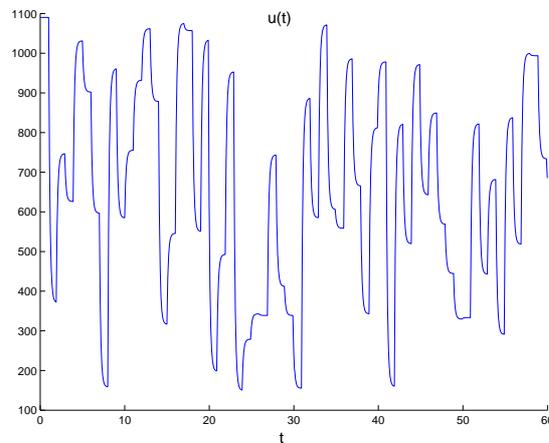


FIG. 3.10 – Commande  $u(t)$

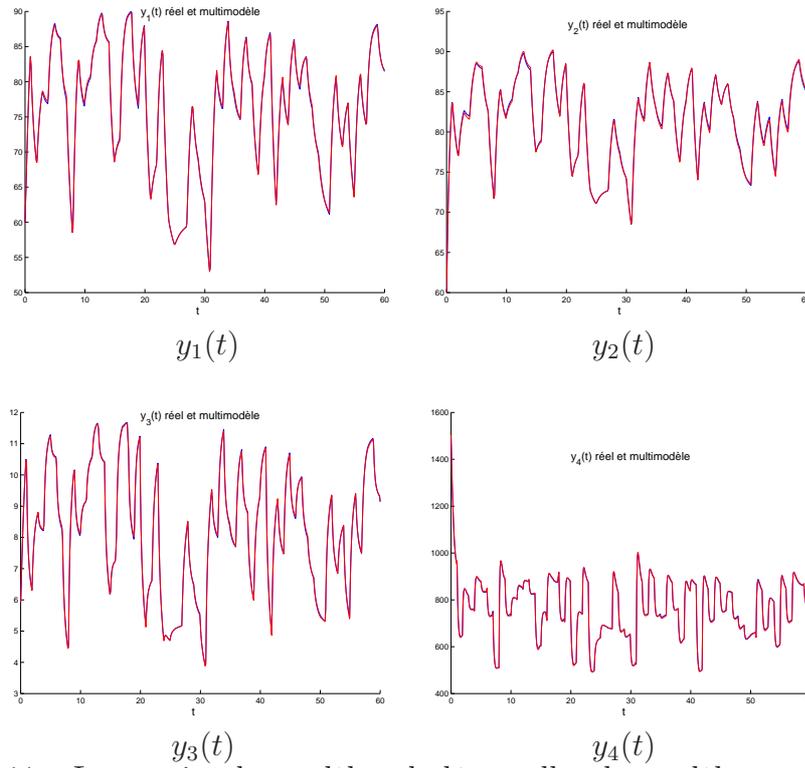


FIG. 3.11 – Les sorties du modèle tabulé et celles du modèle non linéaire

### 3.8.2.3 Multimodèle du turbo-réacteur

Notre objectif dans cette partie est de représenter le comportement du réacteur par un multimodèle alors que précédemment, seul certains coefficients du modèle étaient sous la forme de multimodèle. Comme nous disposons maintenant de la forme analytique d'un modèle non linéaire, l'obtention de son multimodèle est effectuée par la méthode classique de linéarisation du modèle non linéaire (3.32) et (3.33) autour de plusieurs points de fonctionnement. Le  $i^{\text{ème}}$  modèle local est obtenu en linéarisant le modèle non linéaire autour du point de fonctionnement  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}$ ,  $u_i$ . Les équations du multimodèle sont :

$$\begin{cases} \dot{x}_{m1}(t) = \sum_{i=1}^M \nu_i(u(t)) (A_{11i}x_{m1}(t) + A_{12i}x_{m2}(t) + B_{1i}u(t) + D_{1i}) \\ \dot{x}_{m2}(t) = \sum_{i=1}^M \nu_i(u(t)) (A_{21i}x_{m1}(t) + A_{22i}x_{m2}(t) + B_{2i}u(t) + D_{2i}) \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} y_{m1}(t) = x_{m1}(t) \\ y_{m2}(t) = x_{m2}(t) \\ y_{m3}(t) = \sum_{i=1}^M \nu_i(u(t)) (C_{11i}x_{m1}(t) + C_{12i}x_{m2}(t) + E_{1i}u + N_{1i}) \\ y_{m4}(t) = \sum_{i=1}^M \nu_i(u(t)) (C_{21i}x_{m1}(t) + C_{22i}x_{m2}(t) + E_{2i}u(t) + N_{2i}) \end{cases} \quad (3.35)$$

Les fonctions d'activation  $\nu_i(u(t))$  sont choisies de forme triangulaire. Ces dernières ne dépendent que de la commande  $u(t)$ . Les matrices du multimodèle obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_{11i} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \hat{K}_1(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_2(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 A_{12i} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \hat{K}_1(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_2(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 A_{21i} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \hat{K}_3(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_4(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 A_{22i} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \hat{K}_3(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_4(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 B_{1i} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \hat{K}_1(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_2(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 B_{2i} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \hat{K}_3(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_4(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 C_{11i} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \hat{K}_5(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_6(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) + \hat{K}_{11}(x_1) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 C_{12i} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \hat{K}_5(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_6(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) + \hat{K}_{11}(x_1) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 C_{21i} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \hat{K}_7(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_8(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) + \hat{K}_{12}(x_1) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 C_{22i} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \hat{K}_7(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_8(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) + \hat{K}_{12}(x_1) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 E_{1i} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \hat{K}_5(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_6(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) + \hat{K}_{11}(x_1) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}} \\
 E_{2i} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[ \hat{K}_7(x_1)(x_2 - \hat{K}_{10}(x_1)) + \hat{K}_8(x_1)(u - \hat{K}_9(x_1)) + \hat{K}_{12}(x_1) \right] \Bigg|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2i} \\ u=u_i}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{1i} &= \hat{K}_1(x_{1i})(x_{2i} - \hat{K}_{10}(x_{1i})) + \hat{K}_2(x_{1i})(u_i - \hat{K}_9(x_{1i})) - A_{12i}x_{2i} - B_{1i}u_i \\
 D_{2i} &= \hat{K}_3(x_{1i})(x_{2i} - \hat{K}_{10}(x_{1i})) + \hat{K}_4(x_{1i})(u_i - \hat{K}_9(x_{1i})) - A_{22i}x_{2i} - B_{2i}u_i \\
 N_{1i} &= \hat{K}_5(x_{1i})(x_2 - \hat{K}_{10}(x_{1i})) + \hat{K}_6(x_{1i})(u_i - \hat{K}_9(x_{1i})) + \hat{K}_{11}(x_{1i}) - C_{11i}x_{1i} - C_{12i}x_{2i} - E_{1i}u_i \\
 N_{2i} &= \hat{K}_7(x_{1i})(x_{2i} - \hat{K}_{10}(x_{1i})) + \hat{K}_8(x_{1i})(u_i - \hat{K}_9(x_{1i})) + \hat{K}_{12}(x_{1i}) - C_{21i}x_{1i} - C_{22i}x_{2i} - E_{2i}u_i
 \end{aligned}$$

Le nombre de modèles locaux a été choisi en minimisant un critère quadratique, fonctionnelle de l'écart entre les valeurs données par le modèle (3.32), (3.33) et celles données par le multimodèle (3.34) et (3.35). Le critère utilisé est le suivant :

$$J(\theta) = \sum_{t=0}^{t_f} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{y_i(t) - y_{mi}(t)}{y_{i \max} - y_{i \min}} \right)^2 \quad (3.36)$$

avec  $\theta = (x_{1i}, x_{2i}, u_i)$ ,  $y_{i \max}$  et  $y_{i \min}$  représentent respectivement les valeurs maximales et minimales du vecteur  $y_i(t)$  pour  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Le critère  $J(\theta)$  (3.36) est choisi normalisé a cause de la grande disparité entre valeurs des variables  $y_i(t)$ .

La procédure que nous avons adoptée, pour déterminer le nombre de modèles locaux est la même que celle utilisée pour approximer les fonctions coefficients. Nous avons fait des tests en faisant varier le nombre  $M$  de modèles locaux de 1 à 4. Les valeurs des différents critères sont montrés sur le tableau (3.7).

$M$	1	2	3	4
$J$	17.145	3.257	0.810	0.688

TAB. 3.7 – Table comparative du critère  $J$

Nous avons alors choisi  $M = 3$  en effectuant un compromis qualité-complexité. Les valeurs numériques des points de fonctionnement sont :

$i$	$x_{1i}$	$x_{2i}$	$u_i$
1	65.88	66.87	344.25
2	72.37	80.43	557.01
3	90.07	85.05	1033.71

TAB. 3.8 – Les trois points de fonctionnement

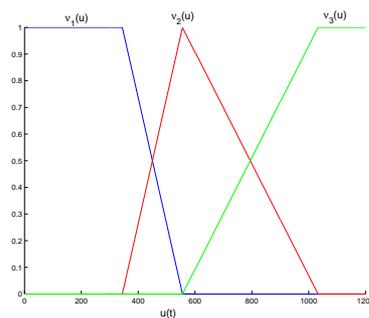


FIG. 3.12 – Fonctions d'activation  $\nu_i(u(t))$

Le critère quadratique global utilisé dans le jeu de l'identification pour l'optimisation des paramètres (points de fonctionnement), recherche une adéquation entre le modèle non linéaire et le multimodèle sans se soucier de la qualité de l'approximation locale produite par les modèles locaux. Ces derniers sont positionnés de sorte que leur interpolation donne

une bonne approximation du comportement global du système.

La structure des différentes matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $F_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  et  $H_i$  est la suivante :

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{12i} & A_{22i} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} D_{1i} \\ D_{2i} \end{pmatrix}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ C_{11i} & C_{12i} \\ C_{12i} & C_{22i} \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{1i} \\ E_{2i} \end{pmatrix}, \quad N_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{1i} \\ N_{2i} \end{pmatrix}$$

et leurs valeurs numériques sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.427 & 2.323 \\ 0.0223 & -1.424 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2.652 & 2.0442 \\ -0.366 & -1.1970 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3.107 & 1.295 \\ -0.350 & -0.935 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.072 \\ 0.040 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.073 \\ 0.036 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.065 \\ 0.031 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -46.146 \\ 89.543 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -7.165 \\ 102.366 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 93.974 \\ 85.076 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.054 & 0.145 \\ -2.185 & -9.680 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.108 & 0.1150 \\ -6.752 & -6.893 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.130 & 0.0678 \\ -6.729 & -2.670 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.003 \\ 0.772 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.003 \\ 0.586 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.003 \\ 0.441 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \\ 1254.3 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11.3 \\ 1471.6 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.5 \\ 1260.2 \end{bmatrix}$$

Le modèle ainsi obtenu est beaucoup plus facilement exploitable que le modèle initial décrit à l'aide de la table (3.1). Il peut être exploité en particulier pour le diagnostic de fonctionnement du turboréacteur en utilisant des techniques classiques (élaboration d'un multiobservateur ou d'un banc de multiobservateurs et comparaison des différentes estimations d'état). Nous décrirons cette utilisation lors du chapitre 6.

### 3.8.3 Simulation du modèle du turboréacteur

Pour permettre d'évaluer les résultats de simulation, nous simulons en parallèle deux modèles : le multimodèle (3.34), (3.35) et le modèle non linéaire (3.32), (3.33). L'entrée appliquée est la même que celle utilisée pour identifier les paramètres des fonctions coefficients.

Les figures (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16) montrent la superposition des composantes du vecteur de sorties du modèle non linéaire (3.32) et (3.33) du turbo-réacteur et leurs approximation par le multimodèle (3.34) et (3.35).

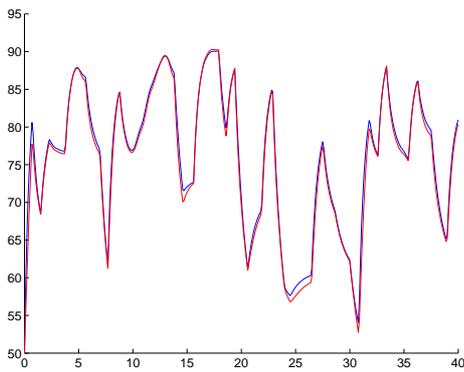


FIG. 3.13 –  $y_1(t)$  du modèle non linéaire et du multimodèle

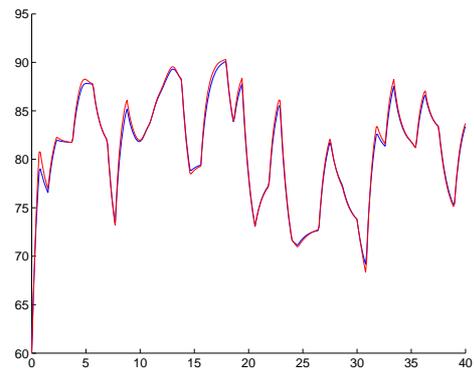


FIG. 3.14 –  $y_2(t)$  du modèle non linéaire et du multimodèle

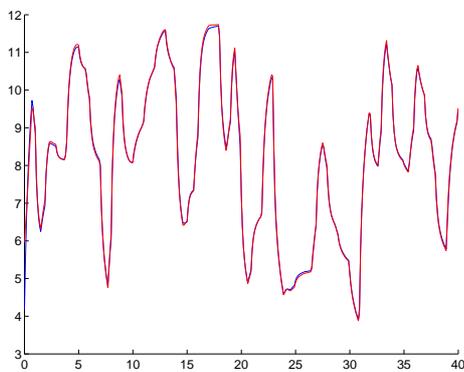


FIG. 3.15 –  $y_3(t)$  du modèle non linéaire et du multimodèle

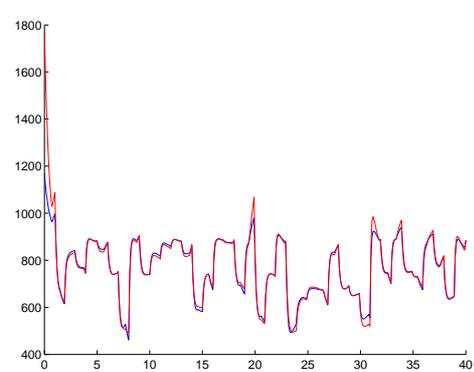


FIG. 3.16 –  $y_4(t)$  du modèle non linéaire et du multimodèle

### 3.8.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons montré comment, à partir d'un modèle tabulé d'un système physique (turboréacteur), présentant des commutations entre zones de fonctionnement et

des non-linéarités entre les variables, construire un multimodèle basé sur plusieurs modèles locaux linéaires ou affines. Les résultats de simulation montrent la capacité des multimodèles à approcher le comportement des systèmes non linéaires, le nombre de modèles locaux augmente en fonction de la complexité de la dynamique du modèle à appréhender et de la précision souhaitée.

L'augmentation du nombre de modèles locaux permet la prise en compte de la complexité plus ou moins grande de système et permet également d'atteindre la précision souhaitée du modèle global selon les objectifs poursuivis.

La modélisation proposée a été effectuée en deux étapes : modélisation multimodèle des fonctions coefficient et élaboration d'un modèle non linéaire, puis linéarisation locale du modèle non linéaire pour obtenir le multimodèle définitif.

Cependant, une démarche directe est tout à fait réalisable. Dans ce cas, le multimodèle aurait été déterminé directement à partir des données expérimentales après avoir imposé une structure. L'inconvénient principal de cette dernière approche réside dans le nombre de paramètres à identifier, beaucoup plus grand par rapport au nombre de points de fonctionnement choisi précédemment.



# 4

## Conception de multiobservateurs

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>98</b>
<b>4.2</b>	<b>Méthode de conception d'un multiobservateur</b>	<b>100</b>
4.2.1	Variables de décision mesurables	100
4.2.2	Variables de décision non mesurables	102
4.2.3	Affectation des valeurs propres d'un multiobservateur	104
4.2.4	Exemple d'application	105
<b>4.3</b>	<b>Conception d'un multiobservateur à entrées inconnues</b>	<b>108</b>
4.3.1	Matrices d'influence d'entrées inconnues identiques	108
4.3.2	Matrices d'influence des entrées inconnues différentes	113
<b>4.4</b>	<b>Estimation des entrées inconnues</b>	<b>117</b>
<b>4.5</b>	<b>Exemple d'application</b>	<b>118</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

---

## 4.1 Introduction

Les techniques de détection et d'isolation de défauts à base de modèle ont été appliquées avec succès aux systèmes linéaires [Chen 00], [Comm 02], [Shaf 02] et [Wang 03]. L'idée principale est de générer des résidus qui reflètent des anomalies entre le comportement nominal du système et son comportement courant. Cependant, la détection et l'isolation de défaut pour les systèmes non linéaires restent toujours difficiles à étudier. La plupart des études faites dans ce sens ont été abordées en utilisant deux étapes :

- linéarisation du modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement,
- génération des résidus robustes par rapport aux petites variations de paramètres.

Cette stratégie fonctionne seulement lorsque la linéarisation ne cause pas une grande disparité entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire, c'est-à-dire lorsque le système fonctionne autour d'un point de fonctionnement. Par conséquent, ces techniques montrent leurs limites lorsque le système change de point de fonctionnement (modification de la dynamique ou de non linéarité) .

L'utilisation des réseaux de neurones [Wang 94], [Benk 96], [Patt 96], [Cami 01] et [Chua 01] constitue une approche alternative pour traiter les problèmes de non-linéarités lors de la détection et l'isolation de défauts (FDI). Le problème principal de cette approche réside dans la difficulté d'analyser la robustesse et la sensibilité d'une façon mathématique rigoureuse. Des approches basées sur la logique floue ont également été suggérées par [Fran 93], [Iser 93], [Schn 94] et [Dext 95]. Cependant, la seule utilisation de la "logique floue" n'est pas efficace pour la détection de défaut naissant (défauts de faible amplitude et/ou de dynamique lente).

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la détection et la localisation de défauts peuvent être traitées par deux approches différentes : la première utilise le modèle et les mesures des entrées et des sorties du système (génération de résidus par exemple), la seconde utilise l'ensemble des données disponibles le modèle n'étant pas disponible (ACP par exemple). Les chercheurs ont naturellement essayé de combiner ces deux approches pour tirer profit de leurs avantages respectifs [Benk 96], [Fran 93], [Iser 93] et [Schn 94].

Ces dernières années, il y a eu un nombre croissant de travaux sur l'application des modèles de Takagi-Sugeno (TS) [Patt 97] dans la modélisation et la commande des systèmes non linéaires. Deux méthodes sont principalement utilisées pour obtenir les modèles locaux d'un multimodèle d'un système non linéaire :

- Identification de type boîte noire lorsque le système non linéaire n'a pas de forme analytique.

- Linéarisation du modèle non linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement dans l'espace d'état.

Dans les deux cas, le système non linéaire est approché par un multimodèle localement linéaire ou affine, qui est une combinaison non linéaire des modèles locaux issus de l'identification ou de la linéarisation, par l'utilisation des fonctions d'activation définissant différentes régions de l'espace d'état pour les différents modèles locaux.

Cependant, la grande majorité des méthodes de conception/analyse et les applications trouvées dans la littérature considèrent le cas où le vecteur d'état est complètement mesurable. Puisque c'est rarement le cas en pratique, les problèmes de conception/analyse d'observateur pour les multimodèle sont devenus d'actualité.

Ces dernières années cette problématique a commencé à susciter une certaine attention chez les automaticiens. Dans [Plam 04], [Palm 99] et [Patt 98] les auteurs utilisent la notion d'observateur flou pour des raisons d'identification et de détection de défauts. Le système est décrit par un multimodèle de type Takagi-Sugeno où chaque modèle local est défini comme un système bilinéaire et l'observateur local est alors associé à chaque système bilinéaire. L'observateur global cependant, est une combinaison linéaire des observateurs locaux et des techniques de conception et d'analyse des observateurs linéaires existantes peuvent être appliquées.

Tanaka et al [Tana 98] ont présenté de nouvelles conditions de stabilité pour une classe de systèmes non linéaires représentés sous forme multimodèle continue ou discrete lors de la conception d'un multiobservateur. A partir de là, on trouve une première tentative de conception d'un multiobservateur comme une combinaison non linéaire de plusieurs observateurs locaux [Patt 98].

Assawinchaichote et al [Assa 02] ont considéré le problème de la conception d'un observateur flou pour une classe de systèmes non linéaires à perturbation singulière. Tong Shaocheng et al (2000) ont considéré l'analyse et la conception de l'observateur flou robuste pour une classe de systèmes non linéaires incertains représentés par un modèle de type Takagi-Sugeno ; ils ont montré la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro en utilisant l'approche de Lyapunov.

Dans ce chapitre, nous présentons les techniques de reconstruction d'état des systèmes non linéaires représentés sous forme multimodèle et comment s'affranchir de la présence des entrées inconnues sur les équations dynamique et statique du multimodèle. Nous présentons également une technique de détermination des matrices des différents multiobservateurs proposés.

## 4.2 Méthode de conception d'un multiobservateur

Considérons un système dynamique non linéaire représenté par un multimodèle, composé de  $M$  modèles locaux, décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + F_i u(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrées et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur de sortie. Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $C_i$  et  $F_i$  sont de dimensions appropriées.  $\mu_i(\xi(t))$  sont les fonctions d'activation des modèles locaux et  $\xi(t)$  représente le vecteur de variables de décision qui peuvent dépendre de l'état, des sorties ou des entrées.

Dans cette partie, deux cas sont considérés pour les variables de décision :

- $\xi(t)$  est mesurée,
- $\xi(t)$  dépend des variables d'état estimées.

### 4.2.1 Variables de décision mesurables

Un observateur est destiné à estimer le vecteur d'état d'un système. Pour le concevoir, on suppose que les modèles locaux sont localement observables, c'est-à-dire que toutes les paires  $(A_i, C_i)$  sont observables. Pour concevoir le multiobservateur, on associe à chaque modèle local un observateur local, le multiobservateur (observateur global) est une somme des observateurs locaux pondérée par des fonctions d'activation identiques à celles associées aux modèles locaux du multimodèle [Patr 97]. Les équations qui régissent le multiobservateur sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (C_i \hat{x}(t) + F_i u(t)) \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $\hat{x}(t)$  représente le vecteur d'état estimé par le multiobservateur,  $\hat{y}(t)$  est le vecteur de sortie estimé et  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  sont les gains des observateur locaux. L'erreur d'estimation d'état est définie par l'équation suivante :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.3)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i - G_i C_j) e(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si l'erreur d'estimation d'état (4.4) converge asymptotiquement vers zéro, l'estimation des vecteurs d'état et de sortie (4.2) converge asymptotiquement vers les vecteurs d'état et de sortie du multimodèle (4.1) respectivement.

Tanaka [Tana 96] et Ma [Ma 98] ont énoncé les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état :

**Théorème 4.1** [Tana 96] et Ma [Ma 98] : *le multiobservateur (4.2) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P$  et des matrices de gain  $G_i$  vérifiant les inégalités suivantes :*

$$\begin{cases} (A_i - G_i C_i)^T P + P (A_i - G_i C_i) < 0 \quad i \in \{1, \dots, M\} \\ \left( \frac{A_i - G_i C_j + A_j - G_j C_i}{2} \right)^T P + P \left( \frac{A_i - G_i C_j + A_j - G_j C_i}{2} \right) < 0, \quad (i < j < M) \end{cases} \quad (4.5)$$

Le multiobservateur (4.2) peut être simplifié si la sortie  $y(t)$  est linéaire, c'est-à-dire ( $C_1 = C_2 = \dots = C_M = C$ ). Dans ce cas,  $y(t) = Cx(t)$  et le multimodèle devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

Le multiobservateur est donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

et la dynamique de l'erreur d'estimation d'état devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i - G_i C) e(t) \quad (4.8)$$

Les conditions de stabilité du multiobservateur (4.7) sont alors données par le théorème suivant :

**Théorème 4.2** [Patt 98] : le multiobservateur (4.7) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice de Lyapunov symétrique et définie positive  $P$  vérifiant les inégalités suivantes :

$$(A_i - G_i C)^T P + P (A_i - G_i C) < 0 \quad i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.9)$$

### 4.2.2 Variables de décision non mesurables

Supposons maintenant qu'une partie (ou la totalité) des variables de décision ne sont pas mesurables. On note  $\hat{\xi}(t)$  une estimation des variables de décision dépendant des variables d'état estimées  $\hat{x}(t)$ . Ainsi les fonctions d'activation du multiobservateur sont différentes de celles du multimodèle (4.6). Dans le cas d'une matrice d'observation  $C$  unique, le multiobservateur s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

L'erreur de sortie entre le multimodèle (4.1) et le multiobservateur (4.10) est :

$$\begin{aligned} r(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= C(x(t) - \hat{x}(t)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{\xi}(t)) \left( (A_i - G_i C) e(t) + \Delta(\xi(t), \hat{\xi}(t), x(t), u(t)) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec :

$$\Delta(\xi(t), \hat{\xi}(t), x(t), u(t)) = \left( \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\hat{\xi}(t)) \right) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4.13)$$

Notons que lorsque  $e(t) \mapsto 0$  alors,  $\Delta(\xi(t), \hat{\xi}(t), x(t), u(t)) \mapsto 0$ .

C'est-à-dire,  $\Delta(\xi(t), \hat{\xi}(t), x(t), u(t))$  agit comme une perturbation non structurée qui est censée être croissante bornée comme :

$$\left\| \Delta(\xi(t), \hat{\xi}(t), x(t), u(t)) \right\| \leq \mu \|e(t)\|, \quad \text{avec } \mu > 0 \quad (4.14)$$

Cependant, si on suppose aucune structure particulière de telles perturbations peut être tout à fait conservatrice [Khal 96]. Des conditions suffisantes de stabilité pour (4.12) sont données [Palm 99].

Pour trouver les conditions de convergence du multiobservateur (4.10), nous avons choisi la fonction de Lyapunov donnée par (4.15).

$$V(t) = e^T(t)Pe(t) \quad (4.15)$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i \left( \hat{\xi}(t) \right) \left( e^T(t) \left( (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) \right) e(t) + 2\Delta^T P e(t) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i \left( \hat{\xi}(t) \right) \left( e^T(t) \left( (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) + P^2 \right) e(t) + \Delta^T \Delta \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

En utilisant la relation (4.14),  $\dot{V}(t)$  devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i \left( \hat{\xi}(t) \right) \left( e^T(t) \left( (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) + P^2 \right) e(t) + \mu^2 \|e(t)\|^2 \right) \\ &\leq -\lambda_{\min} \left( -(A_i - G_i C)^T P - P(A_i - G_i C) - P^2 \right) \|e(t)\|^2 + \mu^2 \|e(t)\|^2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donc, la dérivée de la fonction de Lyapunov  $\dot{V}(t)$  est négative si :

$$\lambda_{\min} \left( -(A_i - G_i C)^T P - P(A_i - G_i C) - P^2 \right) > \mu^2 \quad (4.18)$$

En utilisant le complément de Schur [Boyd 94], (4.18) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} -(A_i - G_i C)^T P - P(A_i - G_i C) - \mu^2 P & & \\ & P & \\ & & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.19)$$

La convergence du multiobservateur (4.10) est conditionnée par l'existence de la matrice symétrique  $P$ , des matrices de gain  $G_i$  et d'un scalaire positif  $\mu$  vérifiant la relation (4.19). L'inégalité (4.19) est non linéaire par rapport aux variables  $P$  et  $G_i$ . Afin d'avoir un problème de type LMI, un changement de variable s'impose. Posons :

$$W_i = PG_i \quad (4.20)$$

l'inégalité (4.19) devient :

$$\begin{bmatrix} -(A_i^T P + PA_i) - C^T W_i^T - W_i C - \mu^2 P & & \\ & P & \\ & & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

Ce résultat permet alors d'énoncer le théorème (4.3).

**Théorème 4.3 :** *l'erreur d'estimation d'état entre le multiobservateur (4.10) et le multimodèle (4.6), converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe une matrice de Lyapunov  $P$  symétrique et définie positive, des matrices  $W_i$  et un scalaire positif  $\mu$  tels que pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  :*

$$\begin{bmatrix} -(A_i^T P + P A_i) + C^T W_i^T + W_i C - \mu^2 P \\ P \\ I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.22)$$

Les gains du multiobservateur se déduisent alors à l'aide de l'équation :

$$G_i = P^{-1} W_i \quad (4.23)$$

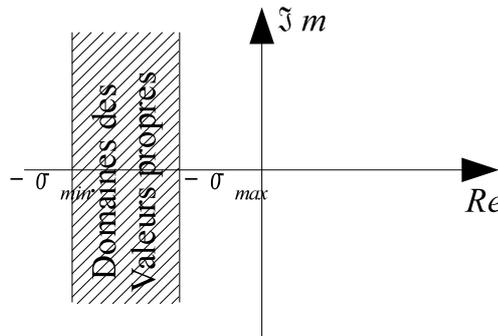
### 4.2.3 Affectation des valeurs propres d'un multiobservateur

Pour assurer la vitesse de la convergence de l'erreur d'estimation d'état du multiobservateur (4.7), il est nécessaire d'affecter toutes les valeurs propres des observateurs locaux, dans une région spécifique.

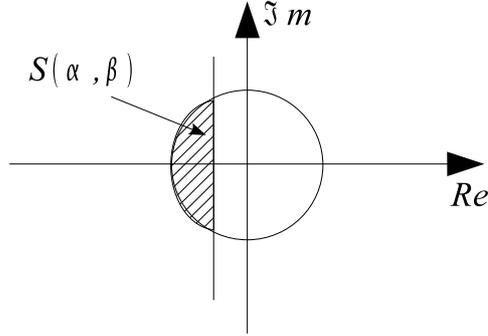
- Une première idée est de garantir que les parties réelles des valeurs propres des observateurs locaux sont comprises entre deux valeurs  $-\sigma_{min}$  et  $-\sigma_{max}$ , avec  $\sigma_{min} > \sigma_{max} > 0$ , l'inégalité (4.9) devient :

$$\begin{cases} (A_i - G_i C + \sigma_{max} I)^T P + P (A_i - G_i C + \sigma_{max} I) < 0 \\ -(A_i - G_i C + \sigma_{min} I)^T P - P (A_i - G_i C + \sigma_{min} I) < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

**Remarque :** la partie imaginaire des valeurs propres des observateurs locaux n'est pas limitée avec cette contrainte, ce qui peut générer une dynamique à fortes oscillations.



- Une autre idée est d'affecter les valeurs propres des observateurs locaux dans une région  $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ , qui est l'intersection entre un cercle, de centre  $(0, 0)$ , de rayon  $\beta$  et du demi-plan gauche limité par une droite d'abscisse égale à  $(-\alpha)$ .



**Corollaire 4.1** : les observateurs locaux d'un multiobservateur ont des valeurs propres dans la région  $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ , s'il existe une matrice  $P$  définie positive telle que pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\beta P & (A_i - G_i C)^T P \\ P(A_i - G_i C) & -\beta P \end{bmatrix} < 0 \\ (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) + 2\alpha P < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Ces inégalités peuvent être résolues à l'aide d'outils numériques LMI [Boyd 94]. Si les valeurs propres de toutes les matrices d'état des observateurs locaux  $(A_i - G_i C)$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  sont dans la région  $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ , les pôles de la dynamique de l'erreur du multiobservateur sont dans la région  $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ .

#### 4.2.4 Exemple d'application

Considérons un système non linéaire représenté par le multimodèle décrit par l'équation (4.6), avec  $M = 2$ . Les valeurs numériques des matrices  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C$  sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans cette exemple, les matrices  $D_i$  sont supposées nulles et le vecteur de décision  $\xi(t) = u(t)$ . Les valeurs initiales des variables d'état et des variables estimées sont :

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le multiobservateur (4.7), les gains  $G_i$  et la matrice de Lyapunov obtenus sont les suivants :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2.04 & -2.01 \\ 1.54 & 0.19 \\ 2.80 & -2.17 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1.80 & 0.61 \\ -0.35 & 5.17 \\ 5.39 & -4.45 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 37.97 & -5.84 & -0.51 \\ -5.84 & 22.75 & -16.74 \\ -0.51 & -16.74 & 29.46 \end{bmatrix}$$

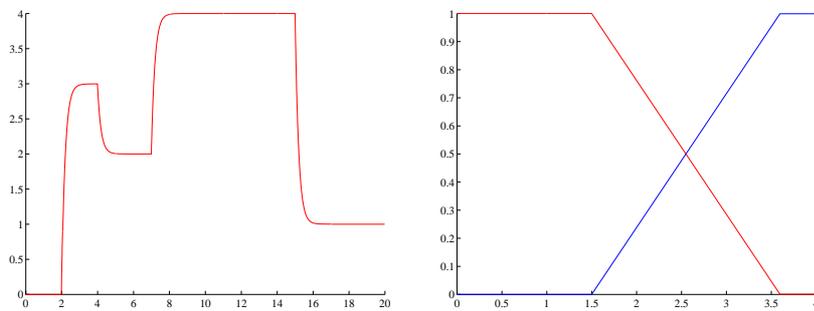


FIG. 4.1 – Entrée et fonctions d'activation

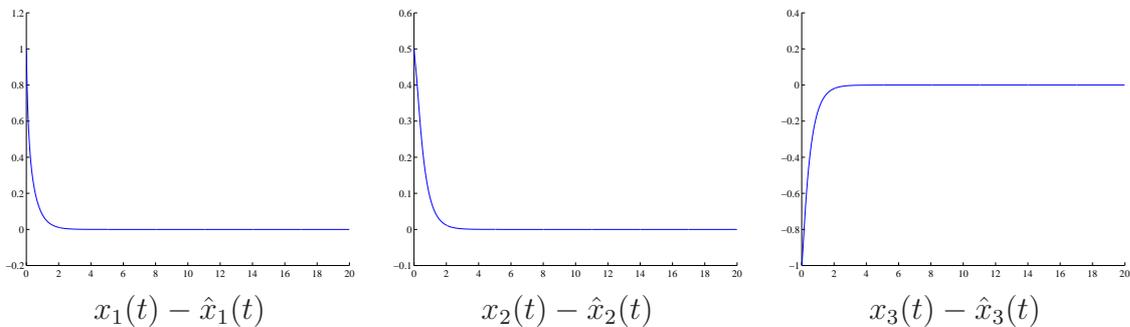


FIG. 4.2 – Convergence asymptotique des erreurs d'estimation d'état

Les figures (4.1) visualisent l'évolution de l'entrée  $u(t)$  du multimodèle ainsi que l'évolution des trois fonctions d'activation, choisies triangulaires, en fonction de l'entrée  $u(t)$ . Les figures (4.2) montrent les erreurs d'estimation entre les composantes du vecteur d'état du multimodèle (4.6) et celles du multiobservateur (4.7).

Le multiobservateur décrit dans cette section est basé sur la combinaison de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger. Pour assurer une convergence rapide de l'erreur

d'estimation d'état ou de sortie, une technique de placement de pôles a été utilisée, afin d'affecter les valeurs propres des observateurs locaux dans une région spécifique. La condition de convergence et les contraintes d'affectation des valeurs propres ont été formulées en termes d'inégalités linéaires matricielles. Ce type d'observateur peut être utilisé dans le domaine du diagnostic afin de détecter des défauts capteurs comme nous le présenterons au chapitre 6.

## 4.3 Conception d'un multiobservateur à entrées inconnues

Dans ce paragraphe, nous considérons un système non linéaire représenté par un multimodèle, où une partie des entrées est inconnue. L'objectif est l'estimation des états et des sorties de ce système ainsi que des entrées inconnues. Pour cela, on propose la synthèse d'un multiobservateur basée sur l'élimination de ces entrées inconnues. On montre comment déterminer les gains des observateurs locaux, ces derniers étant solutions d'un ensemble d'inégalités matricielles non linéaires.

Cette section est composée de deux parties. La première décrit la conception d'un multiobservateur, lorsque les matrices d'influence des entrées inconnues sont les mêmes pour tous les modèles locaux constituant le multimodèle et lorsque les entrées inconnues n'interviennent que sur l'équation d'évolution d'état. Dans la seconde partie, on étend la portée de la méthode en décrivant la conception d'un multiobservateur dans le cas où les matrices d'influence des entrées inconnues sont distinctes pour chaque modèle local.

### 4.3.1 Matrices d'influence d'entrées inconnues identiques

Considérons un système non linéaire représenté sous forme multimodèle soumis à l'influence des entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u + R \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \forall i = \{1, \dots, M\} \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $q < n$ , est le vecteur des entrées inconnues et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur des sorties mesurables.

Pour le  $i^{\text{ème}}$  modèle local,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée connue,  $R \in \mathbb{R}^{n \times q}$  et  $D_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  représente un vecteur dépendant du point de fonctionnement ;  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie. Enfin,  $\xi(t)$  représente le vecteur de décision dépendant de l'entrée connue et/ou des variables d'état.

Considérons le multiobservateur, d'état  $\hat{x}(t)$ , décrit de la façon suivante [Akhe 02] :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( N_i z(t) + G_{i1} u(t) + G_{i2} + L_i y(t) \right) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases} \quad (4.27)$$

$N_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_{i1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $L_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$  est le gain du  $i^{\text{ème}}$  observateur local,  $G_{i2} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur constant et  $E$  est une matrice de transformation. En utilisant l'expression de l'erreur de reconstruction d'état donnée par l'équation (4.3) et l'expression de  $\hat{x}(t)$  donnée par l'équation (4.27), l'expression de l'erreur devient :

$$e(t) = (I + EC)x(t) - z(t) \quad (4.28)$$

Sa dérivée par rapport au temps s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( P(A_i x(t) + B_i u(t) + R\bar{u}(t) + D_i) - \right. \\ \left. N_i z(t) - G_{i1} u(t) - G_{i2} - L_i y(t) \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

avec :

$$P = I + EC \quad (4.30)$$

L'expression (4.29) peut également être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( N_i e(t) + (PA_i - N_i P - L_i C)x(t) + (PB_i - G_{i1})u(t) + \right. \\ &\quad \left. (PD_i - G_{i2}) + PR\bar{u}(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( N_i e(t) + (PA_i - N_i - K_i C)x(t) + (PB_i - G_{i1})u(t) + \right. \\ &\quad \left. (PD_i - G_{i2}) + PR\bar{u}(t) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

avec  $K_i = N_i E + L_i$ . Si l'on impose les conditions suivantes :

$$PR = 0 \quad (4.32a)$$

$$P = I + EC \quad (4.32b)$$

$$N_i = PA_i - K_i C \quad (4.32c)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (4.32d)$$

$$G_{i1} = PB_i \quad (4.32e)$$

$$G_{i2} = PD_i \quad (4.32f)$$

$$\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i \quad \text{est stable} \quad (4.32g)$$

l'erreur de reconstruction d'état tend asymptotiquement vers zéro et (4.29) se réduit à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i e(t) \quad (4.33)$$

Il est important de noter que la stabilité des matrices  $N_i, \forall i \in \{1, \dots, M\}$ , ne garantit pas forcément la stabilité de la matrice  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$ . Ce point est traité dans le paragraphe qui suit.

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état (4.31) est garantie par la résolution des conditions (4.32) selon les trois étapes suivantes :

1. calcul de la matrice  $E$  en utilisant la relation (4.32a), on en déduit alors la matrice  $P$  à l'aide de (4.32b).
2. calcul des matrices  $N_i$  et  $K_i$  garantissant la stabilité de la matrice  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$ , ce point technique concernant la méthode de résolution fait l'objet du paragraphe (4.3.1.2).
3. déduction des matrices de gain  $L_i, G_{i1}$  et  $G_{i2}$  des matrices précédentes.

#### 4.3.1.1 Convergence globale du multiobservateur

L'équation dynamique (4.33) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $X$ , telle que :

$$N_i^T X + X N_i < 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.34)$$

En s'appuyant sur l'équation (4.34), on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 4.4** [Akhe 03a] : *l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle à entrées inconnues (4.26) et le multiobservateur (4.27) converge asymptotiquement vers zéro, si toutes les paires  $(A_i, C)$  sont observables et si les conditions suivantes sont vérifiées  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :*

$$N_i^T X + X N_i < 0 \quad (4.35a)$$

$$PR = 0 \quad (4.35b)$$

$$N_i = PA_i - K_i C \quad (4.35c)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (4.35d)$$

$$G_{i1} = PB_i \quad (4.35e)$$

$$G_{i2} = PD_i \quad (4.35f)$$

où  $P = I + EC$  et  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

En utilisant l'équation (4.32c), l'inégalité (4.34) devient :

$$(PA_i - K_i C)^T X + X (PA_i - K_i C) < 0 \quad (4.36)$$

L'inégalité (4.39) est non linéaire par rapport aux variables  $K_i$  et  $X$ . Nous présentons, dans le paragraphe suivant, la démarche permettant de résoudre l'ensemble des contraintes (4.35).

#### 4.3.1.2 Méthode de résolution

Des méthodes de résolution ont été proposées pour résoudre des inégalités matricielles non linéaires et en particulier bilinéaires [Chad 01]. La méthode que nous avons adoptée est basée sur un changement de variable. La résolution des contraintes (4.35) s'effectue, comme indiqué précédemment en trois étapes.

1. Si la matrice  $CR$  est de plein rang ligne, la relation (4.35b) détermine complètement la matrice  $E$  du multiobservateur. En notant  $(CR)^{(-)} = (CR)^T (CR(CR)^T)^{-1}$  la pseudo-inverse de  $(CR)$ , on a :

$$E = -R(CR)^{(-)} \quad (4.37)$$

On en déduit alors la valeur de la matrice  $P$  :

$$P = I - R(CR)^{(-)}C \quad (4.38a)$$

2. Ensuite, la résolution des inégalités matricielles (4.35a) dans lesquelles on a remplacé les matrices  $N_i$  par leurs valeurs issues de (4.35c) s'écrivent :

$$(PA_i - K_i C)^T X + X (PA_i - K_i C) < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.39)$$

Afin de linéariser ces inégalités, nous considérons le changement de variable suivant :

$$W_i = XK_i \quad (4.40)$$

Les inégalités (4.39) peuvent alors être réécrites,  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :

$$(PA_i)^T X + X(PA_i) - W_i C - C^T W_i^T < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.41)$$

Ces dernières inégalités matricielles sont linéaires par rapport aux variables inconnues  $X$  et  $W_i$ . Par conséquent, des outils LMI peuvent être utilisés pour résoudre (4.41).

Ayant résolu ce problème et obtenu des solutions  $X$  et  $W_i$  vérifiant (4.41), on en déduit les gain  $K_i$  :

$$K_i = X^{-1}W_i \quad (4.42a)$$

$$(4.42b)$$

3. Les matrices  $E$ ,  $P$ ,  $K_i$  ayant été déterminées, on en déduit les matrices d'état  $N_i$  et les gains  $L_i$ ,  $G_{i1}$  et  $G_{i2}$  :

$$N_i = PA_i - K_i C \quad (4.43a)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (4.43b)$$

$$G_{i1} = PB_i \quad (4.43c)$$

$$G_{i2} = PD_i \quad (4.43d)$$

### 4.3.1.3 Placement de pôles

Dans cette partie, on examine comment améliorer les performances du multiobservateur, notamment en ce qui concerne la vitesse de convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. La dynamique du multiobservateur est choisie de telle manière quelle soit sensiblement plus rapide que celle du multimodèle.

Pour assurer une certaine dynamique de convergence de l'erreur d'estimation d'état, on définit dans le plan complexe la région  $S(\alpha, \beta)$  comme l'intersection entre un disque, de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $\beta$ , et du demi-plan gauche limité par une droite d'abscisse  $(-\alpha)$ .

Pour garantir que les valeurs propres de la matrices  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$  appartiennent à la région  $S(\alpha, \beta)$ , la résolution de l'équation (4.41) de l'étape 2 de la démarche précédente est remplacée par la résolution des inégalités suivantes [Akhe 03a] :

$$\begin{bmatrix} -\beta X & PA_i^T X - C^T W_i^T \\ XPA_i - W_i C & -\beta X \end{bmatrix} < 0 \quad (4.44)$$

$$PA_i^T X + XPA_i - C^T W_i^T - W_i C + 2\alpha X < 0$$

L'inconvénient majeur de la conception du multiobservateur (4.27) réside dans son incapacité à assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état lorsque les matrices d'influence des entrées inconnues sont différentes pour chaque modèle local. En effet, lorsque  $R_1 \neq R_2 \dots \neq R_i \dots \neq R_M$ , la contrainte suivante :

$$PR_i = 0, \text{ pour } i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.45)$$

ne peut être satisfaite. Si l'entrée inconnue, en plus d'agir sur l'équation d'état, intervient également, de manière directe, sur l'équation de sortie, une solution à ce problème peut être obtenue. La démarche est présentée à la section suivante.

### 4.3.2 Matrices d'influence des entrées inconnues différentes

Cette section explicite la construction d'un multiobservateur lorsque les matrices d'influence sont différentes pour chaque modèle local et que le vecteur de sortie du multimodèle (4.26) est soumis aux entrées inconnues.

Considérons le multimodèle suivant, composé de  $M$  modèles locaux :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, M\} \end{cases}$$

où  $R_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$  et  $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$  sont respectivement les matrices d'influence des entrées inconnues qui interviennent sur les équations d'état et de sortie respectivement.

La forme du multiobservateur capable d'estimer les vecteurs d'état et de sortie du multimodèle (4.46) est la même que celle donnée par l'équation (4.27). Comme précédemment, les matrices  $N_i$  et les matrices de gains  $L_i$ ,  $G_{i1}$ ,  $G_{i2}$ ,  $E$  doivent être déterminées pour assurer la convergence asymptotique de l'état estimé  $\hat{x}(t)$  vers l'état du multimodèle  $x(t)$ . A partir de la définition de l'erreur d'estimation (4.3) et en utilisant l'expression de  $\hat{x}(t)$  donné par (4.27), l'expression de l'erreur devient :

$$e(t) = (I + EC)x(t) - z(t) + EF\bar{u}(t) \quad (4.47)$$

Par la suite, on cherche à expliciter l'évolution temporelle de l'erreur d'estimation afin d'en maîtriser la convergence vers zéro. Pour cela évaluons l'expression la dynamique de cette erreur :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left[ P (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) - N_i z(t) \right. \\ \left. - G_{i1} u(t) - G_{i2} - L_i y(t) \right] + EF\dot{\bar{u}}(t) \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec :

$$P = I + EC \quad (4.49)$$

En remplaçant  $y(t)$  et  $z(t)$  par leurs expressions données par l'équation (4.27) et (4.46),

la dynamique de l'erreur s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left[ -N_i \hat{x}(t) + (PA_i - K_i C)x(t) + (PB_i - G_{i1})u(t) + (PD_i - G_{i2}) + (PR_i - K_i F)\bar{u}(t) \right] + EF\dot{\bar{u}}(t) \quad (4.50)$$

avec  $K_i = N_i E + L_i$ . Si l'on ajoute et on soustrait l'expression  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i x(t)$  à l'équation (4.50),  $\dot{e}(t)$  devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left[ N_i e(t) + (PA_i - K_i C - N_i)x(t) + (PB_i - G_{i1})u(t) + (PD_i - G_{i2}) + (PR_i - K_i F)\bar{u}(t) \right] + EF\dot{\bar{u}}(t)$$

Si les conditions (4.51) sont satisfaites :

$$\begin{cases} N_i = PA_i - K_i C \\ PR_i = K_i F \\ G_{i1} = PB_i \\ G_{i2} = PD_i \\ EF = 0 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) N_i \text{ est stable} \end{cases} \quad (4.51)$$

l'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro et l'équation (4.48) se réduit à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i e(t) \quad (4.52)$$

La décroissance asymptotique de l'erreur d'estimation d'état est alors dépendante de la nature de la matrice  $N = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) N_i$  et, comme précédemment, la stabilité des matrices  $N_i, \forall i \in \{1, \dots, M\}$  ne garantit par forcément la stabilité de cette dernière. Ainsi, les contraintes (4.51) définissent le multiobservateur capable d'estimer l'état du système à entrées inconnues. Il reste cependant à montrer comment estimer les entrées inconnues  $\bar{u}(t)$  du multimodèle et cela est proposé au paragraphe (4.4). Enfin, la stabilité de la matrice  $N$  doit être garantie en respectant l'ensemble des contraintes matricielles (4.51), ce point technique concernant la méthode de résolution fait l'objet du paragraphe (4.3.2.2).

### 4.3.2.1 Convergence globale du multiobservateur

Dans cette partie, des conditions suffisantes de la convergence asymptotique globale de l'erreur d'estimation d'état sont précisées. Comme l'indique l'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation (4.52), la convergence est étroitement liée à la nature de la matrice

$$N = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) N_i.$$

**Théorème 4.5** [Akhe 04e] : *l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle à entrées inconnues (4.46) et le multiobservateur (4.27) converge asymptotiquement vers zéro, si toutes les paires  $(A_i, C)$  sont observables et si les conditions suivantes sont vérifiées  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :*

$$N_i^T X + X N_i < 0 \quad (4.53a)$$

$$N_i = P A_i - K_i C \quad (4.53b)$$

$$P R_i = K_i F \quad (4.53c)$$

$$E F = 0 \quad (4.53d)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (4.53e)$$

$$G_{i1} = P B_i \quad (4.53f)$$

$$G_{i2} = P D_i \quad (4.53g)$$

où  $P = I + EC$  et  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

Le système d'équations (4.53) est composé de l'inégalité bilinéaire matricielle (4.53a), qui doit être résolue en tenant compte des contraintes linéaires (4.53b) à (4.53d). Notons que les équations (4.53e), (4.53f) et (4.53g) servent uniquement pour le calcul des gains  $L_i$ ,  $G_{i1}$  et  $G_{i2}$  une fois les matrices  $K_i$  et  $N_i$  déterminées. Afin de résoudre ce problème à l'aide des outils numériques LMI, l'inégalité (4.53a) doit être linéarisée. La technique choisie, équivalente à celle utilisée au paragraphe (4.3.1.2), est basée sur des changements de variables.

### 4.3.2.2 Méthode de résolution

Considérons les changements de variables suivants :

$$W_i = X K_i \quad (4.54a)$$

$$S = X E \quad (4.54b)$$

Les contraintes (4.53d) et (4.53c) peuvent alors être réécrites,  $\forall i = \{1, \dots, M\}$  :

$$SF = 0 \quad (4.55a)$$

$$(X + SC)R_i = W_i F \quad (4.55b)$$

De même l'inégalité (4.53a) s'écrit sous la forme :

$$A_i^T X + X A_i + A_i^T C^T S^T + S C A_i - W_i C - C^T W_i^T < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (4.56a)$$

Ces dernières inégalités matricielles (4.56) sont linéaires par rapport aux matrices inconnues  $X$ ,  $S$  et  $W_i$ . Par conséquent, des outils classiques LMI peuvent être utilisés pour résoudre (4.56) sous les contraintes égalité (4.55a) et (4.55b).

Les autres matrices définissant le multiobservateur (4.27) sont ensuite déduites de la connaissance  $X$ ,  $S$  et  $W_i$  :

$$E = X^{-1}S \quad (4.57a)$$

$$P = I + EC \quad (4.57b)$$

$$G_{i1} = P B_i \quad (4.57c)$$

$$G_{i2} = P D_i \quad (4.57d)$$

$$K_i = X^{-1}W_i \quad (4.57e)$$

$$N_i = P A_i - K_i C \quad (4.57f)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (4.57g)$$

L'ensemble des matrices décrivant le multiobservateur (4.27) peut ainsi être déterminé en utilisant des outils LMI largement répandus [Boyd 94].

### 4.3.2.3 Placement de pôles

Comme dans le cas précédent, on peut contrôler la vitesse de convergence du multiobservateur en imposant que les valeurs propres des matrices  $N_i$  du multiobservateur soient dans la région  $S(\alpha, \beta)$  précédemment définie. En s'appuyant sur la définition (??) et les contraintes (4.56), nous énonçons le corollaire suivant :

**Corollaire 4.2** [Akhe 03a] : les valeurs propres de la matrice  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))N_i$  appartiennent à la région  $S(\alpha, \beta)$ , s'il existe une matrice  $X$  définie positive et des matrices  $S$  et  $W_i$  telles que pour  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} SF = 0 \\ (X + SC)R_i = W_iF \\ \left[ \begin{array}{cc} -\beta X & A_i^T X + A_i^T C^T S^T - C^T W_i^T \\ XA_i + SC A_i - W_i C & -\beta X \end{array} \right] < 0 \\ A_i^T X + XA_i + A_i^T C^T S^T + SC A_i - C^T W_i^T - W_i C + 2\alpha X < 0 \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Dans cette dernière partie, nous avons montré, comment passer des contraintes BMI (inégalités bilinéaires matricielles) à des contraintes LMI (inégalités linéaires matricielles) en utilisant des changements de variables. La convergence du multiobservateur (4.27) est garantie par la résolution d'un ensemble de contraintes "égalités et inégalités" qui peut être résolu par des techniques classiques LMI.

Nous avons déjà évoqué le problème lié à la recherche d'une matrice de Lyapunov commune pour un nombre  $M$  d'inégalités matricielles (4.35a) ou (4.53a). Une autre méthode basée sur l'existence de différentes matrices locales de Lyapunov  $X_i > 0$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$ , peut être exploitée, en s'appuyant sur l'énoncé du théorème (3.2) explicité au chapitre précédent.

## 4.4 Estimation des entrées inconnues

Plusieurs travaux ont été réalisés pour l'estimation des entrées inconnues dans le cadre des systèmes dynamiques linéaires [Maqu 94] et [Stot 01]. Edwards et Spurgeon ont proposé deux méthodes s'appuyant sur des observateurs à mode glissant, pour détecter et estimer les défauts de capteurs [Edwa 00]. Liu et Peng ont présenté, en utilisant un observateur de Luenberger, l'estimation des états inconnus d'un système dynamique linéaire soumis à des perturbations. L'algorithme d'estimation de ces perturbations est basé sur l'inverse de la dynamique du système [Liu 02].

Nous avons démontré précédemment que la convergence de l'observateur (4.27) du système (4.46) est garantie si les conditions (4.53) sont vérifiées et les paires  $(A_i, C)$  sont observables. En régime permanent, l'erreur d'estimation d'état tend vers zéro; en remplaçant

$x(t)$  par  $\hat{x}(t)$  dans l'équation (4.46) nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t) + D_i \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{u}(t) \end{cases} \quad (4.59)$$

Remarquons que dans l'équation (4.59) la seule variable inconnue est bien la variable  $\hat{u}(t)$  qui représente une estimation de l'entrée inconnue, l'équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) \\ C \hat{x}(t) \end{pmatrix} + W \hat{u}(t) \quad (4.60)$$

où

$$W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \\ F \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Sous l'hypothèse que cette matrice que nous appelons  $W$  soit de plein rang colonne, alors on est ramené à un système d'équation linéaire en  $\hat{u}(t)$  qui est équivalent à un problème d'optimisation linéaire qu'on sait résoudre avec la méthode des moindres carrés. La solution numérique de ce problème est basée sur le calcul de la pseudo-inverse de la matrice  $W$ . En fin l'expression de l'estimation de l'entrée inconnue est donnée par l'équation suivante :

$$\hat{u}(t) = (W^T W)^{-1} W^T \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y(t) - C \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

**Remarque :** Dans le cas où la matrice  $F$  est de plein rang colonne le calcul de l'estimation de l'entrée inconnue peut s'effectuer de façon plus simple :

$$\hat{u}(t) = (F^T F)^{-1} F^T (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (4.63)$$

## 4.5 Exemple d'application

Considérons le multimodèle suivant, composé de deux modèles locaux et comportant deux sorties et trois états.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) \left( A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) \right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) + \nu(t) \end{cases} \quad (4.64)$$

Dans cet exemple, le vecteur des variables de décision est le vecteur des entrées connues  $u(t)$ . La sortie  $y(t)$  supporte un bruit additif  $\nu(t)$  centré de variance égale à 0,01. Les valeurs numériques des matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $R_i$ ,  $C$  et  $F$  sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le multiobservateur capable d'estimer l'état du multimodèle (4.64) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) \left( N_i z(t) + G_{i1} u(t) + G_{i2} + L_i y(t) \right) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases} \quad (4.65)$$

En appliquant la méthode de résolution présentée au paragraphe (4.3.2.2), les valeurs numériques des matrices du multiobservateur (4.65) sont :

$$N_1 = \begin{bmatrix} -8.25 & -0.69 & -2.62 \\ 0.45 & -13.76 & 0.22 \\ -0.61 & -1.00 & -7.80 \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} -15.82 & -4.74 & 2.31 \\ 1.02 & -14.11 & -0.11 \\ -1.13 & -0.13 & -1.59 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -2.62 & 2.62 \\ -0.77 & 0.77 \\ -0.80 & 0.80 \end{bmatrix} \quad G_{11} = \begin{bmatrix} 2.31 \\ -0.11 \\ -0.09 \end{bmatrix} \quad G_{21} = \begin{bmatrix} -3.12 \\ 0.22 \\ -1.05 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 33.91 & -30.28 \\ 22.32 & -22.54 \\ 13.13 & -11.32 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 71.11 & -71.42 \\ 20.58 & -20.47 \\ 11.48 & -13.88 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ -0.02 & 0 & 0.29 \end{bmatrix}$$

Le système (4.64) a été simulé en choisissant, pour l'entrée inconnue, un signal aléatoire dont l'amplitude change toutes les 5 secondes.

Les figures (4.3) représentent respectivement l'évolution des entrées connue  $u(t)$  et inconnue  $\bar{u}(t)$ . Quant aux figures (4.4), elles montrent les erreurs d'estimation d'état ( $x(t) - \hat{x}(t)$ ) et l'entrée inconnue  $\bar{u}(t)$  du multimodèle ainsi que leurs estimations respectives

$\hat{x}(t)$  et  $\hat{u}(t)$ . On constate que la qualité de l'estimation est satisfaisante sauf au voisinage de l'origine; cela est dû au choix des valeurs initiales du multiobservateur (4.65) ( $x(0) = [1.5 \ 0 \ 0]^T$  et  $\hat{x}(0) = [-0.3 \ -0.25 \ 0.3]^T$ ).

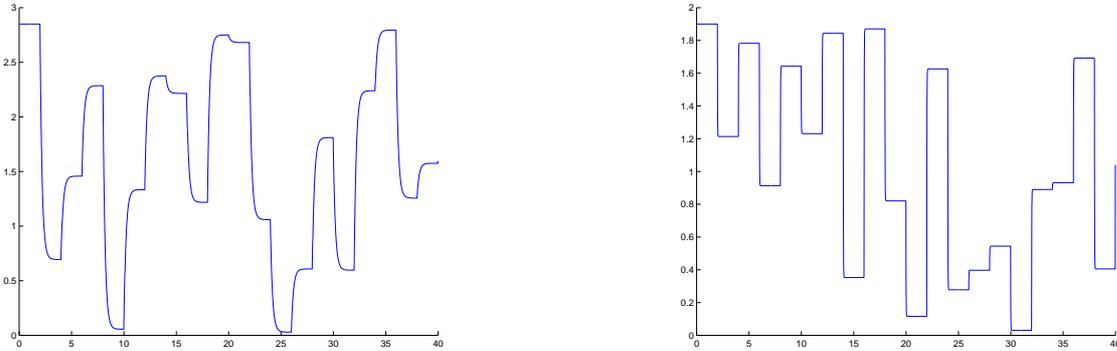


FIG. 4.3 – Entrées connue  $u(t)$  et inconnue  $\bar{u}(t)$

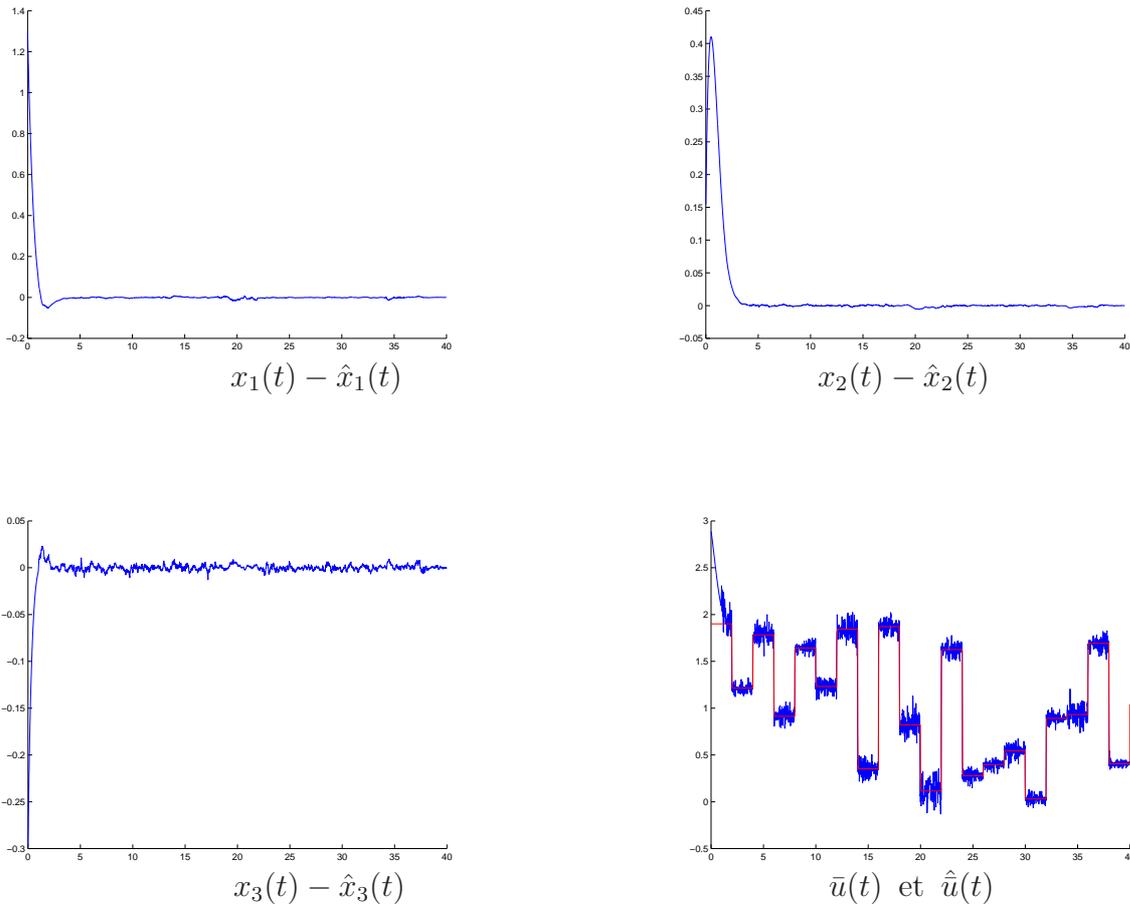


FIG. 4.4 – Résultats des estimations

On observe donc de bonnes performances d'estimation de l'observateur proposé même en présence de bruit.

## 4.6 Conclusion

A partir d'une représentation multimodèle, on a montré comment concevoir un multiobservateur utilisant le principe de l'interpolation d'observateurs locaux ; de plus, on a considéré le cas où certaines entrées du système sont inconnues. Le calcul des gains de l'observateur global est alors ramené à un calcul de gains des observateurs locaux ; la stabilité de l'ensemble nécessite cependant la prise en compte de contraintes de couplage entre ces observateurs locaux, ce qui conduit à la résolution d'un problème de type BMI.

De simples changements de variables permettent de transformer les inégalités bilinéaires obtenues en des inégalités linéaires ce qui facilite la résolution de point de vue numérique en utilisant des outils LMI. Ce résultat est valable uniquement lorsque la matrice de Lyapunov est commune pour toutes les inégalités matricielles, ce qui fait l'inconvénient principal de la méthode.



# 5

## Conception de multiobservateurs à mode glissant

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>125</b>
<b>5.2</b>	<b>Différentes approches de conception de multiobservateur</b>	<b>126</b>
5.2.1	1 <sup>ère</sup> approche : extension de l'observateur de Walcott et Zak	126
5.2.2	2 <sup>ème</sup> approche : relaxation de certaines conditions d'existence	133
5.2.3	3 <sup>ème</sup> approche : élimination des contraintes structurelles	135
5.2.4	Estimation des entrées inconnues	138
5.2.5	Exemple de simulation	139
<b>5.3</b>	<b>Multiobservateur pour un multimodèle incertain</b>	<b>143</b>
5.3.1	Formulation du problème	143
5.3.2	Conception du multiobservateur	144
5.3.3	Exemple de simulation	148
<b>5.4</b>	<b>Multiobservateur en présence d'entrées inconnues et d'incertitudes de modèle</b>	<b>151</b>
5.4.1	Principe de reconstruction	151
5.4.2	Convergence du multiobservateur	152

**5.5 Conclusion . . . . . 154**

---

## 5.1 Introduction

Parmi les méthodes de détection et localisation de défauts pour les systèmes représentés à l'aide d'un modèle dynamique, celles qui s'appuient sur la génération d'indicateurs de défauts, souvent appelés résidus, calculés comme la différence entre des mesures prélevées sur le système réel et des estimations calculées par un modèle, sont désormais classiques. De nombreux résultats s'appuyant, en particulier, sur des modèles linéaires ont été développés dans diverses situations (système régulier ou singulier, cadre stochastique ou déterministe, présence d'entrées inconnues, etc.). Lorsqu'on souhaite représenter le comportement d'un système à l'aide d'un modèle non linéaire, la conception d'observateurs est en général plus délicate, notamment si l'on souhaite prendre en compte des entrées inconnues [Patt 97]. Le système peut alors être décrit à l'aide d'un multimodèle.

Dans ce présent chapitre, nous montrons comment transposer les techniques d'observateurs à mode glissant, appliquées pour l'estimation d'état et d'entrées inconnues de systèmes linéaires, pour la conception de multiobservateurs.

Le concept de mode glissant a émergé en Union Soviétique vers la fin des années 60, où des lois de commande discontinues pour les systèmes dynamiques ont été analysées. En utilisant une loi de commande commutée judicieuse, on a constaté que les états du système pouvaient être forcés pour atteindre et rester ultérieurement sur une surface prédéfinie dans l'espace d'état. Contraint sur cette surface, le mouvement résultant, appelé mouvement glissant, s'est avéré peu sensible à toutes les incertitudes ou signaux externes de perturbation.

Cette propriété inhérente de robustesse a eu comme conséquence le développement de recherches dans le domaine de la commande par mode glissant. Ces idées ont été ultérieurement utilisées dans d'autres situations comprenant le problème d'estimation d'état par l'intermédiaire d'un observateur. Les premiers travaux ont été réalisés par Utkin en utilisant une structure discontinue dans un observateur [Utki 92]. Walcott et Zak ont utilisé une approche basée sur la méthode de Lyapunov consistant à synthétiser un observateur qui, avec des hypothèses appropriées, assure la décroissance asymptotique de l'erreur d'estimation d'état même en présence de non linéarités et d'incertitudes sur l'entrée du système [Walc 88]. Edwards et Spurgeon [Edwa 94] et [Edwa 00] ont proposé une stratégie de conception d'observateur, semblable du point de vue structure de modèle à celle de Walcott et de Zak, en offrant de plus un algorithme explicite de conception.

Dans le cadre de l'approche multimodèle, Palm et al [Palm 00] ont présenté une méthode de conception d'un multiobservateur pour un modèle flou de forme canonique. Bregsten et al [Breg 02] ont présenté l'analyse et la conception d'un multiobservateur à mode glis-

sant, pour un multimodèle constitué de fonction d'activation dépendant de variables non mesurables.

## 5.2 Différentes approches de conception de multiobservateur

Le multiobservateur synthétisé dans le chapitre précédent permet de s'affranchir de perturbations additives (entrées inconnues). Dans cette section, les multiobservateurs sont dotés de termes discontinus (glissants) pour compenser à la fois les entrées inconnues (perturbations additives) et les incertitudes de modèles (perturbations multiplicatives).

Dans le but de simplifier les conditions d'existence des multiobservateurs, nous proposons trois approches différentes de conception.

### 5.2.1 1<sup>ère</sup> approche : extension de l'observateur de Walcott et Zak

Dans ce paragraphe, nous proposons une démarche originale de conception d'un multiobservateur à structure variable (mode glissant), capable de reconstruire le vecteur d'état et le vecteur de sortie en présence d'entrées inconnues. Chaque observateur local est un observateur de type "Edwards et Spurgeon" [Edwa 00]. La technique est basée sur l'élimination partielle des entrées inconnues. Il s'agit en fait d'isoler les entrées inconnues dans une partie de l'équation d'état.

Considérons de nouveau un système non linéaire représenté par le multimodèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Nous considérons que les entrées inconnues  $\bar{u}(t)$  sont bornées et non nulles :

$$\|\bar{u}(t)\| \leq \rho \quad (5.2)$$

où  $\rho$  est un scalaire positif et  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne.

Le multiobservateur de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i - G_i (C \hat{x}(t) - y(t)) + K_i \nu_i(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.3)$$

est capable d'estimer le vecteur d'état du multimodèle (5.1), s'il existe des matrices de gain  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , telle que  $A_{0i} = A_i - G_i C$  sont stables, des paires de matrices de Lyapunov  $(P, Q_i)$  et des matrices  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$  respectant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} A_{0i}^T P + P A_{0i} = -Q_i \\ C^T F_i^T = P R_i, \quad \forall i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (5.4)$$

Les matrices  $G_i$ ,  $K_i$  et les termes  $\nu_i(t)$ , avec  $\nu_i(t) \in \mathbb{R}^q$  sont déterminés de manière à garantir la convergence asymptotique de  $\hat{x}(t)$  vers l'état  $x(t)$  du multimodèle (5.1). La deuxième équation des contraintes (5.4) permet le découplage des entrées inconnues.

La démarche suivie pour déterminer les matrices du multiobservateur (5.3) est semblable à la démarche effectuée au paragraphe (2.5) du chapitre 2. Afin d'isoler les entrées inconnues d'une partie des équations d'état, deux étapes sont indispensables :

1. **Exprimer le vecteur de sortie comme une partie du vecteur d'état** On considère le changement de variable suivant :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{T}x(t) \quad (5.5)$$

où  $\tilde{T}$  est une transformation non singulière, définie par l'expression suivante :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

et  $C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$  et  $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  avec  $\det(C_2) \neq 0$

Le multimodèle (5.1) et les contraintes (5.4) deviennent alors dans ce nouveau système de coordonnées :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( \tilde{A}_i \tilde{x}(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{R}_i \tilde{u}(t) + \tilde{D}_i \right) \\ y(t) = \tilde{x}_2(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \tilde{A}_{0i}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{0i} = -\tilde{Q}_i \\ \tilde{C}^T F_i^T = \tilde{P} \tilde{R}_i, \quad \forall i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (5.8)$$

où le calcul des matrices du multimodèle  $\tilde{A}_i$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{R}_i$ ,  $\tilde{D}_i$  et  $\tilde{C}$  ainsi que les matrices  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}_i$  est effectué de la même façon que pour calculer les matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{D}$  et

$\tilde{C}$  relatives à un seul modèle linéaire (voir les équations (2.47) et (2.48) du chapitre 2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_i = \tilde{T} A_i \tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i11} & \tilde{A}_{i12} \\ \tilde{A}_{i21} & \tilde{A}_{i22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \tilde{T} B_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{i1} \\ \tilde{B}_{i2} \end{bmatrix} \\ \text{et } \tilde{R}_i = \tilde{T} R_i = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{i1} \\ \tilde{R}_{i2} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = C \tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \text{et } \tilde{D}_i = \tilde{T} D_i = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{i1} \\ \tilde{D}_{i2} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{P} = (\tilde{T}^{-1})^T P \tilde{T}^{-1} \\ \tilde{Q}_i = (\tilde{T}^{-1})^T Q_i \tilde{T}^{-1} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

avec  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix}$  où  $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)} \text{ est régulière} \\ \tilde{P}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p} \text{ et } \tilde{P}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p} \end{array} \right.$

Notons que :

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}$$

On constate alors que  $y(t)$  s'exprime en fonction d'une partie du vecteur d'état uniquement.

## 2. Isoler explicitement les entrées inconnues d'une partie du vecteur d'état

De même, en utilisant la transformation non singulière  $\bar{T}$  donnée par la relation suivante :

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

et le changement de coordonnées suivant :

$$\bar{x}(t) = \bar{T} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Le multimodèle (5.7) et les contraintes (5.8) deviennent alors dans ce nouveau système de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{R}_i \bar{u}(t) + \bar{D}_i) \\ y(t) = \bar{x}_2(t) \end{array} \right. \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} \bar{A}_{0i}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{0i} = -\bar{Q}_i \\ \bar{C}^T F_i^T = \bar{P} \bar{R}_i, \quad \forall i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (5.14)$$

et les matrices  $\bar{A}_i$ ,  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{R}_i$ ,  $\bar{D}_i$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}_i$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \bar{A}_i = \bar{T} \tilde{A}_i \bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11i} & \bar{A}_{12i} \\ \bar{A}_{21i} & \bar{A}_{22i} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \bar{T} \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1i} \\ \bar{B}_{2i} \end{bmatrix} \\ \text{et } \bar{R}_i = \bar{T} \tilde{R}_i = \begin{bmatrix} \bar{R}_{1i} \\ \bar{R}_{2i} \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \tilde{C} \bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \text{et } \bar{D}_i = \bar{T} \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} \bar{D}_{1i} \\ \bar{D}_{2i} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} \bar{P} = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{P} \bar{T}^{-1} \\ \bar{Q}_i = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{Q}_i \bar{T}^{-1} \end{cases} \quad \text{avec } \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

et elles ont les propriétés suivantes :

- (a)  $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11i} & \bar{A}_{12i} \\ \bar{A}_{21i} & \bar{A}_{22i} \end{bmatrix}$  où  $\bar{A}_{11i} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  sont des matrices stables.
- (b)  $\bar{R}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^* F_i^T \end{bmatrix}$  où  $P_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  avec  $P_{22}^* = (P_{22}^*)^T > 0$ .
- (c)  $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$ .

- (d) la matrice de Lyapunov a une structure bloc-diagonale  $\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}$  avec  $\bar{P}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  et  $\bar{P}_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ .

**Remarque :** les quatres propriétés ont été déjà démontrées lors du chapitre 2, voir le paragraphe (2.5.2).

La forme développée du multimodèle (5.13) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_{11i} \bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12i} \bar{x}_2(t) + \bar{B}_{1i} u(t) + \bar{D}_{1i}) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_{21i} \bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22i} \bar{x}_2(t) + \bar{B}_{2i} u(t) + \bar{R}_{2i} u(t) + \bar{D}_{2i}) \\ y(t) = \bar{x}_2(t) \end{cases} \quad (5.17)$$

**Remarque :**  $\bar{x}_1(t)$  ne dépend pas explicitement des entrées inconnues  $\bar{u}(t)$ .

On peut alors proposer la forme suivante pour le multiobservateur du système (5.17) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{D}_i - \bar{G}_i (\hat{y}(t) - y(t)) + \bar{K}_i \nu_i(t)) \\ \hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

avec  $\bar{G}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12i} \\ \bar{A}_{22i} - \bar{A}_{22}^s \end{bmatrix}$  et  $\bar{K}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^{-1} \bar{R}_{2i} \end{bmatrix}$

où  $\hat{x}(t)$  représente l'estimation du vecteur d'état  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{A}_{22}^s$  est une matrice stable choisie arbitrairement et les variables  $\nu_i(t)$  sont définies par la relation suivante :

$$\begin{cases} \text{si } e_y(t) \neq 0, \text{ alors } \nu_i(t) = -\rho E_i^T (E_i E_i^T)^{-1} \|e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i}\| \\ \text{si } e_y(t) = 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

avec  $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ ,  $E_i = e_y^T(t) \bar{R}_{2i} \forall i \in \{1, \dots, M\}$  et  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice symétrique et définie positive, solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$(P_2 \bar{A}_{22}^s)^T + P_2 \bar{A}_{22}^s = -Q_2 \quad (5.20)$$

Si l'on note  $e_1(t)$ , l'erreur d'estimation d'état :

$$e_1(t) = \hat{x}_1(t) - \bar{x}_1(t) \quad (5.21)$$

alors la dynamique des erreurs d'estimation  $e_1(t)$  et  $e_y(t)$  sont :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \bar{A}_{11i} e_1(t) \\ \dot{e}_y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_{21i} e_1(t) + \bar{A}_{22}^s e_y(t) + P_2^{-1} \bar{R}_{2i} \nu_i - \bar{R}_{2i} \bar{u}(t)) \end{cases} \quad (5.22)$$

### Convergence du multiobservateur

Afin de démontrer la convergence asymptotique du multiobservateur (5.18), considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e_1^T(t) P_1 e_1(t) + e_y^T(t) P_2 e_y(t) \quad (5.23)$$

où  $P_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  et  $P_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  sont des matrices symétriques et définies positives,  $P_2$  est définie par (5.20) et  $P_1$  est une solution des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11i}^T P_1 + P_1 \bar{A}_{11i} &= -\hat{Q}_i \\ Q_{1i} &= \hat{Q}_i - \bar{A}_{21i}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21i} \end{aligned} \quad (5.24)$$

où  $Q_{1i}$  sont des matrices symétriques et définies positives.

**Remarque :** Les matrices  $P_2$  et  $Q_2$  sont déterminées en utilisant (5.20). Les contraintes (5.24) sont donc linéaires par rapport aux variables  $P_1$ ,  $\hat{Q}_i$  et  $Q_{1i}$ .

La dérivée de (5.23) par rapport au temps le long de la trajectoire du système en utilisant les expressions de  $e_1(t)$  et  $e_y(t)$  s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e_1^T(t) (\bar{A}_{11i}^T P_1 + P_1 \bar{A}_{11i}) e_1(t) + e_y^T(t) \left( (\bar{A}_{22}^s)^T P_2 + P_2 \bar{A}_{22}^s \right) e_y(t) + \right. \\ &\quad \left. e_1^T(t) \bar{A}_{21i}^T P_2 e_y(t) + e_y^T(t) P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t) + 2e_y^T(t) \bar{R}_{2i} \nu_i(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i} \bar{u}(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) \hat{Q}_i e_1(t) - e_y^T(t) Q_2 e_y(t) + e_1^T(t) \bar{A}_{21i}^T P_2 e_y(t) + \right. \\ &\quad \left. e_y^T(t) P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t) + 2e_y^T(t) \bar{R}_{2i} \nu_i(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i} \bar{u}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

En s'appuyant sur l'égalité suivante et les contraintes (5.24) :

$$\begin{aligned} &\left( e_y(t) - Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t) \right)^T Q_2 \left( e_y(t) - Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t) \right) = \\ &\left( e_y^T(t) Q_2 e_y(t) - e_1^T \bar{A}_{21i}^T P_2 e_y(t) - e_y^T(t) P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t) + e_1^T(t) \bar{A}_{21i}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t) \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

alors (5.25) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) \left( \hat{Q}_i - \bar{A}_{21i}^T P_2 Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21i} \right) e_1(t) - \right. \\ &\quad \left. \tilde{e}_{yi}^T(t) Q_2 \tilde{e}_{yi}(t) + 2e_y^T(t) \bar{R}_{2i} \nu_i(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i} \bar{u}(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) Q_{1i} e_1(t) - \tilde{e}_{yi}^T(t) Q_2 \tilde{e}_{yi}(t) + \right. \\ &\quad \left. 2e_y^T(t) \bar{R}_{2i} \nu_i(t) - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i} \bar{u}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

avec :  $\tilde{e}_{yi}^T(t) = e_y(t) - Q_2^{-1} P_2 \bar{A}_{21i} e_1(t)$

Afin de montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov (5.27) est négative, considérons les deux cas suivants :

1. Supposons que  $e_y(t) \neq 0$ , en utilisant l'expression de  $\nu_i(t)$  donnée par (5.19), l'expression (5.27) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) Q_{1i} e_1(t) - \tilde{e}_{yi}^T(t) Q_2 \tilde{e}_{yi}(t) - \right. \\ &\quad \left. 2\rho \|e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i}\| - 2e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i} \bar{u}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$\bar{u}(t)$  est borné alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) Q_{1i} e_1(t) - \tilde{e}_{y_i}^T(t) Q_2 \tilde{e}_{y_i}(t) - \right. \\ &\quad \left. 2\rho \|e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i}\| + 2\rho \|e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i}\| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) Q_{1i} e_1(t) - \tilde{e}_{y_i}^T(t) Q_2 \tilde{e}_{y_i}(t) \right) < 0 \\ &\quad \text{pour } (e_1(t), \tilde{e}_{y_i}(t)) \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, M\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

2. Dans le cas où  $e_y(t) = 0$ , alors (5.27) devient :

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( -e_1^T(t) Q_{1i} e_1(t) - \tilde{e}_{y_i}^T(t) Q_2 \tilde{e}_{y_i}(t) \right) < 0 \quad (5.30)$$

Ainsi, nous avons démontré que les erreurs  $e_1(t)$  et  $e_y(t)$  convergent asymptotiquement vers zéro.

En résumé, le multiobservateur (5.3) peut être écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i - G_i (C \hat{x}(t) - y(t)) + K_i \nu_i(t) \right) \\ y(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\text{où } \begin{cases} G_i = (\bar{T} \tilde{T})^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{12i} \\ \bar{A}_{22i} - \bar{A}_{22}^s \end{bmatrix}, \quad K_i = (\bar{T} \tilde{T})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^{-1} \bar{R}_{2i} \end{bmatrix} \\ \begin{cases} \text{si } e_y(t) \neq 0, & \text{alors } \nu_i(t) = -\rho E_i^T (E_i E_i^T)^{-1} \|e_y^T(t) P_2 \bar{R}_{2i}\| \\ \text{si } e_y(t) = 0, & \text{alors } \nu_i(t) = 0 \end{cases} \\ \text{avec } e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \text{ et } E_i = e_y^T(t) \bar{R}_{2i} \end{cases} \quad (5.32)$$

Sous réserve d'existence de quelques matrices appropriées, nous avons montré que la reconstruction du vecteur d'état et de sortie du multimodèle est possible. La méthode est basée sur l'existence de deux transformations non singulières  $\bar{T}$  et  $\tilde{T}$ , telle que la première permette de représenter le vecteur de sortie directement comme composante du vecteur d'état et la deuxième permette d'isoler les entrées inconnues dans une partie du vecteur d'état.

L'avantage principal de cette méthode réside dans l'existence des deux transformations  $\bar{T}$  et  $\tilde{T}$  pour n'importe quel multimodèle écrit sous la forme (5.1). La stabilité du multiobservateur est liée au respect des inégalités linéaires matricielles (5.20) et (5.24).

## 5.2.2 2<sup>ème</sup> approche : relaxation de certaines conditions d'existence

Dans le paragraphe précédent, l'existence du multiobservateur est garantie sous réserve d'existence d'une matrice de Lyapunov, des matrices  $F_i$  ainsi que d'une matrice stable  $A_{22}^s$ . Dans cette section, notre objectif est de concevoir un multiobservateur estimant les vecteurs d'état et de sortie du multimodèle (5.1) tout en relaxant les conditions d'existence de ce multiobservateur par rapport à celles énoncées précédemment.

### 5.2.2.1 Principe de reconstruction

On considère ici que les conditions (5.4) sont vérifiées. La forme du multiobservateur considérée est celle de l'équation (5.3) avec des gains  $K_i$  égaux aux matrices d'influence des entrées inconnues, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - C \hat{x}(t)) + R_i \nu_i(t) \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.33)$$

Les gains  $G_i$  et les expressions des variables  $\nu_i(t)$  doivent être déterminés pour assurer la convergence du multiobservateur (5.33). Pour cela, nous utilisons les expressions de l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$  décrite par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.34)$$

et celle de l'erreur d'estimation du vecteur de sortie  $r(t)$  définie par :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (5.35)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'exprime alors sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i - G_i C) e(t) + R_i \bar{u}(t) - R_i \nu_i(t) \right) \quad (5.36)$$

**Théorème 5.1** [Akhe 04b] : l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle (5.1) et le multiobservateur (5.33), converge asymptotiquement vers zéro, si les termes  $\nu_i(t)$  sont définis par :

$$\begin{cases} \text{si } r(t) \neq 0, \text{ alors } \nu_i(t) = \rho \frac{F_i r(t)}{\|F_i r(t)\|} \\ \text{si } r(t) = 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

et s'il existe des matrices de gain  $G_i$  et une matrice symétrique et définie positive  $P$  qui satisfont les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) &< 0 \\ C^T F_i^T &= P R_i, \quad i \in \{1, \dots, M\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 5.2.2.2 Convergence du multiobservateur

Afin de démontrer la convergence asymptotique de cet observateur, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e^T(t) P e(t) \quad (5.39)$$

Sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire du système en utilisant les équations (5.34) et (5.36) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) &\left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ &\left. 2e^T(t) P R_i \bar{u}(t) - 2e^T(t) P R_i \nu_i(t) \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

En utilisant la deuxième égalité de la contrainte (5.38), la dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) &\left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ &\left. 2e^T(t) C^T F_i^T \bar{u}(t) - 2e^T(t) C^T F_i^T \nu_i(t) \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ &\left. 2r^T(t) F_i^T \bar{u}(t) - 2r^T(t) F_i^T \nu_i(t) \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

que l'on peut majorer par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) &\left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ &\left. 2\rho \|F_i r(t)\| - 2r^T(t) F_i^T \nu_i(t) \right) \end{aligned}$$

Dans le cas où l'erreur d'estimation de la sortie  $r(t)$  est non nulle ( $r(t) \neq 0$ ), en utilisant la relation (5.37), la majoration de la dérivée de la fonction de Lyapunov se simplifie :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ &\quad \left. 2\rho \|F_i r(t)\| - 2\rho r^T(t) F_i^T \frac{F_i r(t)}{\|F_i r(t)\|} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ &\quad \left. 2\rho \|F_i r(t)\| - 2\rho \|F_i r(t)\| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C)) e(t) \right) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $r(t)$  est nul, alors  $\nu_i(t) = 0$  (5.37), on obtient donc la même majoration de la fonction  $\dot{V}(t)$ . Ainsi  $\dot{V}(t)$  est toujours négative. Le multiobservateur (5.33) converge donc si les relations (5.37) et (5.38) sont satisfaites.

Dans cette partie, nous avons pu concevoir un multiobservateur pour un multimodèle en présence d'entrées inconnues bornées. Les conditions de convergence du multiobservateur se limitent à l'existence d'une matrice de Lyapunov  $P$ , des gains  $G_i$  et des matrices  $F_i$  qui vérifient les contraintes (5.38). Cette approche, plus directe que la précédente, requiert la résolution d'un nombre moins important de contraintes.

### 5.2.3 3<sup>ème</sup> approche : élimination des contraintes structurelles

Afin d'alléger plus encore les conditions d'existence d'un multiobservateur pour le multimodèle soumis à l'influence d'entrées inconnues, une autre méthode de conception peut être proposée. Si toutes les paires  $(A_i, C)$  sont observables, définissons un multiobservateur reconstruisant l'état du multimodèle (5.1) de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - C \hat{x}(t)) + \nu_i(t) \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.43)$$

Les matrices  $G_i$  et les vecteurs  $\nu_i(t)$  avec  $\nu_i(t) \in \mathbb{R}^n$  doivent être déterminés afin de garantir la convergence asymptotique de  $\hat{x}(t)$  vers  $x(t)$ . Il faut noter que les termes  $\nu_i(t)$  compensent les erreurs dues aux entrées inconnues.

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est obtenue en utilisant les équations (5.1), (5.34) et (5.43) :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i - G_i C) e(t) + R_i \bar{u}(t) - \nu_i(t) \right) \quad (5.44)$$

**Théorème 5.2** [Akhe 04b] : l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle (5.1) et le multiobservateur robuste (5.43) converge asymptotiquement vers zéro, si les termes  $\nu_i(t)$  sont définis par :

$$\begin{cases} \text{si } r(t) \neq 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0.5 \frac{\rho^2 \beta^{-1} \|PR_i\|^2}{r^T(t)r(t)} P^{-1} C^T r(t) \\ \text{si } r(t) = 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

avec  $\beta$  un scalaire positif,  $P$  est une matrice symétrique et définie positive et les gains  $G_i$  satisfont les inégalités suivantes :

$$(A_i - G_i C)^T P + P (A_i - G_i C) + \beta I_{n \times n} < 0 \quad i \in \{1, \dots, M\} \quad (5.46)$$

### 5.2.3.1 Convergence du multiobservateur

Afin de démontrer la convergence asymptotique du multiobservateur (5.43), nous avons considéré la fonction de Lyapunov (5.39). Sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire du système en utilisant l'équation (5.44) s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) & \left( e^T(t) ((A_i - G_i C)^T P + P (A_i - G_i C)) e(t) + \right. \\ & \left. 2e^T(t) P R_i \bar{u}(t) - 2e^T(t) P \nu_i(t) \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

On peut remarquer que :

$$2e^T(t) P R_i \bar{u}(t) = e^T(t) P R_i \bar{u}(t) + \bar{u}^T(t) R_i^T P e(t)$$

En utilisant le lemme (3.1) page 79, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} e^T(t) P R_i \bar{u}(t) + \bar{u}^T(t) R_i^T P e(t) & \leq \beta e^T(t) e(t) + \beta^{-1} \bar{u}^T(t) R_i^T P P R_i \bar{u}(t) \\ & \leq \beta e^T(t) e(t) + \beta^{-1} \|P R_i \bar{u}(t)\|^2 \\ & \leq \beta e^T(t) e(t) + \rho^2 \beta^{-1} \|P R_i\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$2e^T(t) P R_i \bar{u}(t) \leq \beta e^T(t) e(t) + \rho^2 \beta^{-1} \|P R_i\|^2$$

Dans le cas où  $r(t)$  est non nul, en utilisant la relation (5.45) et le fait que les entrées

inconnues sont bornées, la dérivée de la fonction de Lyapunov peut être majorée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) \left( (A_i - G_i C)^T P + P (A_i - G_i C) \right) e(t) + \beta e^T(t) e(t) + \right. \\
 &\quad \left. \rho^2 \beta^{-1} \|PR_i\|^2 - \rho^2 \beta^{-1} \frac{\|PR_i\|^2}{r^T(t)r(t)} e^T(t) C^T r(t) \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) \left( (A_i - G_i C)^T P + P (A_i - G_i C) + \beta I \right) e(t) + \right. \\
 &\quad \left. \rho^2 \beta^{-1} \|PR_i\|^2 - \rho^2 \beta^{-1} \frac{\|PR_i\|^2}{r^T(t)r(t)} r^T(t)r(t) \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) \left( (A_i - G_i C)^T P + P (A_i - G_i C) + \beta I \right) e(t) \right)
 \end{aligned}$$

Dans le cas où  $r(t)$  est nul,  $\nu_i(t)$  est nul (5.45), à partir de (5.47) on obtient la même majoration de la fonction  $\dot{V}(t)$ .

L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro, si les conditions (5.45) et les inégalités (5.46) sont vérifiées. Les inégalités (5.46) sont non linéaires en  $P$  et  $G_i$ . Les techniques LMI ne peuvent donc être utilisées qu'après linéarisation du système d'inégalités. Nous avons choisi la technique de changement de variable.

### 5.2.3.2 Méthode de résolution

Considérons le changement de variable suivant :

$$W_i = P G_i \tag{5.48}$$

Les inégalités (5.46) obtenues après ce changement de variable s'écrivent de la manière suivante :

$$A_i^T P + P A_i - C^T G_i^T P - P G_i C + \beta I < 0 \tag{5.49}$$

ainsi, on obtient des inégalités linéaires en  $P$  et  $W_i$  :

$$A_i^T P + P A_i - C^T W_i^T - W_i C + \beta I < 0 \tag{5.50}$$

La solution des inégalités (5.50) peut alors être obtenue en utilisant des techniques classiques de résolution LMI. Les gains  $G_i$  sont ensuite obtenus en calculant  $G_i = P^{-1} W_i$ .

**Remarque :** l'avantage principal de cette technique par rapport à toutes les précédentes, est le pouvoir de reconstruire l'état et la sortie du multimodèle dans le cas où les matrices

$C_i$  sont différentes pour chaque modèle local, le multimodèle dans ce cas s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (5.51)$$

La structure du multiobservateur capable de reconstruire le vecteur d'état et de sortie est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - C \hat{x}(t)) + \nu_i(t) \right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.52)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{si } r(t) \neq 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0.5 \frac{\rho^2 \beta^{-1} \|PR_i\|^2}{r^T(t)r(t)} P^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi(t)) C_j^T r(t) \\ \text{si } r(t) = 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0 \end{cases}$$

La démonstration de la convergence du multiobservateur (5.52) est semblable au cas où le vecteur de sortie  $y(t)$  est une combinaison linéaire du vecteur d'état.

#### 5.2.4 Estimation des entrées inconnues

La méthode que nous présentons ici est originale. Pour son application, le nombre d'entrées inconnues doit être inférieur à la dimension du vecteur d'état ( $q < n$ ). Connaissant les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $R_i$  et la matrice de sortie  $C$  définissant le multimodèle (5.1), on définit le multimodèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \bar{x}(t) + B_i u(t) + D_i \right) \\ \bar{y}(t) = C \bar{x}(t) \end{cases} \quad (5.53)$$

Nous avons montré précédemment que la convergence du multiobservateur est garantie sous des contraintes appropriées, les contraintes changent selon la structure du multiobservateur retenue. Lorsque le régime permanent est atteint, l'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro,  $x(t) = \hat{x}(t)$  et en remplaçant cette valeur dans l'équation (5.1), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t) + D_i \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.54)$$

où  $\hat{\bar{u}}(t)$  représente une estimation des entrées inconnues  $\bar{u}(t)$ .

La dynamique de l'erreur entre les états des multimodèles (5.54) et (5.53) est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i(\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) + R_i \hat{\bar{u}}(t) \right) \quad (5.55)$$

Si la matrice  $\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i$  est de plein rang colonne, l'estimation de l'entrée inconnue  $\bar{u}(t)$  est donnée comme suit :

$$\hat{\bar{u}}(t) = \left( \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right)^{-1} \left( (\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t)) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) A_i(\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) \right) \quad (5.56)$$

$$\left( \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right)^{-1} = \left( \left( \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right)^T \left( \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right) \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right)^T$$

### 5.2.5 Exemple de simulation

Le système non linéaire choisi est représenté à la figure (5.1). Il est issu d'un benchmark classique et schématise un processus hydraulique composé de trois réservoirs. Ces trois réservoirs  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  de sections identiques  $\mathbf{A}$  sont reliés entre eux par des conduites cylindriques de sections identiques  $S_n$ . La valve de sortie située à l'extrémité du réservoir  $T_2$ , assure l'écoulement des pompes 1 et 2 de débits respectifs  $Q_1(t)$  et  $Q_2(t)$ .

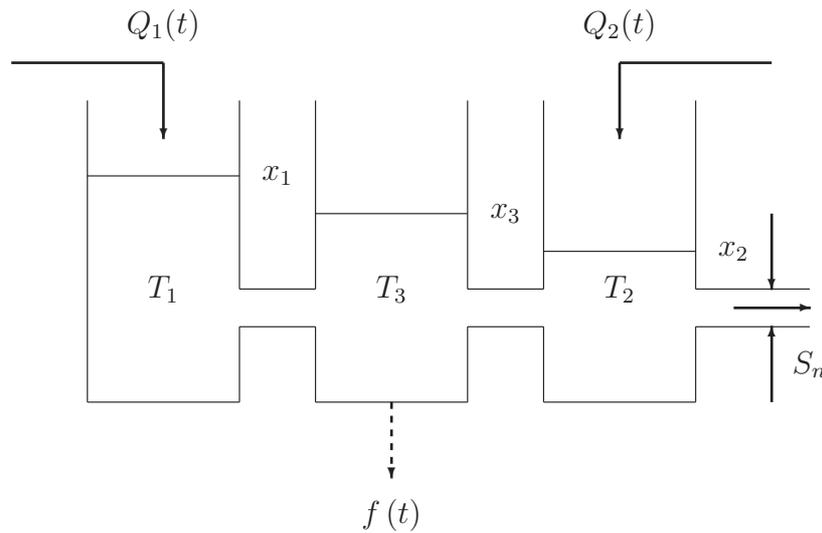


FIG. 5.1 – Système à trois cuves

Les trois niveaux  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont régis pour  $x_1 > x_3 > x_2$  (sens de l'écoulement imposé), par l'équation (5.57). A partir des lois fondamentales de conservation de la matière, on peut expliciter le fonctionnement de chaque réservoir et on obtient alors un modèle non linéaire traduit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \frac{dx_1(t)}{dt} = Q_1(t) - \alpha_1 S_n (2g(x_1(t) - x_3(t)))^{1/2} + \beta_1 f(t) \\ \mathbf{A} \frac{dx_2(t)}{dt} = Q_2(t) + \alpha_3 S_n (2g(x_3(t) - x_2(t)))^{1/2} - \alpha_2 S_n (2g(x_2(t)))^{1/2} + \beta_2 f(t) \\ \mathbf{A} \frac{dx_3(t)}{dt} = \alpha_1 S_n (2g(x_1(t) - x_3(t)))^{1/2} - \alpha_3 S_n (2g(x_3(t) - x_2(t)))^{1/2} + \beta_3 f(t) \end{cases} \quad (5.57)$$

$\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des constantes,  $f(t)$  désigne l'écoulement supplémentaire dans les réservoirs provoqués par des fuites (considérés comme une entrée inconnue),  $g$  est la constante de gravitation. Les valeurs numériques des constantes sont les suivantes :

$$\mathbf{A} = 0.0154, \quad \alpha_1 = 0.78, \quad \alpha_2 = 0.78, \quad \alpha_3 = 0.75, \quad g = 9.8 \text{ et } S_n = 5 \times 10^{-5}$$

Le système non linéaire (5.57) est modélisé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.58)$$

Les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $R_i$ ,  $C$  et  $D_i$  sont calculées en linéarisant le système initial (5.57) autour de deux points choisis dans le domaine de fonctionnement (voir les points ci-dessous). Le nombre de modèles locaux, égal à 2, a été choisi de façon heuristique, cette valeur garantissant, dans le domaine de fonctionnement choisi, une bonne approximation de l'état du système réel par celui du multimodèle. Les valeurs numériques de toutes les matrices sont :

$$A_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 18.5 & 0 & 18.5 \\ 0 & -20.9 & 15.0 \\ 18.5 & 15.0 & -33.5 \end{bmatrix} \quad A_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} -22.1 & 0 & 22.1 \\ 0 & -23.3 & 17.6 \\ 22.1 & 17.6 & -39.7 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \frac{1}{154} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} -0.225 \\ -0.089 \\ 0.005 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0.182 \\ -0.141 \\ 0.003 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T = 10^{-3} [-0.57 \ -0.50 \ -0.54]^T$$

Les paires  $(A_i, C)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sont observables. En utilisant les équations du multiobservateur (5.33), pour  $M = 2$ , les expressions des variables discontinues  $\nu_i(t)$  données par (5.37), la résolution des inégalités matricielles (5.38) conduit à :

$$P = 10^3 \begin{bmatrix} 1.11 & 0.38 & -0.46 \\ 0.38 & 0.88 & -0.34 \\ -0.46 & -0.31 & 0.81 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} -0.57 & -0.45 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation sont indiqués sur les figures (5.2)-(5.5). Le modèle (5.57) a été simulé en choisissant, pour l'entrée inconnue deux créneaux se déclenchant aux instants 35 sec et 95 sec, de durées 22 sec et 30 sec et d'amplitudes respectives égales à 40 et 20.

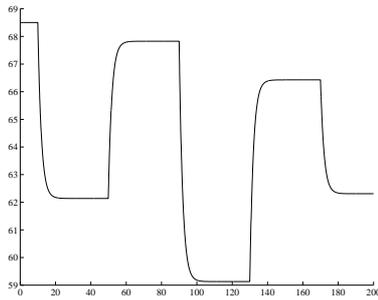


FIG. 5.2 – Débit  $Q_1(t)$  du système

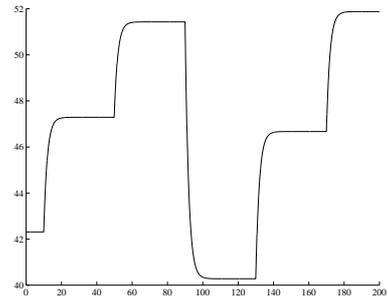


FIG. 5.3 – Débit  $Q_2(t)$  du système

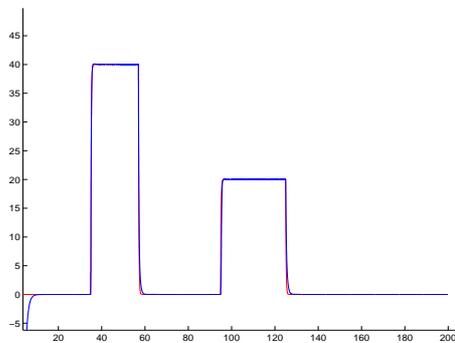


FIG. 5.4 – Entrée inconnue  $\bar{u}(t)$  et son estimée

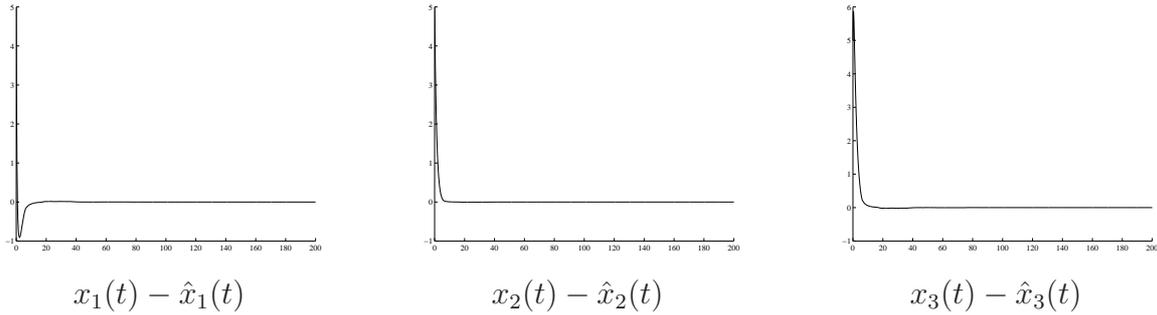


FIG. 5.5 – Estimation d'état d'un système à trois réservoirs

Il est important de noter qu'il peut y avoir un problème lors de l'implémentation du multiobservateur : quand l'erreur d'estimation de sortie  $r(t)$  tend vers zéro, la grandeur  $\alpha_i(t)$  tend vers  $\infty$ . Ce problème est surmonté de la façon suivante.

Posons :  $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_p(t))$ ,

si  $|r_i(t)| < \varepsilon$  où  $\varepsilon \ll 1$ , alors  $r_i(t) = \varepsilon$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$

Ainsi, si l'on a  $|r_i(t)| < \varepsilon, \forall i$ , le dénominateur de l'équation (5.68) devient :

$$r^T(t)r(t) = p\varepsilon^2$$

où  $p$  est la dimension du vecteur de résidus. Dans ce cas l'erreur d'estimation d'état ne converge pas asymptotiquement vers zéro mais elle est confinée dans un voisinage de zéro dépendant du choix de  $\varepsilon > 0$ . Les résultats de simulation montrent bien l'efficacité du multiobservateur proposé.

Dans cette section, nous avons procédé à la conception de trois structures différentes de multiobservateurs. Chacune d'entre elle a apporté des améliorations successives.

1. Le multiobservateur (5.3) est une extension de l'observateur de Edwards et Spurgeon capable d'estimer le vecteur d'état d'un multimodèle. Les contraintes définissant les différentes matrices sont nombreuses et la conception assez délicate.
2. Le multiobservateur (5.33) est basé sur la structure de l'observateur de Walcott et Zac étendu au cas multimodèle. Sa nature est assez semblable au précédent.
3. Afin de réduire le nombre de contraintes imposées aux multiobservateurs précédent et éliminer, en particulier, les contraintes structurelles (5.38). Nous avons proposé une nouvelle structure de multiobservateur (5.43). Cette structure permet également de prendre en compte une sortie non linéaire par rapport à l'état  $(y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t))$ .

## 5.3 Multiobservateur pour un multimodèle incertain

La reconstruction d'état d'un système incertain est un problème fondamental en automatique, un système n'étant connu qu'avec une précision limitée.

Plusieurs structures d'observateur ont été conçues dans le cas des systèmes linéaires incertains. Xiong et al [Xion 00] ont proposé un observateur à mode glissant pour un système linéaire incertain, basé sur l'observateur de Walcott et Zac [Walc 88], capable d'estimer le vecteur d'état et les entrées inconnues. Fan et al [Fan 02] ont présenté une méthode de conception d'un observateur pour un système linéaire incertain avec retard, la convergence de l'observateur se traduit par la résolution d'inégalités linéaires matricielles (LMI).

Notre objectif est de concevoir un multiobservateur à mode glissant basé sur l'interpolation convexe des observateurs classiques de Luenberger impliquant des termes additifs pour surmonter les incertitudes de modèle [Akhe 04a].

### 5.3.1 Formulation du problème

Considérons le multimodèle incertain défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + B_i u(t) \right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (5.59)$$

$$\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1, \text{ avec } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (5.60)$$

où  $\Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  représentent les erreurs de modélisation ou d'approximation qui doivent être prises en considération dans la conception du multiobservateur. Notons que les incertitudes  $\Delta A_i$  sont bornées en norme :

$$\|\Delta A_i(t)\| < \delta_i \quad (5.61)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme spectrale.

### 5.3.2 Conception du multiobservateur

En supposant les paires  $(A_i, C_i)$  observables, la structure du multiobservateur pouvant approximer le vecteur d'état et de sortie du multimodèle (5.59) est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - \hat{y}(t)) + \alpha_i(t) \right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.62)$$

où  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation d'état,  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du multiobservateur.  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est le gain du  $i^{\text{ème}}$  observateur local et  $\alpha_i(t) \in \mathbb{R}^n$  représente un terme ajouté à la structure de chaque observateur local afin de compenser les incertitudes  $\Delta A_i$ . Les gains  $G_i$  et  $\alpha_i$  doivent être déterminés pour forcer l'erreur d'estimation d'état à converger vers zéro. L'erreur d'estimation d'état est toujours définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.63)$$

et l'erreur de sortie :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i e(t) \quad (5.64)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \left( \bar{A}_{ij} e(t) + \Delta A_i(t) x - \alpha_i(t) \right) \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\bar{A}_{ij} = A_i - G_i C_j \quad (5.66)$$

On peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 5.3** [Akhe 04a] : *Supposons qu'il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive et des matrices  $G_i$  telles que :*

$$(A_i - G_i C_j)^T P + P(A_i - G_i C_j) + P^2 + 2\delta_i^2 I < 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (5.67)$$

*alors l'erreur d'estimation d'état du multiobservateur (5.62) converge asymptotiquement vers zéro, si les conditions (5.68) sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \text{si } r(t) \neq 0, \text{ alors } \alpha_i(t) = \frac{\delta_i^2 \hat{x}^T(t) \hat{x}(t)}{r(t)^T r(t)} P^{-1} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i^T r(t) \\ \text{si } r(t) = 0, \text{ alors } \alpha_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5.68)$$

### 5.3.2.1 Convergence du multiobservateur

Considérons la fonction de Lyapunov  $V(t) = e^T(t)Pe(t)$  ; sa dérivée par rapport aux temps le long de la trajectoire du système (5.65) s'explique :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) \left( e^T(t)(\bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij})e(t) + \right. \\ &\quad \left. 2x^T(t)\Delta A_i^T Pe(t) - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) \right)\end{aligned}$$

En utilisant la relation donnée par le lemme (3.1) page 79, la dérivée de la fonction de Lyapunov  $\dot{V}(t)$  peut être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) \left( e^T(t)(\bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + P^2)e(t) + \right. \\ &\quad \left. x^T(t)\Delta A_i^T \Delta A_i x(t) - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) \left( e^T(t)(\bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + P^2)e(t) + \right. \\ &\quad \left. \delta_i^2 x^T(t)x(t) - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) \right)\end{aligned}\tag{5.69}$$

En utilisant (5.63), la majoration devient :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) \left( e^T(t)(\bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + P^2)e(t) + \right. \\ &\quad \left. \delta_i^2 (\hat{x}(t) + e(t))^T (\hat{x}(t) + e(t)) - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) \left( e^T(t) \left( \bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + P^2 + 2\delta_i^2 I \right) e(t) + \right. \\ &\quad \left. 2\delta_i^2 \hat{x}^T(t)\hat{x}(t) - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) \right)\end{aligned}\tag{5.70}$$

**Cas 1** :  $r(t) \neq 0$  - avec l'expression (5.68), on peut établir l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\alpha_i^T(t)Pe(t) &= \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T(t)\hat{x}(t)}{r^T(t)r(t)} r^T(t) \sum_{k=1}^M \mu_k(\xi(t))C_k P^{-1}Pe(t) \\ &= \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T(t)\hat{x}(t)}{r^T(t)r(t)} r^T(t)r(t) = \delta_i^2 \hat{x}^T(t)\hat{x}(t)\end{aligned}$$

L'expression (5.70) peut alors être majorée comme suit :

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t)) e^T(t) (\bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + P^2 + 2\delta_i^2 I) e(t)\tag{5.71}$$

**Cas 2 :**  $r(t) = 0$  - nous obtenons directement (5.71).

Par conséquent, les conditions (5.67) garantissent que  $\dot{V}(t) < 0$ ; l'erreur d'estimation d'état converge donc asymptotiquement vers zéro.

Les conditions (5.67) sont non linéaires par rapport aux variables  $P$  et  $G_i$ , elles peuvent être facilement converties en un problème LMI, ce qu'on verra dans la prochaine section.

### 5.3.2.2 Relaxation des conditions de stabilité

Afin de réduire le conservatisme des inégalités (5.67), nous allons faire une hypothèse (fréquente en pratique) que seules  $\mathcal{S}$  fonctions d'activation parmi  $M$  sont simultanément différentes de zéro. Pour tenir compte de cette propriété établissons tout d'abord le lemme suivant :

**Lemme 5.1 :** *En tenant compte des propriétés des fonctions d'activation (5.60), les inégalités suivantes sont vérifiées [Tana 98] :*

$$\sum_{i=1}^M \mu_i^2(\xi(t)) \geq \frac{2}{\mathcal{S}-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)), \quad 2 \leq \mathcal{S} \leq M \quad (5.72)$$

**Théorème 5.4 :** *Supposons qu'il existe une matrice symétrique et définie positive  $P$ ,  $Q$  et des matrices  $G_i$  telles que :*

$$\bar{A}_{ii}^T P + P \bar{A}_{ii} + P^2 + 2\delta_i^2 I + (\mathcal{S}-1)Q < 0, \quad i \in \{1, \dots, M\} \quad (5.73a)$$

$$\frac{1}{2} \left[ (\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji})^T P + P (\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}) \right] + P^2 + 2\delta_i^2 I - Q < 0 \quad \forall i < j \in \{1, \dots, M\} \quad (5.73b)$$

où  $\bar{A}_{ij} = A_i - G_i C_j$ , alors l'erreur d'estimation d'état du multiobservateur (5.62), converge asymptotiquement vers zéro si les conditions (5.68) sont vérifiées.

**Preuve :** A partir de l'expression (5.70), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) e^T(t) \left( \bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij} + P^2 + 2\delta_i^2 I \right) e(t) \\ &= \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))^2 e^T(t) \left( \bar{A}_{ii}^T P + P \bar{A}_{ii} + P^2 + 2\delta_i^2 I \right) e(t) + \\ &\quad 2 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) e^T(t) \left( P^2 + 2\delta_i^2 I + \frac{1}{2} \left[ (\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji})^T P + P (\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}) \right] \right) e(t) \end{aligned}$$

En utilisant l'expression (5.73), on obtient :

$$\dot{V}(t) \leq e^T(t) \left( - \sum_{i=1}^M \mu_i^2(\xi(t)) (\mathcal{S} - 1) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^M \sum_{j=1}^M \mu_i^2(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \right) Q e(t) \quad (5.74)$$

Compte tenu du lemme (5.1), la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative, ce qui démontre la convergence du multiobservateur (5.62).

Les conditions (5.73) sont non linéaires par rapport aux variables  $P$  et  $G_i$ . Afin de convertir les inégalités (5.73) en un problème LMI, nous proposons le changement de variable suivant :

$$W_i = P G_i \quad (5.75)$$

Compte tenu de la définition (5.66), les inégalités (5.73) deviennent alors :

$$\begin{aligned} A_i^T P + P A_i - C_i^T W_i^T - W_i C_i + P^2 + 2\delta_i^2 I + (\mathcal{S} - 1) Q &< 0 \\ \frac{(A_i + A_j)^T}{2} P + P \frac{(A_i + A_j)}{2} - C_j^T W_i^T - W_i C_j - C_i^T W_j^T - W_j C_i + P^2 + 2\delta_i^2 I - Q &< 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

En utilisant le complément de Schur [Boyd 94], les inégalités (5.76) s'écrivent sous la forme LMI suivante :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} A_i^T P + P A_i - C_i^T W_i^T - W_i C_i + (\mathcal{S} - 1) Q + 2\delta_i^2 I & P \\ & P \\ & & -I \end{array} \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} \frac{(A_i + A_j)^T}{2} P + P \frac{(A_i + A_j)}{2} - C_j^T W_i^T - W_i C_j - & P \\ C_i^T W_j^T - W_j C_i - Q + 2\delta_i^2 I & \\ & P \\ & & -I \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

En conclusion, le multiobservateur du système (5.59) est entièrement décrit par (5.62), (5.64), (5.68), la matrice de Lyapunov  $P$  et les gains  $G_i = P^{-1} W_i$  solutions de (5.77).

**Remarque :** Lorsque la sortie du multimodèle  $y(t)$  est linéaire par rapport aux variables d'état, c'est-à-dire,  $C_1 = C_2 = \dots = C_M$ , ce qui couvre une grande classe de systèmes physiques réels, le théorème (5.3) se simplifie sous la forme :

**Théorème 5.5** : supposons qu'il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive et des matrices  $G_i$  telles que :

$$\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij} + P^2 + 2\delta_i^2 I < 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, M\} \quad (5.78)$$

où  $\bar{A}_{ij} = A_i - G_i C_j$ , alors l'erreur d'estimation d'état du multiobservateur (5.62) converge asymptotiquement vers zéro si les conditions (5.79) sont vérifiées :

$$\begin{cases} \text{si } r(t) \neq 0, & \text{alors } \alpha_i(t) = \frac{\delta_i^2 \hat{x}^T(t) \hat{x}(t)}{r^T(t) r(t)} P^{-1} C^T r(t) \\ \text{si } r(t) = 0, & \text{alors } \alpha_i(t) = 0 \end{cases} \quad (5.79)$$

### 5.3.3 Exemple de simulation

Considérons le multimodèle suivant, composé de deux modèles locaux et comportant deux sorties et trois états.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + B_i u(t) \right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.80)$$

Les valeurs numériques des matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C$  et  $R_i$  sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les incertitudes de modèle ont été choisies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta A_i(t) &= 0.1 A_i(j, k) \eta(t) \\ \|\Delta A_i(t)\| &< \delta_i \end{aligned} \quad (5.81)$$

où  $j$  et  $k$  sont respectivement les indices des lignes et les colonnes des matrices  $\Delta A_i(t)$ , la fonction  $\eta(t)$  est une variable aléatoire de distribution uniforme sur  $[-1 \ 1]$ . Les matrices d'état  $A_i$  vérifient :

$$A_i - \Delta A_i(t) \leq A_i \leq A_i + \Delta A_i(t)$$

Les valeurs propres des matrices  $A_i$  sont :

$$\lambda(A_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3.58 \\ -6.41 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda(A_2) = \begin{bmatrix} -9.45 \\ -1 \\ -4.55 \end{bmatrix}$$

On peut alors aisément déterminer les bornes des incertitudes :  $\delta_1^2 = 0.7$  et  $\delta_2^2 = 1.1$

Le multiobservateur qui estime le vecteur d'état du multimodèle est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y(t) - C \hat{x}(t)) + \alpha_i(t) \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.82)$$

avec

$$(A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) + P^2 + 2\delta_i^2 I < 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (5.83)$$

En utilisant le complément de Schur et le changement de variable (5.75), les inégalités (5.83) deviennent :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i - C^T W_i^T - W_i C + 2\delta_i^2 I & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.84)$$

La résolution des inégalités (5.84), en utilisant l'outil numérique LMI, mène aux solutions  $P$  et  $G_i = P^{-1}W_i$  suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6365 & -0.5836 & 0.0332 \\ -0.5836 & 0.9584 & -0.1814 \\ 0.0332 & -0.1814 & 0.2343 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.26 & 7.34 \\ 28.97 & -29.28 \\ 0.64 & 7.30 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 7.00 & 4.55 \\ 38.82 & -33.34 \\ 1.11 & 8.50 \end{bmatrix}$$

L'entrée  $u(t)$  choisie pour simuler le multimodèle (5.80) et le multiobservateur (5.82) est présentée sur la figure (5.6). Les incertitudes  $\Delta A_i(t)$  sont générées d'une façon aléatoire, telle que chaque élément de la matrice  $\Delta A_i(t)$  est généré indépendamment des autres éléments (5.81).

Les résultats de simulation sont présentés sur les figure (5.7) et (5.8). L'implémentation des variables  $\nu_i(t)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  (5.68) est faite en prenant comme seuil de précision  $\varepsilon = 10^{-3}$ , valeur jugée suffisante pour garantir une bonne estimation du vecteur d'état. La convergence du vecteur d'état du multiobservateur vers ceux du multimodèle est garantie. Au voisinage de l'origine ( $t = 0$ ), la disparité entre l'état estimé et réel est due au choix des conditions initiales du multiobservateur.

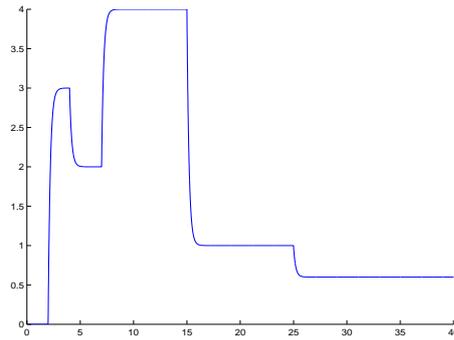


FIG. 5.6 – Entrée  $u(t)$

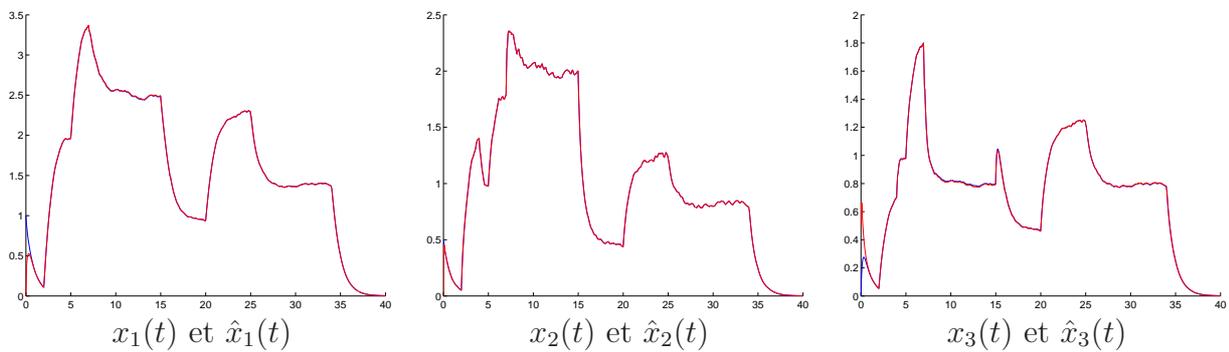


FIG. 5.7 – Estimation d'état d'un multimodèle incertain

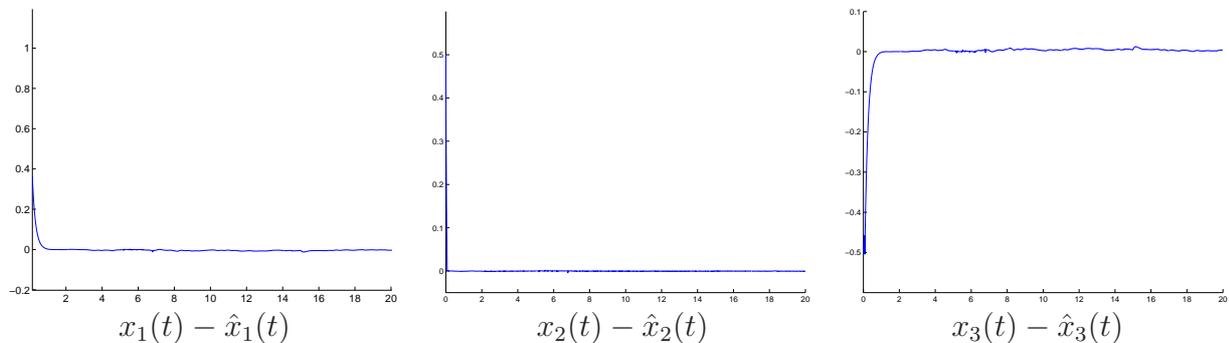


FIG. 5.8 – Erreurs d'estimation d'état d'un multimodèle incertain

Dans cette partie, nous avons proposé une méthode de conception de multiobservateur robuste vis-à-vis des incertitudes de modèles. La synthèse d'un tel multiobservateur est basée sur l'existence d'une matrice de Lyapunov et des matrices de gains, solution d'inégalité linéaires matricielles, assurant la convergence du multiobservateur. La stabilité de ce dernier exige cependant la considération des contraintes égalités et inégalités ainsi que la connaissance d'une borne relative aux incertitudes. Les résultats de simulation montrent que l'estimation du vecteur d'état du multimodèle est très satisfaisante.

## 5.4 Multiobservateur en présence d'entrées inconnues et d'incertitudes de modèle

La section précédente (5.2) (resp. 5.3) est consacrée à la conception de multiobservateurs à mode glissant pour des multimodèles présentant des entrées inconnues (resp. des incertitudes de modèle).

Dans cette section, nous combinons les deux approches afin de prendre en compte simultanément ces deux types de perturbations (entrées inconnues et incertitudes de modèles). Le multimodèle considéré à la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + R_i\bar{u}(t) + D_i \right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.85)$$

Les matrices variables  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$  sont bornées en norme, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|\Delta A_i(t)\| &< \delta_{1i}, \\ \|\Delta B_i(t)\| &< \delta_{2i}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

### 5.4.1 Principe de reconstruction

Si l'on suppose que toutes les paires  $(A_i, C)$  sont observables et s'il existe des matrices de gain  $G_i$  tels que les matrices  $\bar{A}_i = A_i - G_i C$  sont stables,  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  et des paires de matrices  $(P, F_i)$  respectant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i = -Q_i \\ C^T F_i^T = P R_i, \quad \forall i \in 1, \dots, M \end{cases} \quad (5.87)$$

le multiobservateur du multimodèle (5.85) revêt la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (y(t) - C \hat{x}(t)) + R_i \nu_i(t) + \alpha_i(t) \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.88)$$

La conception du multiobservateur est basée sur la détermination des matrices de gain  $G_i$ , des variables  $\nu_i(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $\alpha_i(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Notons que les variables  $\nu_i(t)$  et  $\alpha_i(t)$  compensent respectivement les erreurs dues aux entrées inconnues et aux incertitudes de modèles  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$ . En utilisant l'expression

de l'erreur d'estimation d'état décrite par les équations (5.63), on montre que :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( (A_i - G_i C) e(t) + \Delta A_i(t) x(t) + \Delta B_i(t) u(t) + R_i \bar{u}(t) - R_i \nu_i(t) - \alpha_i(t) \right) \quad (5.89)$$

**Théorème 5.6** : l'erreur d'estimation d'état, entre le multiobservateur (5.88) et le multimodèle (5.85), converge asymptotiquement vers zéro, si  $\nu_i(t)$  et  $\alpha_i(t)$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r(t) \neq 0 \\ \text{si } r(t) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu_i(t) = \rho \frac{F_i r(t)}{\|F_i r(t)\|} \\ \alpha_i(t) = (\beta_1(1 + \beta_2) \delta_{1i}^2 \hat{x}^T(t) \hat{x}(t) + \beta_3 \delta_{2i}^2 \|u(t)\|^2) \frac{P^{-1} C^T r(t)}{2r^T(t)r(t)} \\ \nu_i(t) = 0 \\ \alpha_i(t) = 0 \end{array} \right. \quad (5.90)$$

et s'il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive, des matrices  $F_i$  et des scalaires positifs  $\beta_1, \beta_2$  et  $\beta_3$  satisfaisant les contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i + (\beta_1^{-1} + \beta_3^{-1}) P^2 + \beta_1 (1 + \beta_2^{-1}) \delta_{1i}^2 I < 0 \\ C^T F_i^T = P R_i, \quad i \in \{1, \dots, M\} \end{array} \right. \quad (5.91)$$

avec :

$$\bar{A}_i = A_i - G_i C \quad \text{et} \quad r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (5.92)$$

### 5.4.2 Convergence du multiobservateur

Nous utilisons la même procédure que dans les sections précédentes pour démontrer la convergence du multiobservateur (5.88). La dérivée de la fonction quadratique de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t) (\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i) e(t) + 2e^T(t) P (\Delta A_i(t) x(t) + \Delta B_i u(t)) + 2e^T(t) P (R_i \bar{u}(t) - R_i \nu_i(t) - \alpha_i(t)) \right)$$

Dans le cas où  $r(t) \neq 0$ , en remplaçant  $\nu_i(t)$  par leurs expressions (5.90) et en utilisant la

relation donnée par le lemme (3.1) page 79, on obtient les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
 2e^T(t)P(R_i\bar{u}(t) - R_i\nu_i(t)) &= 2e^T(t)C^T F_i^T \bar{u}(t) - 2e^T(t)C^T F_i^T \nu_i(t) \\
 &= 2r^T(t)F_i^T \bar{u}(t) - 2\rho r^T(t)F_i^T \frac{F_i r(t)}{\|F_i r(t)\|} \\
 &= 2r^T(t)F_i^T \bar{u}(t) - 2\rho\|F_i r(t)\| \\
 &\leq 2\rho\|F_i r(t)\| - 2\rho\|F_i r(t)\| < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2e^T(t)P\Delta A_i(t)x(t) &= e^T(t)P\Delta A_i(t)x(t) + x^T(t)\Delta A_i^T(t)Pe(t) \\
 &\leq \beta_1^{-1}e^T(t)P^2e(t) + \beta_1x^T(t)\Delta A_i^T(t)\Delta A_i(t)x(t) \\
 &\leq \beta_1^{-1}e^T(t)P^2e(t) + \delta_{1i}^2\beta_1(e(t) + \hat{x}(t))^T(e(t) + \hat{x}(t)) \\
 &\leq e^T(t)(\beta_1^{-1}P^2 + \delta_{1i}^2\beta_1)e(t) + \delta_{1i}^2\beta_1\hat{x}^T(t)\hat{x}(t) + 2\delta_{1i}^2\beta_1e^T(t)\hat{x}(t) \\
 &\leq e^T(t)(\beta_1^{-1}P^2 + \delta_{1i}^2\beta_1)e(t) + \delta_{1i}^2\beta_1\hat{x}^T(t)\hat{x}(t) + \delta_{1i}^2\beta_1(e^T(t)\hat{x}(t) + \hat{x}^T(t)e(t)) \\
 &\leq e^T(t)(\beta_1^{-1}P^2 + \delta_{1i}^2\beta_1(1 + \beta^{-1}))e(t) + \delta_{1i}^2\beta_1(1 + \beta_2)\hat{x}^T(t)\hat{x}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2e^T(t)P\Delta B_i u(t) &= e^T(t)P\Delta B_i u(t) + u^T(t)\Delta B_i^T Pe(t) \\
 &\leq \beta_3^{-1}e^T(t)P^2e(t) + \beta_3u^T(t)\Delta B_i^T \Delta B_i u(t) \\
 &\leq \beta_3^{-1}e^T(t)P^2e(t) + \beta_3\delta_{2i}^2\|u(t)\|
 \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction  $\dot{V}(t)$  peut alors être majorée par la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) &\left( e^T(t)(\bar{A}_i^T P + P\bar{A}_i + (\beta_1^{-1} + \beta_3^{-1})P^2 + \beta_1(1 + \beta_2^{-1})\delta_{1i}^2 I)e(t) + \right. \\
 &\left. \beta_1(1 + \beta_2)\delta_{1i}^2 \hat{x}^T(t)\hat{x}(t) + \beta_3\delta_{2i}^2\|u(t)\|^2 - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) \right)
 \end{aligned}$$

avec un calcul direct, on peut montrer que :

$$\beta_1(1 + \beta_2)\delta_{1i}^2 \hat{x}^T(t)\hat{x}(t) + \beta_3\delta_{2i}^2\|u(t)\|^2 - 2\alpha_i^T(t)Pe(t) = 0$$

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) \left( e^T(t)(\bar{A}_i^T P + P\bar{A}_i + (\beta_1^{-1} + \beta_3^{-1})P^2 + \beta_1(1 + \beta_2^{-1})\delta_{1i}^2 I)e(t) \right)$$

On conclut que, s'il existe une matrice de Lyapunov  $P > 0$ , des matrices  $F_i$  et des scalaires positifs  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  satisfaisant les contraintes (5.91), l'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro.

## 5.5 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté des techniques de conception de multiobservateurs, afin d'estimer les vecteur d'état et de sortie d'un système non linéaire, représenté par une forme multimodèle, lorsque celui-ci est soumis à l'influence des entrées inconnues et d'incertitudes de modèle. Nous avons montré l'existence de conditions supplémentaires de convergence d'un multiobservateur lorsque les fonctions d'activation dépendent des variables à estimer (théorème 4.3).

Ensuite, plusieurs structures de multiobservateurs, prenant en compte l'influence des entrées inconnues ont été développées. Chaque structure a ses avantages et ses inconvénients :

- L'avantage du multiobservateur ayant une structure continue, présenté dans le chapitre 4, réside dans le fait que la structure des observateurs locaux est linéaire ou affine. Son inconvénient réside dans le fait que le multiobservateur ne peut pas être exploité lorsque, les matrices de sortie des modèles locaux sont différentes ( $C_1 \neq C_2 \dots \neq C_i \dots \neq C_n$ ).
- Les termes glissants du multiobservateur a structure discontinue (5.33) sont majorés par la borne des entrées inconnues, (relation 5.37), ce qui constitue son grand avantage. Son inconvénient est le même que celui évoqué pour le multiobservateur (4.27).
- Les multiobservateurs (5.43) et (5.52) ont été conçus pour remédier aux limites montrées par les multiobservateurs précédents (4.27) et (5.33). Les bornes des termes discontinus n'existent pas dans ce cas, (les relations 5.45 et 5.52), ce qui constitue un inconvénient de ce type de multiobservateur.

Parmi les perturbations affectant un processus physique, on peut citer la dégradation matérielle, phénomène modélisé par des incertitudes de modèle  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$ . Pour cela, nous avons construit un multiobservateur insensible à ce genre de perturbation, (équation 5.62). L'inconvénient principal de ce multiobservateur réside dans la non-linéarité des termes discontinus (termes nécessaires pour compenser les incertitudes).

Enfin, pour surmonter tout problème d'entrées inconnues et d'incertitudes de modèle, nous avons considéré une structure multiobservateur insensible aux perturbations (5.88).

# 6

## Diagnostic à base de multiobservateurs

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>157</b>
<b>6.2</b>	<b>Surveillance utilisant les modèles</b>	<b>158</b>
6.2.1	Redondance physique ou matérielle	158
6.2.2	Redondance analytique	159
6.2.3	Détection de défauts	159
6.2.4	Localisation et caractérisation des défauts	160
6.2.5	Prise de décision	160
<b>6.3</b>	<b>Diagnostic à base d'observateur</b>	<b>160</b>
6.3.1	Détection par observateur unique	162
6.3.2	Détection par un banc d'observateurs	162
6.3.3	Détection par observateur généralisé	163
6.3.4	Détection de défauts actionneurs	163
<b>6.4</b>	<b>Détection et isolation de défauts sur un turbo-réacteur d'avion</b>	<b>164</b>
6.4.1	Génération de résidus	164
6.4.2	Détection de défauts capteurs	165
6.4.3	Détection et localisation de défauts capteurs par un banc de multiobservateurs	169

6.4.4	Performance de la procédure de diagnostic utilisée . . . . .	179
6.4.5	Détection de défaut actionneur . . . . .	182
<b>6.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>184</b>

---

## 6.1 Introduction

Le développement de l'automatisation des systèmes industriels vise à améliorer leurs performances. Il a conduit à l'élaboration de systèmes de plus en plus complexes multipliant les risques de dysfonctionnement pouvant mettre en péril le système lui-même et son environnement.

Par conséquent, pour un grand nombre d'applications, il est nécessaire d'implanter un système de surveillance afin de détecter, isoler, voir identifier tout dysfonctionnement.

Un système de surveillance doit permettre de caractériser le mode de fonctionnement d'un système en enregistrant des informations, en reconnaissant et en indiquant les anomalies de comportement. Cette surveillance peut être réalisée en cours d'exploitation ou hors exploitation et chaque mode présente chacun un certain nombre d'avantages et d'inconvénients.

Le mode d'implémentation "en exploitation" permet de réagir rapidement en cas de problèmes et s'accompagne souvent d'une procédure de maintenance sur site. Il impose un traitement en temps réel des différents signaux.

Le mode d'implémentation "hors exploitation" permet de choisir un protocole de test : choix des signaux d'entrée ou choix des mesures appropriées. Ce mode d'implémentation est choisi dans les cas de figure suivants :

- pour tester des systèmes en sortie de chaîne de production et avant la livraison aux clients,
- pour tester des systèmes à intervalles réguliers (maintenance préventive),
- en complément du mode d'implémentation en exploitation lorsque celui-ci ne permet pas de préciser la raison du dysfonctionnement du système.

Le système de surveillance doit réaliser les trois tâches suivantes :

1. La détection, qui consiste à prendre une décision binaire : soit le système fonctionne correctement, soit une panne s'est produite. Le cas échéant, la procédure doit déterminer l'instant d'occurrence du défaut ayant provoqué la panne.
2. La localisation, qui consiste à déterminer le composant défectueux.
3. L'identification, qui consiste à déterminer le type de la panne en vue de déterminer le type de maintenance ou de correction (accommodation, reconfiguration) à réaliser sur l'installation. Cette étape nécessite souvent la connaissance d'un modèle de la panne.

Beaucoup de systèmes de surveillance n'implémentent que les deux premières tâches.

L'identification d'une panne n'est réalisée que lorsqu'une action de reconfiguration de la commande ou des objectifs à atteindre est envisagée. Lorsqu'un algorithme de surveillance ne comporte que ces deux tâches, il est qualifié d'algorithme de FDI (Fault Detection and Isolation).

## 6.2 Surveillance utilisant les modèles

L'utilisation des modèles pour la surveillance des systèmes date du début des années 70. Depuis, de nombreux articles font régulièrement le point sur l'avancement des différentes approches [Patt 97], [Benn 99], [Jian 02] et [Kimm 05]. La figure (6.1) illustre le concept général d'un système de diagnostic utilisant un modèle. Ces méthodes reposent sur l'étude de signaux appelés résidus.

**Définition 6.1** *Un résidu est un signal potentiellement indicateur de défauts. Il reflète la cohérence des données vis-à-vis du modèle comportemental du système.*

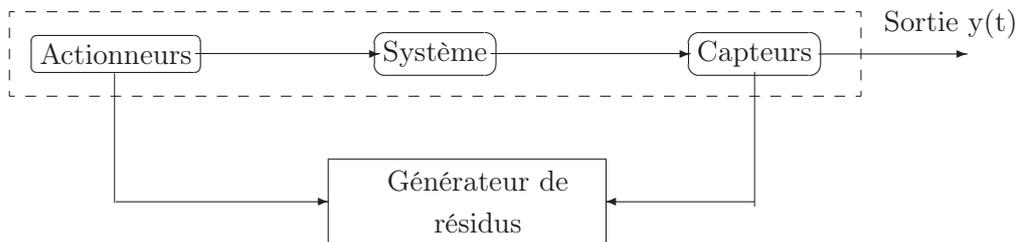


FIG. 6.1 – Principe de la génération de résidus

Les méthodes de surveillance à base de modèle utilisent la redondance d'information présente sur un système. Deux types de redondance peuvent être distingués : la redondance matérielle et la redondance analytique.

### 6.2.1 Redondance physique ou matérielle

La redondance physique consiste à utiliser plusieurs actionneurs, capteurs, processeurs et logiciels pour mesurer et/ou contrôler une variable particulière. Un principe de vote est appliqué sur les valeurs redondantes pour décider si une faute est présente ou non. Cette approche entraîne un coût important en instrumentation mais s'avère extrêmement fiable et simple à implanter. Elle est mise en oeuvre essentiellement sur des systèmes à haut risques tels que les centrales nucléaires ou les avions.

Le diagnostic utilisant la redondance physique se limite à la surveillance des éléments redondants (capteur, actionneurs, ...) présents sur une installation. A l'aide de cette unique technique, il ne sera pas possible de détecter des pannes survenant sur des éléments non redondants.

### 6.2.2 Redondance analytique

Un complément à la redondance physique consiste à exploiter les contraintes liant les différentes variables du système. Ces contraintes peuvent souvent s'exprimer sous la forme de relations analytiques liant les variables connues (relations d'entrée/sortie ou de sortie/sortie). Ces relations sont appelées relations de redondances analytiques. Le principe de la surveillance consiste à vérifier la fermeture algébrique de ces relations en utilisant les mesures prélevées en ligne sur le système. Le concept de redondance analytique repose sur l'utilisation d'un modèle mathématique du système à surveiller. Pour cette raison, les méthodes utilisant la redondance analytique pour la surveillance sont appelées méthodes à base de modèle [Fran 94], [Maqu 00]. Le principe de la surveillance utilisant un modèle peut être séparé en deux étapes : la génération de résidus et la prise de décision.

### 6.2.3 Détection de défauts

La détection des défauts consiste à répondre à la question : un ou des défauts sont-ils apparus à l'instant considéré ? La détection peut s'appuyer sur deux types de méthodes : les méthodes locales et les méthodes globales.

Le premier type de méthodes se base sur l'analyse du signal issu de chaque capteur (on parle également d'analyse monosignal). On étudie alors les signaux séparément et on vérifie directement qu'ils évoluent dans des domaines désirés correspondants à un mode normal de fonctionnement du système. On peut encore les étudier indirectement en faisant des tests statistiques.

Par opposition, la seconde catégorie de méthodes s'appuie sur l'ensemble des signaux (on parle encore d'analyse multiségnal). Cette classe de méthodes se décompose en deux groupes suivant qu'elles utilisent ou non un modèle. Pour ces dernières, on peut citer les techniques de reconnaissance de formes ou les techniques neuronales. Les premières utilisent par contre des relations de redondances, statiques ou dynamiques, entre plusieurs signaux. Ce groupe de méthodes comprend, d'une part, les techniques à base de redondance matérielle (approche passive) et, d'autre part, les techniques à base de redondance analytique (approche active). Ces dernières feront plus particulièrement l'objet de notre étude.

#### 6.2.4 Localisation et caractérisation des défauts

Une fois le défaut détecté, il convient de le localiser. Il faut donc répondre à la question : sur quelle composant le défaut est-il apparu à l'instant considéré ? La caractérisation du défaut précisera le type du défaut, sa durée, son amplitude voire son évolution probable. Ceci est possible à partir de la signature du défaut (la signature d'un défaut étant l'effet particulier de celui-ci sur un ou plusieurs résidus). On génère donc des fonctions de décision construites à partir des signaux révélateurs du ou des défauts (les résidus) permettant de conclure au fonctionnement correct ou non du système. Ce type de décision est réalisé à l'aide d'opérations logiques. Son implémentation à l'aide de réseaux de neurones par exemple semble intéressante [Wang 04]. De plus, on retiendra l'utilisation avec succès de la logique floue développée ces dernières années [Mand 98]. Comme le fait remarquer Frank [Schn 96] la logique floue peut s'appliquer indifféremment à l'étape d'évaluation des résidus ou à l'étape de génération des résidus [Cate 02].

#### 6.2.5 Prise de décision

Une fois le fonctionnement incorrect du système constaté, il est primordial d'agir de façon à maintenir les performances souhaitées. Cette prise de décision permet de choisir entre plusieurs options comme arrêter le système ou encore ne rien faire, réévaluer les objectifs ou accepter un fonctionnement dégradé, faire de la maintenance. Il peut encore s'agir, quand cela est possible, de reconfigurer ou de réorganiser le système [Bear 71]. Le rôle de la reconfiguration est de s'affranchir des conséquences du défaut pour conserver les performances initiales lorsque cela est possible ou encore de réévaluer les objectifs afin d'assurer le fonctionnement dégradé du système si celui-ci est tolérable. Il est bien évident que ce n'est pas toujours le cas et on se rend bien compte qu'il est important que le défaut soit identifié avec exactitude (étendue, amplitude, type, cause) afin d'en permettre sa compensation éventuelle. La reconfiguration peut donc porter sur le système de régulation (ou une partie de celui-ci), sur la structure de la loi de commande, sur le processus physique (en présence de redondance matérielle, on peut basculer sur les éléments ayant un fonctionnement correct) ou encore sur la réévaluation des objectifs assignés au système.

### 6.3 Diagnostic à base d'observateur

Un grand nombre de processus physiques peuvent se modéliser par un système d'équations différentielles (linéaires ou non) du premier ordre. Le modèle obtenu, appelé modèle d'état du système, fait intervenir un certain nombre de variables internes (les variables d'état)

qui sont souvent inconnues soit pour des raisons pratiques (par exemple, les courants rotoriques d'un moteur asynchrone à cage d'écureuil ne sont pas physiquement mesurables) soit pour des raisons économiques (par exemple, le couple d'un moteur est mesurable mais l'ajout d'un tel capteur entraîne un surcoût important).

La surveillance d'un système physique modélisé sous forme d'état, consiste à étudier la cohérence comportementale du modèle vis à vis du système réel. Une des approches permettant de réaliser ceci, consiste à comparer les variables mesurées avec les variables calculées ou estimées (en ligne) à partir du modèle lorsque celui-ci est soumis aux mêmes signaux d'entrée que ceux du système réel. Le système permettant d'obtenir ces estimations est appelé un observateur. Par définition, un observateur est un système dynamique prenant pour entrées les signaux connus du système sur lequel il est implanté et dont les sorties convergent vers une estimation des variables d'état (ou d'une partie des variables d'état).

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'utilisation des multiobservateurs pour la surveillance d'un système physique. Contrairement à la commande, où les observateurs sont utilisés uniquement pour estimer le vecteur d'état (ou une partie du vecteur d'état), les multiobservateurs utilisés pour la surveillance estiment les sorties (ou une fonction des sorties) du système et les variables d'état.

Les observateurs d'état permettent l'estimation de la sortie d'un système à partir des connaissances de la commande ou parfois une partie de la commande et des mesures de sortie ou une partie de ces mesures. Cette estimation est comparée à la valeur mesurée de la sortie dans le but de générer des résidus. Ces résidus doivent servir d'indicateurs fiables du comportement du processus. Ils sont donc nuls en l'absence de défauts et dépendants des défauts en leur présence. Suivant les éléments à contrôler, les méthodes de détection sont classées en trois catégories :

- détection de défauts capteurs,
- détection de défauts d'actionneurs,
- détection de défauts de système.

Dixon [Dixo 04] a proposé une procédure de détection et d'identification de défauts en utilisant un banc d'observateurs pour un système électromécanique. Zolghadri et al [Zolg 96] ont développé un générateur de résidus, en utilisant un banc d'observateurs pour la détection et la localisation de défauts, sur une installation hydraulique en tenant compte des non linéarités du système. Tan et al [Tan 02] ont proposé une méthode de détection et de reconstruction de défauts de capteurs en utilisant un observateur à mode glissant.

Les différentes structures de banc d'observateurs que nous présentons ici sont valables

pour les structures de banc de multiobservateurs.

### 6.3.1 Détection par observateur unique

La détection consiste à estimer complètement le vecteur de sortie  $y(t)$  à l'aide d'un seul observateur piloté par une seule mesure, voir figure (6.2).

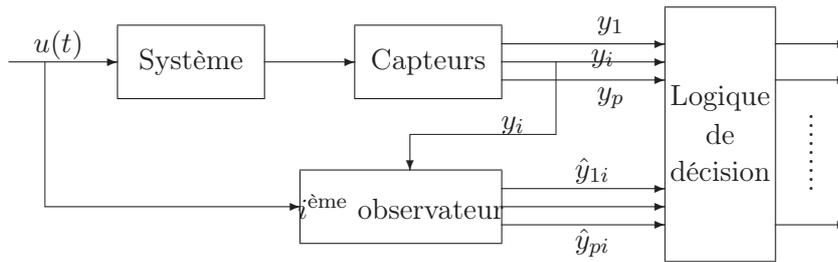


FIG. 6.2 – Détection par observateur unique

### 6.3.2 Détection par un banc d'observateurs

Cette fois, on suppose que le vecteur d'état est complètement observable et on reconstruit autant de sorties qu'il y a de mesures. Le nombre d'observateurs est donc égal au nombre de sorties mesurées, voir figure (6.3).

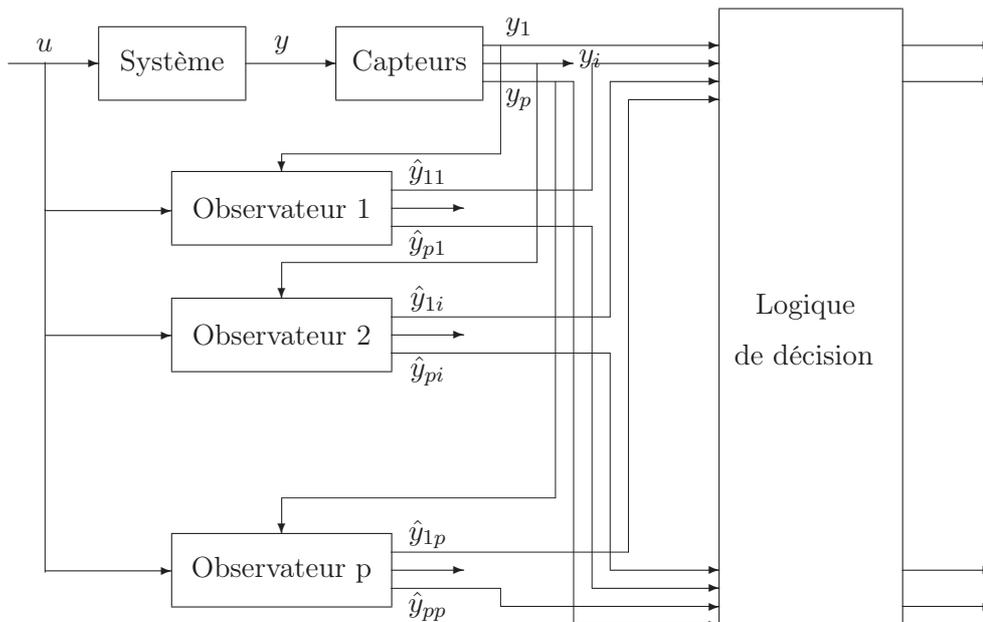


FIG. 6.3 – Détection par un banc d'observateurs

### 6.3.3 Détection par observateur généralisé

Le nombre d'observateurs utilisés est égal au nombre de combinaisons possibles de mesures, voir la figure (6.4). Chaque observateur d'état peut être piloté par différentes sorties, ce qui augmente le nombre de degrés de liberté de la détection de défauts.

#### Exemple

Dans un souci de clarté, nous proposons un exemple ayant deux sorties  $y_1$  et  $y_2$ , le nombre de combinaisons égal à  $2^2 - 1 = 3$ .

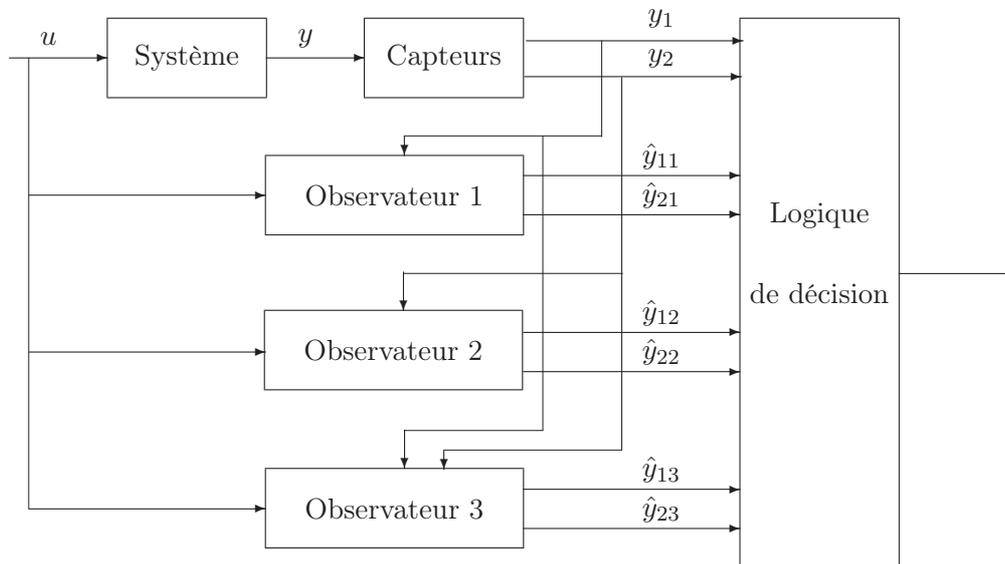


FIG. 6.4 – Détection par observateurs généralisés

### 6.3.4 Détection de défauts actionneurs

Afin de pouvoir détecter et localiser les défauts d'actionneurs, nous pouvons utiliser des observateurs à entrées inconnues présentés au chapitre 1 de ce mémoire, dans le cas des systèmes linéaires ou des multiobservateurs à entrées inconnues développés dans les chapitres 4 et 5 dans le cas des multimodèles.

Un banc de multiobservateurs à entrées inconnues reconstruit le vecteur de sortie et le vecteur d'état par autant de multiobservateurs qu'il y a d'entrées. Le  $i^{\text{ème}}$  multiobservateur est piloté par toutes les sorties et toutes les entrées exceptée la  $i^{\text{ème}}$  ( $u_i$ ). La détection et la localisation de défaut du  $i^{\text{ème}}$  actionneur est effectuée en considérant l'entrée  $u_i$  comme étant une entrée inconnue au système, voir la figure (6.5).

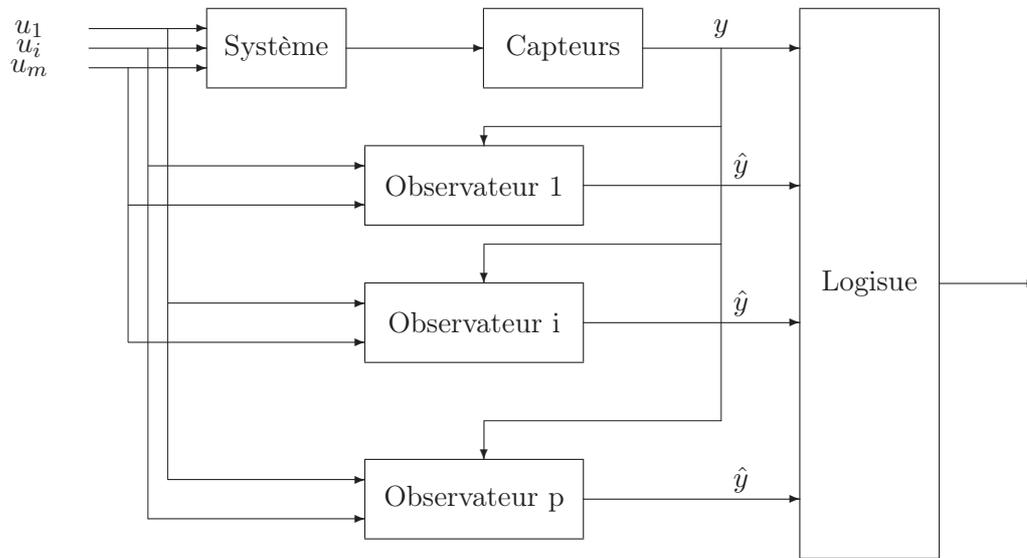


FIG. 6.5 – Détection par observateurs à entrées inconnues

## 6.4 Détection et isolation de défauts sur un turbo-réacteur d'avion

Plusieurs auteurs ont utilisé l'approche multimodèle pour le diagnostic de systèmes. Boukhris et al [Bouk 99] utilisent l'approche multimodèle pour modéliser la relation pluie-débit dans le but d'effectuer le diagnostic de fonctionnement des capteurs d'un réseau automatique d'assainissement. Gasso et al [Gass 00b] exploitent l'approche multimodèle pour la prévision de pointes de concentration d'ozone. Amann et al [Aman 01] présentent une méthode d'identification paramétrique pour la mise en oeuvre d'un multimodèle dans le but de générer des résidus pour le diagnostic.

### 6.4.1 Génération de résidus

L'objectif de cette section est de mettre en oeuvre une technique de diagnostic de défauts capteurs et actionneurs en utilisant des multiobservateurs. Le multimodèle conçu dans le chapitre 3 fonctionne en parallèle avec le moteur. La structure du multiobservateur est choisie en fonction de la nature de défaut à détecter (capteur ou actionneur).

Le vecteur de résidus  $r(t)$  est calculé par la différence entre le vecteur de sortie du moteur  $y(t)$  et le vecteur de sortie du multiobservateur  $\hat{y}(t)$  (voir la figure (6.6)).

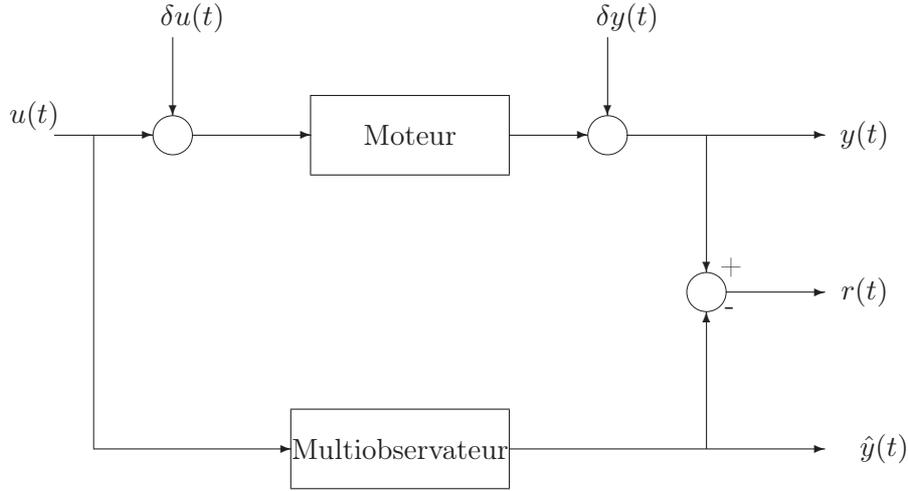


FIG. 6.6 – Génération de résidus

### 6.4.2 Détection de défauts capteurs

Considérons de nouveau le modèle non linéaire et la représentation multimodèle du turbo-réacteur établie au chapitre 3. Les équations dynamiques du modèle non linéaire s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = K_1(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_2(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) \\ \dot{x}_2(t) = K_3(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_4(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) \end{cases} \quad (6.1)$$

Les quatre équations statiques de sortie correspondent à quatre capteurs disponibles sur le turboréacteur :

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \\ y_3(t) = K_5(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_6(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) + y_{3R}(x_1(t)) \\ y_4(t) = K_7(x_1(t))(x_2(t) - y_{2R}(x_1(t))) + K_8(x_1(t))(u(t) - u_R(x_1(t))) + y_{4R}(x_1(t)) \end{cases} \quad (6.2)$$

Les fonctions coefficients  $K_i(x_1(t))$  sont données par le tableau (3.1).

Les équations du multimodèle sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(u(t)) (A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(u(t)) (C_i x_m(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $\nu_i(u(t))$  sont des fonctions d'activation choisies triangulaires.

Les valeurs numériques des matrices  $A_i, B_i, F_i, C_i, D_i$  et  $H_i$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -2.427 & 2.323 \\ 0.0223 & -1.424 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2.652 & 2.0442 \\ -0.366 & -1.1970 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -3.107 & 1.295 \\ -0.350 & -0.935 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0.072 \\ 0.040 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.073 \\ 0.036 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.065 \\ 0.031 \end{bmatrix} \\
 D_1 &= \begin{bmatrix} -46.146 \\ 89.543 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -7.165 \\ 102.366 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 93.974 \\ 85.076 \end{bmatrix} \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.054 & 0.145 \\ -2.185 & -9.680 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.108 & 0.1150 \\ -6.752 & -6.893 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.130 & 0.0678 \\ -6.729 & -2.670 \end{bmatrix} \\
 E_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.003 \\ 0.772 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.003 \\ 0.586 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.003 \\ 0.441 \end{bmatrix} \\
 N_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \\ 1254.3 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11.3 \\ 1471.6 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.5 \\ 1260.2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les paires  $(A_i, C_j), \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$  sont observables. La détection de défauts est alors effectuée à base d'un banc de multiobservateurs. Le turboréacteur comporte quatre sorties  $(y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t) \ y_4(t))^T$ , le nombre de multiobservateurs généralisés que l'on peut élaborer est égal à  $2^4 - 1 = 15$ .

La forme du  $j^{\text{ème}}$  multiobservateur s'explique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^j(t) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(u(t)) (A_i \hat{x}^j(t) + B_i u(t) + D_i + G_i (f^j(y(t)) - f^j(\hat{y}^j(t)))) \\ \hat{y}^j(t) = \sum_{i=1}^3 \nu_i(u(t)) (A_i \hat{x}^j(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases} \quad (6.4)$$

où  $\hat{x}^j(t)$  (respectivement  $\hat{y}^j(t)$ ) représente le vecteur d'état estimé (respectivement le vecteur de sortie estimé) par le  $j^{\text{ème}}$  multiobservateur. La fonction  $f^j$ , définie par le tableau (6.1), détermine les sorties utilisées par le  $j^{\text{ème}}$  multiobservateur,  $j$  étant défini par :

$$j = 2^0 s_1 + 2^1 s_2 + 2^2 s_3 + 2^3 s_4 \quad (6.5)$$

où  $s_i$  est une variable booléenne valant 1 si la sortie  $y_i(t)$  est utilisée, 0 sinon,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . La table (6.1) explicite les sorties du système et du multiobservateur utilisées pour chaque observateur  $j$ .

$j$	$f^j(y(t))^T$ : sortie(s) utilisée(s)	$f^j(\hat{y}(t))^T$ : sortie(s) estimée(s) utilisée(s)
1	$y_1(t)$	$\hat{y}_1^1(t)$
2	$y_2(t)$	$\hat{y}_2^2(t)$
3	$[y_1(t) \quad y_2(t)]$	$[\hat{y}_1^3(t) \quad \hat{y}_2^3(t)]$
4	$y_3(t)$	$\hat{y}_3^4(t)$
5	$[y_1(t) \quad y_3(t)]$	$[\hat{y}_1^5(t) \quad \hat{y}_3^5(t)]$
6	$y_{m2}(t)$ et $y_3(t)$	$\hat{y}_2^6(t)$ et $\hat{y}_3^6(t)$
7	$[y_1(t) \quad y_2(t) \quad y_{m3}(t)]$	$[\hat{y}_1^7(t) \quad \hat{y}_2^7(t) \quad \hat{y}_3^7(t)]$
8	$y_4(t)$	$\hat{y}_4^8(t)$
9	$[y_1(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_1^9(t) \quad \hat{y}_4^9(t)]$
10	$[y_2(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_2^{10}(t) \quad \hat{y}_4^{10}(t)]$
11	$[y_1(t) \quad y_2(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_1^{11}(t) \quad \hat{y}_2^{11}(t) \quad \hat{y}_4^{11}(t)]$
12	$[y_3(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_3^{12}(t) \quad \hat{y}_4^{12}(t)]$
13	$[y_1(t) \quad y_3(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_1^{13}(t) \quad \hat{y}_3^{13}(t) \quad \hat{y}_4^{13}(t)]$
14	$[y_2(t) \quad y_3(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_2^{14}(t) \quad \hat{y}_3^{14}(t) \quad \hat{y}_4^{14}(t)]$
15	$[y_1(t) \quad y_2(t) \quad y_3(t) \quad y_4(t)]$	$[\hat{y}_1^{15}(t) \quad \hat{y}_2^{15}(t) \quad \hat{y}_3^{15}(t) \quad \hat{y}_4^{15}(t)]$

TAB. 6.1 – Le(s) sortie(s) utilisée(s) par le  $j^{\text{ème}}$  multiobservateur

Le banc de multiobservateurs permet d'engendrer différents résidus :

$$r_{ij}(t) = y_i(t) - \hat{y}_i^j(t), \text{ pour } i \in \{1, \dots, 4\} \text{ et } j \in \{1, \dots, 15\} \quad (6.6)$$

#### 6.4.2.1 Elaboration de la table de signatures

Dans cette étude, on suppose que le nombre de capteurs pouvant être simultanément défectueux est égal à 2. Nous dressons alors tous les cas possibles de défaillances de capteurs.

On définit une fonction binaire des résidus :

$$z_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } r_{ij}(t) = 0 \\ 1 & \text{si } r_{ij}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

$l =$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{14}$	$\delta_{23}$	$\delta_{24}$	$\delta_{34}$
$z_{11}(t)$	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$z_{21}(t)$	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
$z_{31}(t)$	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
$z_{41}(t)$	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
$Z_{12}(t)$	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
$Z_{22}(t)$	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
$Z_{32}(t)$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
$Z_{42}(t)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
$Z_{13}(t)$	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
$Z_{23}(t)$	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
$Z_{33}(t)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$Z_{43}(t)$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{14}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
$Z_{24}(t)$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
$Z_{34}(t)$	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
$Z_{44}(t)$	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
$Z_{15}(t)$	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
$Z_{25}(t)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$Z_{35}(t)$	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
$Z_{45}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{16}(t)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$Z_{26}(t)$	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
$Z_{36}(t)$	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
$Z_{46}(t)$	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$Z_{17}(t)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$Z_{27}(t)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$Z_{37}(t)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$Z_{47}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{18}(t)$	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
$Z_{28}(t)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
$Z_{38}(t)$	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
$Z_{48}(t)$	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
$Z_{19}(t)$	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
$Z_{29}(t)$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{39}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{49}(t)$	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
$Z_{110}(t)$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{210}(t)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
$Z_{310}(t)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{410}(t)$	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
$Z_{111}(t)$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{211}(t)$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{311}(t)$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{411}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{112}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{212}(t)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{312}(t)$	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
$Z_{412}(t)$	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
$Z_{113}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{213}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{313}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{413}(t)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{114}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{214}(t)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{314}(t)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{414}(t)$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{115}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{215}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{315}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Z_{415}(t)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 6.2 – Signature théorique de défaillances des capteurs

où  $i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur de résidus et  $j$  est défini par la relation (6.5). Notons  $\delta_i$  une variable associée au capteur  $i$ ; celle-ci peut prendre deux valeurs 0 ou 1, voir le tableau (6.2).

- $\delta_i = 1 \Rightarrow$  le capteur  $i$  est défaillant,
- $\delta_i = 0 \Rightarrow$  fonctionnement normal,
- $\delta_{ij} = 1 \Rightarrow$  les capteurs  $i$  et  $j$  sont défaillants,
- $\delta_{ij} = 0 \Rightarrow$  fonctionnement normal.

A partir du tableau (6.2), nous remarquons que les signatures de défaillances sont indépendantes. Ainsi, il est théoriquement possible de détecter et de localiser le capteur défaillant. Dans le cas où les signatures sont dépendantes, il faudrait avoir plus d'informations (plus de capteurs) sur la même variable pour pouvoir découpler ces signatures.

### 6.4.3 Détection et localisation de défauts capteurs par un banc de multiobservateurs

L'objectif ici est de mettre en oeuvre une technique de détection et localisation de défauts capteurs et actionneurs en utilisant un banc de multiobservateurs. Les défauts qui sont pris en compte sont les défauts capteurs  $\delta y(t)$ . Le vecteur de défaut capteurs s'écrit :

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} \delta y_1(t) \\ \delta y_2(t) \\ \delta y_3(t) \\ \delta y_4(t) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

#### 6.4.3.1 Simulation sans défauts

Nous avons supposé l'existence de bruits de mesures sur les capteurs. La figure (6.7) montre l'évolution de l'entrée  $u(t)$  appliquée au turboréacteur. Les bruits de mesures considérés sont différents pour chaque sortie, voir la figure (6.10).

Les figures (6.8) montrent les sorties  $y(t)$  du turboréacteur et leurs estimations par le multiobservateur. L'évolution des résidus, en l'absence de défauts, apparaît sur les figures (6.9). En régime permanent, ces figures mettent en évidence, d'une part, le caractère aléatoire des résidus et, d'autre part, le fait qu'en l'absence de défauts les résidus sont statistiquement nuls.

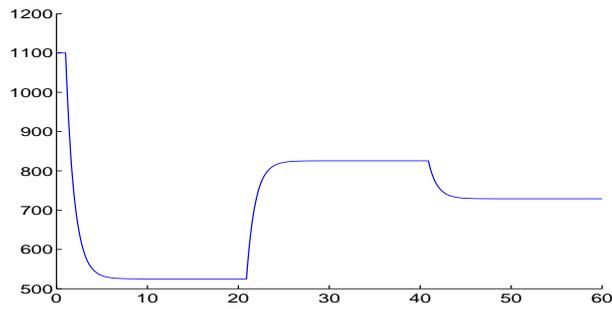


FIG. 6.7 – Entrée appliquée au turboréacteur et au multiobservateur

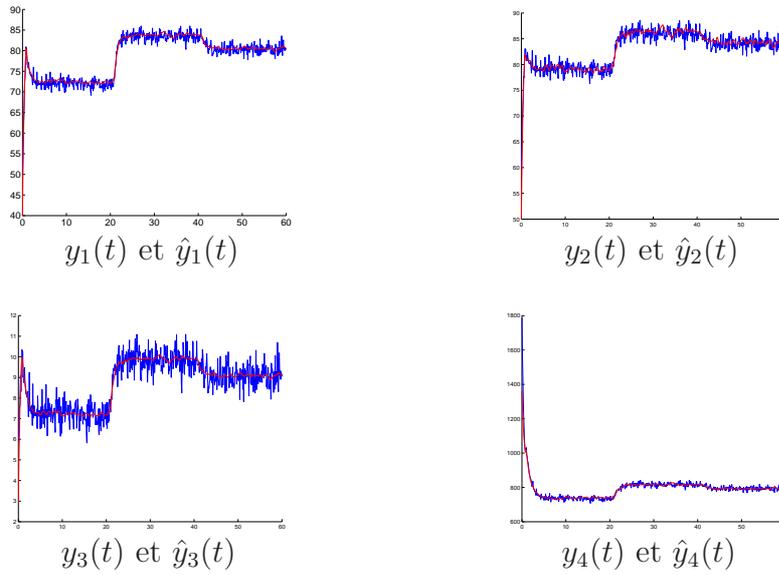


FIG. 6.8 – Les sorties du turboréacteur et leurs estimations

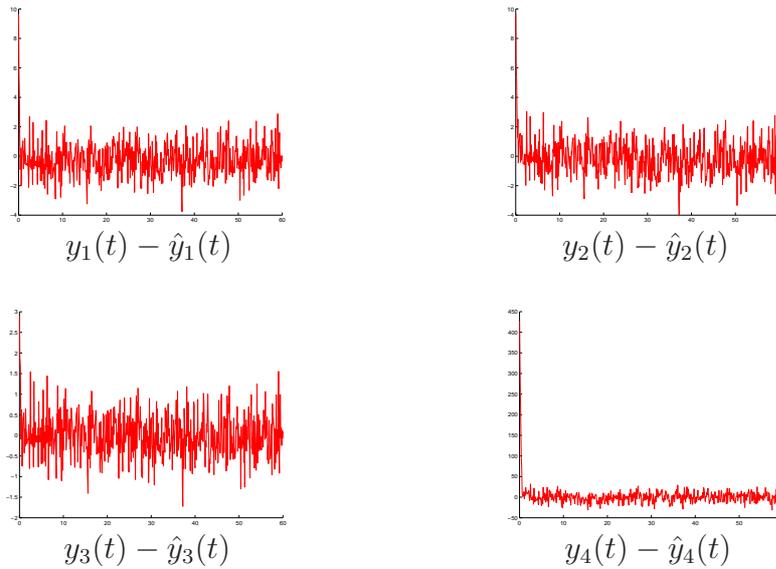


FIG. 6.9 – Evolution des résidus en l'absence de défauts

## 6.4.3.2 Simulation en présence de défauts

Considérons à présent le cas de l'apparition de défauts affectant les mesures  $y_1(t)$  et  $y_4(t)$  du moteur. En s'appuyant sur le banc de multiobservateurs donné par l'équation (6.4) pour  $j = 1 : 15$ , nous localisons les capteurs défaillants.

La figure (6.10) montre l'évolution des défauts considérés sur les mesures  $y_1(t)$  et  $y_4(t)$  ainsi que les bruits de mesures ajoutés sur les quatre sorties, les sorties  $y_2(t)$  et  $y_3(t)$  sont supposées sans défaut. Le défaut injecté sur la sortie  $y_1(t)$  (respectivement  $y_4(t)$ ) se déclenche à l'instant  $t = 20 \text{ sec}$  (respectivement  $t = 30 \text{ sec}$ ) et disparaît à l'instant  $t = 40 \text{ sec}$  (respectivement  $t = 50 \text{ sec}$ ) et a une amplitude constante égale à 20 (respectivement 150).

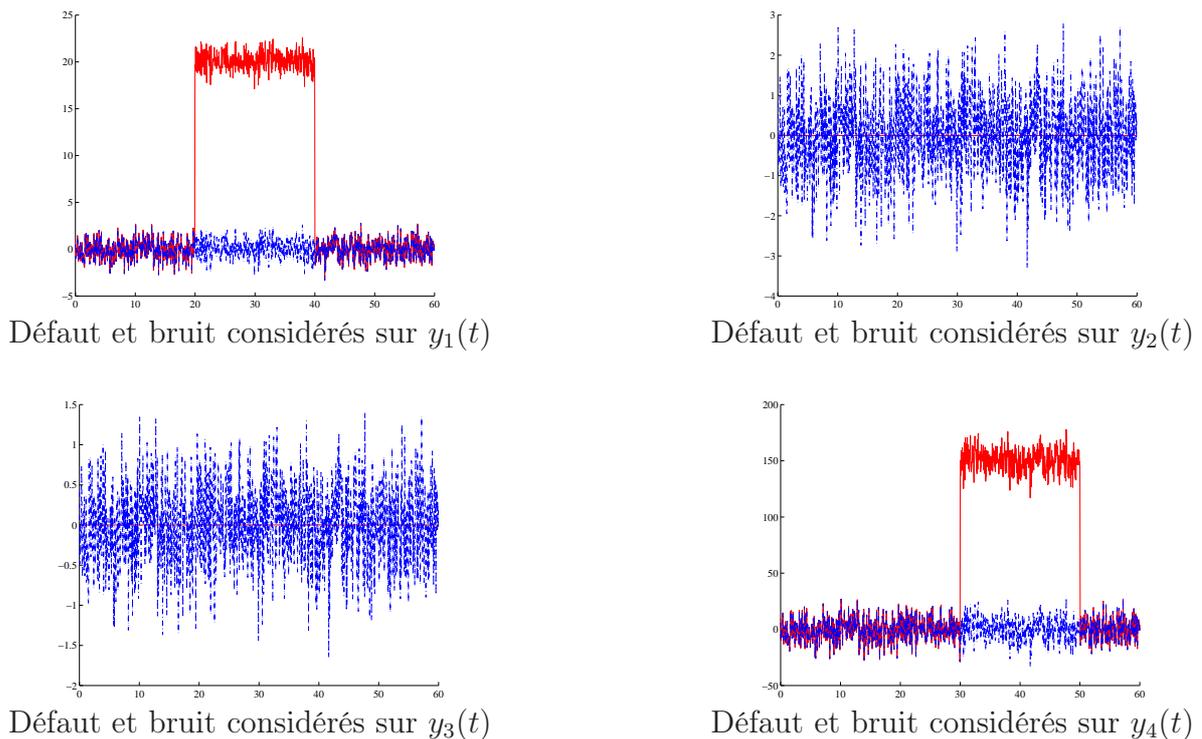
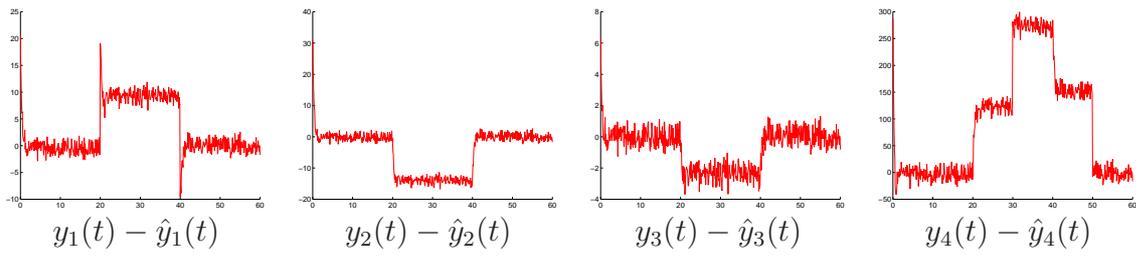
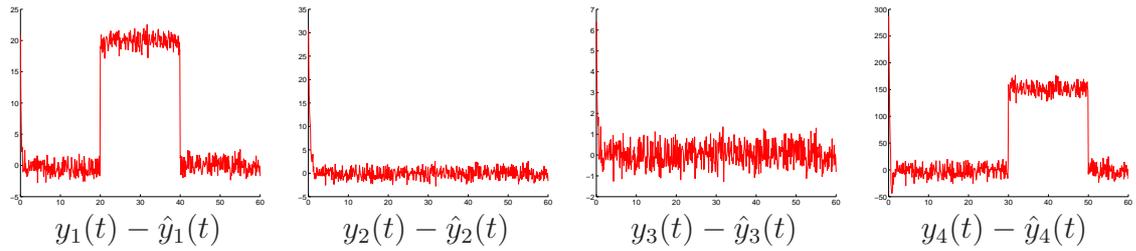


FIG. 6.10 – Perturbations sur les mesures

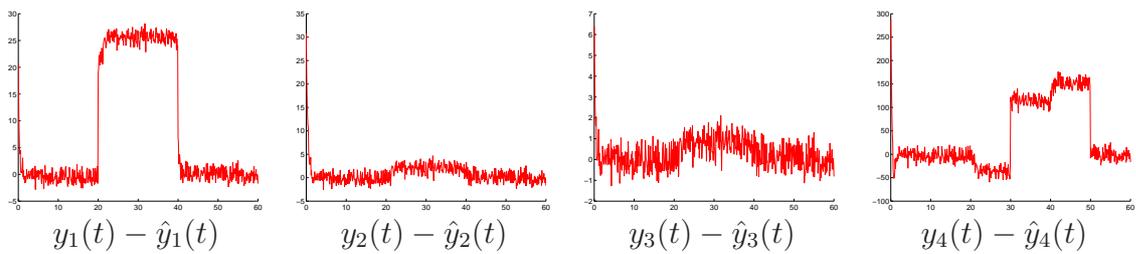
Les figures (6.11), (6.12) et (6.13) montrent les résidus obtenus par le banc de multiobservateurs.



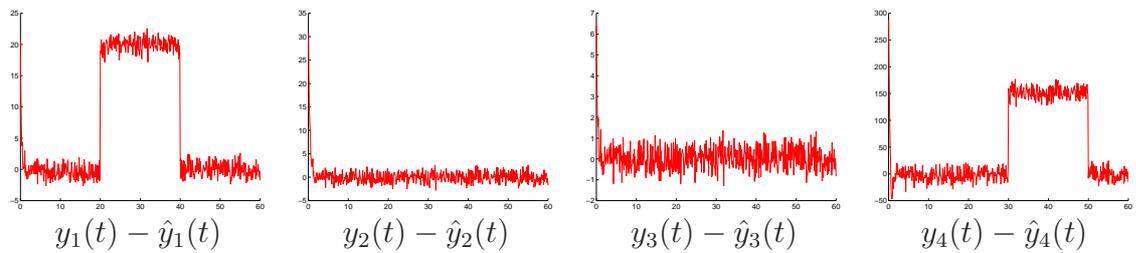
Les résidus  $r_{i1}(t)$  ( $j = 1$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



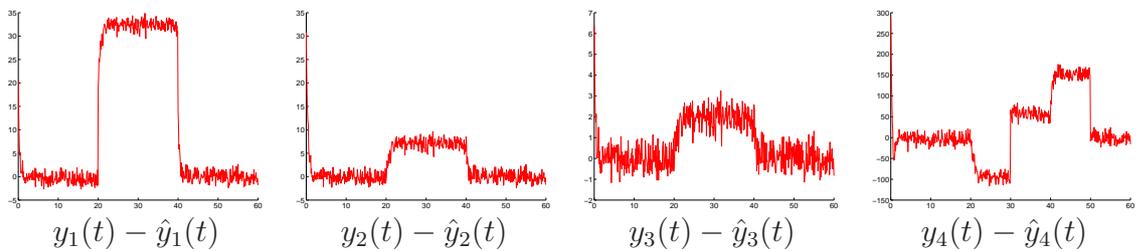
Les résidus  $r_{i2}(t)$  ( $j = 2$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



Les résidus  $r_{i3}(t)$  ( $j = 3$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$

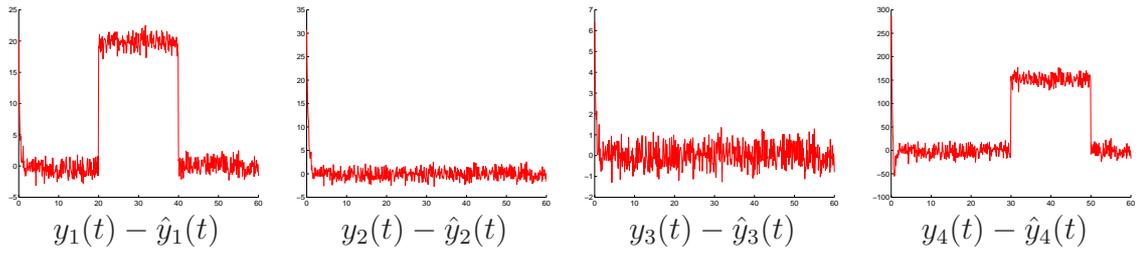


Les résidus  $r_{i4}(t)$  ( $j = 4$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$

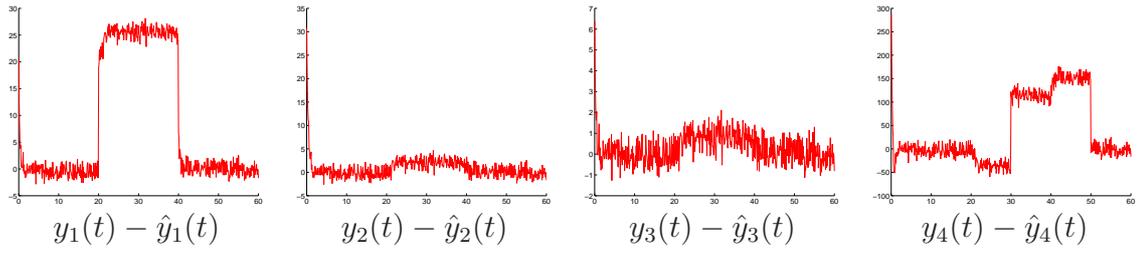


Les résidus  $r_{i5}(t)$  ( $j = 5$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$

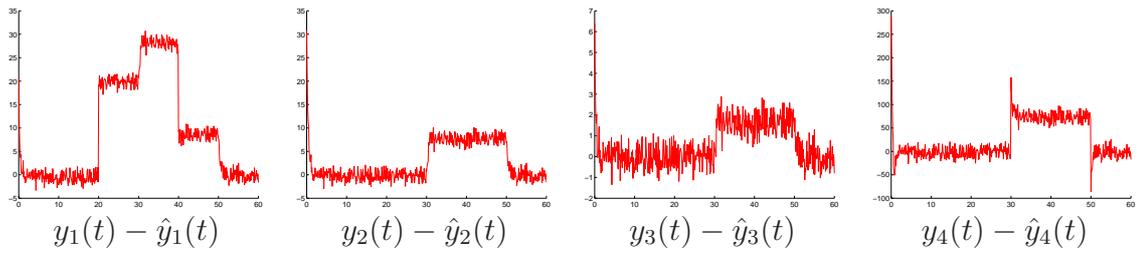
FIG. 6.11 – Résidus  $r_{ij}(t)$  en présence de défauts



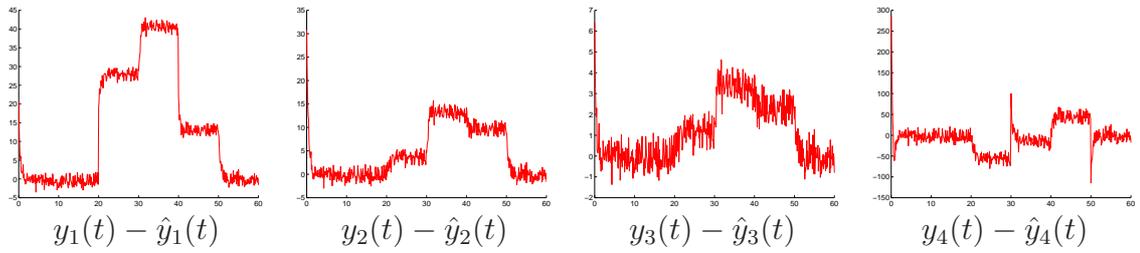
Les résidus  $r_{i6}(t)$  ( $j = 6$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



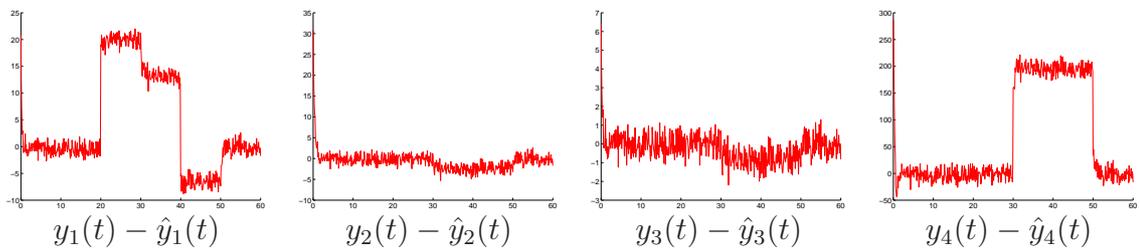
Les résidus  $r_{i7}(t)$  pour  $j = 7$  et  $i = \{1, \dots, 4\}$



Les résidus  $r_{i8}(t)$   $j = 8$  et  $i = \{1, \dots, 4\}$

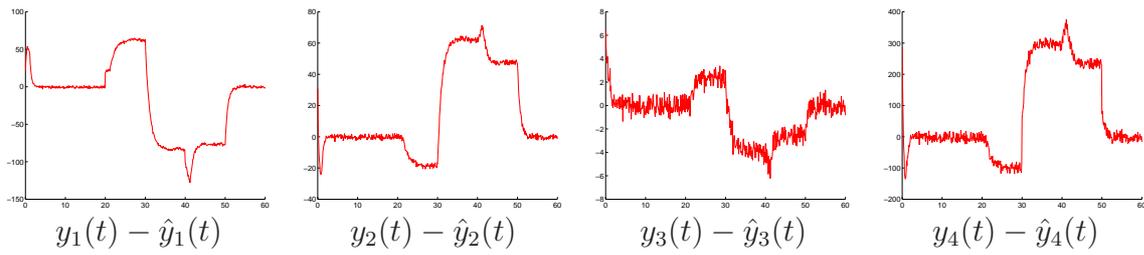


Les résidus  $r_{i9}(t)$  ( $j = 9$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$

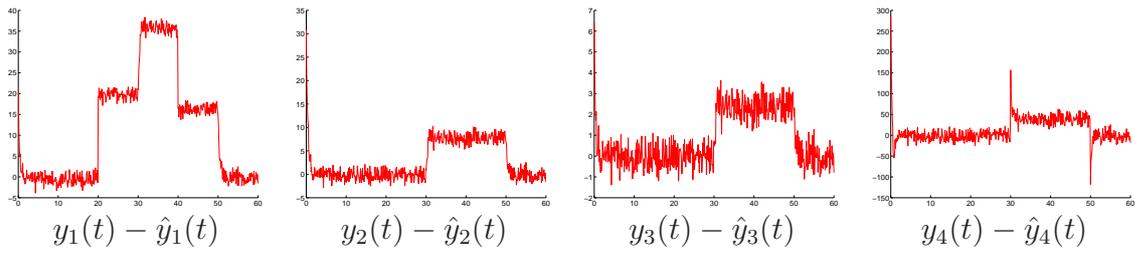


Les résidus  $r_{i10}(t)$  ( $j = 10$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$

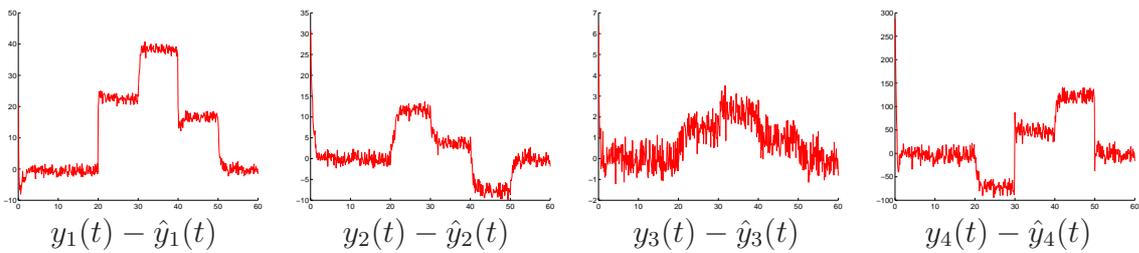
FIG. 6.12 – Résidus  $r_{ij}(t)$  en présence de défauts



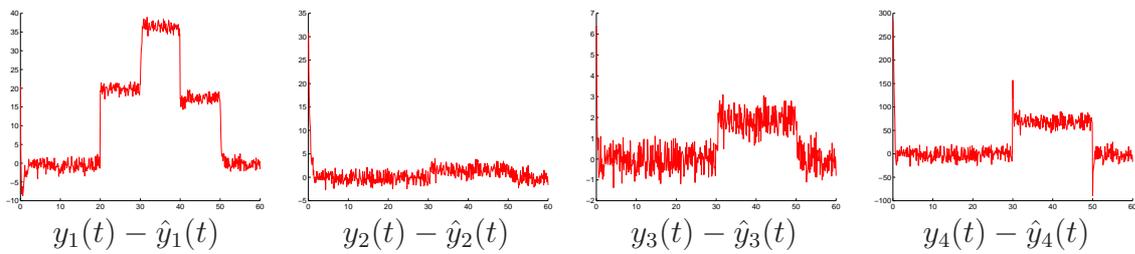
Les résidus  $r_{i11}(t)$  ( $j = 11$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



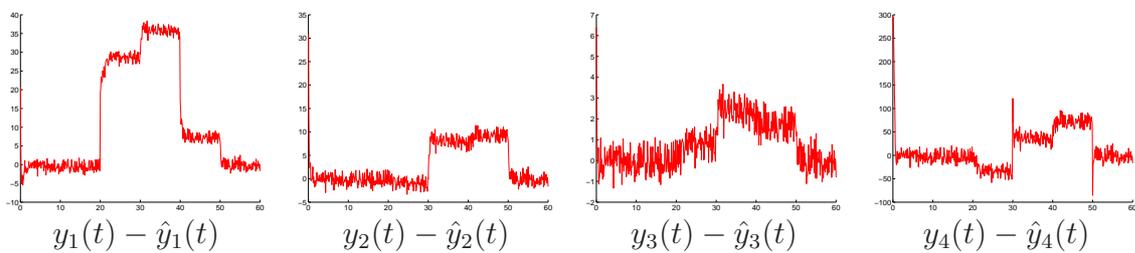
Les résidus  $r_{i12}(t)$  ( $j = 12$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



Les résidus  $r_{i13}(t)$  ( $j = 13$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



Les résidus  $r_{i14}(t)$  ( $j = 14$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$



Les résidus  $r_{i15}(t)$  ( $j = 15$ ) et  $i = \{1, \dots, 4\}$

FIG. 6.13 – Résidus  $r_{ij}(t)$  en présence de défauts

### 6.4.3.3 Analyse des résidus

Pour chaque résidu  $r_{ij}(t)$ , il faut déterminer une tolérance  $\tau_{ij}$  qui doit indiquer les limites de son domaine d'évolution en l'absence de défauts. La valeur des tolérances est fixée en fonction des caractéristiques statistiques de chacun des résidus en fonctionnement normal. Les résidus considérés étant des fonctions non linéaires des mesures, on ne peut pas facilement accéder aux propriétés statistiques de ceux-ci. On peut en revanche estimer la variance des résidus en fonctionnement normal (absence de défauts) et s'appuyer sur cette information pour déterminer le domaine d'évolution des résidus en fonctionnement normal. La valeur de la tolérance  $\tau_{ij}$  peut, par exemple, être déterminée à partir de l'expression suivante :

$$\tau_{ij} = \alpha \sqrt{\text{Var}(r_{ij}(t))} \quad (6.9)$$

où  $r_{ij}(t)$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur de résidu généré par le  $j^{\text{ème}}$  multiobservateur,  $\alpha$  est un paramètre de réglage de la sensibilité de détection et  $\text{Var}(r_{ij}(t))$  la variance empirique du résidu  $r_{ij}(t)$  en fonctionnement normal.

### 6.4.3.4 Principe de la localisation de défauts

Notre intérêt s'est porté sur les méthodes de localisation basées sur les signatures de défauts. Pour ce type de méthode, la localisation de défauts nécessite la génération préalable d'une matrice de signatures théoriques des différents défauts à détecter, voir le tableau (6.2). Cette matrice traduit l'influence théorique des différents défauts que l'on cherche à détecter sur les résidus qui sont générés par le banc de multiobservateurs.

L'évolution des résidus permet ensuite de constituer une matrice de signatures expérimentales. En comparant les signatures théoriques des différents résidus avec les signatures expérimentales, les défauts susceptibles d'être à l'origine des symptômes observés peuvent être localisés.

### 6.4.3.5 Evaluation des résidus

La génération de la matrice de signatures expérimentales consiste à associer à chaque résidu la valeur 0 ou 1 selon qu'il est affecté ou non par un défaut. De manière simplifiée, la détection de défauts au niveau d'un résidu, s'apparente au test logique suivant [Mand 98] :

$$\begin{aligned} \text{si } |r_{ij}(t)| \leq \tau_{ij} & \quad \text{alors aucun défaut n'affecte le résidu } r_{ij}(t) \\ \text{si } |r_{ij}(t)| > \tau_{ij} & \quad \text{alors le résidu } r_{ij}(t) \text{ est affecté par un défaut} \end{aligned} \quad (6.10)$$

où la variable  $\tau_{ij}$  représente la tolérance associée au résidu  $r_{ij}(t)$ .

A l'issue du test de chacun des résidus  $r_{ij}(t)$ , une signature binaire expérimentale, notée  $z_{ij}^*$ , est générée à chaque instant  $t$ , de la manière suivante :

$$z_{ij}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } r_{ij}(t) = 0 \\ 1 & \text{si } r_{ij}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

### 6.4.3.6 Localisation de défauts

La localisation des défauts est basée sur la comparaison, à chaque instant, de la signature de défaut expérimentale avec les différentes signatures théoriques. L'hypothèse de défaut la plus vraisemblable est désignée par la signature de défaut théorique la plus proche de la signature expérimentale. La localisation de défauts nécessite donc le calcul d'une distance entre les signatures de défauts. La mesure de distance que nous avons adoptée, dans le cas de signatures binaires, est la distance euclidienne [Cass 92] :

$$D_k(t) = \left( (z_{ij}(t) - z_{ij}^*(t))^T (z_{ij}(t) - z_{ij}^*(t)) \right)^{1/2} \quad (6.12)$$

où  $D_k(t)$  désigne la distance entre la signature de défaut expérimentale et la signature de défaut théorique du défaut  $\delta y_k(t)$ . Afin de repérer les différentes situations de défauts, on a utilisé l'indice  $k$  ( $k = 1, \dots, 10$ ) désignant le numéro correspondant de la colonne de la matrice de signatures théoriques. La comparaison des matrices de signatures théoriques et expérimentales est effectuée par le calcul de la distance entre les colonnes de la table (6.2) et les valeurs de  $z_{ij}^*(t)$  données par les figures (6.14 - 6.15), en utilisant la relation (6.12).

Afin de montrer l'efficacité de la méthode de localisation, nous avons mis en correspondance chaque distance  $D_k(t)$  avec le minimum de toutes les distances à l'exception de  $D_k(t)$ . Par exemple, la partie gauche de la figure (6.16) présente l'évolution de la distance  $D_1(t)$  et, en superposition, celle de  $\min_{i=1, \dots, 10; i \neq 1} D_i(t)$ , la partie centrale, la distance  $D_7(t)$  (relative à la proximité de la signature expérimentale à la signature théorique issue de la présence simultanée des deux défauts sur  $y_1(t)$  et  $y_4(t)$  – voir la table de signatures (6.2) –) et  $\min_{i=1, \dots, 10; i \neq 7} D_i(t)$  et enfin dans la partie droite,  $D_4(t)$  et  $\min_{i=1, \dots, 10; i \neq 4} D_i(t)$ . Notons que les données analysées ici l'ont été en l'absence de bruit de mesures.

6.4. Détection et isolation de défauts sur un turbo-réacteur d'avion

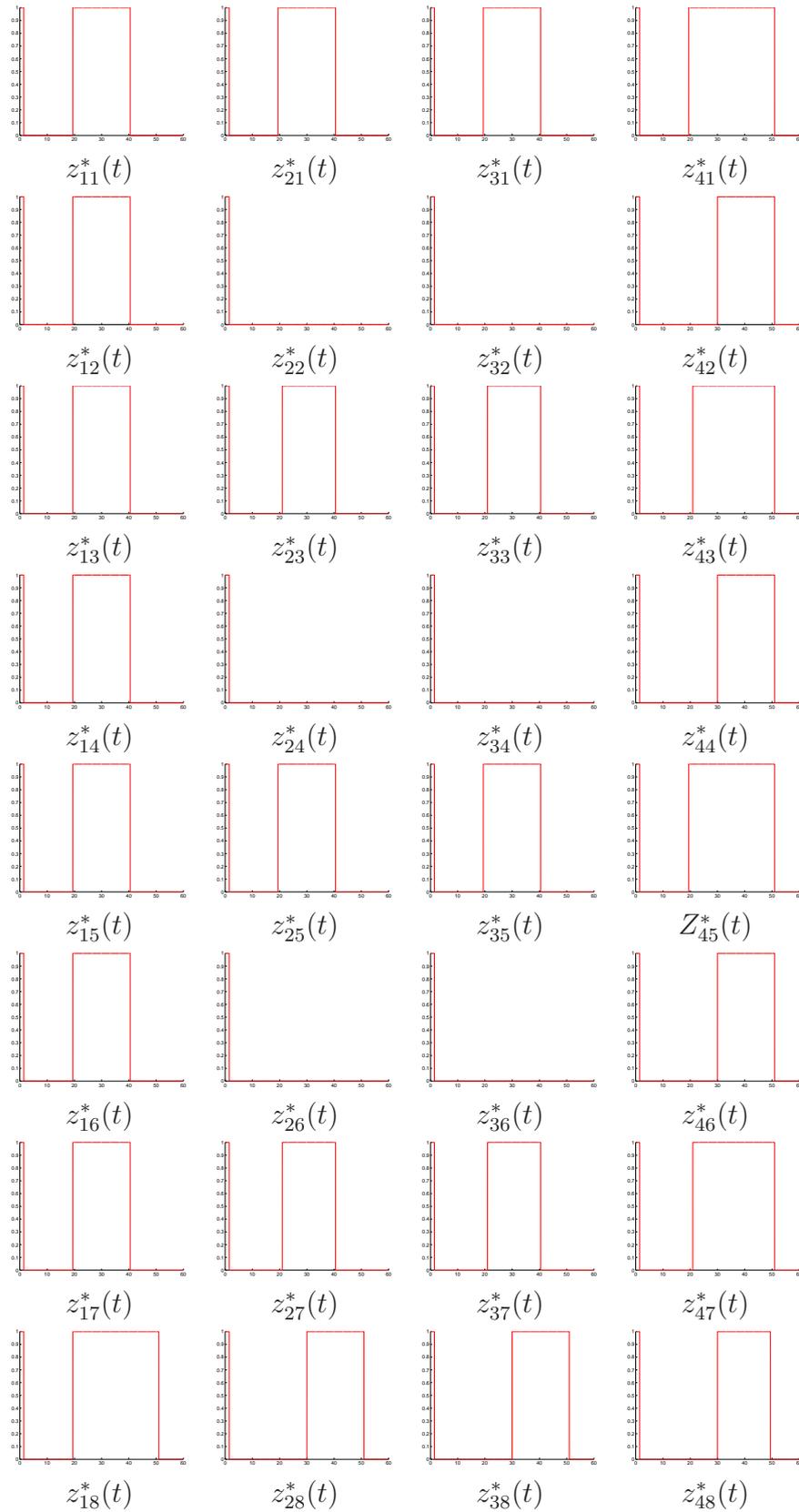


FIG. 6.14 – Matrice de signatures expérimentales  $z_{ij}^*(t)$

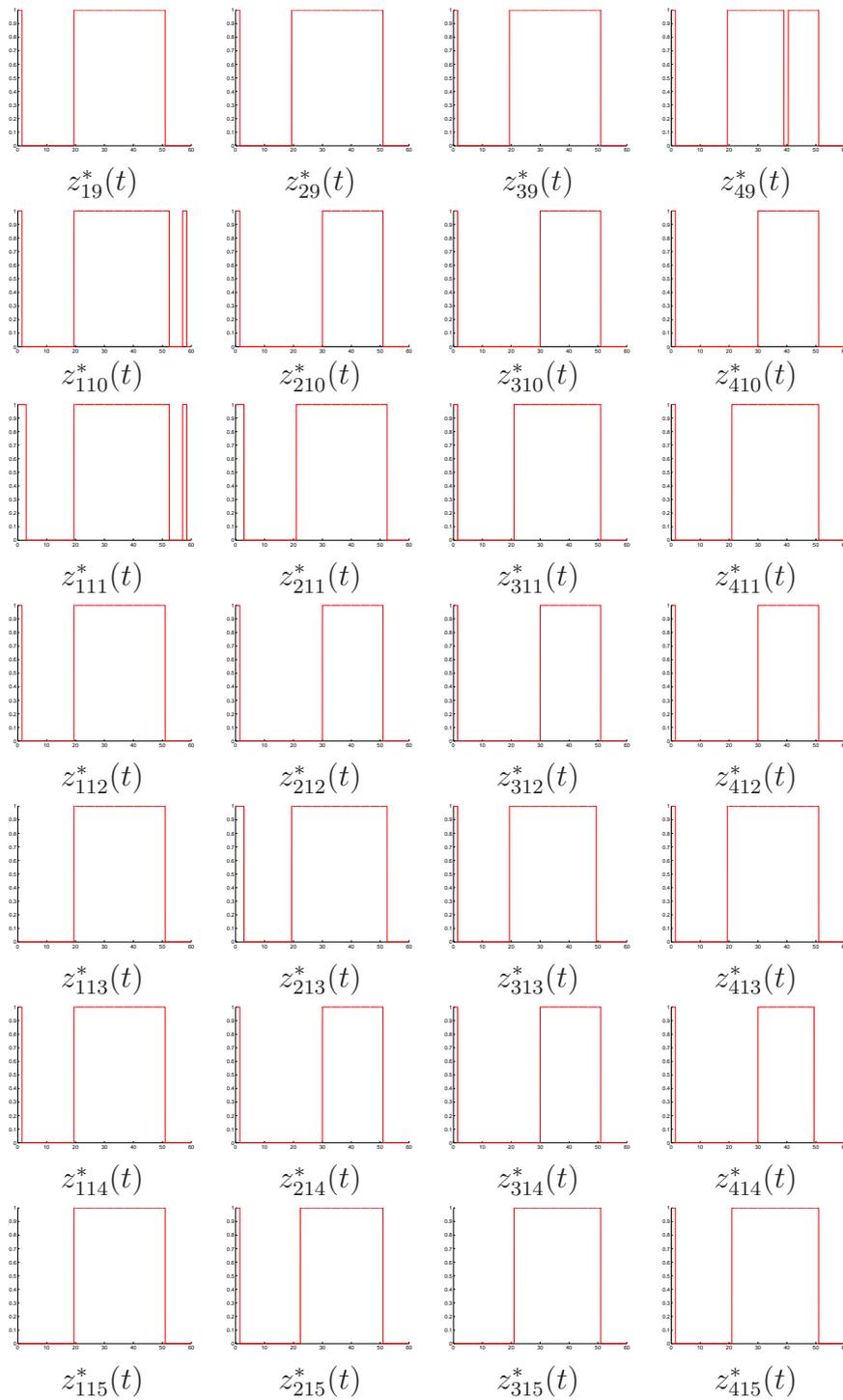


FIG. 6.15 – Matrice de signatures expérimentales  $z_{ij}^*(t)$

L'analyse de la figure (6.16) permet clairement de localiser les défauts. Entre les instants 20 et 30,  $D_1(t)$  est la plus petite distance indiquant la présence d'un défaut sur  $y_1(t)$ . Entre 30 et 40, c'est  $D_7(t)$  la plus petite distance ; il y a donc présence simultanée de deux défauts sur  $y_1(t)$  et  $y_4(t)$ . Enfin, sur l'intervalle de temps [40 50], c'est  $D_4(t)$  la distance minimale

d'où la présence d'un défaut sur  $y_4(t)$ . Cette analyse peut être reconduite en présence de bruits sur les mesures (figure (6.17)). Pour cet exemple, des conclusions identiques peuvent être tirées.

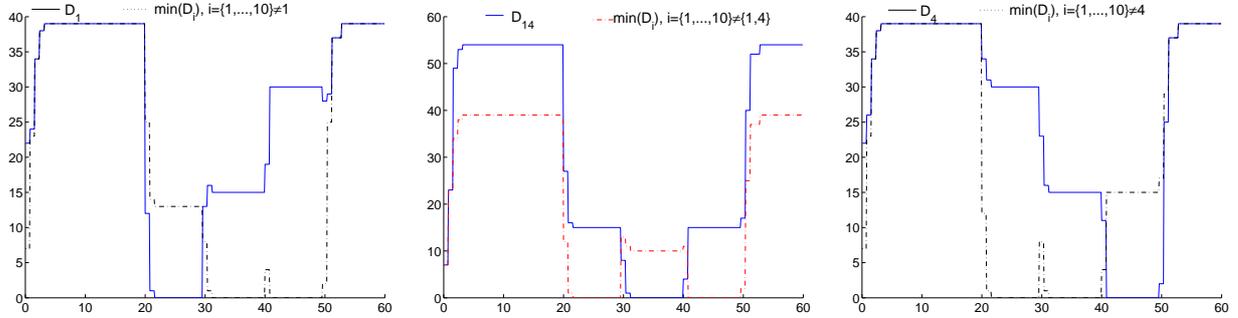


FIG. 6.16 – Distance entre les signatures théoriques et expérimentales en l'absence de bruits

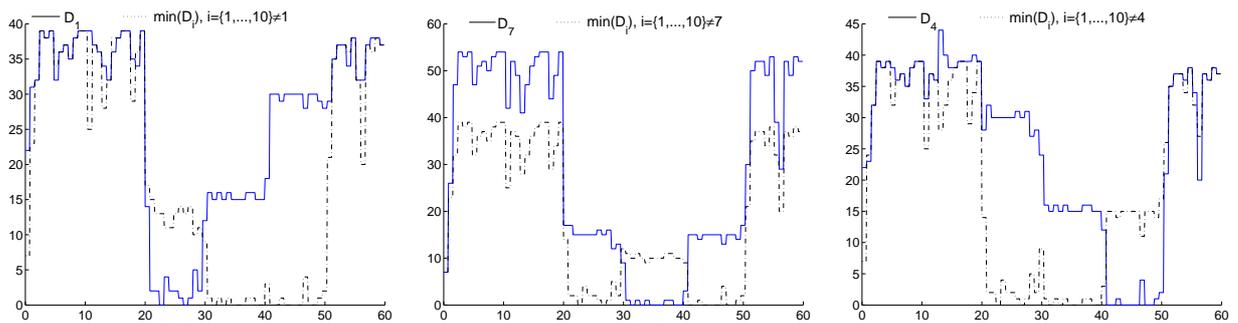


FIG. 6.17 – Distance entre les signatures théoriques et expérimentales en présence de bruits

La sensibilité des résidus par rapport aux différents défauts dépend de la matrice de sortie  $\sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t)) C_i$ , qui est une combinaison non linéaire des matrices  $C_i$ . A partir de la figure (6.11), on peut observer que le résidu  $r_{33} = y_3(t) - \hat{y}_3(t)$  est moins sensible aux défauts, affectant la sortie  $y_1(t)$  que le résidu  $r_{35} = y_3(t) - \hat{y}_3(t)$ . Cette différence de sensibilité peut conduire parfois à des non-détections.

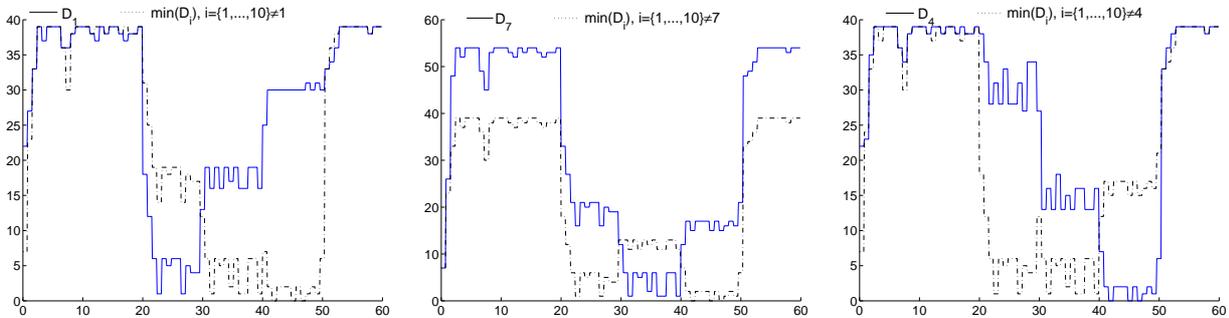
#### 6.4.4 Performance de la procédure de diagnostic utilisée

Dans cette section, nous allons discuter de la performance de la procédure de diagnostic mise en place dans la section précédente. La détection et la localisation des défauts a été réalisée avec succès, car les amplitudes de défauts sont suffisamment grandes pour sensibiliser les résidus. Afin de montrer les limites de la détection, nous simulons les

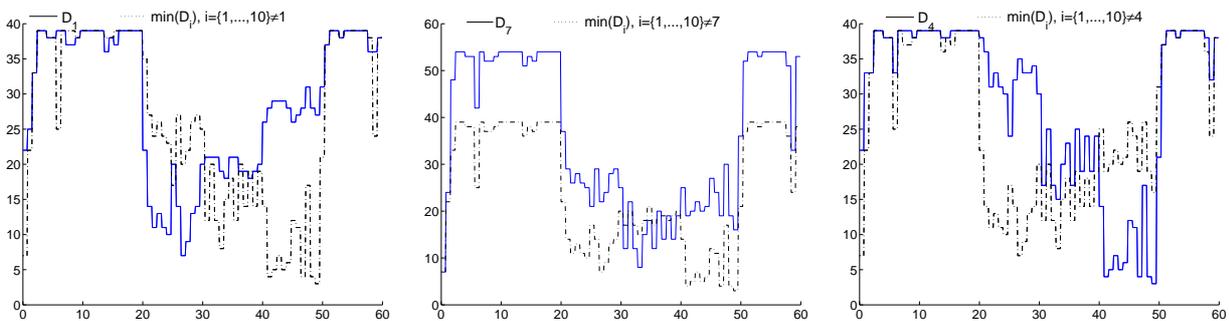
défauts avec des amplitudes de plus en plus petites tout en gardant le même niveau de bruits pour chaque capteur et la même procédure de détection. Les performances de la procédure peuvent être analysées directement à partir des figures qui montrent les distances les plus faibles entre  $z_{ij}(t)$  et  $z_{ij}^*(t)$  pour différentes amplitudes de défauts. Pour faire le test, nous considérons cinq cas présentés sur le tableau suivant :

$\delta y_1(t)$	20/2	20/4	20/6	20/8	20/10
$\delta y_4(t)$	150/2	150/4	150/6	150/8	150/10

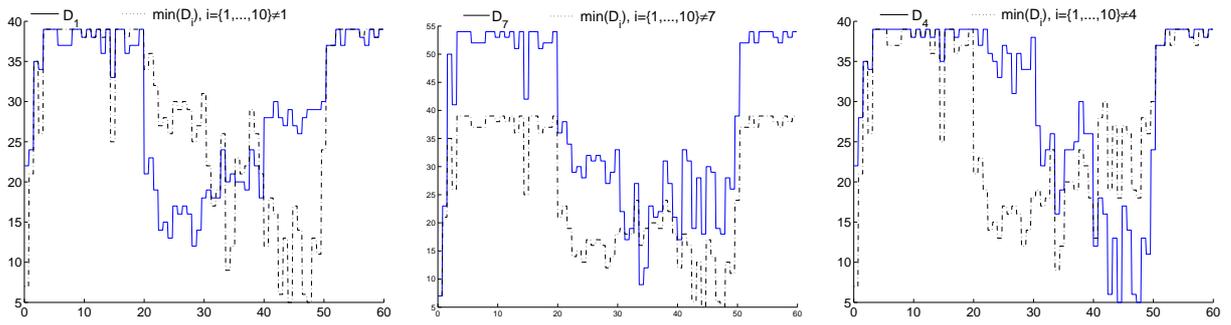
TAB. 6.3 – Différentes amplitudes de défauts



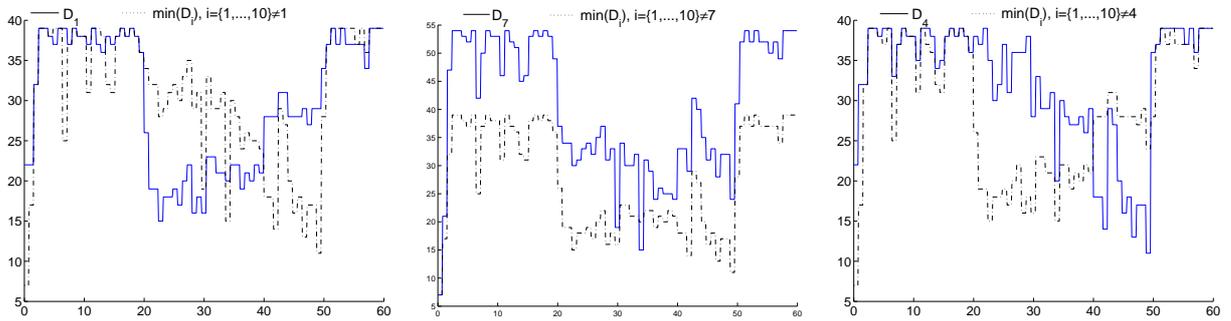
Défauts considérés représentent 50% de l'amplitude initiale.



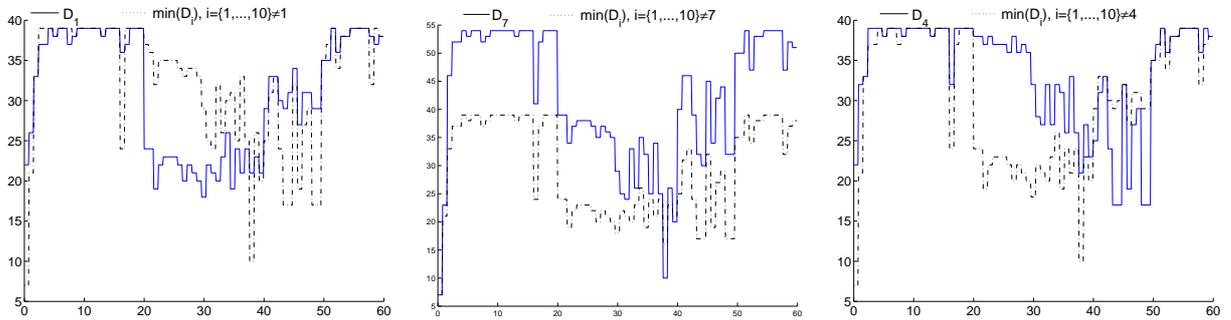
Défauts considérés représentent 25% de l'amplitude initiale.



Défauts considérés représentent 16.67% de l'amplitude initiale.



Défauts considérés représentent 12.5% de l'amplitude initiale.



Défauts considérés représentent 10% de l'amplitude initiale.

FIG. 6.18 – Distance entre les signatures théoriques et expérimentales en présence de bruits

La figure (6.18) témoigne de la qualité de la détection et localisation de défauts capteurs considérés sur les sorties  $y_1(t)$  et  $y_4(t)$ . En présence de bruits de mesures et à partir d'un certain niveau d'amplitude de défauts, la localisation s'avère pas possible. En effet, en considérant 25% de l'amplitude de défauts initiaux, la localisation n'est pas garantie entre les instants 30 et 40 seconde. La localisation dépend également de la sensibilité des résidus par rapport aux différents défauts.

La mise en oeuvre de cette méthode est relativement aisée mais elle présente cependant un inconvénient majeur. En effet, il se peut bien qu'un défaut n'ait pas une amplitude suffisante pour être détecté au niveau de l'ensemble des résidus qu'il devrait en théorie affecter. Cette situation conduit à la génération d'une signature de défaut erronée, ce qui entraîne une mauvaise localisation de défaut.

### 6.4.5 Détection de défaut actionneur

Afin de pouvoir détecter et localiser ces défauts, nous construisons un banc de multiobservateurs générant différents résidus, (figure (6.19)). Ainsi, dans cette partie, on considère un défaut sur l'entrée  $u(t)$  du turboréacteur. La procédure de détection est basée sur la génération d'un vecteur de résidus en utilisant un multiobservateur à entrée inconnue. Pour cet exemple particulier, le système ne disposant que d'une seule commande, les entrées du multiobservateur sont uniquement constituées des sorties du turboréacteur.

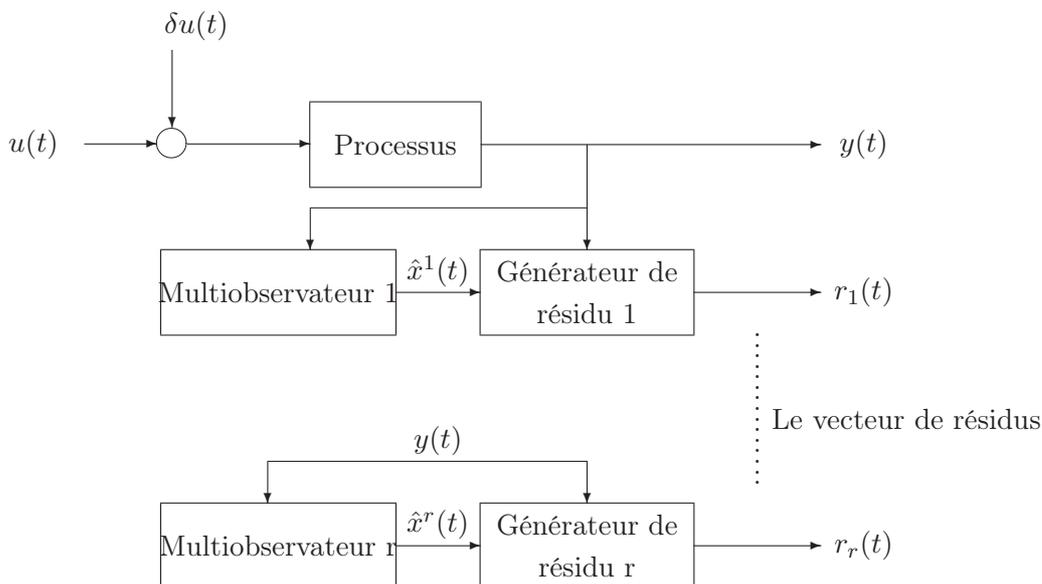


FIG. 6.19 – Banc de multiobservateurs pour la génération de résidus  $r(t)$

Comme nous avons supposé que l'entrée  $u(t)$  est affectée par un défaut  $\delta u(t)$ , les fonctions d'activation du multiobservateur dépend cette fois de la sortie  $y_1(t)$  du turboréacteur. Pour

cela, nous considérons le multiobservateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_1(t)) (A_i \hat{x}(t) + G_i(y_{1-2}(t) - \hat{y}_{1-2}(t)) + B_i \nu_i(t)) \\ \hat{y}_{1-2}(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.13)$$

avec

$$\begin{aligned} y_{1-2}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{cases} \text{si } r(t) \neq 0, \text{ alors } \nu_i(t) = \rho \frac{F_i r(t)}{\|F_i r(t)\|} \\ \text{si } r(t) = 0, \text{ alors } \nu_i(t) = 0 \end{cases} & \text{pour } i \in \{1, \dots, 3\} \\ r(t) &= y_{1-2}(t) - \hat{y}_{1-2}(t) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$\rho = 120$  représente la borne de défaut  $\delta u(t)$ , les gains  $G_i$  du multiobservateur et les matrices  $F_i$  sont déterminés par la résolution des contraintes :

$$\begin{cases} (A_i - G_i)^T P + P (A_i - G_i) < 0 \\ C^T F_i^T = P B_i \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, 3\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 24.27 & 1.02 \\ 1.02 & 25 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 23.10 & 0.70 \\ 0.70 & 25.10 \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} 23.22 & 0.79 \\ 0.79 & 25.02 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad F_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad F_3 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

La figure (6.20) montre le vecteur de sortie du turboréacteur est son estimé par le multiobservateur à entrées inconnues (6.13).

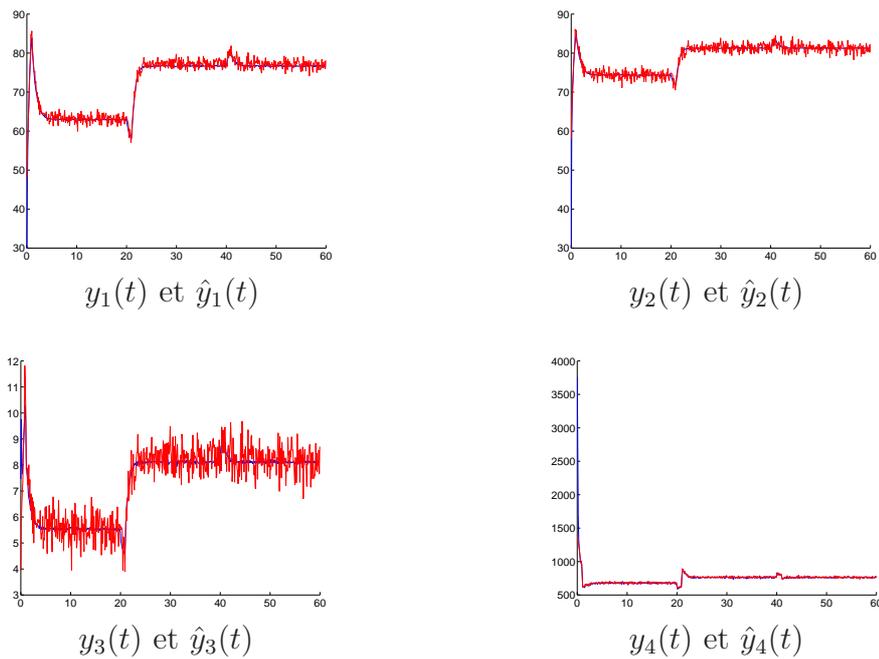


FIG. 6.20 – Sorties du turboréacteur et leurs estimées en présence de défauts

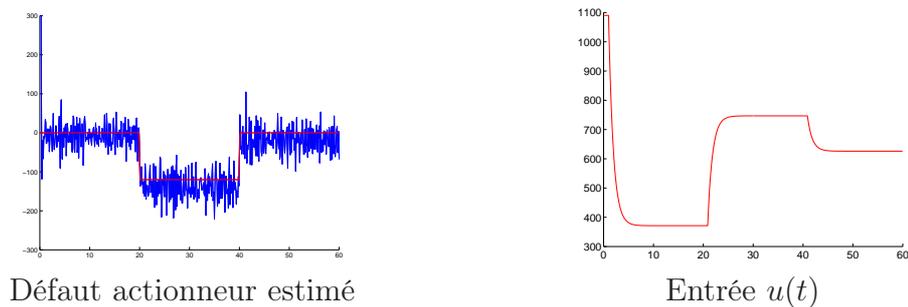


FIG. 6.21 – Défaut actionneur estimé et l'entrée  $u(t)$  appliquée au turboréacteur

L'estimation du vecteur de sortie en considérant l'entrée du système comme étant une entrée inconnue est possible. Ne disposant que d'une seule entrée, l'estimation de défaut est très perturbée par les bruits de mesures. La partie gauche de la figure (6.21) montre l'évolution du défaut  $\delta u(t)$  et de son estimé par le multiobservateur (6.13). Ces résultats peuvent être améliorés en filtrant les sorties du turboréacteur.

## 6.5 Conclusion

Ce chapitre a fourni une étude de détection et localisation de défauts capteurs et actionneurs sur un turboréacteur d'avion. L'objectif a été de mettre en oeuvre une technique de diagnostic de défauts par l'utilisation de banc de multiobservateurs. Les résultats de

simulation ont montré les performances des multiobservateurs pour effectuer la détection et la localisation de défauts. Un filtrage approprié des sortie du turboréacteur permet d'avoir une bonne estimation du défaut actionneur. La méthode de détection de défauts que nous avons utilisée est robuste vis-à-vis des entrées inconnues. Mais quand les mesures sont fortement bruitées les défauts de faibles amplitudes ne sont pas détectés.

Enfin, une autre procédure de localisation peut être utilisée. Celle-ci consiste à mettre en oeuvre un banc de multiobservateurs capable de réaliser la détection et la localisation de défauts capteurs et actionneurs. Dans ce cas, le banc de multiobservateurs sera constitué de multiobservateurs à structure continue pour la détection et la localisation de défauts capteurs et, de multiobservateurs à entrées inconnues (multiobservateurs à mode glissant) afin de détecter et de localiser les défauts actionneurs.



# Conclusion

Les travaux développés dans ce mémoire de thèse représentent une contribution à l'étude des méthodes de détection et de localisation de défauts par redondance analytique. En effet, nous avons développé des méthodes de reconstruction d'état et d'estimation de défauts affectant séparément l'entrée et la sortie d'un système. Nous avons testé ces méthodes sur des exemples de simulation issus d'un modèle de turbo-réacteur d'avion.

Dans le premier et le deuxième chapitre, nous avons fait des rappels sur l'analyse de stabilité des systèmes linéaires incertains et l'utilisation des outils numériques LMI avec lesquels nous vérifions l'existence de conditions de stabilité. Ensuite, nous avons présenté les méthodes de reconstruction d'état des systèmes linéaires soumis à l'influence d'entrées inconnues. Nous avons regroupé les méthodes de reconstruction d'état selon qu'elles nécessitent (observateurs continus) ou pas l'élimination d'entrées inconnues (observateur discontinus).

Le troisième chapitre a été consacré à l'étude de l'approche multimodèle. Après avoir rappelé les formes de multimodèles les plus utilisées, nous avons montré leur capacité à approximer le comportement d'un système physique dynamique non linéaire (turbo-réacteur d'un avion), en utilisant les deux principales méthodes d'obtention de multimodèles (identification et linéarisation).

La synthèse des multiobservateurs a constitué le coeur de notre travail de recherche. L'étude que nous avons menée a été organisée en deux parties : la première a traité de la méthode de conception de multiobservateurs continus, la deuxième a fait appel à la notion de mode glissant, où les multiobservateurs sont dotés des termes additifs (glissants) afin de compenser les entrées inconnues et les incertitudes de modèles.

Dans la première partie, nous avons montré que la reconstruction d'état et d'entrées inconnues était possible. Nous avons établi des conditions suffisantes de convergence du multiobservateur ; la seule condition stricte d'existence du multiobservateur est relative au nombre d'entrées inconnues qui doit être inférieur au nombre de variables d'état du multimodèle. Les deux limites principales de ce genre de multiobservateur résident dans son incapacité à estimer l'état lorsque :

- le vecteur de sortie est une combinaison non linéaire de variables d'état,
- les perturbations agissant sur le multimodèle sont de nature multiplicative (non additive).

Pour surmonter ces limites, nous avons eu recours à la notion d'observateurs à mode glissant, en s'appuyant sur la structure des observateurs de Walcott et Zac ainsi que celle de Edwards et Spurgeon. Nous avons utilisé différentes structures de multiobservateurs pour le problème de reconstruction d'état et d'entrées inconnues en utilisant l'information délivrée par les entrées connues et les sorties mesurées du système.

Dans cette partie, nous avons développé deux types de multiobservateurs à mode glissant. Le premier fait appel à une contrainte structurelle (contrainte égalité) conjointement à des inégalités linéaires matricielles (LMI), son principal avantage réside dans la bornitude des termes discontinus. La deuxième structure que nous avons développée a pour objectif de relaxer les conditions de convergence et en particulier celles relatives à la contrainte structurelle précédente. Cette forme de multiobservateur permet la reconstruction du vecteur d'état en présence d'entrées et d'incertitudes de modèle

Le dernier chapitre a été consacré à une application pratique concernant la détection de défauts capteurs et actionneurs d'un turboréacteur d'avion. Le système considéré est non linéaire et sa description été disponible sous la forme de valeurs tabulées des gains des différentes variables d'état. Nous avons substitué à ce modèle tabulé un multimodèle (non linéaire) permettant une manipulation plus aisée. La détection - localisation des défauts a alors été effectuée à l'aide de bancs de multiobservateurs. Ceux-ci ont permis de détecter et localiser les défauts d'une manière satisfaisante. Ces travaux de recherche ont mis en évidence certains problèmes méritant des réflexions plus approfondies.

- concernant l'obtention d'une structure multimodèle, les incertitudes de modèle évoquées dans ce mémoire doivent être tolérées par zones de fonctionnement.
- les structures des multiobservateurs à mode glissant proposées montrent leurs limites lorsque le vecteur de sorties d'un multimodèle présente des perturbations multiplicatives, car la principale information utilisée par les termes glissants est le résidu entre les sorties du multimodèles et leurs estimées.
- le choix d'une fonction de Lyapunov nous a amené à la recherche d'une matrice, symétrique et définie positive, unique pour plusieurs inégalités matricielles. D'autres choix sont à explorer pour trouver des conditions de convergence moins restrictives, par exemple en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques.
- les multiobservateurs proposés peuvent être adaptés pour la reconstruction d'état des systèmes à retard présentés sous forme multimodèle. Les structures restent les mêmes, les conditions de convergence étant sans doute plus restrictives.
- la structure des multiobservateur proposée dans le chapitre 4 reste valable pour des

---

ystème non linéaires représentés sous forme multimodèle discret. Les conditions de convergence sont basées sur l'étude de la stabilité des multimodèles discrets.



# Bibliographie

- [Abon 01] J. Abonyi, R. Babuska et F. Szeifert, *Fuzzy Modeling With Multivariate Membership Functions : Gray-Box Identification and Control Design*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 31 (5), pp. 755-767, 2001.
- [Abon 01] J. Abonyi, R. Babuska et F. Szeifert, *Fuzzy model-based predictive control by instantaneous linearization*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 120 (1), pp. 109-122, 2001.
- [Akhe 04e] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Conception d'un observateur flou à entrées inconnues*, Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Nantes, France, 18-19 Novembre 2004.
- [Akhe 04d] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs*, 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantic, Paradise Island, Bahamas, December 14-17, 2004.
- [Akhe 04c] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Estimation d'état et d'entrées inconnues d'un système non linéaire représenté par un multimodèle*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2004, Douz, Tunisie, 22-24 Novembre 2004.
- [Akhe 04b] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model*, 11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM 2004, Nancy, France, September, 8-10 2004.
- [Akhe 04a] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Design of robust fuzzy observer for uncertain Takagi-Sugeno models*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Fuzz-IEEE, Budapest, Hungary, 25-29 July, 2004.
- [Akhe 03c] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Multiobservateur à modes glissants*, Journées Doctorales d'Automatique, pp. 89-94, Valenciennes, France, 25-27 Juin 2003.

- [Akhe 03b] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Sliding mode multiple observer for fault detection and isolation*, 42th IEEE Conference on Decision and Control, pp. Vol. 1, pp. 953-958, Hawaii, USA, December 9-12, 2003.
- [Akhe 03a] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *State estimation via Multiple observer with unknown input. Application to the three tank system*, 5th IFAC Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess, pp. 245-251, Washington, USA, June 9-11 2003.
- [Akhe 02] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot et D. Maquin, *Multiple observer with unknown input. Application to a three tank system*, IAR Annual meeting, Grenoble, France, 21 November 2002.
- [Aman 01] P. Amann, J. M. Perronne, G. L. Gissenger et P. M. Frank, *Identification of fuzzy relational models for fault detection*, Control Engineering Practice, Vol. 9 (5), pp. 555-562, 2001.
- [Amat 02] F. Amato et M. Mattei, *Design of full unknown input observers with  $H_\infty$  performance*, IEEE, International Conference on Control Applications, Vol. 1, pp. 74-75, 2002.
- [Aoki 67] M. Aoki et J. R. Huddle, *Estimation of the state vector of a linear stochastic system with a constrained estimator*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 12 (4), pp. 432-433, 1967.
- [Assa 02] W. Assawinchaichote et K. Nguang, *Fuzzy observer-based controller design for singularly perturbed nonlinear systems : an LMI approach*, IEEE conference on Decision and Control, Vol. 2, pp. 2165-2170, 2002.
- [Bear 71] R. V. Beard, *Failure accommodation in linear systems through self-reorganisation*, Rept. MTV-71-1Man Vehicle Laboratory, Technology and metallurgy series, Vol. 199, pp. 1-20, 1971.
- [Ball 99] P. Ballé, *Fuzzy-model-based parity equations for fault isolation*, Control Engineering Practice, Vol. 7 (2), pp. 261-270, 1999.
- [Bara 99] G. I. Bara, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski et M. Darouach, *State observers for a class of bilinear descriptor systems subjected to unmeasurable disturbances*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 85-87, 1999.
- [Benk 96] H. Benkhedda et R. J. Patton, *B-spline network integrated qualitative fault detection*, IFAC World Congress, pp. 163-168, USA, 1996.
- [Benn 99] S. M. Bennett, R. J. Patton et S. Daley, *Sensor fault-tolerant control of a rail traction drive*, Control Engineering Practice, Vol. 7 (2), pp. 217-225, 1999.

- 
- [Bien 92] Z. Bien et J. H. Kim, *A robust stability bound of linear system with structured uncertainty*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37 (10), pp. 1549-1551, 1992.
- [Boyd 94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia : SIAM, 1994.
- [Born 93] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, *Analyse et régulation des processus industriels*, Technip, Paris, 1993.
- [Born 92] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, *Modélisation et identification des processus*, tome 1. Editions Technip, Paris, 1992.
- [Born 90] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis, *Commande et optimisation des processus*, Collection méthodes et techniques de l'ingénieur. Editions Technip, Paris, 1990.
- [Bouk 99] A. Boukhris, G. Mourot et J. Ragot, *Sensor fault diagnosis for urban sewer network management*, In Computers and Computational Engineering in Control. N. E. Mastorakis, Electrical and Computer Engineering series, World Scientific Engineering Society, 1999.
- [Bout 00] M. Boutayeb, *Identification of Nonlinear Systems in the Presence of Unknown but Bounded Disturbances*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 45 (8), pp. 1503-1507, 2000.
- [Breg 02] P. Bregsten, R. Palm et D. Driankov, *Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B, Vol. 32 (1), pp. 114-121, 2002.
- [Brei 84] L. Breiman, J. Friedman, J. Olshen et C. Stone, *Classification and Regression Trees*, Wadsworth, Belmont, CA, 1984.
- [Buck 93] J. J. Buckley, *Sugeno type controllers are universal controllers*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 53 (3), pp. 299-303, 1993.
- [Buck 92] J. J. Buckley, *Universal fuzzy controllers*, Automatica, Vol. 28 (6), pp. 1245-1248, 1992.
- [Busa 00] K. K. Busawon et P. Kabor, *On the design of integral and proportional integral observers*, American Control Conference, Vol. 6, pp. 3725-3729, 2000.
- [Byrs 93] W. Byrski, *Integral descriptor of the optimal state observers*, ECC'93, vol. 4, pp. 1832-1837, 1993.
- [Cami 01] W. M. Caminhas et R. H. Takahashi, *Dynamic system failure detection and diagnosis employing sliding mode observer and fuzzy neural networks*, IFSA

- World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Vol. 1, pp. 304-309, 2001.
- [Camo 95] P. Camozzi, *Systèmes à modélisation incertains : Commande par placement de pôle*, Thèse, Université Paul Sabatier de Toulouse, France, 1995.
- [Cass 92] J. P. Cassar, M. Starowiecki et R. Ferhati, *Multivalued logic voting scheme for residual evaluation in failure detection and isolation systems*, IFAC/IFIP/IMACS/ Symposium on Artificial Intelligence in Real-Time Control, pp. 573-579, 1992.
- [Cast 95] J. Castro, *Fuzzy logic controllers are universal approximator*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 25, pp. 629-635, April 1995.
- [Cate 02] M. Catelani et A. Fort, *Soft Fault Detection and Isolation in Analog Circuits : Some Results and a Comparison Between a Fuzzy Approach and Radial Basis Function Networks*, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 51 (2), pp. 196-202, 2002.
- [Chad 02a] M. Chadli, D. Maquin, J. Ragot, *Nonquadratic stability analysis of Takagi-Sugeno models*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 2, pp. 2143-2148, 2002.
- [Chad 02] M. Chadli, D. Maquin, J. Ragot, *Output stabilization in multiple model approach*, International Conference on Control Applications, Vol. 2, pp. 1315-1320, 2002.
- [Chad 01] M. Chadli, D. Maquin, J. Ragot, *On the stability of multiple model systems*, Proceedings of the European Control Conference, pp. 1894-1899, 2001.
- [Chad 00] M. Chadli, D. Maquin et J. Ragot, *Relaxed stability conditions for the T-S fuzzy systems*, IEEE International Conference on Systems, Man, and cybernetics, Vol. 5, pp. 3514-3519, 2000.
- [Chai 98] J. S. Chai, S. Tan, Q. Chan et C. C. Hang, *A general fuzzy control scheme for nonlinear processes with stability analysis*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 100 (1), pp. 179-195, 1998.
- [Chan 72] S. S. L. Chang et T. K. C. Peng, *Adaptive guaranteed cost control systems with uncertain parameters*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 17, pp. 474-483, 1972.
- [Chen 03] Y. W. Chen, S. Nariieda et K. Yamashita, *Blind Nonlinear System Identification Based on a Constrained Hybrid Genetic Algorithm*, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 52 (3), pp. 898-902, 2003.

- 
- [Chen 00] W. Chen, M. Saif et Y. C. Soh, *A variable structure adaptive observer approach for actuator fault detection and diagnosis in uncertain nonlinear systems*, American Control Conference, Vol. 4, pp. 2674-2678, 2000.
- [Chen 91] J. Chen et H. Zhang, *Robust detection of faulty actuators via unknown input observers*, International Journal of Systems Science, Vol. 22, pp. 1829-1839, 1991.
- [Cheo 82] K. C. Cheok, N. K. Loh et R. R. Beck, *General structured observers for discrete time linear systems*, IEEE Proc. American Control Conf., Vol. 2, pp. 614-619, 1982.
- [Chil 96] M. Chilali et P. Gabinet,  *$H_\infty$  Design with pole placement constraints : an LMI approach*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 41 (3), pp. 358-367, 1996.
- [Chua 01] Z. Chuan, H. Qingwei, W. Xiaobei et H. Shousong, *An approach to nonlinear fault diagnosis based neural network adaptive observer*, world congress on Intelligent Control and Automation, pp. 2733-2736, 2001.
- [Comm 02] C. Commault, J. M. Dion, O. Sename et R. Motyeian, *Observer-based fault detection and isolation for structured systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 47 (12), pp. 2074-2079, 2002.
- [Cont 03] G. Conte, A. M. Perdon et G. G. Peroli, *Unknown input observers for linear delay systems : a geometric approach*, IEEE, Conference on Decision and Control, Vol. 6, pp. 6054-6059, 2003.
- [Daro 94] M. Darouach, M. Zasadzinski et S. J. Xu, *Full-order observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39 (3), pp. 606-609, 1994.
- [Dass 00] S. K. Dassanake, G. L. Balas et J. Bokor, *Using unknown input observers to detect and isolate sensor faults in a turbofan engine*, Digital Avionics Systems Conferences, Vol. 7, pp. 6E51-6E57, 2000.
- [DeCa 88] R. A. DeCarlo, S. H. Zak et G. P. Matthews, *Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial*, Proceeding of the IEEE, Vol. 76 (3), pp. 212-232, 1988.
- [Dext 95] A. L. Dexter, *Fuzzy model-based fault-diagnosis*, IEE Control Theory and Applications, Vol. 142 (6), pp. 545-550, 1995.
- [Dieu 87] E. Dieulesaint et D. Royer, *Systèmes linéaires de commande à signaux échantionnés*, Automatique Appliquée, Masson, 1994.
- [Dixo 04] R. Dixon, *Observer-based FDIA : application to an electromechanical positioning system*, Control Engineering Practice, Vol. 12, pp. 1113-1125, 2004.

- [Dorl 86] C. M. Dorling et A. S. I. Zinober, *Two approaches to hyperplane design in multivariable variable structure control systems*, International Journal of Control, Vol. 44, pp. 65-82, 1986.
- [Drag 04] D. Kukolj et E. Levi, *Identification of Complex Systems Based on Neural and Takagi-Sugeno Fuzzy Model*, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, , Vol. 34 (1), pp. 272-282, 2004.
- [Edwa 00] C. Edwards et S. K. Spurgeon, *Sliding mode observers for fault detection and isolation*, Automatica, Vol. 36 (4), pp. 541-553, 2000.
- [Edwa 94] C. Edwards et S.K. Spurgeon, *On the development of discontinuous observers*, International Journal of Control, Vol. 25, pp. 1211-1229, 1994.
- [Fan 02] K. K. Fan et J. G. Hsieh, *LMI Approach to design of robust state observer for uncertain systems with time-delay perturbation*, IEEE International Conference on Industrial Technology, Vol. 42, pp. 1111-1115, Bangkok, Thailand, 2002.
- [Fatt 99] A. Fattouh, O. Sename et J. M. Dion, *An unknown input observer design for linear time-delay systems*, IEEE, Conference on Decision and Control, Vol. 4, pp. 4222-4227, 1999.
- [File 91] D. Filev, *modelling of complexe systems*, International Journal of Approximate Res., Vol. 5, pp. 281-290, 1991.
- [Flug 56] I. Flugge-Lotz et C. Taylor, *Synthesis of nonlinear control systems*, IRE Trans. on Automatic Control, Vol. 1 (1), pp. 3-9, 1956.
- [Foll 85] O. Föllinger, *Regelungstechnik - Einführung in die methoden und ihre anwendungen*, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, 1985.
- [Foss 93] A. J. Fossard et D. Normand-Cyrot, *Système non linéaire*, tome 1 : modélisation - estimation. Masson, Paris, 1993.
- [Fran 94] P. M. Frank, *Enhancement of robustness in observer-based fault detection*, International Journal of Control, Vol. 59, pp. 955-981, 1994.
- [Fran 93] P. M. Frank et N. Kiupel, *Fuzzy supervision and application to lean production*, International Journal of System Sci., Vol. 24 (10), pp. 1935-1944, 1993.
- [Fran 90] P.M. Frank, *Fault diagnosis in dynamic system using analytical and knowledge based redundancy - a survey and some new results*, Automatica, Vol. 26 (3), pp. 459-474, 1990.
- [Frie 81] J. Friedman et W. Stuetzle, *Projection pursuit regression*, J. Amer. Statist. Assoc., Vol. 76, pp. 817-823, 1981.
- [Gadd 95] B. Gaddouna, *Contribution au diagnostic des systèmes linéaires invariants à entrées inconnues. Application à un processus hydraulique*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy France, 1995.

- 
- [Gao 04] Z. Gao et D. W. C. Ho, *Proportional multiple-integral observer design for descriptor systems with measurement output disturbances*, Control Theory and Applications, IEE Proceedings, Vol. 151, pp. 279-288, 2004.
- [Gao 03] Y. Gao, et M. J. Er, *Online Adaptive Fuzzy Neural Identification and Control of a Class of MIMO Nonlinear Systems*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 11 (4), pp. 462-477, 2003.
- [Gao 93] Z. Gao et P. J. Antsaklis, *Explicit asymmetric bounds for robust stability of continuous and discret-time systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 38, pp. 332-335, 1993.
- [Garc 97] G. Garcia, *Contribution à la synthèse de lois de commande robuste par l'approche quadratique*, HDR, Université Paul Sabatier, Rapport LASS n° 97543, 1997.
- [Gass 01] K. Gasso, G. Mourot et J. Ragot, *Structure identification in multiple model representation : elimination and merging of local models*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 3, pp. 2992-2997, 2001
- [Gass 00a] K. Gasso, G. Mourot et J. Ragot, *Identification of an output error Takagi-Sugeno model*, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 1, pp. 14-19, 2000.
- [Gass 00b] K. Gasso, *Identification des systèmes dynamiques non linéaires : approche multimodèle*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, 2000.
- [Griñ 00] R. Griño, G. Cembrano et C. Torras, *Nonlinear System Identification Using Additive Dynamic Neural Networks-Two On-Line Approaches*, IEEE Trans. on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 47 (2), pp. 150-165, 2000.
- [Guan 91] Y. Guan, et M. Saif, *A novel approach to the design of unknown input observers*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 36 (5), pp. 632-635, 1991.
- [Guer 04] R. M. Guerra et S. Diop, *Diagnosis of nonlinear systems using an unknown-input observer : An algebraic and differential approach*, IEE Control Theory and Applications, Vol. 15 (1), pp. 130-135, 2004.
- [Ha 03] Q. P. Ha, H. T. Nguyen et H. D. Tuan, *Dynamic output feedback sliding-mode control using pole placement and linear functional observers*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 50 (5), pp. 1030-1037, 2003.
- [Hass 99] A. Hassibi, J. How et S. Boyd, *A path-following method for solving BMI problems in control*, American Control Conference, Vol. 2, pp. 1385-1389, San Diego, California, 1999.

- [Hahn 67] W. Hahn, *Stability of motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Hamm 02] H. Hammouri, P. Kabore, S. Othman et J. Biston, *Failure diagnosis and nonlinear observer. Application to a hydraulic process*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 339, pp. 455-478, 2002
- [Häre 97] M. HÄrefors, *Application of  $H_\infty$  robust control to the RM12 jet engine*, Control Engineering Practice, Vol. 5 (9), pp. 1189-1201, 1997.
- [Hoja 00] M. Hojati et S. Gazor, *Hybrid Adaptive Fuzzy Identification and Control of Nonlinear Systems*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 10 (2), pp. 198-210, 2002.
- [Hou 92] M. Hou et P. C. Mtiler, *Design of observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, pp. 871, 1992.
- [Hua 04] C. Hua, F. Li et X. Guan, *Observer-based adaptive control for uncertain time-delay systems*, Information Sciences, 2004. (Article in press).
- [Hube 85] P. Huber, *Projection pursuit (with discussion)*, Ann. Statist. 13, pp. 435-475, 1985.
- [Iser 93] R. Isermann et M. Ulieru, *Integrated fault detection and diagnosis*, IEEE Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 1, pp. 743-748, 1993.
- [Isla 03] M. S. Islam, I. Husain, R. J. Veillette et C. Batur, *Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems*, IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 11 (3), pp. 383-389, 2003.
- [Jaco 91] R. A. Jacobs, M. I. Jordan, J. S. Nowlan et G. E. Hinton, *Adaptive of local experts*, Neural Computation, Vol. 6, pp. 181-214, 1991.
- [Jadb 99] A. Jadbabaie, *A reduction in conservatism in stability and  $L_2$  Gain analysis of T-S fuzzy systems via Linear matrix inequalities*, IFAC., 14th triennial World congress, Beijing, P.R. China. pp. 285-289, 1999.
- [Jian 00] G. P. Jiang, S. P. Wang ete W. Z. Song, *Design of observer with intergrators for linear systems with unknown input disturbances*, Electronics Letters, Vol. 36 (13), pp. 1168-1169, 2000.
- [Jian 02] Bin Jianga et J. L. Wang, *Actuator fault diagnosis for a class of bilinear systems with uncertainty*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 339, pp. 361-374, 2002.
- [Joha 03] T. A. Johansen et R. Babuska, *Multiobjective Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 11 (6), pp. 847-860, 2003.
- [Joha 00] Tor A. Johansen, R. Shorten et R. Murray-Smith, *On the Interpretation and Identification of Dynamic Takagi-Sugeno Fuzzy Models*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 8 (3), pp. 297-312, 2000.

- 
- [Joha 98] M. Johansson, A. Rantzer et K. Arzen, *Piecewise quadratic stability for affine Sugenô systems*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Vol. 1, pp. 55-60, 1998.
- [Joha 93] T. A. Johansen et A. B. Foss, *Constructing NARMAX using ARMAX*, International Journal of Control, Vol. 58 (5), pp. 1125-1153, 1993.
- [Joha 92] T. A. Johansen et A. B. Foss, *Non linear local model representation for adaptive systems*. IEEE International Conference on Intelligent control and instrumentation, Vol. 2, pp. 677-682, 1992.
- [John 75] C. D. Johnson, *Observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs*, International Journal of Control, Vol. 21, pp. 825-831, 1975.
- [Joo 02] M. G. Joo et J. S. Leeb, *Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 130, pp. 175-188, 2002.
- [Kalm 60] R. E. Kalman et J. E. Betram, *Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov -I : Continuous-time system*, ASME journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 371-393, 1960.
- [Karm 84] N. Karamarkar, *A new polynomial time algorithm for linear programming*, Combinatorica, Vol. 4 (4), pp. 373-395, 1984.
- [Khal 96] H. K. Khalil, *Nonlinear system*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J. 07458, 1996.
- [Kimm 05] F. Kimmich, A. Schwarte et R. Isermann, *Fault detection for modern Diesel engines using signal- and process model-based methods*, Control Engineering Practice, Vol. 13, pp. 189-203, 2005.
- [Knoc 86] L. Knockaert, *A recursive algorithm for linear system identification*, IEEE, Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, Vol. 34 (3), pp. 492-498, 1986.
- [Koba 82] N. Kobayashi and T. Nakamizo, *An observer design for linear systems with unknown inputs*, International Journal of Control, Vol. 35, pp. 605-619, 1982.
- [Koen 02] D. Koenig et S. Mammar, *Design of Proportional-integral observer for unknown input descriptor systems*, IEEE, Trans. on Automatic Control, Vol. 47 (12), pp. 2057-2062, 2002.
- [Koen 01] D. Koenig et S. Mammar, *Design of a class of reduced order unknown inputs nonlinear observer for fault diagnosis*, American Control Conference, Vol. 3, pp. 2143-2147, 2001.
- [Kudv 80] P. Kudva, N. Viswanadham et A. Ramakrishna, *Observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Trans. on Automatic Control Vol. 25 (1), pp. 113-115, 1980.

- [Leto 57] A. M. Letov, *Conditionally stable control systems (on a class of optimal control systems)*, Automat. Remote contr., n°. 7, pp. 649-664, 1957.
- [Lewi 86] F. L. Lewis, *A survey of linear singular systems*, Circuits Systems Signal Process, Vol. 5, pp. 3-36, 1986.
- [Lich 61] W. Lichtenbergert, *A technique of linear system identification using correlating filters*, IEEE, Trans. on Automatic Control, Vol. 6 (2), pp. 183-199, 1961.
- [Lien 04] C. H. Lien, *An efficient method to design robust observer-based control of uncertain linear systems*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 158, pp. 29-44, 2004.
- [Liu 02] C. S. Liu et H. Peng, *Inverse-dynamics based state and disturbance observers for linear time-invariant systems*, Journal of Dynamic System, Measurement, and Control, Vol. 124, 375-381, 2002.
- [Ljun 87] L. Ljung, *System identification : theory for the user*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
- [Luen 02] Z. Zhu et H. Lueng, *Identification of linear systems driven by chaotic signals using nonlinear prediction*, IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 49 (2), pp. 170-180, 2002.
- [Luen 64] D. G. Luenberger, *Observing the state of a linear system*, IEEE Trans. Mil. Electron., ME-8, pp. 74, 1964.
- [Luen 63] D. G. Luenberger, *Determining the state of the linear system with observers of low dynamic order*, Ph.D. dissertation, Departement of Elec. Engrg., Stanford University, California, 1963.
- [Lyap 07] A. M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. 9, pp. 203-474, 1907 (traduction en français du mémoire Russe, Obshchaya Zadacha Ustoichivosti dvizheniya, Kharkov, 1892, et d'une note, Comm. Soc. Math Kharkov, Vol. 3, pp. 265-272, 1893).
- [Lyub 93] L. M. Lyubchik et Y. T. Kostenko, *The output control of multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances - The inverse model approach*, ECC'93, pp. 1160-1165, Groningen, The Netherlands, 1993.
- [Ma 98] X. J. Ma, Z. Q. Sun et Y. Y. He, *Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer*, IEEE Trans. of Fuzzy Systems, Vol. 9 (1), pp. 41-51, 1998.
- [Magn 91] J. F. Magni et P. Mouyon, *A generalized approach to observers for fault diagnosis*, Proc. of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, Vol. 3, pp. 2236-2241, England, 1991.

- 
- [Mand 98] D. Mandel, *Diagnostic à base de redondance analytique application à un réseau urbain de distribution d'eau potable*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, 1998.
- [Maqu 00] J. Ragot et D. Maquin, *Diagnostic des systèmes linéaires*, Hermès Science Publication, 2000.
- [Maqu 94] D. Maquin, B. Gaddouna et J. Ragot, *Estimation Of Unknown Inputs In Linear Systems*, American Control Conference, Vol. 1, pp. 1195-1197, 1994.
- [Marc 02] V. C. Marcelo, L. Aguirre et R. Saldanha, *Using Steady-State Prior Knowledge to Constrain Parameter Estimates in Nonlinear System Identification*, IEEE Trans. on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 49 (9), pp. 1376-1381, 2002.
- [Marc 99] C. M. Marcelo Teixeira et H. Stanislaw, *Stabilising controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models*, IEEE Trans. of Fuzzy Systems, Vol. 7 (2), pp. 133-142, 1999.
- [Masl 56] V. A. Maslennikov, *High-quality control of neutral plants by means of an astatic controller*, Automat. Remote Contr., n°. 2, 1956.
- [Medi 71] J. S. Meditch et G. H. Hostetter, *Observers for systems with unknown and inaccessible inputs*, International Journal of Control, Vol. 19, pp. 637-640, 1971.
- [More 01] J. Moreno, *Quasi-Unknown input observers for linear systems*, IEEE Conference on Decision and Control, pp. 732-737, 2001.
- [More 01'] J. Moreno, *Existence of unknown input observers and feedback passivity for linear systems*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 3366-3371, 2001.
- [More 00] J. Moreno, *Unknown input observers for SISO nonlinear systems*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 790-801, 2000.
- [Morè 00] Y. Morère, *Mise en oeuvre de lois de commandes pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*, Doctorat de l'université de Valenciennes et du Haut Cambrésis, Lille, 2000.
- [Muel 71] Mueller et G. S, *Linear model of a 2-shaft turbojet and its properties*, Institution of Electrical Engineers, pp. 813-815, 1971.
- [Murr 97] R. Murray-Smith, *Multiple model approaches to modelling and control*, Taylor and Francis, 1997.
- [Mull 99] M. Hou et P. C. Muller, *Observer design for descriptor systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, pp. 164-169, 1999.

- [Nare 89] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy, *Stable adaptive systems*, Prentice Hall Information and System Sciences Series, N. J. 07632, 1989.
- [Nest 94] Y. Nesterov et J. Balakrishnan, *A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39 (12), pp. 2469-2471, 1994.
- [Newm 70] M. M. Newmann, *Specific optimal control of the linear regulator using a dynamical controller based on the minimal-order observer*, International Journal of Control, Vol. 12, pp. 33-48, 1970.
- [O'Rei 83] J. O'Reilly, *Observer for linear system*, Richard Bellman, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 140, Academic Press, New York, 1983.
- [Ostr 56] G. M. Ostrovsky, *Application of nonlinear correction to control systems of the second order*, Automat. Remote Contr., n°. 11, 1956.
- [Palm 99] R. Palm et D. Driankov, *Towards a systematic analysis of fuzzy observer*, International Conference of the North American, Fuzzy Information Processing Society, pp. 179-183, 1999.
- [Palm 00] R. Palm et P. Bergstern, *Sliding mode observer for a Takagi Sugeno fuzzy system*, The Ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 2, pp. 665-670, 2000.
- [Park 81] P. C. Parks et V. Hahn, *Stabilitätstheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [Park 01] B. J. Park, W. Pedrycz et S. K. Oh, *Identification of fuzzy models with the aid of evolutionary data granulation*, IEE Proc. Control Theory Application, Vol. 148 (5), pp. 406-418, 2001.
- [Patt 98] R. J. Patton, J. Chen et C. J. Lopez-Toribio, *Fuzzy observer for nonlinear dynamic systems fault diagnosis*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 84-89, 1998.
- [Patt 97] R. J. Patton et J. Chen, *Observer-based fault detection and isolation : Robustness and applications*, Control Engineering Practice, Vol. 5 (5), pp. 671-682, 1997.
- [Patt 96] R. J. Patton et J. Chen, *Neural networks in nonlinear dynamic systems fault diagnosis*, Engineering simulation, Vol. 13 (6), pp. 905-924, 1996.
- [Plam 04] A. Plamen et D. P. Filev, *An Approach to Online Identification of Takagi-Sugeno Fuzzy Models*, IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 34 (1), pp. 484-498, 2004.
- [Raju 91] G.V.S. Raju, J. Zhou et R.A. Kisner, *Hierarchical fuzzy control*, International Journal of Control, Vol. 54, pp. 1201-1216, 1991.

- 
- [Raym 76] T. S. Raymond, *Observer steady-state errors induced by errors in realization*, IEEE Trans. on Automatic Control, pp. 280-281, 1976.
- [Ren 03] X. M. Ren, A. B. Rad, P. T. Chan et Wai Lun Lo, *Identification and Control of Continuous-Time Nonlinear Systems via Dynamic Neural Networks*, IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol. 50 (3), pp. 478-486, 2003.
- [Rote 95] F. Rotella et P. Borne, *Théorie et pratique du calcul matriciel*, Editions Technip, 1995.
- [Saif 93] M. Saif et Y. Guan, *A new approach to robust fault detection and identification*, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 29 (3), pp. 685-695, 1993.
- [Sark 84] K. T. Sarkar, A. S. Dianat et D. D. WEINER, *A discussion of various approaches to the linear system identification problem*, IEEE, Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing, Vol. 32 (3), pp. 654-656, 1984.
- [Savy 03] A. Savy, *Diagnostic de défauts capteurs sur turboréacteur*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, 2003.
- [Shao 00] T. Shaocheng et T. Yiqian, *Analysis and design of fuzzy robust observer for uncertain nonlinear systems* IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 2, pp. 993-996, 2000.
- [Schn 96] H. Schneider et P. M. Frank, *Observer-based supervision and fault detection in robots using nonlinear and fuzzy logic residual evaluation*, IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 4 (3), pp. 274-282, 1996.
- [Schn 94] H. Schneider et P. M. Frank, *Fuzzy logic based threshold adaptation for fault detection in robots*, IEEE Conference on Control Applications, pp. 1127-1132, 1994.
- [Shaf 02] B. Shafai, C. T. Pi et S. Nork, *Simultaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral observers*, American Control Conference, Vol. 2, pp. 1647-1649, 2002.
- [Shen 04] S. Xu, J. Lu, S. Zhou et C. Yang, *Design of observer for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with time delay*, Journal of the Franklin Institute, pp. 295-308, 2004.
- [Shen 03] S. F. Lin et A. P. Wang, *Unknown input observers for singular systems designed by eigenstructure assignment*, Journal of the Franklin Institute, pp. 43-61, 2003.
- [Soff 96] D. Soffker, *Fault detection using proportional integral observers for application to elastic mechanical structures*, Proceeding of the Multiconference CESA IMACS, symposium on control, optimization and supervision, Lille, France, pp. 522-527, 1996.

- [Stot 01] A. Stotsky et I. Kolmanovsky, *Simple unknown input estimation techniques for automotive applications*, American Control Conference, pp. 3312-3317, 2001.
- [Suge 88] M. Sugeno et G. T. Kang, *Structure identification of fuzzy model*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 28 (1), pp. 15-33, 1988.
- [Taka 88] M. Takagi et M. Sugeno, *Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control*, IEEE Trans. on Systems Man and cybernetics, Vol. 15 (1), pp. 116-132, 1988.
- [Tan 02] C. P. Tan et C. Edwards, *Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensor faults*, Automatica, Vol. 38, pp. 1815-1821, 2002.
- [Tana 01] K. Tanaka et T. Hori et H. O. Wang, *A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design*, IEEE American Control Conference, Vol. 6, pp. 4790-4795, 2001.
- [Tana 98] K. Tanaka, T. Ikeda et Y. Y. He, *Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based design*, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 6 (1), pp. 250-256, 1998.
- [Tana 96] K. Tanaka, T. Ikeda et H. O. Wang, *Robust stabilisation of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stability*, IEEE Trans. Fuzzy Systems, Vol. 4 (1), pp. 1-13, 1996.
- [Tana 92] K. Tanaka et M. Sugeno, *Stability and design of fuzzy control systems*, Fuzzy Set and Systems, Vol. 45 (2), pp. 135-156, 1992.
- [Tont 01] C. Tontiruttananon et J. K. Tugnait, *Identification of closed-loop linear systems via cyclic spectral analysis given noisy input-output time-domain data*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 46 (2), pp. 258-275, 2001.
- [Trev 03] L. C. Trevino et S. Olcmen, *Use of soft computing technologies for rocket engine control*, IEEE Digital Avionics Systems Conference, Vol. 1, pp. 3.A.1.1-3.A.1.7, 2003.
- [Utki 92] V. I. Utkin, *Sliding modes in control optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Utki 81] V. I. Utkin, *Principles of identification using sliding regimes*, Soviet Trans. on Automatic Control, Vol. 26, pp. 271-272, 1981.
- [Utki 77] V. I. Utkin, *Variable structure systems with sliding modes*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 22 (22), pp.212-222, 1977.
- [Umen 01] T. Umeno et K. Asano, *Observer based estimation of parameter variations and its application to tyre pressure diagnosis*, Control Engineering Practice, Vol. 9, pp. 639-645, 2001.
- [Valc 99] M. E. Valcher, *State observers for discrete-time linear systems with unknown inputs*, IEEE, Trans. on Automatic Control, Vol. 44 (2), pp. 397-401, 1999.

- 
- [Walc 88] B. L. Walcott et S. H. Zak, *Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 18, pp. 88-104, 1988.
- [Walc 87] B. L. Walcott, M. J. Corless et S. H. Zak, *Comparative study of nonlinear state observation*, International Journal of Control, Vol. 45, pp. 2109-2132, 1987.
- [Walc 86] B. L. Walcott, M. J. Corless et S. H. Zak, *Observation of dynamical systems in the presence of bounded nonlinearities/uncertainties*, IEEE Conference on Decision and Control, pp. 961-966, 1986.
- [Wang 04] S. Wang et Z. Jiang, *Valve fault detection and diagnosis based on CMAC neural networks*, Energy and Buildings, Vol. 36, pp. 599-610, 2004.
- [Wang 03] H. Wang, J. Wang, J. Liu et J. Lam, *Iterative LMI approach for robust fault detection observer design*, Vol. 2, pp. 1974-1979, 2003.
- [Wang 02] W. Wang et Y. Zou, *The Detectability and Observer Design of 2-D Singular Systems* Weiqun Wang and Yun Zou, IEEE Trans. on Circuit and Systems, pp. 698-703, 2002.
- [Wang 98] L. X. Wang, *Universal approximation by hierarchical fuzzy systems*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 93, pp. 223-230, 1998.
- [Wang 94] H. Wang, M. Brown et C.J. Harris, *Fault detection for a class of unknown nonlinear system via associative memory networks*, IMechE, Journal of Systems and Control Engineering, Vol. 208 (2), pp. 101-107, 1994.
- [Wang 75] S. H. Wang, E. J. Davison et P. Dorato, *Observing the states of systems with unmeasurable disturbances*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 20, pp.716-717, 1975.
- [Wata 82] K. Watanabe et D. M. Himmelblau, *Instrument fault detection in systems with uncertainties*, International Journal of System Sci., Vol. 13, pp. 137, 1982.
- [Will 68] H. F. Williams, *A solution of the multivariable observer for linear time varying discrete systems*, Rec. 2nd Asilomar Conf. Circuit and systems, pp. 124-129, 1968.
- [Wei 00] C. Wei et L. X. Wang, *A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems*, Information Sciences, Vol. 123, pp. 241-248, 2000.
- [Wonh 67] W. M. Wonham, *Optimal stationary control of linear system with state dependent noise*, SIAM Journal of Control, 1967.
- [Wu 04] X. Wu et G. Champion, *Fault detection and isolation of systems with slowly varying parameters-simulation with a simplified aircraft turbo engine model*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 18 (2), pp. 353-366, 2004.

- [Wu 99] H. C. Wu et C. N. Lu, *Automatic fuzzy model identification for short-term load forecast*, IEE Generation, Transmission and Distribution, Vol. 146 (5), pp. 477-482, 1999.
- [Xion 03] Y. Xiong et M. Saif, *Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design*, Automatica, Vol. 39, pp. 1389-1398, 2003.
- [Xion 01] Y. Xiong et M. Saif, *Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 46 (12), pp. 2012-2017, 2001.
- [Xion 00] Y. Xiong et M. Saif, *Sliding-mode observer for uncertain systems. I Linear systems case*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 316-321, 2000.
- [Yang 88] F. Yang et R. W. Wilde, *Observers for linear systems with unknown inputs*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 33, pp. 677, 1988.
- [Yeu 02] T. K. Yeu et S. Kawaji, *Sliding mode observer based fault detection and isolation in descriptor systems*, American Control Conference, pp. 4543-4548, 2002.
- [yeu 01] T. K. Yeu et S. Kawaji, *Fault detection and isolation for descriptor systems using sliding mode observer*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 596-597, 2001.
- [Zade 65] L. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information Control, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [Zak 90] S. H. Zak et B. L. Walcott, *State observation of nonlinear control systems via the method of Lyapunov*, Deterministic Control of Uncertain Systems, Edited by A. S. I. Zinober (London, U. K. : Peter Peregrinus), 1990.
- [Zasa 00] M. Zasadzinski, E. Magarotto et M. Darouach, *Unknown input reduced order observer for singular bilinear systems with bilinear measurements*, IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 796-801, 2000.
- [Zhan 03] T. Zhang et M. Guay, *Adaptive control for a class of second-order nonlinear systems with unknown input nonlinearities*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part B, Vol. 33 (1), pp. 143-149, 2003.
- [Zhan 98] H. Y. Zhang, C.W. Chan, K. C. Cheung et H. Jing, *Sensor fault diagnosis systems with unknown nonlinearity using neural network based nonlinear observers*, IEE UKACC International Conference on Control, Vol. 2, pp. 981-986, 1998.
- [Zhen 01] W. X. Zheng, *Parametric identification of linear systems operating under feedback control*, IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 48 (4), pp. 451-458, 2001.
- [Zhu 00] Zhiwen Zhu et Henry Leung, *Adaptive Identification of Nonlinear Systems with Application to Chaotic Communications*, IEEE Trans. on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Applications, Vol. 47 (7), pp. 1072-1080, 2000.

---

[Zolg 96] A. Zolghadri, D. Henry et M. Monson, *Design of nonlinear observer for fault diagnosis : A case study*, Control Engineering Practice, Vol. 4 (11), pp. 1535-1544, 1996.