INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique

Validation de données
Bilan bilinéaire

Didier Maquin – Didier.Maquin@ensem.inpl-nancy.fr

On se propose de mettre en œuvre, en utilisant Matlab©, les techniques d'équilibrage de bilans de processus décrits par des équations bilinéaires.

La figure 1 représente un processus de traitement de minerais constitué de 4 unités de traitement et de 9 flux de matière. Chaque flux est caractérisé par son débit massique et sa concentration en cuivre. La table 1 regroupe les mesures et les variances de ces différentes variables.

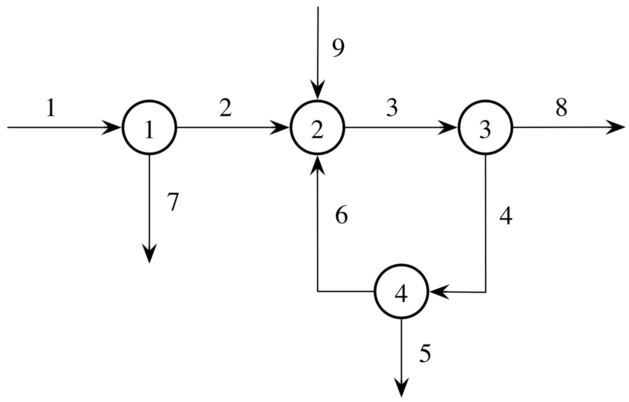

Fig. 1 – Processus de flotation chimique

Voie	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Débit	149	150	130	100	100	9	49	49	20
Variance	200	200	170	100	80	1	20	8	4
% Cu	8	9	9.2	11	8	10	6	13.3	10
Variance	1	1	1	2	1	1	1	2	1

Tab. 1 – Mesures et variances

Les équations du modèle peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} MX^* &= 0 \\ M(X^* \otimes Y^*) &= 0 \end{aligned}$$

où M est la matrice d'incidence du graphe du processus, X^* le vecteur des grandeurs vraies de débit et Y^* le vecteur des grandeurs vraies des concentrations. L'opérateur $\otimes$ effectue le produit éléments par éléments de deux vecteurs.

Travail demandé

- Ecrire un programme MATLAB© résolvant ce problème d'équilibrage de bilan en mettant en oeuvre, d'une part, la technique de linéarisation des contraintes et, d'autre part, la technique s'appuyant sur un changement de variables.

  On rappelle que le problème d'estimation des grandeurs vraies consiste à chercher le minimum par rapport à X^* et Y^* du critère :

$$\Phi = \|X - X^*\|^2_{V_X^{-1}} + \|Y - Y^*\|^2_{V_Y^{-1}}$$

$$\text{sous les contraintes : } \left\{ \begin{array}{l} MX^* = 0 \\ M(X^* \otimes Y^*) = 0 \end{array} \right.$$

- Comparer les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes.
- Imaginer une procédure de détection de défauts de mesure. Sans automatiser de manière informatique la procédure proposée, montrer sa pertinence en relatant quelques résultats de simulation.

Rappel sur la méthode de résolution par linéarisation des équations de contrainte

La solution peut être obtenue en linéarisant les contraintes autour d'une solution provisoire et en résolvant le problème résultant qui est un problème d'optimisation quadratique sous contrainte linéaire égalité. La solution obtenue est alors meilleure que la solution précédente et l'on reconduit le calcul en linéarisant autour de cette nouvelle solution. La procédure de résolution est donc itérative.

Soient $\hat{X}^{(k)}$ et $\hat{Y}^{(k)}$, la solution temporaire obtenue à l'itération numéro k. Posons :

$$\begin{array}{rcl} \hat{X}^{(k)} & = & \hat{X}^{(k-1)} + \Delta\hat{X} \\ \hat{Y}^{(k)} & = & \hat{Y}^{(k-1)} + \Delta\hat{Y} \end{array}$$

Les contraintes s'expriment alors en fonction de $\Delta\hat{X}$ et $\Delta\hat{Y}$:

$$\begin{array}{rcl} M\hat{X}^{(k)} & = & 0 \\ M(\hat{X}^{(k-1)} + \Delta\hat{X}) \otimes (\hat{Y}^{(k-1)} + \Delta\hat{Y}) & = & 0 \end{array}$$

En négligeant les termes du second ordre, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} M\hat{X}^{(k)} & = & 0 \\ M\hat{X}^{(k-1)} \otimes \hat{Y}^{(k-1)} + M\hat{X}^{(k-1)} \otimes \Delta\hat{Y} + M\Delta\hat{X} \otimes \hat{Y}^{(k-1)} & = & 0 \end{array}$$

ou encore, en fonction de $\hat{X}^{(k)}$ et $\hat{Y}^{(k)}$:

$$\begin{array}{rcl} M\hat{X}^{(k)} & = & 0 \\ M\hat{X}^{(k)} \otimes \hat{Y}^{(k-1)} + M\hat{X}^{(k-1)} \otimes \hat{Y}^{(k)} & = & M\hat{X}^{(k-1)} \otimes Y^{(k-1)} \end{array}$$

En notant L_u la matrice diagonale construite en plaçant le vecteur u sur sa diagonale, remarquons tout d'abord que $M(X \otimes Y) = ML_XY = ML_YX$. Posons alors :

$$U = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_X & 0 \\ 0 & V_Y \end{pmatrix}$$

et à l'itération numéro k,

$$\hat{U}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{X}^{(k)} \\ \hat{Y}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad M^{(k)} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ ML_{\hat{Y}^{(k-1)}} & ML_{\hat{X}^{(k-1)}} \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ M\hat{X}^{(k-1)} \otimes \hat{Y}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Le problème consiste à chercher le minimum par rapport à $\hat{U}^{(k)}$ de :

$$\Phi^{(k)} = \|U - \hat{U}^{(k)}\|^2_{V^{-1}}$$

$$\text{sous la contrainte : } M^{(k)}\hat{U}^{(k)} = b^{(k)}$$

La solution s'exprime sous la forme suivante :

$$\hat{U}^{(k)} = P^{(k)}U + V(M^{(k)})^T \left(M^{(k)}V(M^{(k)})^T\right)^{-1} b^{(k)}$$

avec $P^{(k)}$ matrice de projection telle que

$$P^{(k)} = I - V(M^{(k)})^T \left(M^{(k)}V(M^{(k)})^T\right)^{-1} M^{(k)}$$

Sous réserve de convergence, la suite des vecteurs $\hat{U}^{(k)}$ tend rapidement vers la solution optimale. Cette méthode, très générale, conduit à résoudre, à chaque étape, un problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires. Par contre, d'un point de vue pratique, elle nécessite la manipulation d'un volume important de données et le calcul de l'inverse de matrice qui apparaît dans la matrice de projection devient prohibitif pour des réseaux de grande dimension. Pratiquement, l'estimation s'obtient selon la procédure itérative suivante :

1. Choix d'une estimation initiale $\hat{U}^{(0)}$ (on choisit le plus souvent $\hat{U}^{(k)} = U$)
2. $\hat{U} = \hat{U}^{(0)}$
   Tant que la solution $\hat{U}$ n'est pas satisfaisante ($\|\hat{U}^{(k)} - \hat{U}^{(k-1)}\| >$ seuil)
3. Calcul de la matrice $M^{(k)}$ et du vecteur $b^{(k)}$
4. Calcul de l'estimation $\hat{U}^{(k)}$, $\hat{U} = \hat{U}^{(k)}$
   Fin Tant que
5. La solution du problème est $\hat{U}$.

Rappel sur la méthode de résolution approchée par changement de variables

Cette méthode ramène la résolution du problème précédent à la résolution de deux problèmes linéaires, en introduisant les vecteurs de débits partiels.

Pour cela, on pose :

$$W = X \otimes Y \quad \text{et} \quad \hat{W} = \hat{X} \otimes \hat{Y}$$

où W et $\hat{W}$ sont les vecteurs représentant les mesures et les estimées approchées des débits partiels. Ce changement de variable provoque un découplage des variables initiales ; la solution obtenue sera sous-optimale puisqu'elle néglige volontairement la dépendance entre X et W.

Les mesures des débits partiels W sont inconnues ainsi que leurs variances V_W. Cependant, une valeur approchée de V_W peut être calculée à partir de la définition de W :

$$V_W = L_X V_Y L_X + L_Y V_X L_Y$$

où L_X et L_Y sont les matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont respectivement les composantes des vecteurs X et Y.

Les variables X et Y étant découplées, le problème devient équivalent à la recherche du minimum, par rapport à X^* de :

$$\Phi_X = \|X - X^*\|^2_{V_X^{-1}}$$

sous la contrainte : $MX^* = 0$

et celle, par rapport à W^*, du minimum de :

$$\Phi_W = \|W - W^*\|^2_{V_W^{-1}}$$

sous la contrainte : $MW^* = 0$

Les solutions de ces sous-problèmes sont données par :

$$\hat{X} = P_X X \quad \text{et} \quad \hat{W} = P_W W$$

avec

$$P_X = I - V_X M^T (M V_X M^T)^{-1} M \quad \text{et} \quad P_W = I - V_W M^T (M V_W M^T)^{-1} M$$

Finalement, les composantes du vecteur $\hat{Y}$ s'obtiennent en divisant les composantes de $\hat{W}$ par celles de même rang de $\hat{X}$; plus généralement, $\hat{Y}$ est donné par :

$$\hat{Y} = L_{\hat{X}}^{-1} \hat{W}$$

Cette technique donne une solution approchée analytique simple à mettre en oeuvre. Elle peut être une bonne initialisation pour une méthode itérative conduisant à la solution optimale. Cette méthode approchée se généralise au cas des contraintes de type multilinéaire.