INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique

Validation de données
Bilan non linéaire

Didier Maquin – Didier.Maquin@ensem.inpl-nancy.fr

On se propose, pour cette séance de TD, de mettre en œuvre, en utilisant Matlab©, les techniques d'équilibrage de bilans non linéaires basées sur la linéarisation des contraintes.

On considère le système de cinq équations non linéaires suivant :

$$
\begin{aligned}
f_1 = &\quad x_1 x_2^* + x_5^* - a && = 0 \\
f_2 = &\quad \exp(-x_1^*) - \exp(-x_2^*) - 0.5 && = 0 \\
f_3 = &\quad x_1^*(x_3^*)^2 - x_6^* && = 0 \\
f_4 = &\quad (x_4^*)^3 - x_1^* x_3^* && = 0 \\
f_5 = &\quad x_5^*(x_3^*)^2 + x_1^*/x_4^* - x_6^* && = 0
\end{aligned}
$$

Le paramètre a est égal à 5.5254. L'ensemble de ces contraintes sera noté $F(X^*) = 0$ où x_i^* (respectivement f_i) sont les composantes de X^* (resp. $F(X^*)$). Les mesures x_i, $i = 1, \ldots, 6$, des variables x_i^* sont directes, c'est-à-dire que :

$$x_i = x_i^* + \varepsilon_i$$

Les erreurs de mesures ε_i sont exprimées en valeurs relatives sous la forme d'un pourcentage p_i de la grandeur mesurée. On assimile alors ces erreurs à des variables aléatoires normales centrées d'écarts-types respectifs e_i définis par :

$$e_i = \frac{p_i}{200} x_i$$

Les précisions relatives p_i des mesures sont consignées dans le tableau 1.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
5	8	2	2	5	6

Tab. 1 – Précisions relatives des mesures

Le fichier de données Matlab© `donnees.mat`, qui peut être chargé en mémoire par la commande `load`, contient une matrice de 6 lignes (correspondant aux six variables) et de 20 colonnes (correspondant à 20 jeux de mesures). Le but de l'exercice est de "réconcilier" (néologisme issu de l'anglo-saxon "reconciliation") ces données par rapport au modèle fourni. Dans un premier temps, on répondra aux questions suivantes en ne considérant qu'une seule campagne de mesure (la première). On étendra ensuite les traitements à l'ensemble des campagnes.

- En remplaçant les valeurs vraies x_i^* par leurs mesures x_i dans les équations du système, calculer les résidus d'équations r_i. Pouvez-vous tirer des conclusions à propos de la cohérence des différentes mesures ?
- Etablir une table d'occurrence des variables au sein des différentes équations. Comment cette table peut-elle vous aider à localiser d'éventuels défauts de mesures ?

- Etablir les expressions $x_5^* f_3 - x_1^* f_5$ et $f_3 + x_3^* f_4$. Celles-ci présentent-elles un intérêt particulier pour la localisation des défauts de mesures ?
- Quelle pourrait être la stratégie à adopter pour avoir la capacité de détecter de manière systématique ces erreurs ?
- L'amplitude des résidus peut-elle être facilement analysée d'un point de vue statistique en s'inspirant du cas linéaire ?

On procède à une réconciliation complète des mesures. Pour cela, on cherche un estimateur $\hat{X}$ des grandeurs vraies X^* qui minimise le critère quadratique :

$$\phi = \frac{1}{2}\|X - X^*\|^2_{V^{-1}}$$

sous les contraintes $F(X^*) = 0$

La solution peut être obtenue à l'aide d'un calcul itératif en linéarisant les contraintes autour d'une solution approchée. On rappelle qu'à l'étape numéro $i+1$ de ce calcul, l'estimation $\hat{X}_{i+1}$ s'exprime, en fonction des mesures X et de la solution $\hat{X}_i$ obtenue à l'itération précédente, de la manière suivante :

$$\hat{X}_{i+1} = \left(I - VG_i^T(G_iVG_i^T)^{-1}G_i\right)X + VG_i^T(G_iVG_i^T)^{-1}(G_i\hat{X}_i - F_i)$$

avec

$$G_i = \left.\frac{\partial F(X)}{\partial X^T}\right|_{X=\hat{X}_i} \quad \text{et} \quad F_i = F(\hat{X}_i)$$

- Ecrire un programme MATLAB© mettant en œuvre cette méthode de résolution.
- Proposer un test d'arrêt de ce calcul itératif.
- Mémoriser la valeur du critère résiduel à chaque itération du calcul et tracer son évolution après l'obtention de la solution.
- Quel commentaire pouvez-vous faire sur la nature de cette convergence ?

On se propose maintenant d'étudier l'influence des "mesures manquantes" sur la convergence de la méthode proposée.

- En affectant une variance élevée à la mesure x_1, simuler l'absence de mesure de cette grandeur (dans ce cas, ne disposant pas de x_1, on n'oubliera pas de ne pas utiliser celle-ci dans l'initialisation de la solution ; on fixera la première composante du vecteur $\hat{X}_0$ à zéro).
- Cette 'mesure manquante" a-t-elle une influence sur la convergence de la méthode et sur la solution finale ?
- A partir de la situation précédente, simuler maintenant, de la même manière que précédemment, l'absence de la mesure x_3. La méthode converge-t-elle encore ?
- Comment pourriez-vous initialiser la première estimation de x_3 en tenant compte des équations complémentaires générées afin d'aider à la localisation ?
- Cette initialisation permet-elle l'obtention d'une solution ?