INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique

Validation de données
Bilan linéaire

Didier Maquin – Didier.Maquin@ensem.inpl-nancy.fr

On se propose, pour cette séance de TD, de mettre en œuvre, en utilisant Matlab©, les techniques d'équilibrage de bilan et de détection-localisation de défauts de mesures.

On considère le processus décrit par les quatre équations linéaires suivantes :

$$\begin{array}{ll} f_1 = & x_1^* + x_2^* - x_3^* - x_4^* & = 0 \\ f_2 = & x_3^* + x_6^* - x_7^* & = 0 \\ f_3 = & x_7^* - x_2^* - x_8^* & = 0 \\ f_4 = & x_4^* - x_6^* - x_5^* & = 0 \end{array} \tag{1}$$

Les mesures x_i, $i = 1, \ldots, 8$, des variables x_i^* sont directes, c'est-à-dire que :

$$x_i = x_i^* + \varepsilon_i$$

Les erreurs de mesures ε_i sont supposées être des réalisations de variables aléatoires normales centrées et de variances connues v_i (écarts-types e_i). Les écarts-types des mesures sont consignés dans le tableau 1.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
2	5	2	4	1	3	6	1

Tab. 1 – Ecarts-types des mesures

Le fichier de données Matlab© `flux.mat`, qui peut être chargé en mémoire par la commande `load`, contient une matrice de 8 lignes (correspondant aux huit variables) et de 20 colonnes (correspondant à 20 jeux de mesures). Le but de l'exercice est d'éprouver la consistence des mesures et en particulier de détecter et de localiser les mesures suspectes.

- En remplaçant les valeurs vraies x_i^* par leurs mesures x_i dans les équations du système, calculer les résidus d'équations r_i. Quelle conclusion en déduisez-vous ?
- Sachant que ε_i suit une loi normale centrée de variance connue, quelle est la loi suivie par r_i ? Quelle est la variance $\mathrm{Var}(r_i)$ de r_i ?

On définit les résidus normalisés :

$$r_{Ni} = \frac{r_i}{\sqrt{\mathrm{Var}(r_i)}}$$

- Quelle est la loi suivie par r_{Ni} ?
- Calculer numériquement les résidus normalisés. Au seuil de confiance de 5 %, quels sont les résidus anormalement élevés ? (on rappelle que pour un seuil de confiance de 5 %, l'hypothèse de nullité d'une variable aléatoire normale centrée réduite est acceptée si sa valeur est comprise dans l'intervalle $[-2,\ 2]$).

– A partir de ces informations et en utilisant le fait que chaque résidu est calculé à partir de certaines variables, en déduire alors la ou les mesures suspectes ainsi que les "campagnes de mesures" où ces défauts interviennent.

Pour affiner l'analyse précédente, on agrège les équations du processus 2 à 2. Cette agrégation est effectuée uniquement pour des équations ayant des variables communes. Par exemple, on peut agréger les équations f_1 et f_3 qui ont en commun la variable x_2^* et on obtient alors l'équation notée f_{1+3} définie par :

$$f_{1+3} = x_1^* - x_3^* - x_4^* + x_7^* - x_8^* = 0$$

– Ecrire alors toutes les équations que l'on peut obtenir par ce procédé.

– Calculer, comme précédemment, les résidus d'équations normalisés.

– Localiser alors avec précision la mesure en défaut.

On procède à une réconciliation complète des mesures. Pour cela, on cherche des estimateurs $\hat{x}_i$ des grandeurs vraies x_i^* qui minimisent le critère quadratique :

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \frac{(\hat{x}_i - x_i)^2}{v_i}$$

sous les contraintes écrites pour les grandeurs $\hat{x}_i$.

– Ecrire ce problème d'optimisation de façon matricielle, en définissant la matrice d'incidence M associée au système d'équations, les vecteurs X et $\hat{X}$ des variables et la matrice V de variance-covariance des erreurs de mesure.

– Expliciter analytiquement la solution $\hat{X}$. En déduire l'expression du vecteur des termes correctifs $E = \hat{X} - X$ et sa matrice de variance-covariance.

– Calculer numériquement les composantes du vecteur E ainsi que ses composantes normalisées.

– Peut-on retrouver la mesure en défaut ?

A partir des équations du système, on peut remarquer qu'une variable peut s'expliciter de différentes façons en fonction des autres variables. Ainsi, pour la variable x_2^*, on a :

$$\begin{aligned} x_2^* &= -x_1^* + x_3^* + x_4^* \\ x_2^* &= x_7^* - x_8^* \end{aligned}$$

Ainsi, pour la variable x_2^*, on dispose d'une mesure directe et de deux estimations. Ces deux estimations font intervenir des variables différentes dont on connaît les mesures. La comparaison de cette mesure directe et de ces deux estimations peut être mise à profit pour détecter et localiser certaines grandeurs aberrantes.

– Pour chaque variable du procédé, comparer la mesure directe aux estimations.

– Définir une procédure logique capable de détecter et localiser les mesures suspectes.