Estimation d'état et diagnostic de systèmes à paramètres incertains – Approche intervalle

José Ragot[1], Didier Maquin[1],
Kamel Benothman[2], Mohamed Benrejeb[3]

[1]Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
[2]Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM)
[3]Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT)

STA'06, Hammamet, 17-19 cécembre 2006

Plan de l’exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Différentes structures d'observateur

- Observateur de Luenberger
- Filtre de Kalman
- Observateurs à entrées inconnues
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes non structurées
- Observateurs robustes vis-à-vis d'incertitudes structurées
- Observateurs intervalles

Représentation des incertitudes et hypothèses

- Mesure imprécise

$$\tilde{y} = y + \varepsilon$$

- Hypothèse statistique : loi à support infini

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Hypothèse de bornitude : erreur d'amplitude finie

$$|\ \varepsilon\ | \leq \delta$$

$$\tilde{y} - \delta \leq y \leq \tilde{y} + \delta$$

- Problème de base : estimation de la grandeur vraie à partir de la mesure

Représentation des incertitudes et hypothèses

- Mesure imprécise

$$\tilde{y} = y + \varepsilon$$

- Hypothèse statistique : loi à support infini

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Hypothèse de bornitude : erreur d'amplitude finie

$$\mid \varepsilon \mid \leq \delta$$

$$\tilde{y} - \delta \leq y \leq \tilde{y} + \delta$$

- Problème de base : estimation de la grandeur vraie à partir de la mesure

Représentation des incertitudes et hypothèses

- Mesure imprécise

$$\tilde{y} = y + \varepsilon$$

- Hypothèse statistique : loi à support infini

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y} - y)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Hypothèse de bornitude : erreur d'amplitude finie

$$\mid \varepsilon \mid \leq \delta$$

$$\tilde{y} - \delta \leq y \leq \tilde{y} + \delta$$

- Problème de base : estimation de la grandeur vraie à partir de la mesure

Représentation des incertitudes et hypothèses

- Mesure imprécise

$$\tilde{y} = y + \varepsilon$$

- Hypothèse statistique : loi à support infini

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Hypothèse de bornitude : erreur d'amplitude finie

$$\mid \varepsilon \mid \leq \delta$$

$$\tilde{y} - \delta \leq y \leq \tilde{y} + \delta$$

- Problème de base : estimation de la grandeur vraie à partir de la mesure

- Mesure imprécise

$$\tilde{y} = y + \varepsilon$$

- Hypothèse statistique : loi à support infini

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$p(\tilde{y}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{y}-y)^2}{2\sigma^2}\right)$$

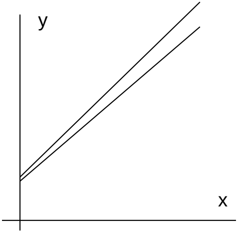
- Hypothèse de bornitude : erreur d'amplitude finie

$$\mid \varepsilon \mid \leq \delta$$

$$\tilde{y} - \delta \leq y \leq \tilde{y} + \delta$$

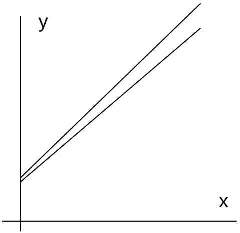
- Problème de base : estimation de la grandeur vraie à partir de la mesure

Caractéristique d'un capteur incertain



$$\begin{array}{rcl} y & = & g\ .\ x + h \\ g & = & 2 + \delta_g, \quad \mid \delta_g \mid \leq 0.1 \\ h & = & 4 + \delta_h, \quad \mid \delta_h \mid \leq 0.3 \end{array}$$

Caractéristique d'un capteur incertain

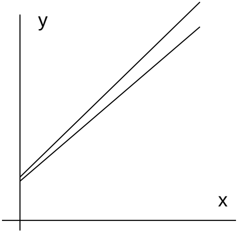


$$\begin{aligned} y &= g \,.\, x + h \\ g &= 2 + \delta_g, \quad \mid \delta_g \mid \leq 0.1 \\ h &= 4 + \delta_h, \quad \mid \delta_h \mid \leq 0.3 \end{aligned}$$

Approche directe

$$\begin{array}{rcl} 1.9 \leq & g & \leq 2.1 \\ 1.9\ x \leq & g \,.\, x & \leq 2.1\ x \qquad x > 0 \\ 3.7 \leq & h & \leq 4.3 \\ 1.9\ x + 3.7 \leq & y & \leq 2.1\ x + 4.3 \\ \dfrac{y - 4.3}{2.1} \leq & x & \leq \dfrac{y - 3.7}{1.9} \end{array}$$

Caractéristique d'un capteur incertain



$$
\begin{aligned}
y &= g \,.\, x + h \\
g &= 2 + \delta_g, \quad |\, \delta_g \,| \leq 0.1 \\
h &= 4 + \delta_h, \quad |\, \delta_h \,| \leq 0.3
\end{aligned}
$$

Approche directe

$$
\begin{array}{rcll}
1.9 \leq & g & \leq 2.1 & \\
1.9\ x \leq & g \,.\, x & \leq 2.1\ x & \quad x > 0 \\
3.7 \leq & h & \leq 4.3 & \\
1.9\ x + 3.7 \leq & y & \leq 2.1\ x + 4.3 & \\
\dfrac{y - 4.3}{2.1} \leq & x & \leq \dfrac{y - 3.7}{1.9} &
\end{array}
$$

Problème : discernabilité de deux grandeurs

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y = x^T\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| \leq \delta_y \qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y \quad = \quad x^T\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \quad |\,\varepsilon_k\,| \leq \ \delta_y \qquad\qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte
  - à partir des mesures $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et la borne des erreurs δ_y.
  - le modèle le plus "précis" est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les plus petites.

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y \quad = \quad x^T\theta, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \qquad |\,\varepsilon_k\,| \leq \;\delta_y \qquad\qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte
  - à partir des mesures $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et la borne des erreurs δ_y.
  - le modèle le plus "précis" est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les plus petites.

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y \quad = \quad x^T\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \quad |\,\varepsilon_k\,| \leq \; \delta_y \qquad\qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte
  - à partir des mesures $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et la borne des erreurs δ_y.
  - le modèle le plus "précis" est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les plus petites.

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y = x^T\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \quad |\,\varepsilon_k\,| \leq \delta_y \qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte
  - à partir des mesures $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et la borne des erreurs δ_y.
  - le modèle le plus "précis" est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les plus petites.

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y = x^T\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \quad |\,\varepsilon_k\,| \leq \delta_y \qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte
  - à partir des mesures $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et la borne des erreurs δ_y.
  - le modèle le plus "précis" est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les plus petites.

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Modèle linéaire en les paramètres

$$y \quad = \quad x^T\theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Mesures avec erreurs additives sur y

$$\tilde{y}_k = y_k + \varepsilon_k, \quad |\,\varepsilon_k\,| \leq \ \delta_y \qquad\qquad k = 1..N$$

- Objectif et contrainte
  - à partir des mesures $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et la borne des erreurs δ_y.
  - le modèle le plus "précis" est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les plus petites.

Ragot J., Maquin D., Adrot O., Parameter uncertainties characterisation for linear models. 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Safeprocess'2006, Bejing, China, Aug.30–Sept.1, 2006.

Comment évaluer les bornes d'un paramètre incertain ?

- Formulation LMI de l'estimation des bornes

$$\tilde{y}_k = x_k^T\theta + \varepsilon_k \quad \Longrightarrow \quad |\, \tilde{y}_k - x_k^T\theta \,| \leq \delta_y \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_k - x_k^T\theta \leq \delta_y \\ -\tilde{y}_k + x_k^T\theta \leq \delta_y \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -x_1^T & -1 \\ \dots & \\ -x_N^T & -1 \\ x_1^T & -1 \\ \dots & \\ x_N^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \delta_y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -\tilde{y}_1 \\ \dots \\ -\tilde{y}_N \\ \tilde{y}_1 \\ \dots \\ \tilde{y}_N \end{pmatrix}$$

- L'identification consiste à déterminer l'ensemble des paramètres consistants avec les mesures et les bornes du bruit ou des perturbations.

- Extension : on peut prendre en compte $\theta \in [\theta^- \;\; \theta^+]$

Système dynamique incertain à représentation intervalle

- Système du premier ordre

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [a].x_k + b.u_k, \quad x_0 \\ y_k &= [c].x_k \end{aligned}$$

- A chaque instant, les valeurs de a et c sont inconnues, mais leurs bornes sont connues. La simulation doit donc être faite en considérant l'état comme un intervalle :

$$\begin{aligned} [x_{k+1}] &= [a].[x_k] + b.u_k \\ [y_k] &= [c].[x_k] \end{aligned}$$

- Si $[a]$ est positif, les deux bornes sont définies par :

$$\begin{cases} x_{k+1}^- &= \frac{1}{2} x_k^- \left((a^- + a^+) - (a^+ - a^-)\mathrm{sgn}(x_k^-) \right) \\ x_{k+1}^+ &= \frac{1}{2} x_k^+ \left((a^- + a^+) + (a^+ - a^-)\mathrm{sgn}(x_k^+) \right) \end{cases}$$

- Cas général : $[x_{k+1}] = [A].[x_k] + [B].[x_k]$

- Système dynamique

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), & x_1(0) = [0.9 \quad 1] \\ x_2(k+1) = [0.7 \quad 0.8] x_1(k) x_2(k), & x_2(0) = [0.5 \quad 0.6] \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

- Bornes sur l'état (modèle)

$$\begin{cases} 0.5 \leq x_1(1) \leq 0.6 \\ 0.315 \leq x_2(1) \leq 0.48 \end{cases}$$

- Mesure

$$y(1) = [0.815 \quad 0.95]$$

$$\Rightarrow 0.815 \leq x_1(1) + x_2(1) \leq 0.95$$

Idée générale : construction d'ensembles admissibles

- Système dynamique

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), & x_1(0) = [0.9 \quad 1] \\ x_2(k+1) = [0.7 \quad 0.8]x_1(k)x_2(k), & x_2(0) = [0.5 \quad 0.6] \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

- Bornes sur l'état (modèle)

$$\begin{cases} 0.5 \leq x_1(1) \leq 0.6 \\ 0.315 \leq x_2(1) \leq 0.48 \end{cases}$$

- Mesure

$$y(1) = [0.815 \quad 0.95]$$

$$\Rightarrow 0.815 \leq x_1(1) + x_2(1) \leq 0.95$$

Idée générale : construction d'ensembles admissibles

- Système dynamique

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), & x_1(0) = [0.9 \quad 1] \\ x_2(k+1) = [0.7 \quad 0.8] x_1(k) x_2(k), & x_2(0) = [0.5 \quad 0.6] \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

- Bornes sur l'état (modèle)

$$\begin{cases} 0.5 \leq x_1(1) \leq 0.6 \\ 0.315 \leq x_2(1) \leq 0.48 \end{cases}$$

- Mesure

$$y(1) = [0.815 \quad 0.95]$$

$$\Rightarrow 0.815 \leq x_1(1) + x_2(1) \leq 0.95$$

Idée générale : construction d'ensembles admissibles

- Contraintes

$$\begin{cases} 0.5 \leq & x_1(1) & \leq 0.6 \\ 0.315 \leq & x_2(1) & \leq 0.48 \\ 0.815 \leq & x_1(1) + x_2(1) & \leq 0.95 \end{cases}$$

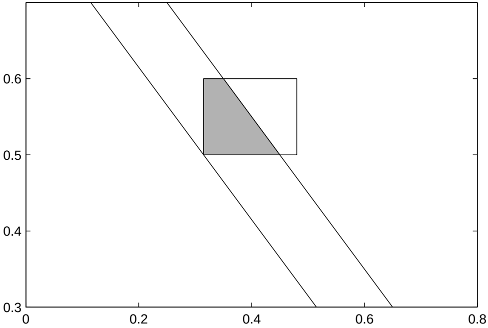


FIG.: Ensemble admissible

Observateur intervalle : cas non linéaire général

$$\text{Système } S \; : \; \left\{ \begin{array}{rcll} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, v_k) & \qquad \mid v_k \mid \leq \delta_v \\ y_k & = & h(x_k) + w_k & \qquad \mid w_k \mid \leq \delta_w \end{array} \right.$$

- Ensemble des sorties à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{ y \; / \; \mid y - y_k \mid < \delta_w \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}^{y}_{x,k} = \{ x \in \mathbb{R}^n / \; h(x) \in \mathcal{D}_{y,k} \}$$

- Ensemble des états prédits à l'instant $k+1$ sur la base des mesures jusqu'à l'instant k (prédiction)

$$\mathcal{D}^{+}_{x,k} = \{ f(x_k, u_k, v_k) \; / \; x \in \mathcal{D}_{x,k}, \; \mid v_k \mid \leq \; \delta_v \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant $k+1$ (correction)

$$\mathcal{D}_{x,k+1} = \mathcal{D}^{+}_{x,k} \cap \mathcal{D}^{y}_{x,k+1}$$

Observateur intervalle : cas non linéaire général

$$\text{Système } S \; : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, v_k) \\ y_k & = & h(x_k) + w_k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mid v_k \mid \leq \delta_v \\ \mid w_k \mid \leq \delta_w \end{array}$$

- Ensemble des sorties à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{ y \;/\; \mid y - y_k \mid < \delta_w \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}^y_{x,k} = \{ x \in \mathbb{R}^n / \; h(x) \in \mathcal{D}_{y,k} \}$$

- Ensemble des états prédits à l'instant $k+1$ sur la base des mesures jusqu'à l'instant k (prédiction)

$$\mathcal{D}^+_{x,k} = \{ f(x_k, u_k, v_k) \;/\; x \in \mathcal{D}_{x,k}, \; \mid v_k \mid \leq \; \delta_v \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant $k+1$ (correction)

$$\mathcal{D}_{x,k+1} = \mathcal{D}^+_{x,k} \cap \mathcal{D}^y_{x,k+1}$$

Observateur intervalle : cas non linéaire général

$$\text{Système } S \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, v_k) \\ y_k & = & h(x_k) + w_k \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \mid v_k \mid \leq \delta_v \\ \mid w_k \mid \leq \delta_w \end{array}$$

- Ensemble des sorties à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{ y \ / \ \mid y - y_k \mid < \delta_w \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}^y_{x,k} = \{ x \in \mathbb{R}^n / \ h(x) \in \mathcal{D}_{y,k} \}$$

- Ensemble des états prédits à l'instant $k+1$ sur la base des mesures jusqu'à l'instant k (prédiction)

$$\mathcal{D}^+_{x,k} = \{ f(x_k, u_k, v_k) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k}, \ \mid v_k \mid \leq \ \delta_v \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant $k+1$ (correction)

$$\mathcal{D}_{x,k+1} = \mathcal{D}^+_{x,k} \cap \mathcal{D}^y_{x,k+1}$$

$$\text{Système } S \; : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, v_k) \qquad\qquad \mid v_k \mid \leq \delta_v \\ y_k & = & h(x_k) + w_k \qquad\qquad\quad \mid w_k \mid \leq \delta_w \end{array} \right.$$

- Ensemble des sorties à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{ y \;/\; \mid y - y_k \mid < \delta_w \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}^y_{x,k} = \{ x \in \mathbb{R}^n / \; h(x) \in \mathcal{D}_{y,k} \}$$

- Ensemble des états prédits à l'instant $k+1$ sur la base des mesures jusqu'à l'instant k (prédiction)

$$\mathcal{D}^+_{x,k} = \{ f(x_k, u_k, v_k) \;/\; x \in \mathcal{D}_{x,k}, \; \mid v_k \mid \leq \; \delta_v \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant $k+1$ (correction)

$$\mathcal{D}_{x,k+1} = \mathcal{D}^+_{x,k} \cap \mathcal{D}^y_{x,k+1}$$

Observateur intervalle : cas non linéaire général

$$\text{Système } S \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, v_k) \\ y_k & = & h(x_k) + w_k \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \mid v_k \mid \leq \delta_v \\ \mid w_k \mid \leq \delta_w \end{array}$$

- Ensemble des sorties à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{ y \ / \ \mid y - y_k \mid < \delta_w \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant k à partir des mesures y_k

$$\mathcal{D}^{y}_{x,k} = \{ x \in \mathbb{R}^n / \ h(x) \in \mathcal{D}_{y,k} \}$$

- Ensemble des états prédits à l'instant $k+1$ sur la base des mesures jusqu'à l'instant k (prédiction)

$$\mathcal{D}^{+}_{x,k} = \{ f(x_k, u_k, v_k) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k}, \ \mid v_k \mid \leq \ \delta_v \}$$

- Ensemble des états admissibles à l'instant $k+1$ (correction)

$$\mathcal{D}_{x,k+1} = \mathcal{D}^{+}_{x,k} \cap \mathcal{D}^{y}_{x,k+1}$$

Observateur intervalle : exemple

- Modèle

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [0.5 \quad 0.6] x_k + 0.5, \qquad x_0 \in [0.2 \quad 0.3] \\ y_k &= x_k + w_k, \qquad\qquad w_k \in [-0.05 \quad 0.05] \end{aligned}$$

- Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.20\ 0.30]$
- Mesures : $y_1 = 0.60$
- Etat estimé à l'instant 1 : $\mathcal{D}^{y}_{x,1} = [0.55\ 0.65]$
- Etat prédit à l'instant 1 : $\mathcal{D}^{+}_{x,0} = [0.50\ 0.60][0.20\ 0.30] + 0.50$
  $\mathcal{D}^{+}_{x,0} = [0.60\ 0.68]$
- Etat admissible : $\mathcal{D}_{x,1} = [0.60\ 0.65]$

Observateur intervalle : exemple

- Modèle

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [0.5 \quad 0.6]x_k + 0.5, & x_0 &\in [0.2 \quad 0.3] \\ y_k &= x_k + w_k, & w_k &\in [-0.05 \quad 0.05] \end{aligned}$$

- Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.20\ 0.30]$
- Mesures : $y_1 = 0.60$
- Etat estimé à l'instant 1 : $\mathcal{D}^y_{x,1} = [0.55\ 0.65]$
- Etat prédit à l'instant 1 : $\mathcal{D}^+_{x,0} = [0.50\ 0.60][0.20\ 0.30] + 0.50$
  $\mathcal{D}^+_{x,0} = [0.60\ 0.68]$
- Etat admissible : $\mathcal{D}_{x,1} = [0.60\ 0.65]$

Observateur intervalle : exemple

- Modèle

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= [0.5 \quad 0.6]x_k + 0.5, \qquad & x_0 \in [0.2 \quad 0.3] \\
y_k &= x_k + w_k, & w_k \in [-0.05 \quad 0.05]
\end{aligned}
$$

- Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.20\ 0.30]$
- Mesures : $y_1 = 0.60$
- Etat estimé à l'instant 1 : $\mathcal{D}^{y}_{x,1} = [0.55\ 0.65]$
- Etat prédit à l'instant 1 : $\mathcal{D}^{+}_{x,0} = [0.50\ 0.60][0.20\ 0.30] + 0.50$
  $\mathcal{D}^{+}_{x,0} = [0.60\ 0.68]$
- Etat admissible : $\mathcal{D}_{x,1} = [0.60\ 0.65]$

Observateur intervalle : exemple

- Modèle

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [0.5 \quad 0.6]x_k + 0.5, \quad & x_0 \in [0.2 \quad 0.3] \\ y_k &= x_k + w_k, & w_k \in [-0.05 \quad 0.05] \end{aligned}$$

- Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.20\ 0.30]$
- Mesures : $y_1 = 0.60$
- Etat estimé à l'instant 1 : $\mathcal{D}^{y}_{x,1} = [0.55\ 0.65]$
- Etat prédit à l'instant 1 : $\mathcal{D}^{+}_{x,0} = [0.50\ 0.60][0.20\ 0.30] + 0.50$
  $\mathcal{D}^{+}_{x,0} = [0.60\ 0.68]$
- Etat admissible : $\mathcal{D}_{x,1} = [0.60\ 0.65]$

Observateur intervalle : exemple

- Modèle

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [0.5 \quad 0.6]x_k + 0.5, \quad & x_0 \in [0.2 \quad 0.3] \\ y_k &= x_k + w_k, & w_k \in [-0.05 \quad 0.05] \end{aligned}$$

- Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.20\ 0.30]$
- Mesures : $y_1 = 0.60$
- Etat estimé à l'instant 1 : $\mathcal{D}_{x,1}^{y} = [0.55\ 0.65]$
- Etat prédit à l'instant 1 : $\mathcal{D}_{x,0}^{+} = [0.50\ 0.60][0.20\ 0.30] + 0.50$
  $\mathcal{D}_{x,0}^{+} = [0.60\ 0.68]$
- Etat admissible : $\mathcal{D}_{x,1} = [0.60\ 0.65]$

Observateur intervalle : exemple

- Modèle

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= [0.5 \quad 0.6]x_k + 0.5, & x_0 \in [0.2 \quad 0.3] \\ y_k &= x_k + w_k, & w_k \in [-0.05 \quad 0.05] \end{aligned}$$

- Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.20\ 0.30]$
- Mesures : $y_1 = 0.60$
- Etat estimé à l'instant 1 : $\mathcal{D}^y_{x,1} = [0.55\ 0.65]$
- Etat prédit à l'instant 1 : $\mathcal{D}^+_{x,0} = [0.50\ 0.60][0.20\ 0.30] + 0.50$
  $\mathcal{D}^+_{x,0} = [0.60\ 0.68]$
- Etat admissible : $\mathcal{D}_{x,1} = [0.60\ 0.65]$

Observateur intervalle sur horizon d'observation

- Modèle du système à l'instant k :

$$x_{k+1} = [A]x_k + [B]u_k$$

- Instant k :

$$x_k^- = \min_{x_0,A,B}(A^k x_0 + A^{k-1}Bu_0 + ... + Bu_{k-1}), \quad A \in [A], \quad B \in [B]$$

$$x_k^+ = \max_{x_0,A,B}(A^k x_0 + A^{k-1}Bu_0 + ... + Bu_{k-1}), \quad A \in [A], \quad B \in [B]$$

- L'algorithme fournit l'enveloppe exacte des états
- La complexité des calculs croît avec le temps
- Le calcul en "temps réel" de l'enveloppe peut être délicat
- Remarque : estimation sur horizon glissant

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

(0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^+_{x,0}$, $k = 1$.

(1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k

(2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \,/\, |y - y_k| \leq \Delta_y\}$$

(3) Caractériser les domaines des états

$$\mathcal{D}^y_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, h(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

Tester la vacuité de $\mathcal{D}^y_{x,k,i}$

(4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^+_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^y_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

(5) Caractériser les domaines des états par prédiction

$$\mathcal{D}^+_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \,/\, x \in \mathcal{D}_{x,k,i},\ |v| \leq \Delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

(0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^+_{x,0}$, $k = 1$.

(1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k

(2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \ / \ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

(3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^y_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

Tester la vacuité de $\mathcal{D}^y_{x,k,i}$

(4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^+_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^y_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

(5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^+_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k,i},\ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

(0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^{+}_{x,0}$, $k = 1$.

(1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k

(2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \ / \ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

(3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^{y}_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

Tester la vacuité de $\mathcal{D}^{y}_{x,k,i}$

(4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^{+}_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^{y}_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

(5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^{+}_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k,i}, \ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement
  (0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^+_{x,0}$, $k = 1$.
  (1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k
  (2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \ / \ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

  (3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^y_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

  Tester la vacuité de $\mathcal{D}^y_{x,k,i}$
  (4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^+_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^y_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

  (5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^+_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k,i}, \ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

(0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^+_{x,0}$, $k = 1$.
(1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k
(2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \ / \ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

(3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^y_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

Tester la vacuité de $\mathcal{D}^y_{x,k,i}$

(4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^+_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^y_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

(5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^+_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k,i},\ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

(0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^+_{x,0}$, $k = 1$.
(1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k
(2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \ / \ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

(3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^y_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

Tester la vacuité de $\mathcal{D}^y_{x,k,i}$

(4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^+_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^y_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

(5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^+_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k,i},\ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement

(0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^{+}_{x,0}$, $k = 1$.

(1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k

(2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \ / \ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

(3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^{y}_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

Tester la vacuité de $\mathcal{D}^{y}_{x,k,i}$

(4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^{+}_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^{y}_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

(5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^{+}_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v) \ / \ x \in \mathcal{D}_{x,k,i}, \ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle

- Modèle du système à surveiller : $M \in \{M_0,\ M_1,\ M_2\}$
- Algorithme de détection du mode de fonctionnement
  (0) Définir un domaine initial de recherche de l'état $\mathcal{D}^+_{x,0}$, $k = 1$.
  (1) Faire l'acquisition des mesures u_k et y_k
  (2) Caractériser le domaine des sorties

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y\ /\ \mid y - y_k \mid \leq \delta_w\}$$

  (3) Caractériser les domaines des états :

$$\mathcal{D}^y_{x,k,i} = \{x \in \mathbb{R}^n\ /\ h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\} \quad i = 0, 1, 2$$

  Tester la vacuité de $\mathcal{D}^y_{x,k,i}$
  (4) Caractériser les domaines des états admissibles :

$$\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}^+_{x,k-1,i} \cap \mathcal{D}^y_{x,k,i} \quad i = 0, 1, 2$$

  (5) Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}^+_{x,k,i} = \{f_i(x, u_k, v)\ /\ x \in \mathcal{D}_{x,k,i},\ \mid v \mid \leq \delta_v\} \quad i = 0, 1, 2$$

Estimation d'état dans le cas multi-modèle : exemple

- Système à surveiller avec plusieurs modes de fonctionnement

$$M_i \begin{cases} y(k) = X(k)\theta_i(k) \\ \theta_i(k) = \theta_{0,i} + T_i\eta(k), \quad \mid \eta(k) \mid \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

- Application numérique

$$\begin{cases} \theta_0(k) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \eta(k) \\ \theta_1(k) = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} \eta(k) \\ \theta_2(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \eta(k) \end{cases} \tag{2}$$

- Problème : connaissant $y(k)$ et $X(k)$ comment reconnaître le mode de fonctionnement ?

Estimation d'état dans le cas multi-modèle : exemple

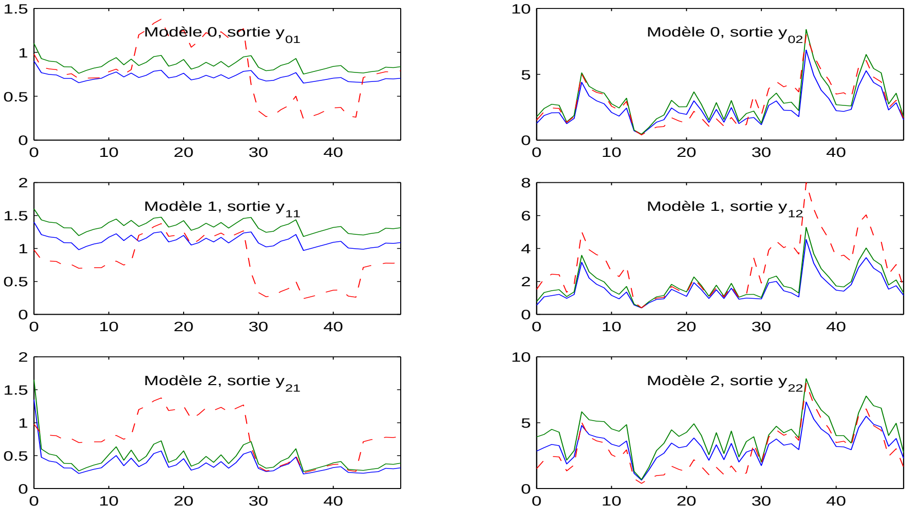


FIG.: Sorties estimées par les trois modèles et sortie mesurée.

Estimation d'état dans le cas multi-modèle : exemple

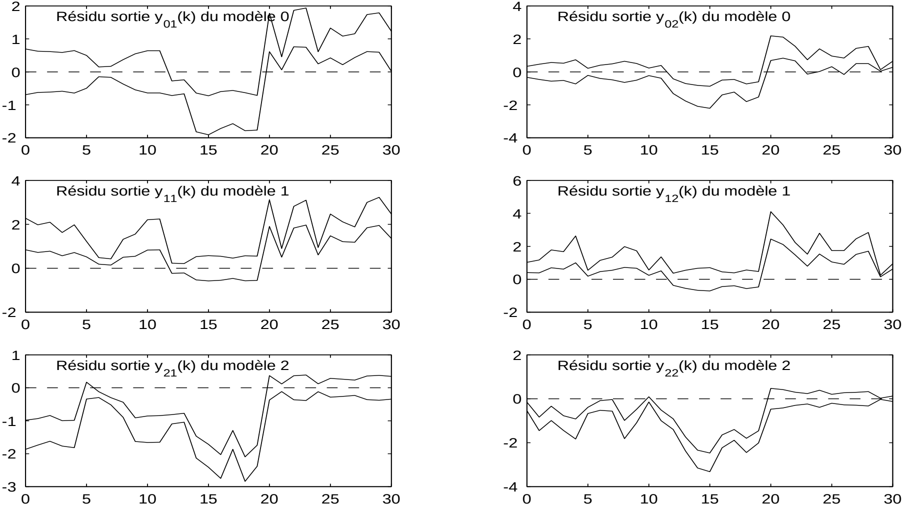


FIG.: Résidus issus des trois modèles.

Estimation d'état dans le cas multi-modèle : exemple

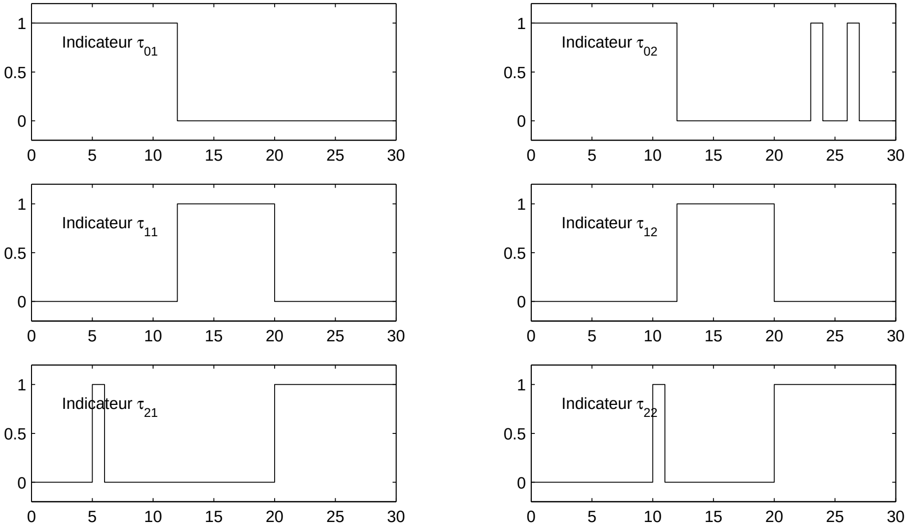


FIG.: Indicateurs de mode de fonctionnement

Conclusion & perspectives

Conclusion

- Importance de la prise en compte des incertitudes des connaissances dans la représentation des systèmes
- Approche bornée valable pour les paramètres de modèle et les mesures
- Incertitudes du modèle propagées jusqu'à la prise de décision

Perspectives

- Reconnaissance non supervisée de mode de fonctionnement
- Analyse de l'influence des bruits de mesure

Conclusion & perspectives

Conclusion

- Importance de la prise en compte des incertitudes des connaissances dans la représentation des systèmes
- Approche bornée valable pour les paramètres de modèle et les mesures
- Incertitudes du modèle propagées jusqu'à la prise de décision

Perspectives

- Reconnaissance non supervisée de mode de fonctionnement
- Analyse de l'influence des bruits de mesure

Conclusion

- Importance de la prise en compte des incertitudes des connaissances dans la représentation des systèmes
- Approche bornée valable pour les paramètres de modèle et les mesures
- Incertitudes du modèle propagées jusqu'à la prise de décision

Perspectives

- Reconnaissance non supervisée de mode de fonctionnement
- Analyse de l'influence des bruits de mesure

Conclusion

- Importance de la prise en compte des incertitudes des connaissances dans la représentation des systèmes
- Approche bornée valable pour les paramètres de modèle et les mesures
- Incertitudes du modèle propagées jusqu'à la prise de décision

Perspectives

- Reconnaissance non supervisée de mode de fonctionnement
- Analyse de l'influence des bruits de mesure

Conclusion & perspectives

Conclusion

- Importance de la prise en compte des incertitudes des connaissances dans la représentation des systèmes
- Approche bornée valable pour les paramètres de modèle et les mesures
- Incertitudes du modèle propagées jusqu'à la prise de décision

Perspectives

- Reconnaissance non supervisée de mode de fonctionnement
- Analyse de l'influence des bruits de mesure

Conclusion & perspectives

Conclusion

- Importance de la prise en compte des incertitudes des connaissances dans la représentation des systèmes
- Approche bornée valable pour les paramètres de modèle et les mesures
- Incertitudes du modèle propagées jusqu'à la prise de décision

Perspectives

- Reconnaissance non supervisée de mode de fonctionnement
- Analyse de l'influence des bruits de mesure