

# Estimation d'état et diagnostic de systèmes à paramètres incertains – Approche intervalle

José Ragot<sup>1</sup>, Didier Maquin<sup>1</sup>, Kamel Benothman<sup>2</sup> et Mohamed Benrejeb<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centre de Recherche en Automatique de Nancy.

UMR 7039 - Nancy-Université, CNRS.

2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France

{*Didier.Maquin, Jose.Ragot*}@ensem.inpl-nancy.fr

<sup>2</sup> Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir (ENIM).

Avenue Ibn El Jazzar, Monastir, 5019 Tunisie. *kamelbenothman@yahoo.fr*

<sup>3</sup> Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT).

BP 37, Le Belvédère 1002, Tunis Tunisie. *Mohamed.Benrejeb@enit.rnu.tn*

**Abstract.** L'estimation est l'un des concepts les plus utilisés en automatique, dans les domaines de l'identification, de l'observation, de la commande et du diagnostic. Le cas des systèmes linéaires à paramètres constants est bien résolu ainsi que l'extension aux systèmes à paramètres variables. Lorsque les systèmes sont affectés de perturbations non mesurées, la problématique est plus délicate et les approches à erreurs bornées peuvent donner des éléments de réponse. On examine ici le problème de détection de défauts avec cette hypothèse de bornitude.

## 1 Estimation d'état dans un contexte incertain

L'estimation de l'état d'un système est un problème bien résolu lorsque ce système est à paramètres constants (utilisation des observateurs de type Luengerger) ou quand il est soumis à des perturbations de caractéristiques statistiques a priori connues (utilisation de filtres de Kalman). Pour des systèmes à paramètres variables, et lorsque les lois de variations sont a priori connues, les méthodes précédentes se généralisent. La situation devient plus délicate lorsque les paramètres du système varient au cours du temps selon des lois inconnues.

En général, les techniques d'estimation se basent sur la connaissance du modèle du système. Cependant, ce modèle n'est qu'une image approchée du comportement du système. De plus les informations recueillies sur un système se font à partir de capteurs dont la fiabilité peut être mise en cause. Tous ces facteurs constituent des phénomènes perturbateurs qui amoindrissent l'aptitude des modèles à représenter fidèlement le fonctionnement des systèmes. Une façon assez séduisante de prendre en compte les variations des paramètres d'un système consiste à considérer des perturbations bornées et que les bornes sont connues a priori. Comme à chaque instant les perturbations sont inconnues, il n'est pas possible de déterminer l'état réel du système ; il semble alors raisonnable d'estimer un domaine auquel appartiennent ces états. Ce problème est connu sous le vocable "set-valued state estimation" [4], [6], [8], [11] et peut être formulé de façon

assez générale en considérant le modèle suivant du système :

$$S \quad \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), v(k)) \\ y(k) = h(x(k)) + w(k) \end{cases} \quad (1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^r$  sa commande,  $y \in \mathbb{R}^m$  la sortie observée ;  $v(k)$  et  $w(k)$  sont des perturbations ou incertitudes bornées. Connaissant les bornes  $(v^-(k) \ v^+(k))$  et  $(w^-(k) \ w^+(k))$  des perturbations, le modèle  $S$ , les mesures de la sortie et de l'entrée, on souhaite estimer les bornes  $(x^-(k) \ x^+(k))$  de l'état  $x(k)$ . A l'instant  $k$ , on définit, à partir des bornes  $(x^-(k) \ x^+(k))$ , le domaine admissible de l'état, par exemple sous forme d'une boîte :

$$\mathcal{D}_{x,k} = \{x \mid x^-(k) \leq x(k) \leq x^+(k)\} \quad (2)$$

A l'instant  $k+1$ , le nouveau domaine  $\mathcal{D}_{x,k+1}$  est construit à partir des domaines précédents  $\mathcal{D}_{x,k} \dots \mathcal{D}_{x,0}$ , de la nouvelle mesure  $u(k)$ ,  $y(k+1)$ , des bornes  $(v^-(k) \ v^+(k))$  et  $(w^-(k+1) \ w^+(k+1))$ . Pour les systèmes non linéaires, la détermination analytique du domaine  $\mathcal{D}_{x,k+1}$  est difficile et on doit recourir à des méthodes numériques de son évaluation. Le cas des systèmes linéaires est a priori plus simple, le domaine des états pouvant être représenté par un polytope.

## 2 Observateur de type intervalle idéal

A partir de la structure du système  $S$  (1), on peut définir un observateur idéal produisant une prédiction de l'état ensuite corrigée grâce aux mesures.

### 2.1 Formalisation générale

L'état initial  $x(0)$  du système (1) est supposé appartenir à un ensemble  $\mathcal{D}_{x,0} \subset \mathbb{R}^n$ . Les bornes des perturbations  $v(k)$  et  $w(k)$  sont supposées constantes :

$$|v(k)| \leq \delta_v \quad |w(k)| \leq \delta_w \quad (3)$$

A l'instant  $k$ , l'ensemble des valeurs de l'état  $x(k)$  compatibles avec les informations disponibles est :

$$\{\mathcal{D}_{x,0}, \{u(i-1), y(i), |v(i)| \leq \delta_v, |w(i)| \leq \delta_w\}_{i=1}^k\} \quad (4)$$

Au même instant  $k$ , on note  $\mathcal{D}_{y,k}$  l'ensemble des valeurs de la sortie du système connaissant les mesures  $y(k)$  et la borne des erreurs de mesure :

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y \mid |y - y(k)| \leq \delta_y\} \quad (5)$$

A l'instant  $k+1$ , on dispose d'une nouvelle mesure  $(u(k), y(k+1))$  du couple entrée-sortie. Connaissant  $\mathcal{D}_{x,k}$  et la nouvelle entrée  $u(k)$ , il est possible de calculer le domaine  $\mathcal{D}_{x,k}^+$  contenant la prédiction de l'état du système grâce à son modèle (1). Comme la sortie  $y(k+1)$  dépend de  $x(k+1)$ , il est également

possible de déduire un domaine  $\mathcal{D}_{x,k+1}^y$  de l'état  $x(k+1)$  en utilisant l'équation de mesure (1). Ces deux estimations d'état sont définies par les deux domaines :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{x,k+1}^y &= \{x \in \mathbb{R}^n / h(x) \in \mathcal{D}_{y,k+1}\} \\ \mathcal{D}_{x,k}^+ &= \{f(x, u(k), v(k)) / x \in \mathcal{D}_{x,k}, |v_k| \leq \delta_v\}\end{aligned}\quad (6)$$

Les exposants + et  $y$  rappellent le mode de calcul de l'état par prédiction et à partir de la sortie  $y$  du système. L'intersection de ces deux domaines, si elle est non vide, fournit le domaine  $\mathcal{D}_{x,k+1}$  de l'état à l'instant  $k+1$  :

$$\mathcal{D}_{x,k+1} = \mathcal{D}_{x,k}^+ \cap \mathcal{D}_{x,k+1}^y \quad (7)$$

**Remarque.** La caractérisation du domaine  $\mathcal{D}_{x,k}$  peut être coûteuse en temps de calcul, sa forme pouvant être complexe. On peut avoir intérêt, au détriment de la précision, à définir un domaine approché  $\hat{\mathcal{D}}_{x,k}$  tel que  $\mathcal{D}_{x,k} \subseteq \hat{\mathcal{D}}_{x,k}$  mais dont la caractérisation est beaucoup plus simple (par exemple un zonotope).

La procédure de caractérisation de l'état se résume par l'algorithme :

0. Définir un domaine initial de recherche de l'état  $k=1$  :  $\mathcal{D}_{x,k-1}^+$ .
1. Faire l'acquisition des mesures  $u(k)$  et  $y(k)$
2. Caractériser le domaine des sorties :  $\mathcal{D}_{y,k} = \{y / |y - y(k)| \leq \delta_y\}$
3. Caractériser le domaine des états à partir du domaine des sorties :

$$\mathcal{D}_{x,k}^y = \{x \in \mathbb{R}^n / h(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\}$$

4. Caractériser le domaine des états :  $\mathcal{D}_{x,k} = \mathcal{D}_{x,k-1}^+ \cap \mathcal{D}_{x,k}^y$
5. Réduire la complexité du domaine :  $\mathcal{D}_{x,k} \subseteq \hat{\mathcal{D}}_{x,k}$
6. Caractériser le domaine des états par prédiction :

$$\mathcal{D}_{x,k}^+ = \{f(x, u(k), v(k)) / x \in \hat{\mathcal{D}}_{x,k}, |v_k| \leq \delta_v\}$$

7. Incrémenter  $k$  et retourner à l'étape 1

## 2.2 Exemple

On considère un système du premier ordre soumis à deux incertitudes :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= [0.5 \quad 0.6]x(k) + 0.5, & x(0) &\in [0.2 \quad 0.3] \\ y(k) &= x(k) + w(k), & |w(k)| &\leq 0.05\end{aligned}\quad (8)$$

avec les mesures  $y(1) = 0.50$ ,  $y(2) = 0.82$ .

On choisit le domaine initial  $\mathcal{D}_{x,0} = [0.3 \quad 0.5] = \mathcal{D}_{x,0}^+$ .

On obtient les domaines de la sortie et de l'état :  $\mathcal{D}_{y,1} = \mathcal{D}_{x,1}^y = [0.45 \quad 0.55]$ .

On déduit ensuite, par intersection, le domaine de l'état  $\mathcal{D}_{x,1} = [0.45 \quad 0.50]$ .

Par prédiction, le domaine des états admissibles est :  $\mathcal{D}_{x,1}^+ = [0.725 \quad 0.800]$ .

Avec la deuxième mesure, on obtient le domaine :  $\mathcal{D}_{x,2} = [0.77 \quad 0.80]$ .

### 2.3 Etude du pire cas

Les systèmes à paramètres incertains, (1), dépendent de paramètres dont l'évolution n'est pas a priori connue. Pour les analyser, on établit l'expression de l'état du système en fonction des incertitudes. Puis, on se place dans la pire situation en cherchant la combinaison des incertitudes donnant le domaine d'estimation de l'état de largeur maximale. Dans le cas des systèmes linéaires, avec incertitudes uniquement sur la matrice d'état  $A$  et sur l'état initial  $x(0)$ , on a :

$$\begin{aligned} x(k) &= A(\eta(k))x(k-1) + Bu(k-1), & x(0) &\in \mathcal{D}_{x,0} \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (9)$$

L'état du système à l'instant  $k$  s'écrit :

$$\begin{aligned} x(k) &= A(\eta(k-1)) \dots A(\eta(0))x(0) + Bu(k-1) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{k-1} A(\eta(k-1)) \dots A(\eta(i))Bu(i-1) \end{aligned} \quad (10)$$

Avec  $\eta_k = (\eta(0) \dots \eta(k-1))$ , on écrit de façon plus compacte :

$$x(k) = f(\eta_k, x(0)) \quad (11)$$

A l'instant  $k$ , le domaine auquel l'état appartient,  $\mathcal{D}_{x,k}$ , est défini par :

$$\mathcal{D}_{x,k} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = f(\eta_k, x(0)), x(0) \in \mathcal{D}_{x,0}, |\eta| \leq 1\} \quad (12)$$

Caractériser ce domaine s'avère difficile en général. Au détriment d'une surévaluation, on peut le majorer par un domaine de forme plus simple et plus facile à évaluer. C'est le cas d'un zonotope défini sous la forme :

$$\square S_{x,k} = [x^-(k) \quad x^+(k)] \quad (13)$$

où les bornes de l'état se calculent :

$$x^+(k) = \max_{\eta_k, |\eta_k| \leq 1} x(k) \quad \text{et} \quad x^-(k) = \min_{\eta_k, |\eta_k| \leq 1} x(k) \quad (14)$$

Cette approche fournit donc une estimation de l'état directement à partir de son modèle, en se plaçant dans la pire situation vis-à-vis des incertitudes. Notons que la procédure proposée croît en volume de calcul lorsque  $k$  augmente ; afin que la procédure d'évaluation des bornes de l'état reste applicable en ligne, on utilise souvent un horizon d'observation de largeur constante  $L+1$  mais glissant.

## 3 Application au diagnostic

On a montré précédemment comment construire un observateur d'état intervalle. Dans le cadre du diagnostic, c'est le problème d'incohérence d'information qui prévaut : l'impossibilité de fusionner les deux sources d'information de l'observateur (cas de domaines disjoints), est révélatrice d'incompatibilité entre les mesures et le modèle du système.

### 3.1 Formalisme général

Le domaine  $\mathcal{D}_{y,k}^+$  des sorties est déduit du domaine des états  $\mathcal{D}_{x,k}^+$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{y,k}^+ = \{y = h(x^+) + w(k+1) / x^+ = f(x, u(k), v(k)), \\ x \in \mathcal{D}_{x,k}, |v(k)| \leq \delta_v, |w(k)| \leq \delta_w\} \end{aligned} \quad (15)$$

Pour prendre en compte les incertitudes des mesures, l'ensemble des valeurs de la sortie peut être évalué à partir des mesures  $y(k)$  grâce à (15). Par conséquent, un résidu intervalle peut être défini de la façon suivante :

$$r_{k+1} = \mathcal{D}_{y,k}^+ \cap \mathcal{D}_{y,k+1} \quad (16)$$

Un défaut est détecté si  $r_{k+1} = \emptyset$ . Pour cela, on doit déterminer les frontières de deux domaines ce qui peut nécessiter un volume de calcul conséquent. Pour cette raison, on est souvent conduit à approximer le domaine exact par un domaine de forme plus simple. En considérant (16), un défaut est détecté si :

$$r_{k+1} = \hat{\mathcal{D}}_{y,k}^+ \cap \mathcal{D}_{y,k+1} \quad (17)$$

$\hat{\mathcal{D}}_{y,k}^+$  étant une estimation extérieure de  $\mathcal{D}_{y,k}^+$ , c'est-à-dire  $\mathcal{D}_{y,k}^+ \subseteq \hat{\mathcal{D}}_{y,k}^+$

Si  $\hat{\mathcal{D}}_{y,k}^+$  est plus facilement calculable que  $\mathcal{D}_{y,k}^+$ , alors les résidus (17) sont plus simples à calculer que (16) ; cependant, le domaine  $\hat{\mathcal{D}}_{y,k}^+$  conduit à détecter moins de défauts que le domaine  $\mathcal{D}_{y,k}^+$  [1]. Après avoir détecté des incohérences de données, il convient de les localiser. Une solution consiste à construire l'estimation d'état en n'utilisant qu'une partie des mesures. Chaque défaut se traduit par un mode de fonctionnement particulier auquel est associé un modèle :

$$M_i \begin{cases} x(k+1) = f_i(x(k), u(k), v(k)) \\ y(k) = h_i(x(k)) + w(k) \end{cases} \quad (18)$$

Le diagnostic consiste à déterminer parmi un ensemble de modèles, celui compatible avec les mesures et les incertitudes. Le principe retenu est celui de l'invalidation de modèle. A l'instant  $k$ , le modèle  $M_i$  fournit une prédiction de l'état  $x$  (domaine  $\mathcal{D}_{x,k,i}^+$ ). Si une prédiction est incompatible avec les mesures, alors le modèle correspondant ne traduit pas la situation actuelle et donc le système ne se trouve pas dans le mode décrit par ce modèle.

L'algorithme à mettre en œuvre, inspiré de [5], est alors le suivant :

0. Définir un domaine initial de recherche de l'état  $\mathcal{D}_{x,0}^+$ ,  $k = 1$ .
1. Faire l'acquisition des mesures  $u(k)$  et  $y(k)$ .
2. Caractériser le domaine des sorties  $\mathcal{D}_{y,k} = \{y / |y - y(k)| \leq \delta_y\}$ .
3. Caractériser les domaines des états :  $\mathcal{D}_{x,k,i}^y = \{x \in \mathbb{R}^n / h_i(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\}$ .
4. Caractériser les domaines des états admissibles :  $\mathcal{D}_{x,k,i} = \mathcal{D}_{x,k-1,i}^+ \cap \mathcal{D}_{x,k,i}^y$ .
5. Réduire la complexité des domaines :  $\mathcal{D}_{x,k,i}^+ \subseteq \hat{\mathcal{D}}_{x,k,i}^+$ .

6. Caractériser les domaines des états par prédiction :

$$\mathcal{D}_{x,k,i}^+ = \{f_i(x, u(k), v(k)) / x \in \hat{\mathcal{D}}_{x,k,i}, |v_k| \leq \delta_v\}$$

Pour interpréter les domaines  $\mathcal{D}_{x,k,i}$ , rappelons que  $\mathcal{D}_{x,k,i}$ ,  $i = 1 \dots N$ , représente l'ensemble des états compatibles avec les mesures et les bornes d'incertitude. Si le domaine  $\mathcal{D}_{x,k,i_0}$  est vide, alors le mode  $i_0$  ne correspond pas à la situation présente. Si les domaines  $\mathcal{D}_{x,k,i_1}$  et  $\mathcal{D}_{x,k,i_2}$  ne sont pas simultanément vides, les deux modes  $i_1$  et  $i_2$  sont alors candidats pour décrire la situation présente. Dans ce cas, des informations complémentaires sont requises pour reconnaître le mode actif. La notion de persistance peut être un recours utile à cette discrimination, le principe étant de d'analyser les différents domaines à des instants consécutifs.

### 3.2 Exemple : recherche d'un mode actif

Soit un système caractérisé par un mode normal de fonctionnement ( $i = 0$ ) et deux modes de dysfonctionnement ( $i = 1, 2$ ). Le problème posé est celui de la reconnaissance du mode actif du système ; pour cela, on dispose des modèles correspondant aux trois modes ainsi que des mesures des entrées et sorties du système. Les trois modèles lient les sorties  $y$  et les entrées  $X$  du système :

$$M_i \begin{cases} y(k) = X(k)\theta_i(k) \\ \theta_i(k) = \theta_{0,i} + T_i\eta(k), \quad |\eta(k)| \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

où  $\theta_{0,i}$  représente la valeur nominale des paramètres du  $i^{\text{ème}}$  modèle,  $\eta$  une variable bornée qui décrit les incertitudes des paramètres du modèle,  $T_i$  une matrice traduisant l'influence des incertitudes. Dans la suite, on utilise les modèles :

$$\begin{cases} \theta_0(k) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \eta(k) \\ \theta_1(k) = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} \eta(k) \\ \theta_2(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \eta(k) \end{cases} \quad (20)$$

Les paramètres des trois modèles varient respectivement entre les bornes :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2.4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 3.6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.2 \\ 3.6 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3.8 \\ 4.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6 \\ 2.7 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1.4 \\ 3.3 \end{pmatrix}$$

On évalue tout d'abord une prédiction des sorties à partir des entrées  $X(k)$  :

$$\mathcal{D}_{y,k,i} = \{y / y = X(k)(\theta_{0,i} + T_i\eta(k)), |\eta(k)| \leq 1\} \quad (21)$$

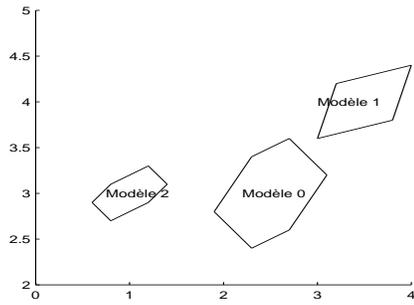
La procédure est illustrée par les figures 1 et 2 construite avec  $X(k) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$   
 Pour le modèle  $M_1$ , à un instant quelconque non indiqué, les deux composantes

du vecteur paramètre s'explicitent :

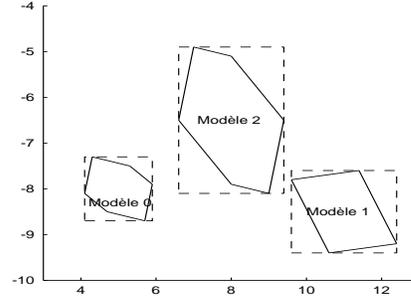
$$M_1 \begin{cases} \theta_{11} = 3.5 + 0.1\eta_1 + 0.2\eta_2 \\ \theta_{12} = 4 + 0.3\eta_1 + 0.1\eta_2 \end{cases} \quad (22)$$

L'élimination de  $\eta_1$  ou  $\eta_2$  conduit à :

$$\begin{cases} 3\theta_{11} - \theta_{12} = 6.5 + 0.5\eta_2 \\ \theta_{11} - 2\theta_{12} = -4.5 - 0.5\eta_1 \end{cases} \quad (23)$$



**Fig. 1.** Polytope des paramètres.



**Fig. 2.** Polytope des sorties à un instant particulier.

Compte tenu des bornes des incertitudes  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , le domaine auquel appartiennent les composantes  $\theta_{11}$  et  $\theta_{12}$  est défini par le polytope :

$$\begin{cases} 3.2 \leq \theta_{11} \leq 3.8 \\ 3.6 \leq \theta_{12} \leq 4.4 \\ 6 \leq 3\theta_{11} - \theta_{12} \leq 7 \\ -5 \leq \theta_{11} - 2\theta_{12} \leq -4 \end{cases} \quad (24)$$

Sur la figure 1, tracée dans le plan des composantes de  $\theta$ , le polytope correspondant à la description (24) a été représenté (modèle  $M_1$ ). Les deux autres polytopes relatifs aux modèles  $M_0$  et  $M_2$  ont été construits de façon similaire. La construction des domaines  $\mathcal{D}_{y,k,i}$  obéit au même principe de recherche des équations des frontières du domaine. Par exemple pour  $\mathcal{D}_{y,k,1}$ , compte tenu de (19) et (20), les composantes de  $y$  sont :

$$\begin{cases} y_1 = 11 + 0.5\eta_1 + 0.5\eta_2 \\ y_2 = -8.5 - 0.8\eta_1 - 0.1\eta_2 \end{cases} \quad (25)$$

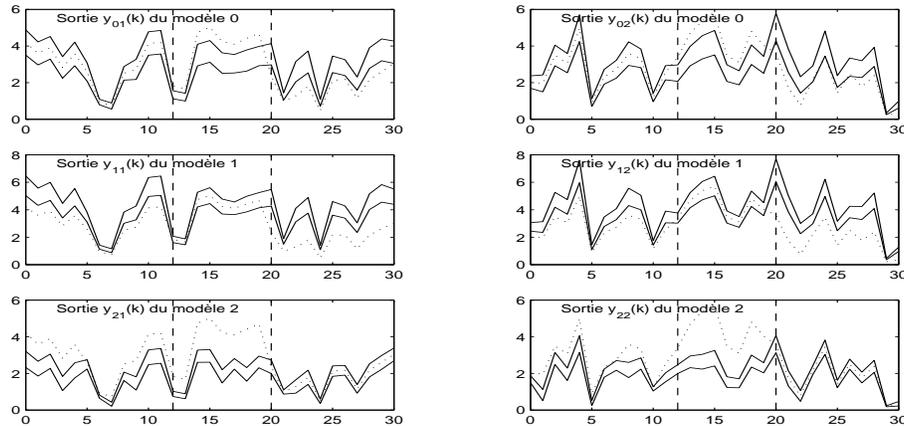
En prenant en compte les couplages entre ces deux composantes et la valeur des bornes de  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , les inégalités suivantes définissent alors  $\mathcal{D}_{y,k,1}$  :

$$\begin{cases} 10 \leq y_1 \leq 12 \\ -9.4 \leq y_2 \leq -7.6 \\ 4.1 \leq 0.8y_1 + 0.5y_2 \leq 4.8 \\ -35 \leq y_1 + 5y_2 \leq -28 \end{cases} \quad (26)$$

Le polytope décrit par (26) est représenté à la figure 2 dans le plan des sorties ; il en est de même pour les polytopes issus des deux autres modèles. A l'instant considéré, le paramètre  $\theta$  appartient à l'un des trois polytopes de la figure 1 et la mesure  $y$  appartient à l'un des trois polytopes de la figure 2. Lorsque la complexité des polytopes  $\mathcal{D}_{y,k,i}$  devient importante. Il est alors souhaitable d'approximer ces derniers par des domaines de formes plus simples, des zonotopes par exemple. Ainsi le domaine  $\mathcal{D}_{y,k,1}$  peut être approximé par le zonotope  $\square_{y,k,1}$  :

$$\begin{cases} 10 \leq y_1 \leq 12 \\ -9.4 \leq y_2 \leq -7.6 \end{cases} \quad (27)$$

La figure 2 compare le zonotope  $\square_{y,k,1}$  avec le polytope  $\mathcal{D}_{y,k,1}$ . La même construction a été faite pour les zonotopes issus des deux autres modèles. Afin de ne pas représenter les zonotopes obtenus à chaque instant pour les trois modèles  $M_i$ , on a utilisé une représentation intervalle  $[y_{ij}^-(k) \quad y_{ij}^+(k)]$  de chaque composante  $y_{ij}(k)$  de la sortie  $y_i(k)$ .



**Fig. 3.** Sorties estimées par les trois modèles.

La figure 3 visualise les sorties (en colonne) de chaque modèle (en ligne). La simulation a été faite sur l'horizon  $[0 \quad 30]$ , avec des changements de mode de fonctionnement aux instants 12 (passage de  $M_0$  à  $M_1$ ) et 20 (passage de  $M_1$  à  $M_2$ ). Sur chaque figure, on a également représenté la sortie  $y(k)$  du système que l'on peut donc comparer à celle de son modèle. On dispose ainsi des domaines des sorties pour les trois modèles. Pour connaître le mode actif à chaque instant, il suffit de comparer la sortie mesurée du système  $y$  à ces trois domaines. Ainsi pour chaque composante  $y_j$  de la sortie et pour chaque modèle  $M_i$ , on définit les résidus indicateurs de mode de fonctionnement :

$$r_{ij}(k) = [y_{ij}^-(k) - y_i(k), y_{ij}^+(k) - y_i(k)], \quad i = 0, 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad (28)$$

$y_{ij}^-$  et  $y_{ij}^+$  étant les bornes inférieure et supérieure de la sortie du modèle  $M_i$ .

Les résidus sont représentés à la figure 4. On détecte nettement les zones où un résidu intervalle contenant la valeur 0. Le détecteur capable d'effectuer l'analyse des résidus est basé sur le signe des bornes des résidus :

$$\tau_{ij}(k) = \frac{1}{2} (1 - \text{sign}(y_{ij}^-(k) - y_j(k))(y_{ij}^+(k) - y_j(k))) \quad (29)$$

où les indices  $i$  et  $j$  sont relatifs aux numéros de modèle et de sortie. Son évolution représentée à la figure 5 s'interprète ainsi : une valeur de  $\tau$  égale à 1 (resp. 0) témoigne de l'appartenance (resp. non-appartenance) de l'origine au résidu intervalle. L'examen des indicateurs  $\tau_{01}$  et  $\tau_{02}$  construits à partir du modèle correspondant au mode 0, permet d'énoncer les résultats suivants : entre les instants 0 et 12, le mode 0 est actif, entre les instants 12 et 30, deux fausses détections apparaissent (elles peuvent être éliminées par un test de non persistance). L'analyse des résidus issus des deux autres modèles confirme cette conclusion. Globalement, ces six graphiques sont cohérents entre eux et concourent à bien définir les modes actifs à chaque instant.

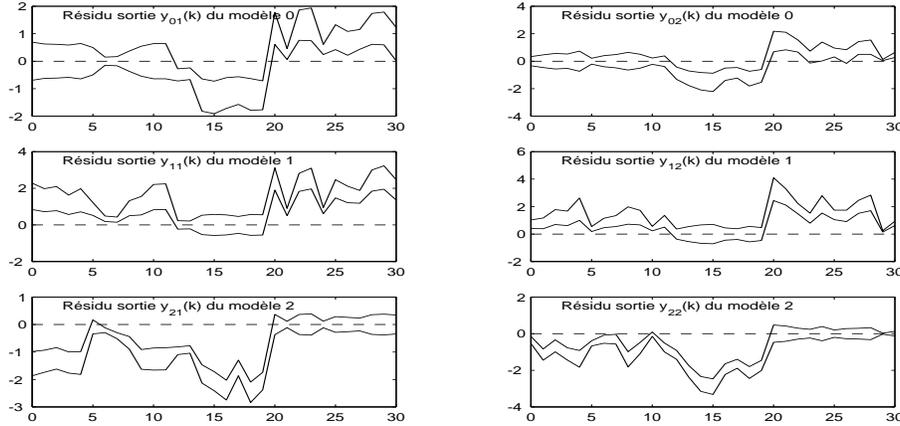


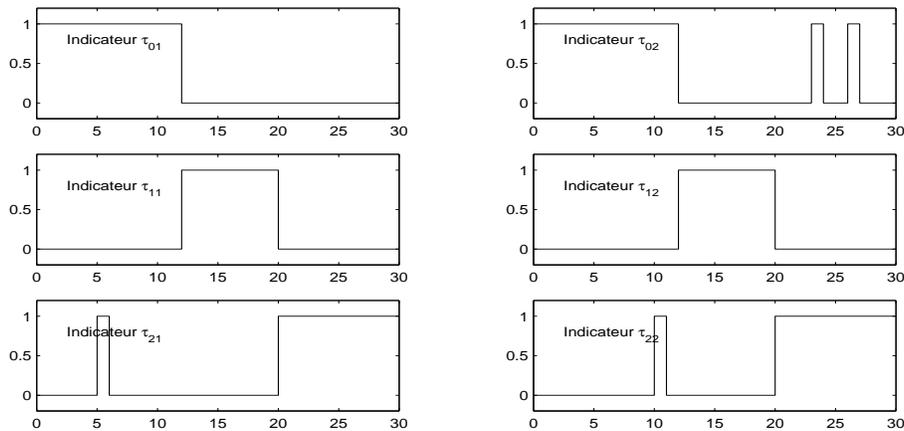
Fig. 4. Résidus

## 4 Conclusion

La prise en compte des incertitudes des connaissances est sans conteste l'un des points fondamentaux des recherches et développement actuels de l'analyse des systèmes. Cette communication s'est focalisée sur l'approche bornante qui permet de représenter chaque incertitude par un intervalle. La propagation de ces intervalles au cours du temps dans les équations du système conduit alors à définir des observateurs de type intervalle, qui eux-mêmes, fournissent des estimations de type intervalle de l'état du système. Dans le cadre du diagnostic, cela conduit à définir des indicateurs de détection de défaut de type intervalle.

## References

1. Armengol J., Vehi J., Travé-Massuyes L., Sainz M.A. 4th Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess'2000, Budapest, Hongrie, pp.168-173, 2000.



**Fig. 5.** Indicateurs de changement de mode de fonctionnement.

2. Bernard O., Gouzé J.L. Interval observers bundle for a class of bioprocess models. 2nd IFAC Symposium on System Structure and Control, SSSC'04, Oaxaca, Mexico, December 8-10, 2000.
3. Gouzé J. L., Rapaport A., Hadj-Sadok Z. Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 133, pp. 45-56, 2000.
4. Lin H., Zhai, G., Antsaklis P.J. Set-valued observer for a class of discrete-time uncertain linear systems with persistent disturbance. American Control Conference, Denver, Colorado, USA, June 4-6, 2003.
5. Lunze J., Steffen T., Riedel U. Fault diagnosis of dynamical systems based on state-set observers. Presented at Bridge Day at SafeProcess/DX'03. 14th International Workshop on Principles of Diagnosis, DX'03, Washington D.C., USA, June 11-14, 2003.
6. Ploix S., Adrot O., Ragot J. Parameter uncertainty computation in static linear models. 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, USA, December 14-16, 1999.
7. Rapaport A., Gouzé, J.-L. Parallelotopic and practical observers for nonlinear uncertain systems. *International Journal of Control*, 76 (3), pp. 237-251, 2003.
8. Shamma J.S., Tu K.-Y. Set-valued observers and optimal disturbance rejection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (2), pp. 253-264, 1999.
9. Schaeffer E. Diagnostic des machines asynchrones : modèles et outils paramétriques dédiés à la simulation et à la détection de défauts. Thèse de Doctorat, Université de Nantes, décembre 1999.
10. Steyer J.P., Harmand J., Alcaraz-Gonzalez V. Interval-based diagnosis of an anaerobic digester pilot plant. 4th Symposium on Fault Detection Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess'2000, Budapest, Hungary, June 14-16, 2000.
11. Walter E., Piet-Lahanier H. Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded-error models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 (8), pp. 911-915, 1989.