Estimation d'état et d'entrée inconnue d'un système représenté par un multimodèle discret

Abdelkader AKHENAK, José RAGOT et Didier MAQUIN

Institut National Polytechnique de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy

UMR 7039 CNRS – Université Henri Poincaré, Nancy 1 – INPL

Objectifs

Objectifs

- Concevoir un observateur non linéaire à entrées inconnues
- Avoir la capacité d'estimer les entrées inconnues

Objectifs

- Concevoir un observateur non linéaire à entrées inconnues
- Avoir la capacité d'estimer les entrées inconnues

Moyens

Objectifs

- Concevoir un observateur non linéaire à entrées inconnues
- Avoir la capacité d'estimer les entrées inconnues

Moyens

- Représenter le comportement du système par un multimodèle
- Eliminer ou compenser les entrées inconnues

Objectifs

- Concevoir un observateur non linéaire à entrées inconnues
- Avoir la capacité d’estimer les entrées inconnues

Moyens

- Représenter le comportement du système par un multimodèle
- Eliminer ou compenser les entrées inconnues

Difficultés

Objectifs

- Concevoir un observateur non linéaire à entrées inconnues
- Avoir la capacité d'estimer les entrées inconnues

Moyens

- Représenter le comportement du système par un multimodèle
- Eliminer ou compenser les entrées inconnues

Difficultés

- Elaboration du multimodèle (hors propos)
- Satisfaction de contraintes structurelles
- Résolution d'inégalités matricielles bilinéaires

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Observateur à entrées inconnues

$$\begin{cases} z(t+1) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Observateur à entrées inconnues

$$\begin{cases} z(t+1) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t) = (I + EC)x(t) - z(t)$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Observateur à entrées inconnues

$$\begin{cases} z(t+1) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t) = \underbrace{(I + EC)}_{P}x(t) - z(t)$$

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t)) + EF\bar{u}(t+1)$$

Dynamique de l’erreur d’estimation d’état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t)) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d’autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + \\ (PR - KF)\bar{u}(t)) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t)) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

$$PR - KF = 0$$

$$EF = 0$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t)) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

$$PR - KF = 0$$

$$EF = 0$$

Convergence asymptotique

N stable

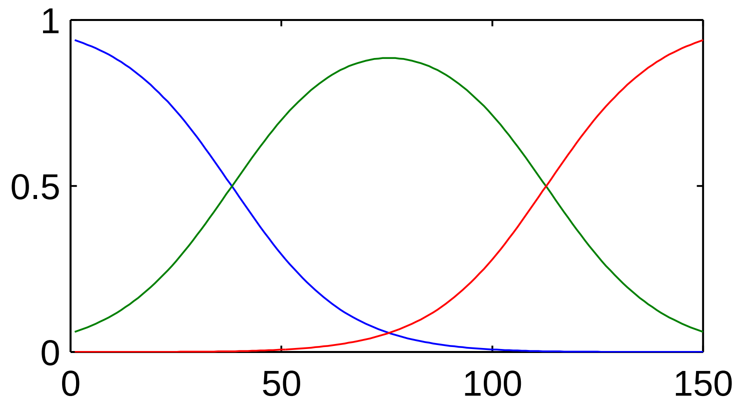
Description de la structure

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) \right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) \end{cases}$$

Description de la structure

$$\begin{cases} x(t+1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

avec $\begin{cases} \xi(t) = \{u(t), x(t), y(t)\} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases}$



Elaboration d'un multiobservateur (1)

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) \end{cases}$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) \end{cases}$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} z(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \big(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)\big) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases}$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) \end{cases}$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} z(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t))\big(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)\big) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Elaboration d’un multiobservateur (2)

Convergence asymptotique de l’erreur d’estimation

$$e(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) N_i e(t)$$

Elaboration d'un multiobservateur (2)

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

$$e(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) N_i e(t)$$

si

$$\begin{cases} P &= I + EC \\ N_i P &= P A_i - L_i C \\ K_i &= N_i E + L_i \\ P R_i &= K_i F \\ G_i &= P B_i \\ E F &= 0 \end{cases}$$

et

$$N = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) N_i \quad \text{stable}$$

Elaboration d'un multiobservateur (3)

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

Paires (A_i, C) observables, F de plein rang colonne et $\forall i, \in \{1, ..., M\}$:

$$\begin{aligned} N_i^T X N_i - X &< 0 \\ N_i &= PA_i - K_i C \\ P &= I + EC \\ PR_i &= K_i F \\ EF &= 0 \\ L_i &= K_i - N_i E \\ G_i &= PB_i \end{aligned}$$

où $X \in \mathrm{I\!R}^{n \times n}$ est symétrique et définie positive.

Elaboration d’un multiobservateur (3)

Convergence asymptotique de l’erreur d’estimation

Paires (A_i, C) observables, F de plein rang colonne et $\forall i, \in \{1, ..., M\}$:

$$
\begin{aligned}
N_i^T X N_i - X &< 0 \\
N_i &= PA_i - K_i C \\
P &= I + EC \\
PR_i &= K_i F \\
EF &= 0 \\
L_i &= K_i - N_i E \\
G_i &= PB_i
\end{aligned}
$$

où $X \in \mathrm{IR}^{n \times n}$ est symétrique et définie positive.

Résolution du système (1)

Système

$$
\begin{aligned}
N_i^T X N_i - X &< 0 \\
N_i &= P A_i - K_i C \\
P &= I + E C \\
P R_i &= K_i F \\
E F &= 0
\end{aligned}
$$

Résolution du système (1)

Système

$$\begin{aligned} N_i^T X N_i - X &< 0 \\ N_i &= P A_i - K_i C \\ P &= I + E C \\ P R_i &= K_i F \\ E F &= 0 \end{aligned}$$

Résolution

$$E = I - F F^-$$

F^- inverse généralisée de F

Système

$$\begin{aligned} N_i^T X N_i - X &< 0 \\ N_i &= PA_i - K_i C \\ P &= I + EC \\ PR_i &= K_i F \\ EF &= 0 \end{aligned}$$

Résolution du système (2)

Système

$$
\begin{aligned}
N_i^T X N_i - X &< 0 \\
N_i &= PA_i - K_i C \\
P &= I + EC \\
PR_i &= K_i F \\
EF &= 0
\end{aligned}
$$

Résolution

$$N_i^T X N_i - X = (PA_i - K_i C)^T X (PA_i - K_i C) < 0$$

$$PR_i = K_i F$$

Inégalités matricielles bilinéaires en K_i et X sous con-traintes égalité.

Résolution du système (3)

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i)^T X (PA_i - K_i) < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Résolution du système (3)

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i)^T X (PA_i - K_i) < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Changement de variable

$$W_i = XK_i$$

Résolution du système (3)

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i)^T X (PA_i - K_i) < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Changement de variable

$$W_i = XK_i$$

Complément de Schur

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X & A_i^T PX - C^T W_i \\ XPA_i - W_i C & X \end{pmatrix} > 0 \\ XPR_i = W_i F \end{cases}$$

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i)^T X (PA_i - K_i) < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Changement de variable

$$W_i = XK_i$$

Complément de Schur

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X & A_i^T PX - C^T W_i \\ XPA_i - W_i C & X \end{pmatrix} > 0 \\ XPR_i = W_i F \end{cases}$$

Inégalités matricielles linéaires en X et W_i

Système

$$
\begin{aligned}
N_i^T X N_i - X &< 0 \\
N_i &= PA_i - K_i C \\
P &= I + EC \\
PR_i &= K_i F \\
EF &= 0 \\
L_i &= K_i - N_i E \\
G_i &= PB_i
\end{aligned}
$$

Résolution du système (4)

Système

$$
\begin{array}{rcl}
N_i^T X N_i - X & < & 0 \\
N_i & = & PA_i - K_i C \\
P & = & I + EC \\
PR_i & = & K_i F \\
EF & = & 0 \\
L_i & = & K_i - N_i E \\
G_i & = & PB_i
\end{array}
$$

Séquence de résolution

$E \longrightarrow P \longrightarrow G_i$ et $(X, W_i) \longrightarrow K_i = X^{-1} W_i \longrightarrow N_i \longrightarrow L_i$

Estimation des entrées inconnues (1)

Modèle du système

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (1)

Modèle du système

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = C x(t) + F \bar{u}(t) \end{cases}$$

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{\bar{u}}(t) \end{cases}$$

où $\hat{\bar{u}}(t)$ est une estimation de l'entrée inconnue $\bar{u}(t)$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t) \right) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{\bar{u}}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t) \right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + F\hat{\bar{u}}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues

$$\hat{\bar{u}}(t) = (W^T W)^{-1} W^T \begin{pmatrix} \hat{x}(t+1) - \sum_{i=1}^{M} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) \right) \\ y(t) - C\hat{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} \mu_i \left(\xi(t) \right) R_i \\ F \end{pmatrix}$$

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\xi(t))\big(A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)\big) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\xi(t))\big(A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)\big) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \xi(t) = y(t) \\ \mu_1(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(\xi(t))) \\ \mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t)) \end{cases}$$

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\xi(t))\big(A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)\big) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

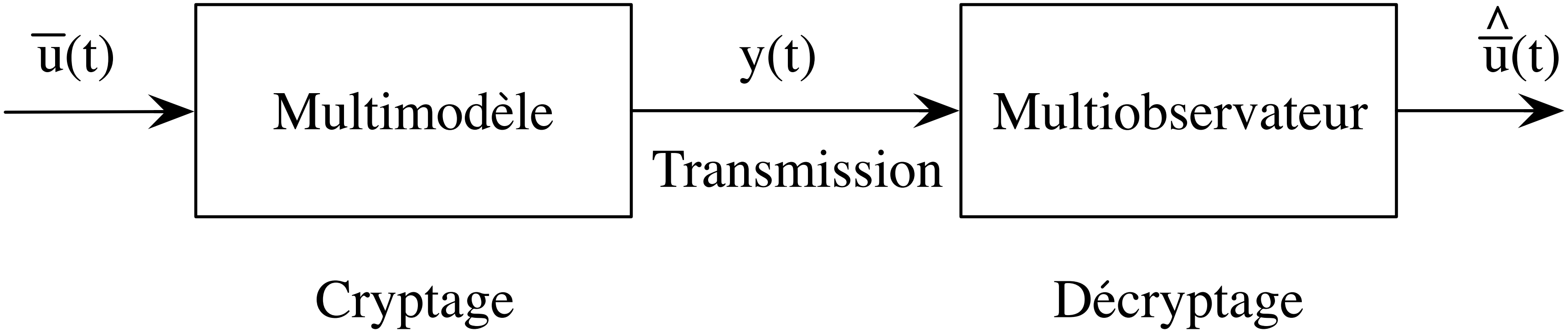
avec

$$\begin{cases} \xi(t) = y(t) \\ \mu_1(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(\xi(t))) \\ \mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t)) \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}$$

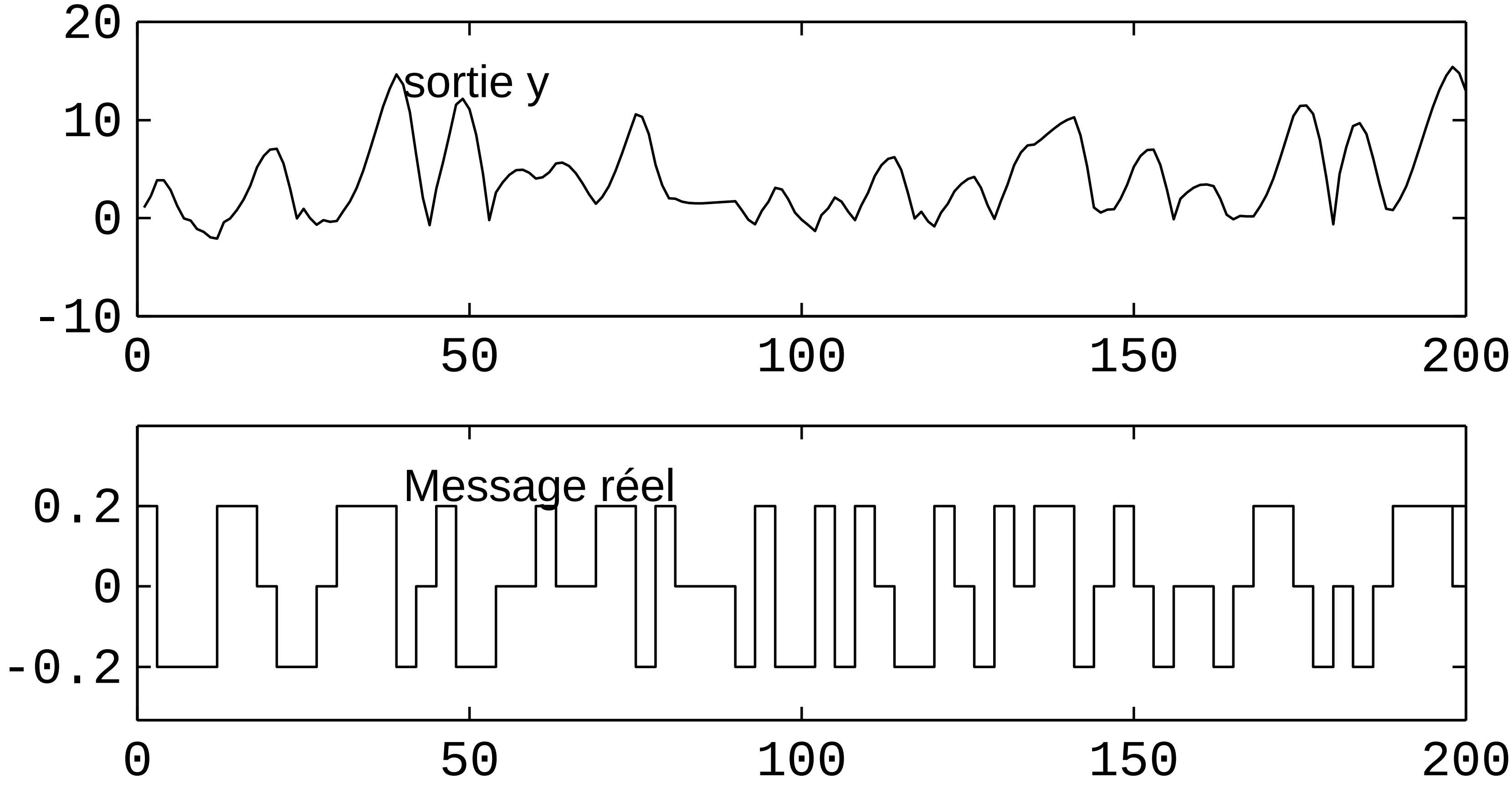
$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad F = 5$$

Cryptage – décryptage



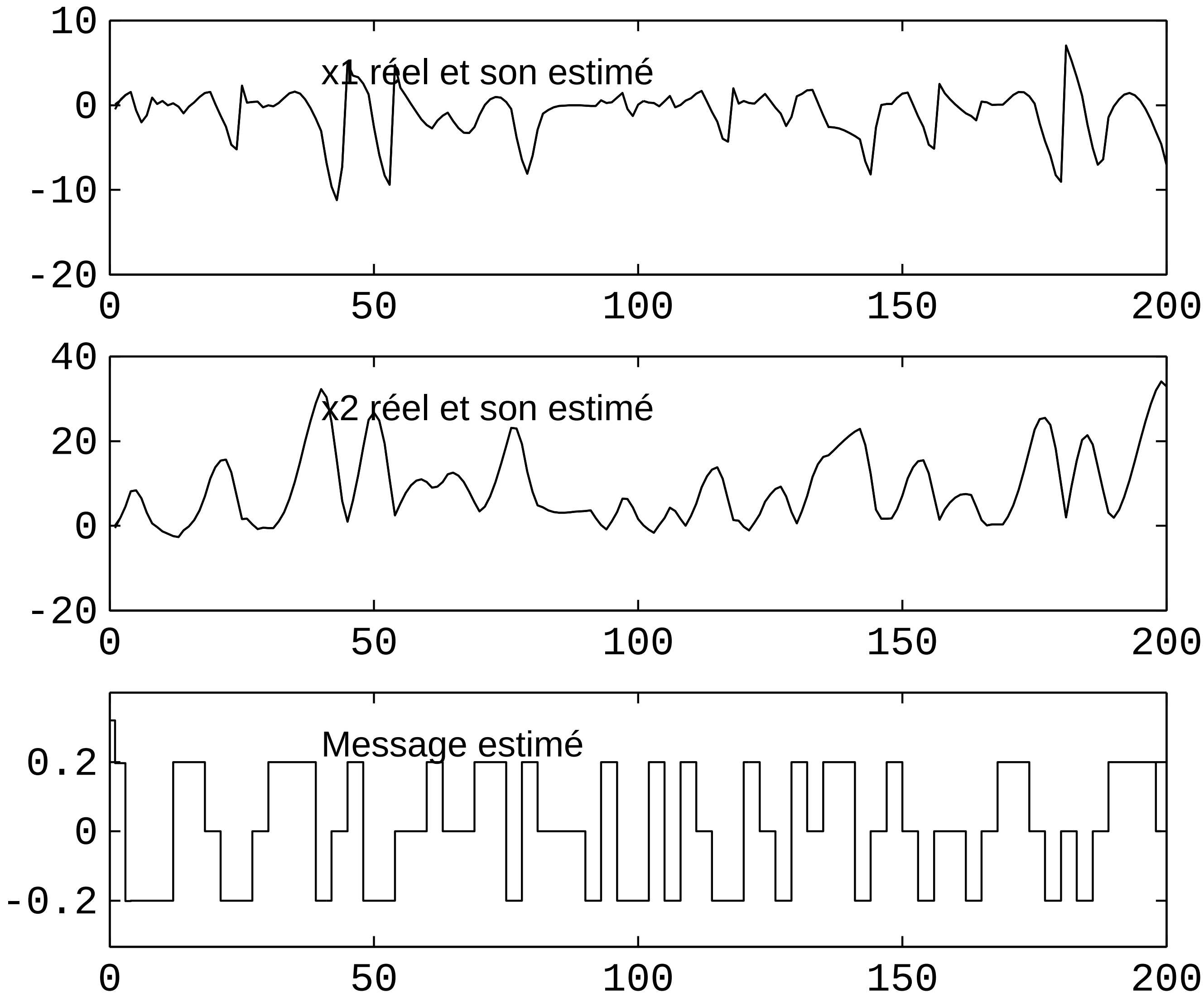
Exemple académique (3)

Signal transmis et message originel



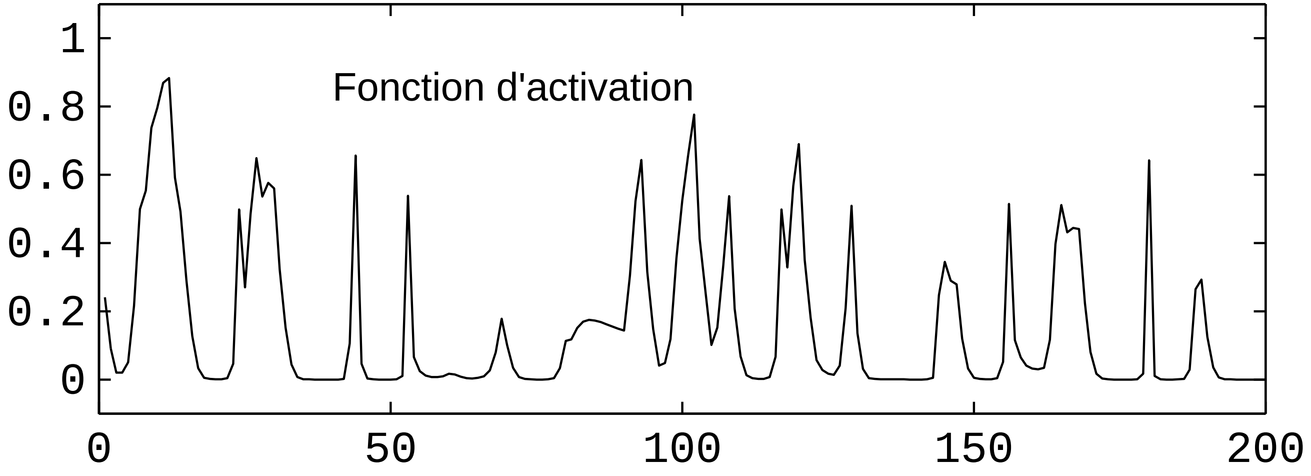
Exemple académique (4)

Etats réels et estimés et message décrypté

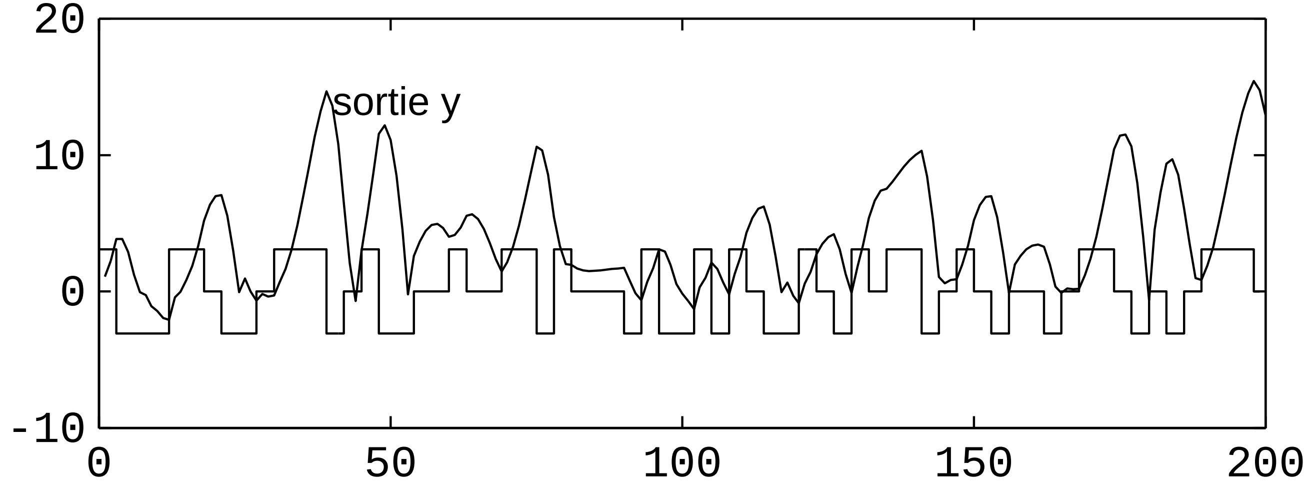


Exemple académique (5)

Fonction d’activation



Sortie et message



Conclusion

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL

Conclusion

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL

Conclusion

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL
- Portée générale de la méthode proposée liée au pouvoir de représentation des multimodèles

Conclusion

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL
- Portée générale de la méthode proposée liée au pouvoir de représentation des multimodèles
- Application prometteuse dans le contexte du cryptage