

Conception d'un observateur PI pour un multimodèle découplé

Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et **Didier Maquin**

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR7039, Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye
54516 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex, France

Huitième conférence internationale
des Sciences et Techniques de l'Automatique, STA'2007
5–7 novembre 2007 Sousse, Tunisie



Nancy-Université
 INPL



Problématique

- ▶ Les systèmes physiques présentent souvent un comportement de type non linéaire
- ▶ Modèles non linéaires relativement difficiles à manipuler
- ▶ Nombreux outils d'analyse pour les modèles linéaires
- ▶ Dilemme entre la précision (modèles non linéaires) et l'*utilisabilité* (modèles linéaires)

Problématique

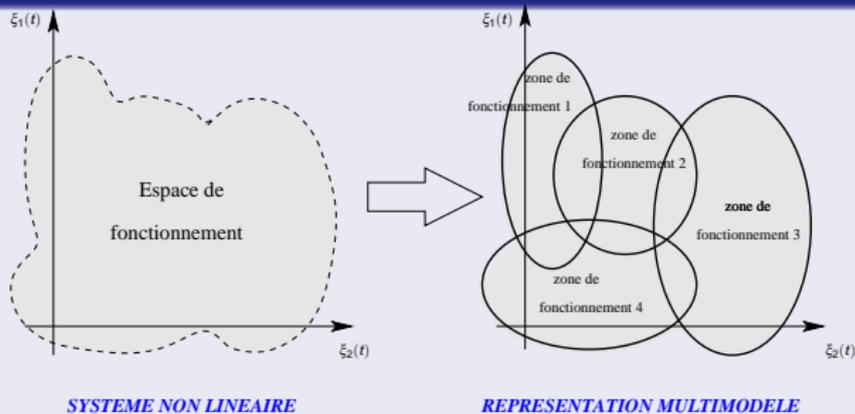
- ▶ Les systèmes physiques présentent souvent un comportement de type non linéaire
- ▶ Modèles non linéaires relativement difficiles à manipuler
- ▶ Nombreux outils d'analyse pour les modèles linéaires
- ▶ Dilemme entre la précision (modèles non linéaires) et l'*utilisabilité* (modèles linéaires)

Approche proposée

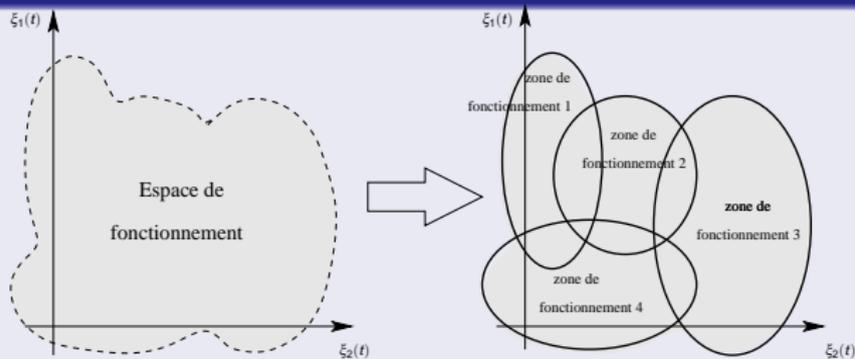
Approximation du système non linéaire par un **multimodèle** :

- 1 ensemble de sous-modèles
- 2 mécanisme d'interpolation

Principe du multimodèle



Principe du multimodèle

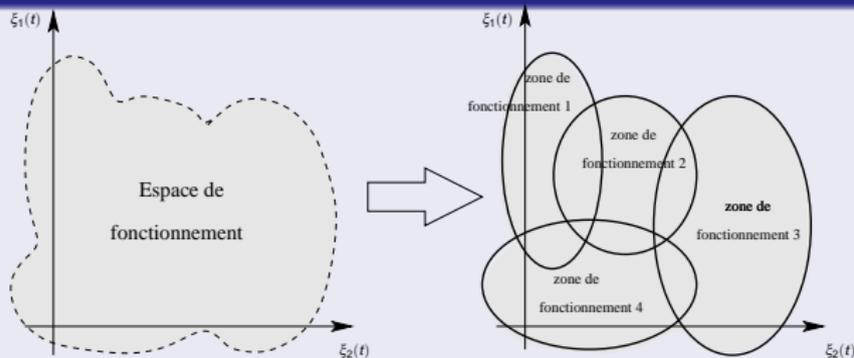


SYSTEME NON LINEAIRE

REPRESENTATION MULTIMODELE

- ▶ Décomposition en zones de fonctionnement

Principe du multimodèle

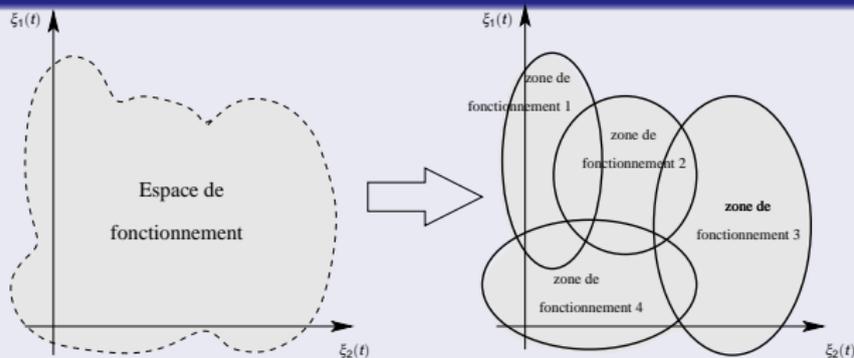


SYSTEME NON LINEAIRE

REPRESENTATION MULTIMODELE

- ▶ Décomposition en zones de fonctionnement
- ▶ Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire

Principe du multimodèle

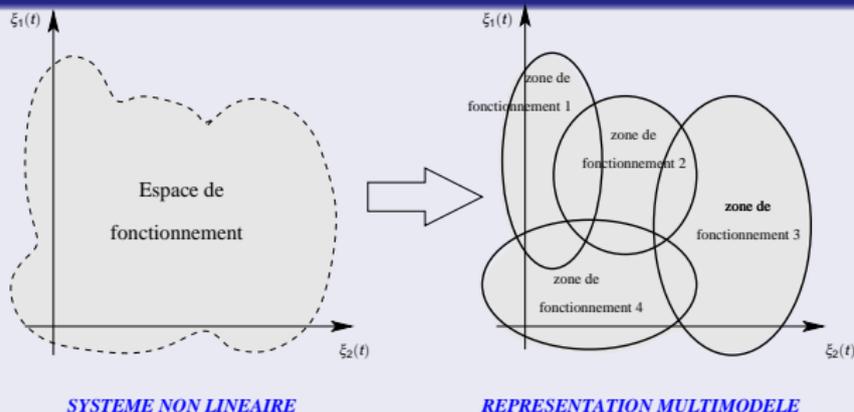


SYSTEME NON LINEAIRE

REPRESENTATION MULTIMODELE

- ▶ Décomposition en zones de fonctionnement
- ▶ Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire
- ▶ La contribution des sous-modèles est quantifiée par une fonction poids

Principe du multimodèle



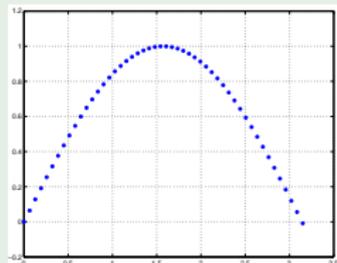
- ▶ Décomposition en zones de fonctionnement
- ▶ Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire
- ▶ La contribution des sous-modèles est quantifiée par une fonction poids

Intérêts des multimodèles

- ▶ Bon moyen de représenter un système non linéaire
- ▶ Extension des résultats du cas linéaire au cas non linéaire

Comportement non linéaire

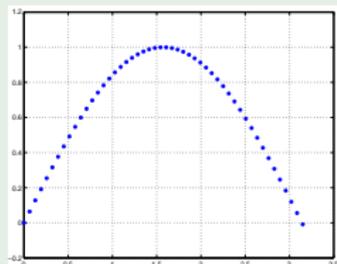
- ▶ Cas statique
- ▶ $y(x) = \sin(x)$
- ▶ $x \in [0, 3.2]$



Représentation par un multimodèle

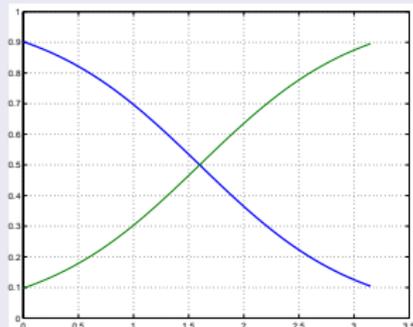
Comportement non linéaire

- ▶ Cas statique
- ▶ $y(x) = \sin(x)$
- ▶ $x \in [0, 3.2]$



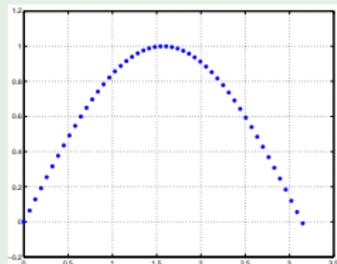
Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



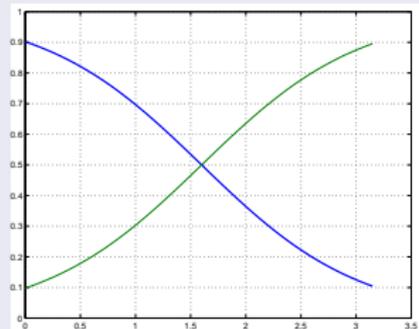
Comportement non linéaire

- ▶ Cas statique
- ▶ $y(x) = \sin(x)$
- ▶ $x \in [0, 3.2]$

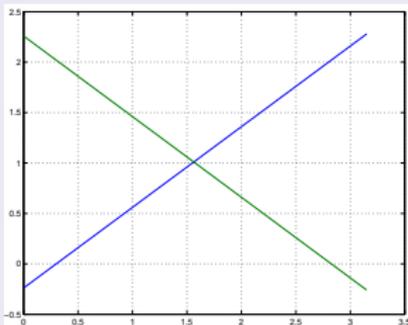


Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$

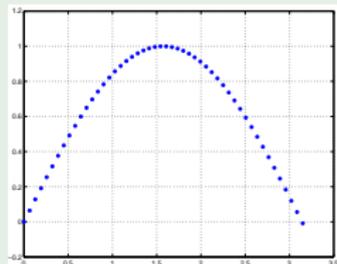


Sous-modèles : $f_i(x)$



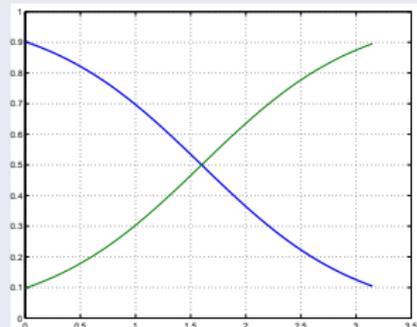
Comportement non linéaire

- ▶ Cas statique
- ▶ $y(x) = \sin(x)$
- ▶ $x \in [0, 3.2]$

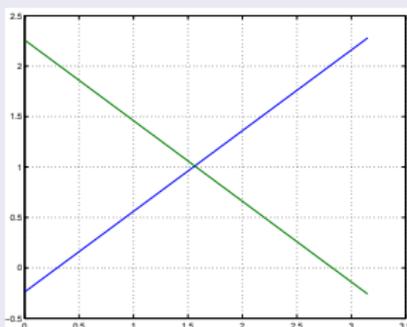


Représentation par un multimodèle

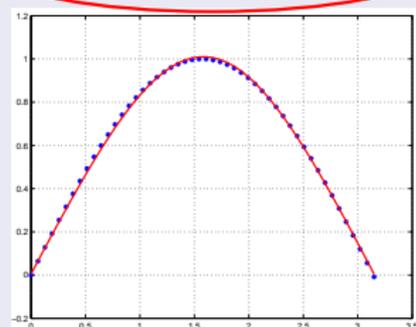
Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



Sous-modèles : $f_i(x)$



$$\hat{y}(x) = \mu_1(x)f_1(x) + \mu_2(x)f_2(x)$$



Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) A_i \right\} x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) B_i \right\} u(t) , \\ y(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) C_i \right\} x(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) A_i \right\} x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) B_i \right\} u(t) , \\ y(t) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) C_i \right\} x(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) A_i \right\} x(t) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) B_i \right\} u(t) , \\ y(t) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) C_i \right\} x(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- ▶ Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps

Structure classique

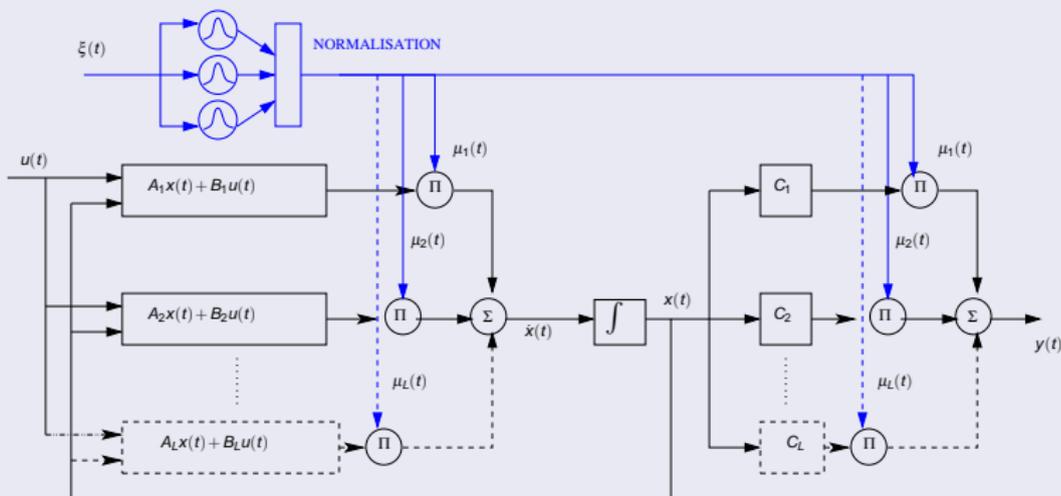
Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à **état unique**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \mathbf{A}_i \right\} \mathbf{x}(t) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \mathbf{B}_i \right\} u(t) , \\ \mathbf{y}(t) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) \mathbf{C}_i \right\} \mathbf{x}(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- ▶ Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps
- ▶ Un même vecteur d'état pour les sous-modèles
- ▶ **La dimension de l'état des sous-modèles est la même**

Multimodèle Takagi-Sugeno



Commentaires

- ▶ La notion de sous-modèle n'existe pas
- ▶ Lien avec la modélisation floue (règles de type : **si prémisses alors conséquence**)

Nouvelle structure

Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) , \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) , \\ y(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

Nouvelle structure

Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) , \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) , \\ y(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles

Nouvelle structure

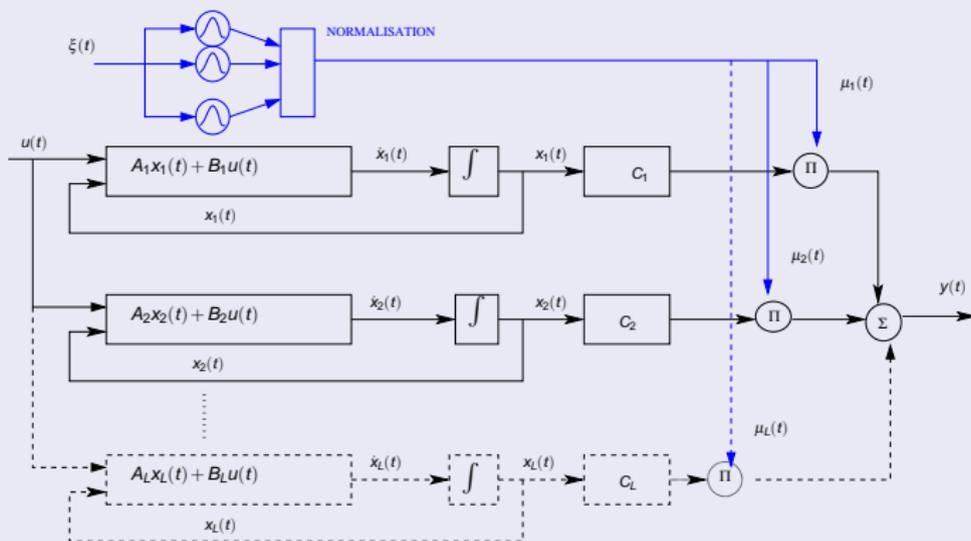
Multimodèle *découplé* : Multimodèle à *états découplés*

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) , \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) , \\ y(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \forall t, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- ▶ La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles
- ▶ L'espace d'état de chaque sous-modèle est indépendant
- ▶ **La dimension de l'état des sous-modèles peut être différente**

Multimodèle découplé



Commentaires

- ▶ Mise en parallèle de modèles de type Wiener
- ▶ Véritable existence des sous-modèles

Résultats principaux

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) ,$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) ,$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) .$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

Notations

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) C_1^T \\ \vdots \\ \mu_i(t) C_i^T \\ \vdots \\ \mu_L(t) C_L^T \end{bmatrix}^T, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix}, \xi(t) = t.$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) ,$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) ,$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) .$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

 \Leftrightarrow

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) ,$$

$$y(t) = \tilde{C}(\xi(t))x(t) .$$

$$x \in \mathbb{R}^n, n = \sum_{i=1}^L n_i$$

Notations

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t)C_1^T \\ \vdots \\ \mu_i(t)C_i^T \\ \vdots \\ \mu_L(t)C_L^T \end{bmatrix}^T, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix}, \xi(t) = t.$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \quad , \quad \text{Forme linéaire} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}} u(t) \quad ,$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \quad , \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \tilde{\mathbf{C}}(\xi(t)) \mathbf{x}(t) \quad .$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) \quad .$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

 \Leftrightarrow

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^L n_i$$

Notations

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) C_1^T \\ \vdots \\ \mu_i(t) C_i^T \\ \vdots \\ \mu_L(t) C_L^T \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = t.$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) ,$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) ,$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) .$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

 \Leftrightarrow

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) ,$$

$$y(t) = \tilde{C}(\xi(t))x(t) .$$

Forme non linéaire

 \Leftrightarrow

$$x \in \mathbb{R}^n, n = \sum_{i=1}^L n_i$$

Notations

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix}, \tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t)C_1^T \\ \vdots \\ \mu_i(t)C_i^T \\ \vdots \\ \mu_L(t)C_L^T \end{bmatrix}^T, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix}, \xi(t) = t.$$

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

- ▶ \tilde{A} est une matrice bloc diagonale

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

- ▶ \tilde{A} est une matrice bloc diagonale
- ▶ \tilde{A} est une matrice de Hurwitz si et seulement si A_i sont des matrices de Hurwitz

Problématique

- ▶ Un observateur à gain proportionnel a été proposé dans (Orjuela et al., 2007)
- ▶ Le gain de l'observateur a tendance à amplifier les perturbations (bruit)
- ▶ Un faible gain de l'observateur peut affecter les performances dynamiques de l'observateur
- ▶ Dilemme entre rejet des perturbations et performances dynamiques

Problématique

- ▶ Un observateur à gain proportionnel a été proposé dans (Orjuela et al., 2007)
- ▶ Le gain de l'observateur a tendance à amplifier les perturbations (bruit)
- ▶ Un faible gain de l'observateur peut affecter les performances dynamiques de l'observateur
- ▶ Dilemme entre rejet des perturbations et performances dynamiques

Observateur Proportionnel-Intégral PI

- ▶ Connu par ses propriétés de robustesse
- ▶ Ajoute un degré de liberté dans la synthèse de l'observateur
- ▶ Permet d'obtenir un compromis entre le rejet des perturbations et les performances dynamiques de l'observateur

Equations du multimodèle

Introduction d'un terme intégral $z(t) = \int_0^t y(\xi) d\xi$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) , \\ \dot{z}(t) = \tilde{C}(t)x(t), \\ y(t) = \tilde{C}(t)x(t). \end{cases}$$

Equations du multimodèle

Introduction d'un terme intégral $z(t) = \int_0^t y(\xi) d\xi$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \\ \dot{z}(t) = \tilde{C}(t)x(t), \\ y(t) = \tilde{C}(t)x(t). \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = \tilde{A}_1(t)X(t) + \tilde{C}_1\tilde{B}u(t), \\ Y_1(t) = \tilde{C}(t)\tilde{C}_1^T X(t), \\ Y_2(t) = \tilde{C}_2^T X(t). \end{cases}$$

Notations

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \tilde{A}_1(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ \tilde{C}(t) & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Equations du multimodèle

Introduction d'un terme intégral $z(t) = \int_0^t y(\xi) d\xi$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \\ \dot{z}(t) = \tilde{C}(t)x(t), \\ y(t) = \tilde{C}(t)x(t). \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = \tilde{A}_1(t)X(t) + \tilde{C}_1\tilde{B}u(t), \\ Y_1(t) = \tilde{C}(t)\tilde{C}_1^T X(t), \\ Y_2(t) = \tilde{C}_2^T X(t). \end{cases}$$

Notations

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \tilde{A}_1(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ \tilde{C}(t) & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Structure de l'observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = \tilde{A}_1(t)\hat{X}(t) + \tilde{C}_1\tilde{B}u(t) + K_P(Y_1(t) - \hat{Y}_1(t)) + K_I(Y_2(t) - \hat{Y}_2(t)), \\ \hat{Y}_1(t) = \tilde{C}(t)\tilde{C}_1^T \hat{X}(t), \\ \hat{Y}_2(t) = \tilde{C}_2^T \hat{X}(t). \end{cases}$$

Objectif

Obtenir des matrices K_P et K_I pour que l'erreur d'estimation :

$$e(t) = X(t) - \hat{X}(t) ,$$

tende vers zéro

- ▶ quelles que soient les conditions initiales,
- ▶ quel que soit le mélange entre les sous-modèles.

Objectif

Obtenir des matrices K_P et K_I pour que l'erreur d'estimation :

$$e(t) = X(t) - \hat{X}(t) ,$$

tende vers zéro

- ▶ quelles que soient les conditions initiales,
- ▶ quel que soit le mélange entre les sous-modèles.

Théorème

S'il existe une matrice symétrique et définie positive P , des matrices L_P et L_I vérifiant les LMIs suivantes :

$$(P\bar{A}_i - L_P\bar{C}_i\tilde{C}_1^T - L_I\tilde{C}_2^T) + (P\bar{A}_i - L_P\bar{C}_i\tilde{C}_1^T - L_I\tilde{C}_2^T)^T < 0, \quad i = 1 \dots L$$

alors l'observateur PI est asymptotiquement convergent. Les gains de l'observateur sont donnés par $K_P = P^{-1}L_P$ et $K_I = P^{-1}L_I$.

Ligne directrice

(i) Définir la dynamique de l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A_{obs}(t)e(t) , \\ A_{obs}(t) &= \tilde{A}_1(t) - K_P \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T .\end{aligned}$$

(ii) Réécriture des matrices $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{A}_1(t)$ sous la forme

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{C}_i \quad \text{et} \quad \tilde{A}_1(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{A}_i .$$

(iii) Utiliser la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T .$$

(iv) Obtenir des conditions vérifiant

$$\exists P = P^T > 0 \rightarrow V(e(t)) > 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(e(t)) < 0 .$$

Ligne directrice

- (i) Définir la dynamique de l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A_{obs}(t)e(t), \\ A_{obs}(t) &= \tilde{A}_1(t) - K_P \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T.\end{aligned}$$

- ▶ Assurer que la matrice $A_{obs}(t)$ soit toujours de Hurwitz

- (ii) Réécriture des matrices $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{A}_1(t)$ sous la forme

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{C}_i \quad \text{et} \quad \tilde{A}_1(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{A}_i.$$

- (iii) Utiliser la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T.$$

- (iv) Obtenir des conditions vérifiant

$$\exists P = P^T > 0 \rightarrow V(e(t)) > 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(e(t)) < 0.$$

Ligne directrice

- (i) Définir la dynamique de l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A_{obs}(t)e(t), \\ A_{obs}(t) &= \tilde{A}_1(t) - K_P \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T.\end{aligned}$$

- ▶ Assurer que la matrice $A_{obs}(t)$ soit toujours de Hurwitz

- (ii) Réécriture des matrices $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{A}_1(t)$ sous la forme

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \bar{C}_i \quad \text{et} \quad \tilde{A}_1(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \bar{A}_i.$$

- (iii) Utiliser la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T.$$

- (iv) Obtenir des conditions vérifiant

$$\exists P = P^T > 0 \rightarrow V(e(t)) > 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(e(t)) < 0.$$

Ligne directrice

- (i) Définir la dynamique de l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A_{obs}(t)e(t) , \\ A_{obs}(t) &= \tilde{A}_1(t) - K_P \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T .\end{aligned}$$

- ▶ Assurer que la matrice $A_{obs}(t)$ soit toujours de Hurwitz

- (ii) Réécriture des matrices $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{A}_1(t)$ sous la forme

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \bar{C}_i \quad \text{et} \quad \tilde{A}_1(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \bar{A}_i .$$

- (iii) Utiliser la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T .$$

- (iv) Obtenir des conditions vérifiant

$$\exists P = P^T > 0 \rightarrow V(e(t)) > 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(e(t)) < 0 .$$

Ligne directrice

- (i) Définir la dynamique de l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= A_{obs}(t)e(t), \\ A_{obs}(t) &= \tilde{A}_1(t) - K_P \tilde{C}(t) \tilde{C}_1^T - K_I \tilde{C}_2^T.\end{aligned}$$

- ▶ Assurer que la matrice $A_{obs}(t)$ soit toujours de Hurwitz

- (ii) Réécriture des matrices $\tilde{C}(t)$ et $\tilde{A}_1(t)$ sous la forme

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \bar{C}_i \quad \text{et} \quad \tilde{A}_1(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \bar{A}_i.$$

- (iii) Utiliser la fonction candidate de Lyapunov

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t), \quad P > 0 \quad P = P^T.$$

- (iv) Obtenir des conditions vérifiant

$$\exists P = P^T > 0 \rightarrow V(e(t)) > 0 \quad \text{et} \quad \dot{V}(e(t)) < 0.$$

Exemple de simulation

Exemple de simulation

Estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 2$ sous-modèles de dimensions différentes :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0.6 \\ -0.3 & -0.9 & 0 \\ -1.3 & 0.6 & -0.8 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.5 \end{bmatrix}, & C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} -0.2 & -0.6 \\ 0.3 & -1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

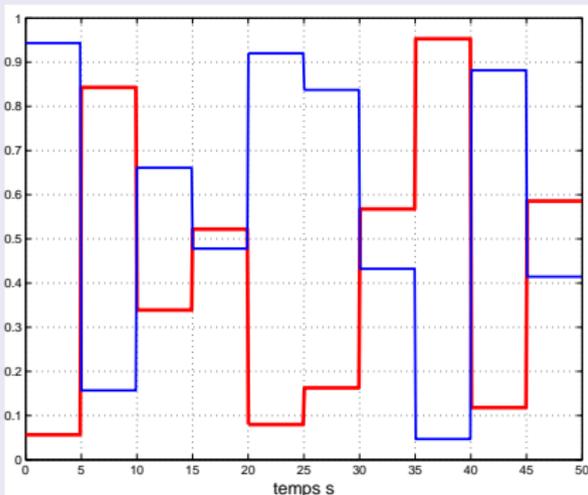
Le degré d'activation des sorties des sous-modèles dépend du signal de commande (la variable de décision $\xi(t) = u(t)$)

Gains de l'observateur

$$K_P = \begin{bmatrix} -0.0126 & 0.0303 & -0.0352 & 0.1128 & 0.0417 & 0.9353 & -0.0545 \\ -0.1939 & -0.0243 & 0.0342 & -0.1526 & -0.0403 & -0.0220 & 0.9842 \end{bmatrix}^T,$$

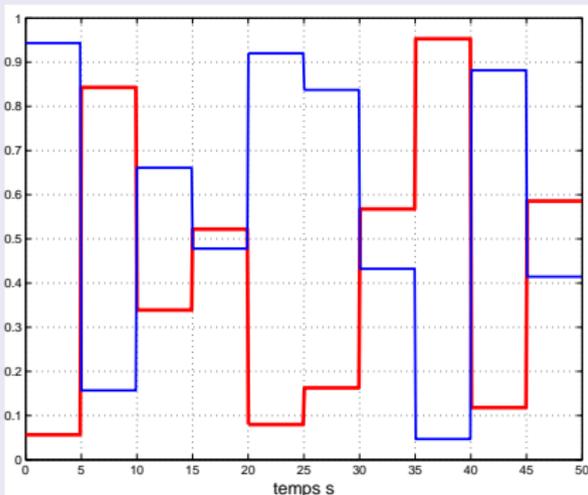
$$K_I = \begin{bmatrix} 1.4524 & 0.0273 & 0.5318 & 0.0343 & 0.0056 & 1.2149 & -0.0925 \\ -0.2764 & 0.8597 & -0.3213 & 0.0273 & 0.0149 & -0.0043 & 1.1995 \end{bmatrix}^T.$$

Fonctions de pondération

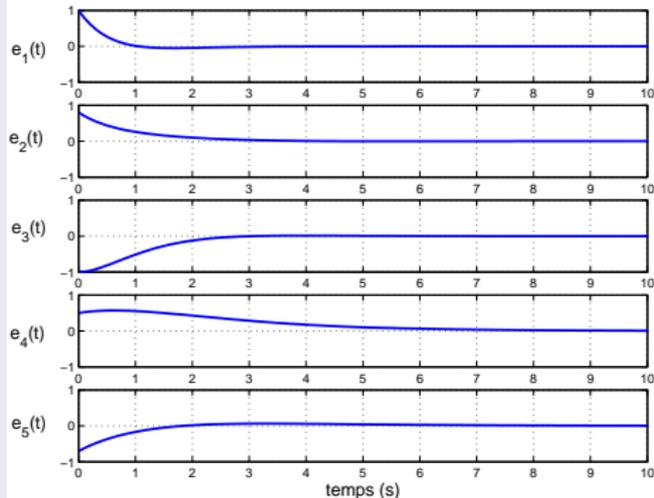


Les sorties des sous-modèles
sont toujours actives

Fonctions de pondération



Erreur d'estimation



Les sorties des sous-modèles
sont toujours actives

- Synthèse d'un observateur P (Orjuela et al., 2007)

$$K = \begin{bmatrix} 0.3001 & 0.3001 & -0.0796 & 0.3899 & 0.1866 \\ -0.2767 & -0.0812 & 0.6160 & -0.4690 & 0.0108 \end{bmatrix}^T .$$

- Une perturbation de type rampe est ajoutée sur la sortie du multimodèle

- Synthèse d'un observateur P (Orjuela et al., 2007)

$$K = \begin{bmatrix} 0.3001 & 0.3001 & -0.0796 & 0.3899 & 0.1866 \\ -0.2767 & -0.0812 & 0.6160 & -0.4690 & 0.0108 \end{bmatrix}^T .$$

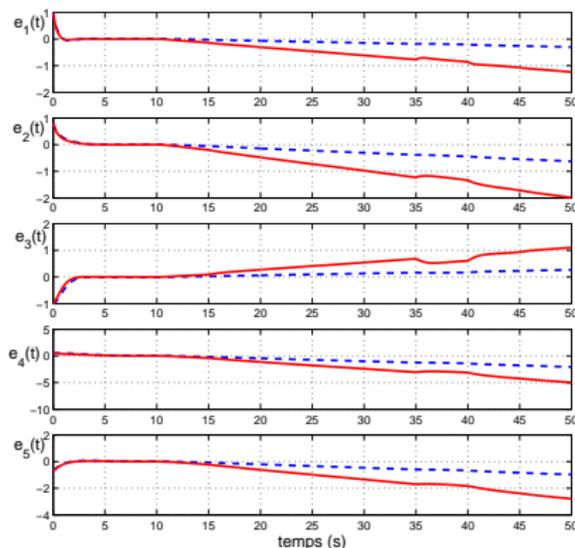
- Une perturbation de type rampe est ajoutée sur la sortie du multimodèle

Comparaison entre un observateur P et PI

- Synthèse d'un observateur P (Orjuela et al., 2007)

$$K = \begin{bmatrix} 0.3001 & 0.3001 & -0.0796 & 0.3899 & 0.1866 \\ -0.2767 & -0.0812 & 0.6160 & -0.4690 & 0.0108 \end{bmatrix}^T$$

- Une perturbation de type rampe est ajoutée sur la sortie du multimodèle



Conclusions

- ▶ Une nouvelle structure de multimodèle a été utilisée pour effectuer l'estimation d'état d'un système non linéaire
- ▶ Les dimensions des sous-modèles peuvent être différentes
- ▶ Une démarche pour la synthèse d'un observateur PI a été proposée

Perspectives

- ▶ Réduction du conservatisme de la solution proposée
- ▶ Utilisation de l'observateur pour le diagnostic des systèmes non linéaires