Institut National Polytechnique de Lorraine
Ecole Nationale Supérieure de Géologie

Cours de première année

Mathématiques

Didier MAQUIN
Maître de Conférences

Mai 1996
Révision 1 : Décembre 1997
Révision 2 : Octobre 2000

Table des matières

Chapitre 5 : Transformée de Fourier

Chapitre 6 : Transformation de Laplace

Chapitre 1

Fonctions d'une variable complexe Généralité - Intégration - Dérivation

1. Définitions

L'ensemble des nombres complexes **C** peut être considéré comme un espace vectoriel normé, la norme étant le module. On identifie **C** à $\mathbf{R}^2$, muni des règles d'addition et de multiplication des nombres complexes.

$z \quad \mathbf{C} \qquad z = \{x, y\} = x + \mathrm{i}y \qquad z = \{\rho, \theta\} = \rho e^{\mathrm{i}\theta} = \rho\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\rho\sin(\theta)\big)$

identification cartésienne — identification polaire

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

On appelle fonction d'une variable complexe, une application *f* de $z \quad \mathbf{C}$ dans **C** :

$$f \ : \ z = x + \mathrm{i}y \quad \mathbf{C} \ \rightarrow \ \boxed{f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)} \quad \mathbf{C}$$

1ère remarque : A une fonction d'une variable complexe correspond une application plan sur plan : elle n'a pas de graphe.

2ème remarque : Il existe deux classes de fonctions : celles qui s'expriment en fonction de z :

$$f(z) = x + \mathrm{i}y = z$$
$$f(z) = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = z^2$$

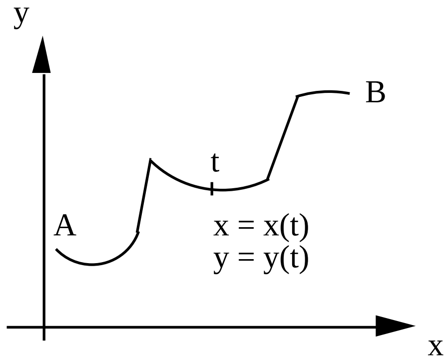
et celles qui ne peuvent pas s'exprimer en fonction de z :

$$f(z) = x$$
$$f(z) = x + 2\mathrm{i}y$$

Cependant, toutes les fonctions peuvent s'exprimer en fonction de z et de $\bar{z}$, puisque :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

Chemin : un chemin est formé d'arcs simples continûment différentiables



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}\\[4pt] \dfrac{dy}{dt}\end{array}\right\} \text{ continues}$$

Circuit : c'est un chemin fermé

Domaine : ouvert de **C** d'un seul tenant. Etant donnés deux points quelconques pris dans l'ouvert, on peut trouver au moins un chemin joignant les deux points sans sortir du domaine.

Circuits homotopes : deux circuits sont dits homotopes dans un domaine, si l'on peut passer de l'un à l'autre par déformation continue sans sortir du domaine.

Circuits homotopes à zéro : un circuit est dit homotope à zéro dans un domaine s'il peut être réduit à un point par déformation continue dans un domaine.

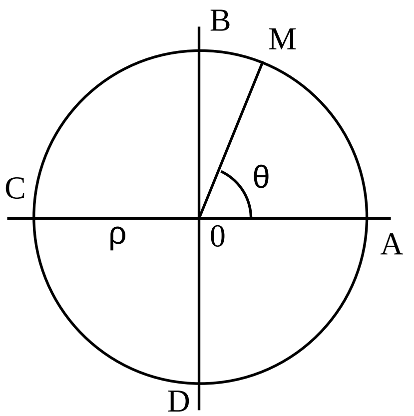
Domaine simplement connexe : domaine dans lequel tous les circuits sont homotopes à zéro.

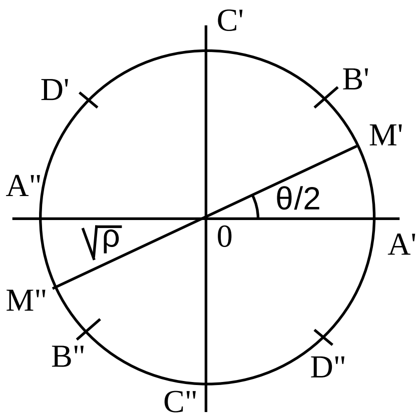
Continuité - Limites : ces notions sont des transpositions immédiates aux complexes de celles définies pour les fonctions d'une variable réelle.

2. Fonctions multivalentes

Les fonctions multivalentes sont des fonctions qui, à une valeur de la variable, font correspondre plusieurs ou une infinité de valeurs de la fonction.

Exemple 1 : fonction racine $z \to \sqrt{z}$, définie par : $z = \rho e^{i\theta} \to \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2}$.





Le point courant M, d'affixe z a deux images M' et M''. Si l'on choisit pour M' l'affixe $\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$, θ modulo 2π, l'affixe de M'' est $-\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$. Le choix opposé est possible. La fonction racine est bivalente (modulo 2π). L'origine 0, qui n'a qu'une seule image, est un point de ramification (ou point de branchement) de cette fonction.

Exemple 2 : fonction logarithmique

La fonction exponentielle est définie sans ambiguïté par $z \to e^z = e^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$.

Posons : $e^z = w$, alors $|w| = e^x$, d'où : $x = \mathrm{Ln}(|w|)$

et : $\mathrm{Arg}(w) = y \pmod{2\pi}$, d'où $y = \mathrm{Arg}(w) + 2k\pi$ $\quad k \quad \mathbf{Z}$

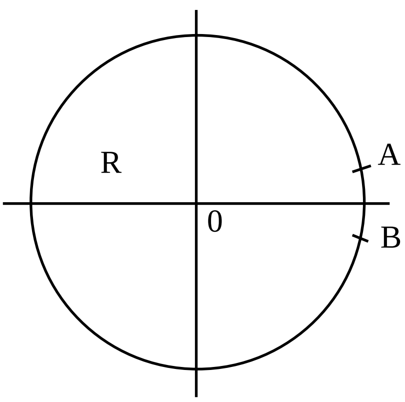
avec : $0 \leq \mathrm{Arg}(w) < 2\pi$

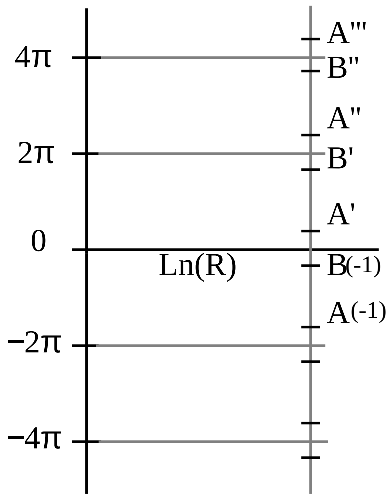
Posons, par définition : $z = \mathrm{Log}(w) = x + \mathrm{i}y$

Alors : $\mathrm{Log}(w) = \mathrm{Ln}(|w|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(w) + 2k\pi\mathrm{i}$. En revenant en variable z, on a :

$$\boxed{\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Ln}(|z|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi\mathrm{i}}$$

La fonction logarithme a une infinité de déterminations (autant que de valeurs de k). k=0 correspond à sa détermination principale.





Coupure : si l'on définit dans le plan complexe relatif à la variable z une frontière infranchissable (coupure de Riemann), par exemple la demi-droite réelle positive, on empêche la fonction de passer continûment d'une de ses déterminations à une autre. On réalise ainsi une application univalente, bijective de la fonction et de la variable.

Exercice 1 : Soit la fonction $z \to \sqrt{z^2 - 1}$. Comment doit-on couper le plan complexe pour rendre cette fonction univalente ?

Réponse : $f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$. En coupant le plan par le segment de droite [-1, +1].

Exercice 2 : On considère la détermination de $Z(z) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}(z))$, telle que $Z(e) = 0$. L'affixe de z fait un tour dans le sens direct sur le cercle de centre 0 et de rayon e. Que vaut Z(e) ?

Réponse : $z = e, \quad \mathrm{Log}(z) = 1 + 2k\pi\mathrm{i}$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Ln}(|1 + 2k\pi\mathrm{i}|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(1 + 2k\pi\mathrm{i}) + 2k'\pi\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(z)) = 0 \qquad \mathrm{Ln}(|1 + 2k\pi\mathrm{i}|) = 0 \qquad k = 0$$

$$\mathrm{Arg}(1 + 2k\pi\mathrm{i}) + 2k'\pi = 0 \qquad k' = 0$$

Donc : $\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(z)) = \mathrm{Ln}\big(|\mathrm{Ln}(|z|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z)|\big) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\big(\mathrm{Ln}(|z|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z)\big)$

On fait un tour sur $C(0, e)$ $\quad |z| = e \;$ et $\; \mathrm{Arg}(z) = 2\pi$

$$Z(e) = \mathrm{Ln}(|1 + 2\pi\mathrm{i}|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(1 + 2\pi\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1 + 4\pi^2) + \mathrm{i}\mathrm{Arctg}(2\pi)$$

3. Intégration

3.1. *Définition*

Par définition (de Riemann), l'intégrale de la fonction $f(z)$ sur le chemin Γ est :

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma (u + \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \text{, soit :}$$

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_\Gamma v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y}$$

Elle s'exprime donc en fonction de deux intégrales réelles curvilignes.

3.2. *Théorème de l'inégalité fondamentale*

Hypothèse : Γ est un arc simple d'origine a et d'extrémité b (le théorème se généralise très simplement à une union d'arcs simples).

Si $z \quad \Gamma$, alors $|f(z)| \leq M$, soit : $u^2 + v^2 \leq M^2$

<u>Démonstration</u> : $x = x(t) \quad y = y(t) \quad u = u\big(x(t), y(t)\big) \quad v = v\big(x(t), y(t)\big)$

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{t=b} (u + \mathrm{i}v)(x' + \mathrm{i}y')\mathrm{d}t$$

Cette seconde intégrale est la limite d'une somme de Riemann :

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \big(u(\tau_k) + \mathrm{i}v(\tau_k)\big)\big(x'(\tau_k) + \mathrm{i}y'(\tau_k)\big)\big(t_{k+1} - t_k\big)$$

où $t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_n = b$, et $t_k < \tau_k < t_{k+1}$

On a donc :

$$|\sigma| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \big|u(\tau_k) + \mathrm{i}v(\tau_k)\big|\big|x'(\tau_k) + \mathrm{i}y'(\tau_k)\big|\big(t_{k+1} - t_k\big)$$

$$|\sigma| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau_k)}\big(t_{k+1} - t_k\big)$$

Cette dernière somme est la somme de Riemann associée à l'intégrale :

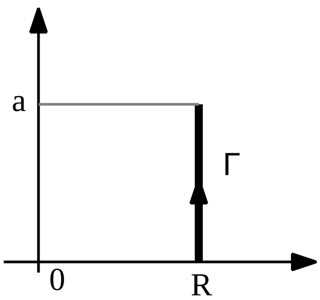
$$\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \text{longueur}(\Gamma).$$

d'où :

<u>Théorème</u> :

$$\boxed{z \quad \Gamma, \ |f(z)| \leq M \qquad \left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq M \times \text{longueur}(\Gamma)}$$

<u>Exercice - exemple 1</u> :



$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma e^{-z^2}\mathrm{d}z = ?$$

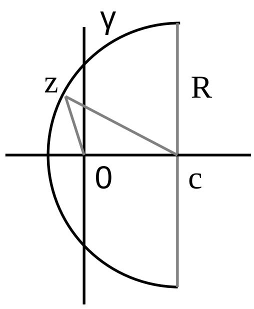
$$\left|\int_{\Gamma} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; a\,\mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in\Gamma}\left|e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\right| \;=\; a\,\mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in\Gamma} e^{-R^2}e^{y^2}\left|e^{-2\mathrm{i}Ry}\right| \;\le\; a e^{-R^2}e^{a^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

<u>Exercice - exemple 2</u> :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C(0,R)}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = ? \qquad C(0,R) = \text{circonférence de centre 0 et de rayon } R$$

$$\left|\int_{C(0,R)}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\right| \;\le\; \mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in C}\left|\frac{1}{1+z^2}\right|\times 2\pi R \;=\; \frac{2\pi R}{\mathop{\mathrm{Inf}}_{z\in C}\left|1+z^2\right|} \;=\; \frac{2\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

<u>Exercice - exemple 3</u> :



$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma}\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z = ?$$

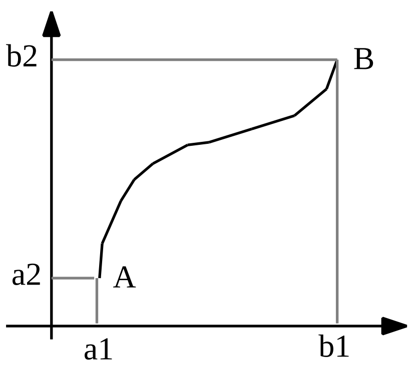
$t \in \mathbf{R}^+$, $n \in \mathrm{N}$,
γ demi-cercle ouvert de centre c et de rayon R.

$$\left|\int_{\gamma}\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \frac{\mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in\gamma}\left|e^{zt}\right|}{\mathop{\mathrm{Inf}}_{z\in\gamma}\left|z^{n+1}\right|}\times\pi R$$

$$z = c + Re^{\mathrm{i}\theta},\quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2},\quad \cos\theta < 0$$

$$\left|\int_{\gamma}\frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \;\le\; \frac{e^{ct}\mathop{\mathrm{Sup}}_{z\in\gamma} e^{Rt\cos\theta}\left|e^{\mathrm{i}Rt\sin\theta}\right|}{(R-c)^{n+1}}\times\pi R \;=\; \frac{e^{ct}\pi R}{(R-c)^{n+1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

3.3. *Intégration indépendante du chemin*



$a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \qquad b = b_1 + \mathrm{i}b_2$

$$U'_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad U'_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$V'_x = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad V'_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

Si $\quad u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = \mathrm{d}U = U'_x\mathrm{d}x + U'_y\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$

et $\quad v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = \mathrm{d}V = V'_x\mathrm{d}x + V'_y\mathrm{d}y$

alors $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma \mathrm{d}U + \mathrm{i}\int_\Gamma \mathrm{d}V = U(b) - U(a) + \mathrm{i}\big(V(b) - V(a)\big)$

et l'intégration est donc indépendante du chemin. Pour cela, il faut qu'il existe U et V telles que :

$$\boxed{\begin{array}{c} U'_x = V'_y = u \\ \\ -U'_y = V'_x = v \end{array}}$$

<u>Exercice - exemple 1</u> :

Γ quelconque

$$\int_\Gamma (x+iy)^2(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = \int_\Gamma \left(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy\right)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

$$= \int_\Gamma \underbrace{\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}U?} + \mathrm{i}\int_\Gamma \underbrace{2xy\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}V?}$$

$U'_x = x^2 - y^2 \qquad U = \dfrac{x^3}{3} - xy^2 + f(y)$

$U'_y = -2xy \qquad U = -xy^2 + g(x)$, donc :

$U = \dfrac{x^3}{3} - xy^2 + c$

$V'_x = 2xy \qquad V = x^2y + h(y)$

$V'_y = x^2 - y^2 \qquad V = x^2y - \dfrac{y^3}{3}\, j(x)$, donc :

$V = x^2y - \dfrac{y^3}{3} + d$

$$\int_\Gamma z^2\mathrm{d}z = \left[\frac{x^3}{3} - xy^2 + \mathrm{i}x^2y - \mathrm{i}\frac{y^3}{3} + c + \mathrm{i}d\right]_a^b = \left[\frac{1}{3}(x+\mathrm{i}y)^3 + C\right]_a^b = \frac{1}{3}\left[z^3 + C\right]_a^b = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

Exercice - exemple 2 :

Γ ne passe pas par 0.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y}{x + \mathrm{i}y} = \int_\Gamma \frac{(x - \mathrm{i}y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)}{x^2 + y^2}$$

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\int_\Gamma \frac{(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)}{x^2 + y^2}$$

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \mathrm{d}\left(\mathrm{Ln}\left(x^2 + y^2\right)\right) + \mathrm{i}\int_\Gamma \mathrm{d}\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \int_\Gamma \mathrm{d}\left(\mathrm{Ln}(|z|)\right) + \mathrm{i}\int_\Gamma \mathrm{d}\left(\mathrm{Arg}(z)\right)$$

$$\left[\mathrm{Ln}(|z|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z) + K\right]_a^b = \mathrm{Ln}(|b|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(b) - \mathrm{Ln}(|a|) - \mathrm{i}\mathrm{Arg}(a)$$

<u>Conséquence :</u> Γ circuit entourant une fois l'origine $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\mathrm{i}\pi$

<u>Autre calcul</u> : G circonférence de centre 0 et de rayon R :

$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $\qquad$ $\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$ $\qquad$ $\frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}\mathrm{d}\theta$

$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\mathrm{i}\pi$, indépendant de R.

<u>Autre conséquence</u> : $\qquad \lim_{R\to 0}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\mathrm{i}\pi \qquad\qquad \lim_{R\to \infty}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\mathrm{i}\pi$

<u>Enfin</u> : Γ circuit de nouveau quelconque entourant n fois l'origine : $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\mathrm{i}n\pi$

4. Dérivation (Différentiation)

<u>Définition</u> : $f(z)$ est dérivable ou différentiable en z si elle est définie, continue, univalente en z et si :

$$\boxed{\mathrm{d}f = l\mathrm{d}z, \quad \forall\,\mathrm{d}z \quad (l \in \mathbf{C})}$$

Théorème : CNS de dérivabilité. On a :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$l = \alpha + \mathrm{i}\beta \qquad l\mathrm{d}z = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

$$l\mathrm{d}z = \alpha\mathrm{d}x - \beta\mathrm{d}y + \mathrm{i}\beta\mathrm{d}x + \mathrm{i}\alpha\mathrm{d}y$$

Par identification $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ il vient :

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \beta &= \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}}$$

Ces relations sont connues sous le nom de relation de Cauchy-Riemann. Elles forment une condition nécessaire de dérivabilité. On peut montrer qu'elle est aussi suffisante.

De ces relations, on tire : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \Delta u = 0$ et $\Delta v = 0$

u et v sont des fonctions harmoniques (vérifiant l'équation de Laplace).

Une fonction qui est différentiable en tout point d'un domaine ouvert est dite continûment différentiable.

Définition : Les fonctions qui sont définies, continues, univalentes et dérivables sont dites : HOLOMORPHES.

Exemple : Il est facile de montrer que les constantes, les polynômes, les fractions rationnelles, en dehors des pôles, les exponentielles, ..., sont des fonctions dérivables.

La fonction : $z \to \bar{z}$ n'est pas dérivable ; ni $z \to \sqrt{z}$.

Remarque : Les fonctions qui ne peuvent pas s'exprimer explicitement en fonction de z ne sont pas dérivables, car l'accroissement de x est formellement lié à celui de y selon :

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$$

et non pas selon :

$$\mathrm{d}z = u(x,y)\mathrm{d}x + \mathrm{i}v(x,y)\mathrm{d}y$$

où u et v seraient quelconques.

Chapitre 2

Intégrale de Cauchy

1. Théorème préliminaire

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D. Soit Γ un circuit tout entier situé dans D et homotope à zéro dans D. On a :

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0}$$

Démonstration : Ce théorème est tout à fait général. Nous ne le démontrerons ici que dans le cas où f' est continue dans D et Γ sans point double. On a :

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma \left(u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y\right) + \mathrm{i}\int_\Gamma \left(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y\right)$$

Le théorème de Stokes indique que la circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface fermée s'appuyant sur la courbe. Soit S une telle surface :

$$\int_\Gamma u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = -\iint_S \left(v'_x + u'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et $\displaystyle\int_\Gamma v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = -\iint_S \left(u'_x - v'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Or, d'après les relations de Cauchy-Riemann relatives à une fonction holomorphe sur D, ces intégrales sont nulles et le théorème est démontré.

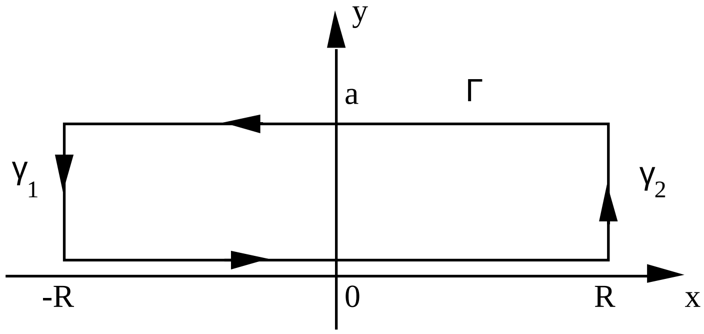
Si Γ présente un nombre fini de points doubles, on peut décomposer Γ en circuits partiels sans points doubles.

Applications : Γ homotope à zéro dans D, ouvert quelconque, alors on a :

$$\int_\Gamma \mathrm{dz} = 0 \qquad \int_\Gamma P_n(z)\mathrm{dz} = 0 \text{ (où } P_n(z) \text{ est un polynôme d'ordre } n \text{ en } z) \qquad \int_\Gamma e^z \mathrm{dz} = 0$$

Γ homotope à zéro dans D ne contenant pas l'origine : $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{dz}}{z} = 0$.

Exercice : Montrer que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\mathrm{d}x$, a $\mathbf{R}$, ne dépend pas de a.



e^{-z^2} est holomorphe pour z $\mathbf{C}$. Γ est homotope à zéro dans $\mathbf{C}$: $\displaystyle\int_\Gamma e^{-z^2}\mathrm{dz} = 0$.

$$\text{Or} \qquad \int_\Gamma e^{-z^2}\mathrm{dz} = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\mathrm{dz} + \int_{R}^{-R} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\mathrm{dz}$$

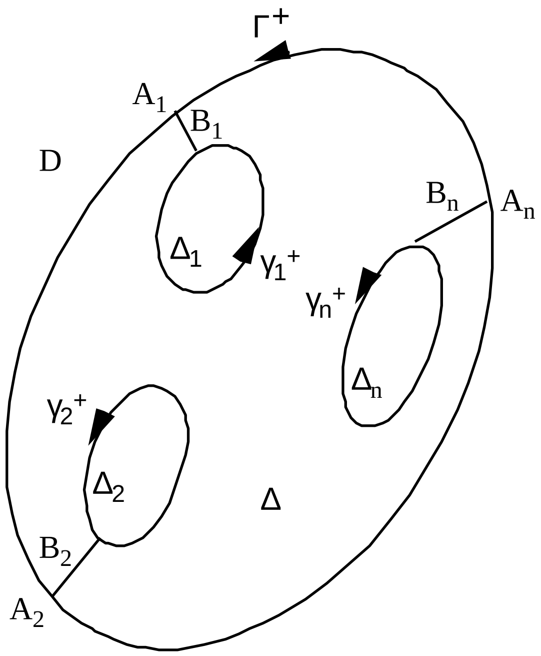
Les intégrales prises sur γ_1 et sur γ_2 tendent vers zéro quand R tend vers l'infini (Exercice - exemple 1. p. 5). En faisant tendre R vers l'infini, il vient :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\mathrm{d}x \qquad \text{d'où la propriété demandée.}$$

2. Lemme

Sens de parcours : on dit qu'un circuit est parcouru positivement relativement à son intérieur si un observateur qui le parcourt dans ce sens garde l'intérieur à sa gauche.

Lemme : $f(z)$ holomorphe dans D contenant Γ sauf éventuellement dans : $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Soit C^+ le circuit : $C^+ = A_1B_1\gamma_1^- B_1A_1A_2B_2\gamma_2^- B_2A_2A_3 \dots A_nB_n\gamma_n^- B_nA_nA_1$



Il est homotope à zéro dans D. Donc :

$$\int_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Par ailleurs, f étant holomorphe est uniforme, donc :

$$\int_{A_k}^{B_k} f(z)\mathrm{d}z + \int_{B_k}^{A_k} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

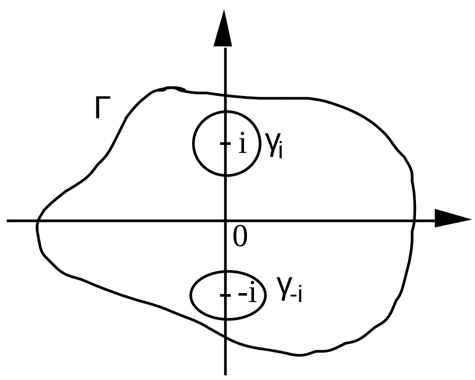
Par suite :

$$\int_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)\mathrm{d}z$$

Donc :

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^+} f(z)\mathrm{d}z}$$

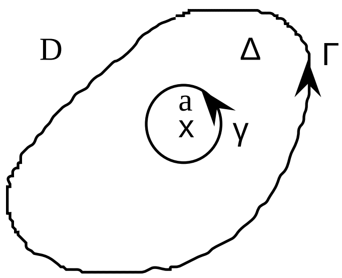
Exemple d'application :



$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int_{\gamma_i} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} + \int_{\gamma_{-i}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$$

3. Intégrale de Cauchy

Considérons les hypothèses suivantes :



− f holomorphe dans D

− D simplement connexe

− Γ circuit dans D entourant Δ

− a Δ

alors :

1°) $\dfrac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe dans D, sauf pour $z = a$.

2°) Soit γ la circonférence de centre a et de rayon ρ : $z \quad \gamma \quad |z-a| = \rho$.

Lemme $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)\mathrm{dz}}{z-a} = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)\mathrm{dz}}{z-a}$

3°) $f(z)$ est continue en a, donc :

$$f(z) = f(a) + \varepsilon(z) \text{ et } \int_{\gamma^+} \frac{f(z)\mathrm{dz}}{z-a} = f(a)\int_{\gamma^+} \frac{\mathrm{dz}}{z-a} + \int_{\gamma^+} \frac{\varepsilon(z)\mathrm{dz}}{z-a}$$

On a $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$. Si $|z-a| < \eta$, on prend donc ρ assez petit tel que pour $z \quad \gamma$, $|z-a| = \rho < \eta$, alors d'après le théorème de l'inégalité fondamentale (p. 5) :

$$\left|\int_{\gamma} \frac{\varepsilon(z)\mathrm{dz}}{z-a}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho} \times 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \to 0, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Cette quantité est donc arbitrairement petite. Par suite :

4°) $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)\mathrm{dz}}{z-a} = f(a)\int_{\gamma^+} \frac{\mathrm{dz}}{z-a} = 2\mathrm{i}\pi f(a)$

car l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{\mathrm{dz}}{z-a}$ est de la forme : $\displaystyle\int_{C} \frac{dZ}{Z} = 2\mathrm{i}\pi$ (exemple 2, p. 8)

En conclusion :

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)\mathrm{dz}}{z-a} = 2\mathrm{i}\pi f(a)}$$: c'est l'intégrale de Cauchy.

Comme a est choisi quelconque dans l'ouvert D, on peut aussi écrire :

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{t \in \Gamma^+} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}$$

donc toute fonction holomorphe peut s'exprimer sous la forme d'une telle intégrale de Cauchy.

<u>Théorème</u> : Soit Γ une circonférence de centre z : $t - z = Re^{\mathrm{i}\theta}$, d'où $\mathrm{d}t = \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$ et $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z + Re^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$.

La valeur d'une fonction holomorphe au centre d'une circonférence est égale à la moyenne de ses valeurs prises sur la circonférence.

<u>Théorème</u> : en dérivant formellement l'expression de $f(z)$, il vient :

$$f'(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{t \in \Gamma^+} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-z)^2}$$

<u>Justification</u> : on forme $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\Gamma} f(t)\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z}\right) - \frac{1}{(t-z)^2}\right\}\mathrm{d}t$$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{h}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-z)^2(t-z-h)}$$

$f(t)$ holomorphe est continue et bornée : $|f(t)| \leq M$,

$$t \in \Gamma,\ z \in \Delta \text{ ouvert, } h \to 0 : \quad \frac{1}{|t-z|} < \frac{1}{l}, \quad \frac{1}{|t-z|^2} < \frac{1}{l^2}, \quad \frac{1}{|t-z-h|} < \frac{1}{m}$$

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)\right| \leq \frac{|h|}{2\pi}\,\frac{M \times \text{longueur}(\Gamma)}{l^2 m} \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

<u>A l'ordre n</u> : $\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\Gamma^+}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-z)^{n+1}}}$

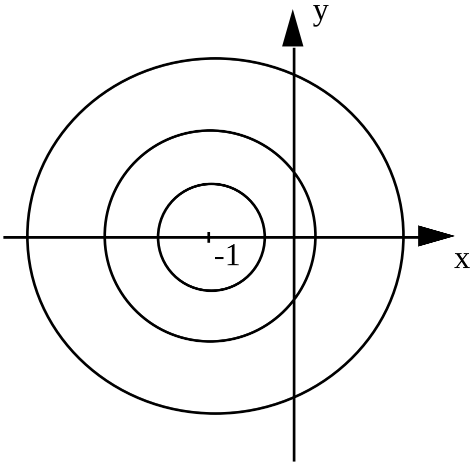
ce qui montre qu'une fonction holomorphe est infiniment dérivable.

Théorème (Liouville) : si $f(z)$ holomorphe est bornée, $\underline{\forall z \in \mathbf{C}}$, c'est une constante. Soit Γ une circonférence de rayon R et de centre z :

$$R>0,\ |f(z)|\le M\ ,\ \frac{1}{|t-z|}=\frac{1}{R}\qquad |f'(z)|\ \le\ \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}\times 2\pi R\ =\ \frac{M}{R}\xrightarrow[R\to\infty]{}\ 0$$

donc : $f'(z)=0$ et $f(z)=$ constante.

Exercice - exemple 1 : par application de l'intégrale de Cauchy :

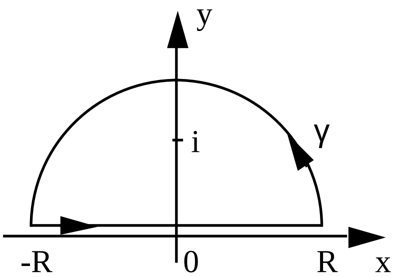


$$I=\int_C \frac{e^z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$$

$$\begin{array}{ll}
C=C_1(-1,\ R<1) & \mathrm{I}=0\\
C=C_2(-1,\ 1<R<2) & \mathrm{I}=-2\mathrm{i}\pi\\
C=C_3(-1,\ 2<R) & \mathrm{I}=-2\mathrm{i}\pi+2\mathrm{i}\pi=0
\end{array}$$

(on a appliqué le lemme)

Exercice - exemple 2 : circuit C

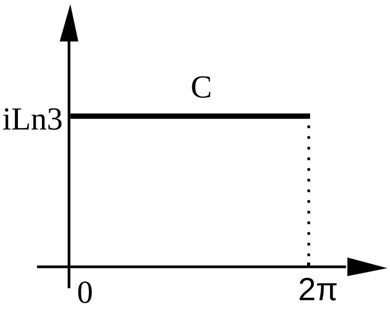


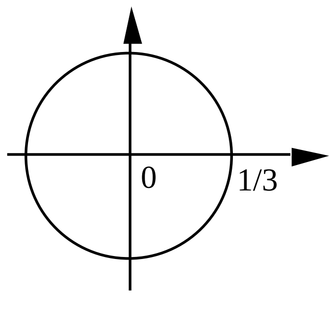
$$\int_C \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\mathrm{d}z=\int_C \frac{\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\pi\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\right)_{z=\mathrm{i}}=\frac{\pi}{e}$$

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\mathrm{d}z\right|\le \pi R\,\mathrm{Sup}\frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1}<\frac{\pi R}{R^2-1}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

$$R\to\infty\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{e},\ \text{et : }\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=0.$$

Exercice - exemple 3 :





$$I=\int_C \frac{\mathrm{d}z}{2-\cos z}=?$$

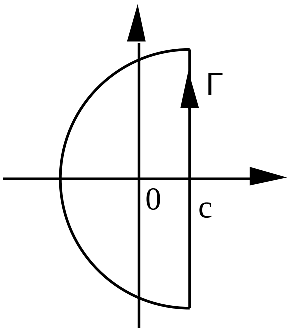
$z = x + \mathrm{i}\,\mathrm{Ln}3$. On pose : $u = e^{\mathrm{i}z}$ $\qquad u = e^{\mathrm{i}x}e^{-Ln3}=\dfrac{1}{3}e^{\mathrm{i}x}$

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) \qquad \mathrm{d}z=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$I=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{C\left(0,\frac{1}{3}\right)}\frac{\mathrm{d}u}{2u-\frac{1}{2}\left(u^2+1\right)}=-\frac{2}{\mathrm{i}}\int_{C\left(0,\frac{1}{3}\right)}\frac{\mathrm{d}u}{u^2-4u+1}=-\frac{2}{\mathrm{i}}\int_{C\left(0,\frac{1}{3}\right)}\frac{\frac{\mathrm{d}u}{u-2-\sqrt{3}}}{u-2+\sqrt{3}}$$

$$I=2\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{u-2-\sqrt{3}}\right)_{u=2-\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

<u>Exercice - exemple 4</u> :



$$\int_\Gamma \frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\mathrm{i}\pi}{n!}\left(e^{zt}\right)^{(n)}_{t=0}=2\mathrm{i}\pi\frac{t^n}{n!}$$

<u>Exercice - exemple 5</u> :

$$I=\int_{\underbrace{\Gamma}_{\text{entourant 0 et 1}}}\frac{e^z}{z(z-1)^3}\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_0}\frac{\frac{e^z}{(z-1)^3}}{z}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_1}\frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}\mathrm{d}z$$

$$I=2\mathrm{i}\pi\left(\frac{e^z}{(z-1)^3}\right)_{z=0}+\frac{2\mathrm{i}\pi}{2}\left(\frac{e^z}{z}\right)''_{z=1}$$

$I=\pi i(e-2)$.

Chapitre 3

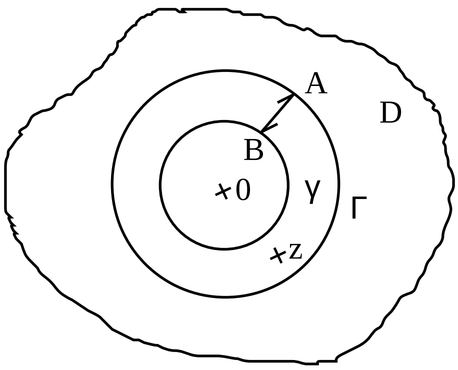
Théorie des résidus

1. Séries de Laurent

Soit un domaine simplement connexe contenant l'origine 0 et soit D le domaine obtenu en supprimant 0 du domaine précédent. D n'est plus simplement connexe car un circuit qui entoure 0 n'est pas homotope à zéro.

Soit f une fonction holomorphe dans D. Cette fonction peut ne pas être holomorphe en 0, par contre elle doit être uniforme dans D. Donc, si on suit par continuité la valeur de f le long d'un circuit entourant 0, on doit revenir au point de départ avec la même valeur pour f.

Soit Γ et γ deux circonférences de centre 0 et de rayons R et r, avec $r < R$, entièrement contenues dans D. Soit z un point fixe vérifiant $r < |z| < R$. Soit enfin AB un segment pris sur un rayon joignant Γ à γ et ne passant pas par z.



Le circuit $\Gamma^+ AB\gamma^- BA$ est homotope à zéro dans D ; le théorème de Cauchy donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z} + \frac{1}{2i\pi}\int_A^B \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z} - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z} + \frac{1}{2i\pi}\int_B^A \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}$$

$f(z)$ est uniforme donc : $\int_A^B + \int_B^A = 0.$ Par ailleurs :

$$t \quad \Gamma : \ \frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \ldots + \frac{z^n}{t^{n+1}} + \ldots$$

et la série converge uniformément sur Γ car $\left|\frac{z}{t}\right| = \frac{|z|}{R} < 1.$ De plus :

$$t \quad \gamma : \ -\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z}\ \frac{1}{1-\frac{t}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \frac{t^2}{z^3} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{z^n} + \ldots$$

et la série converge uniformément sur γ car $\left|\frac{t}{z}\right| = \frac{r}{|z|} < 1.$

On peut donc intégrer terme à terme, d'où :

$$f(z) = \ldots + \frac{b_m}{z^m} + \ldots + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

avec : $b_m = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma t^{m-1} f(t)\mathrm{d}t$ et : $a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$

On voit qu'il s'agit d'intégrales de fonctions holomorphes sauf éventuellement à l'origine. Soit donc un circuit C quelconque entourant l'origine. On peut poser :

$$b_n = a_{-n} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_C t^{n-1} f(t)\mathrm{d}t$$

et donc écrire :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n} \text{, avec : } \boxed{a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_C \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t^{n+1}}} \qquad n \quad \mathbf{Z}$$

<u>Remarque 1</u> : Faisons : $n = -1$, alors : $a_{-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_C f(t)\mathrm{d}t$, ou :

$$\boxed{\int_C f(t)dt = 2\mathrm{i}\pi a_{-1}}$$ pour C circuit entourant l'origine.

a_{-1} s'appelle le <u>résidu</u> de $f(t)$ à l'origine. Et on a le théorème :

Théorème : L'intégrale d'une fonction sur un circuit entourant l'origine est égale à $2i\pi$ fois son résidu à l'origine (on suppose qu'il n'y a pas d'autres singularités que l'origine à l'intérieur du circuit : sinon voir plus loin : théorème des résidus).

Remarque 2 : Un développement en série de Laurent peut prendre trois formes possibles :

1er cas : pour $n \leq -1$: $a_n = 0$. La série de Laurent s'identifie à la série de Mac-Laurin. f est holomorphe à l'origine.

Exemple : $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\quad a_{-1} = 0 \quad$ $\int_C e^z \mathrm{d}z = 0$

2ème cas : p entier positif, pour $n \leq -1-p$, $a_n = 0$ et $a_{-p} \neq 0$ alors $f(z)$ a un pôle d'ordre p en 0.

Exemple : $\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots,$ $\quad a_{-1} = -1 \quad$ $\int_{C(0,R<1)} \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)} = -2i\pi$

3ème cas : $a_{-\infty} \neq 0$ f a un point singulier essentiel en 0.

Exemple : $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$, $a_{-1} = 1$, $\int_C e^{1/z} \mathrm{d}z = 2i\pi$.

2. Théorème des résidus

Soit f holomorphe en D sauf pour les valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ (singularités de f). Soit Γ un circuit de D entourant certaines de ces singularités. On a :

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{j \in J} R(z_j)}$$

où J est l'ensemble des singularités de f intérieures à Γ, et où $R(z_j)$ est le résidu du développement en série de Laurent (coefficient a_{-1}) au voisinage de $z = z_j$.

Démonstration :

1°) Par application du Lemme (chapitre 2, §2, p. 13) :

$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j \in J} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z$ où γ_j est un circuit entourant la seule singularité z.

2°) Effectuons le changement d'axes (qui amène l'origine au point z_j), dans lequel :

$$g_j(z) = f\left(z_j + z\right)$$

alors $g_j(z)$ peut être développé en série de Laurent au voisinage de l'origine :

$$g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(j)} z^n,$$

et le circuit γ_j entourant le point z_j devient le circuit γ'_j entourant l'origine. On a :

$$\int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma'_j} g_j(z)\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi a_{-1}^{(j)} = 2\mathrm{i}\pi R(z_j)$$

En sommant sur tous les points intérieurs à Γ, on a le théorème des résidus annoncé.

3. Recherche des résidus

3.1. *A partir de la définition*

On pose : $g_j(z) = f\left(z + z_j\right)$. On développe $g_j(z)$ en série de Laurent au voisinage de l'origine. Le coefficient du terme en $1/z$ de ce développement est le résidu pour $z = z_j$, soit : $a_{-1}^{(j)} = R\left(z_j\right)$.

3.2. *Cas d'un pôle simple en z = a*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{ avec : } h(a) = 0, \text{ et : } h'(a) \neq 0.$$

$$R(a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \lim_{z \to 0} z f(z + a) = \lim_{z \to 0} z \frac{g(z + a)}{h(z + a)} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{h(z + a) - h(a)} g(z + a)$$

donc : $\boxed{R(a) = \dfrac{g(a)}{h'(a)}}$.

Ce résultat est connu sous le nom : “règle du numérateur sur la dérivée du dénominateur”.

<u>Exemple</u> : $\dfrac{1}{1 + z^2}$ $\quad R(\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}$ $\quad R(-\mathrm{i}) = -\dfrac{1}{2\mathrm{i}}$

Exemple : $tg\pi z = \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$ pôles (simples) : $z_n = k + \dfrac{1}{2}$

$$R(z_k) = \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{-\pi \sin(2k+1)\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\pi}$$

3.3. *Cas d'un pôle d'ordre multiple (p).*

Soit un pôle d'ordre p à l'origine :

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{z^p} + \frac{a_{-p+1}}{z^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

On multiplie membre à membre par z^p :

$$z^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1} z + a_{-p+2} z^2 + \dots + a_{-1} z^{p-1} + a_0 z^p + a_1 z^{p+1} \dots$$

Puis on dérive $p-1$ fois :

$$\left[z^p f(z)\right]^{(p-1)} = (p-1)!a_{-1} + p!a_0 z + (p+1)!a_1 z^2 + \dots$$

Enfin, on fait $z=0$, d'où :

$$R(0) = a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to 0} \left[z^p f(z)\right]^{(p-1)}$$

On généralise alors pour un pôle d'ordre p en $z=a$ en faisant un changement d'origine et l'on obtient :

$$\boxed{R(a) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)}}$$

Exemple :

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3} \qquad R(0) = 1 \qquad R(1) = -\frac{e}{2}$$

4. Exemples d'application de la théorie des résidus

4.1. *1er type d'exemples d'application*

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t}$$

On pose : $z = e^{\mathrm{i}t}$ $\quad \int_0^{2\pi} \to \oint_{C(0,1)}$

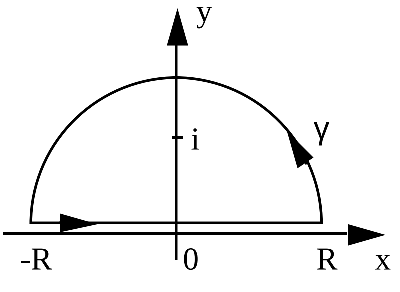
Exemple : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + b\cos t} = \frac{2}{\mathrm{i}} \oint_{C(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{bz^2 + 2az + b} = \frac{2}{\mathrm{i}}\, 2\mathrm{i}\pi R(z'')$

$$z'' = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \qquad R(z'') = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + b\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

4.2. *2ème type d'exemples d'application*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x} \qquad \text{ou :} \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ si } f(x) \text{ est paire.}$$

Exemple : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$



Th. des résidus $\displaystyle\int_C \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi R(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{e}$

$$\int_C \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t + \int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z$$

On a :

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi R}{R^2 - 1} \qquad \text{d'où} \quad \lim_{R\to\infty} \left|\int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z\right| = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{e} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = 0.$$

4.3. *3ème type d'exemples d'application*

Intégrales faisant intervenir des fonctions multivalentes.

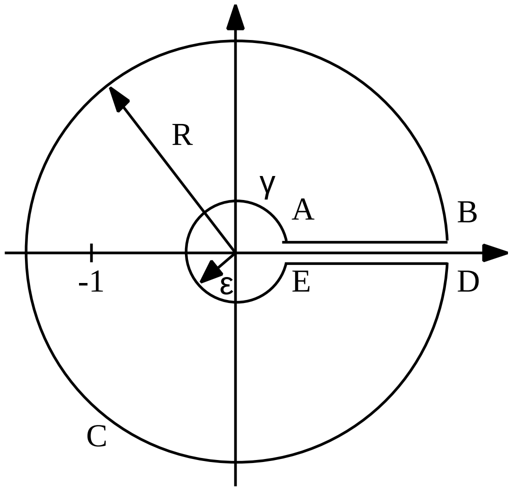
<u>Exemple</u> : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x$ définie pour : $-1 < \alpha < 0$.

On coupe le plan complexe par $\mathbf{R}^{+}$. On choisit une détermination pour z^{α} :

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Log} z} = e^{a\mathrm{Ln}|z|} e^{\mathrm{i}\alpha \mathrm{Arg} z} \quad (k=0)$$

$$R(-1) = \left(z^{\alpha}\right)_{z=-1} = e^{\mathrm{i}\alpha\pi}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha}}{1+z}\mathrm{d}z = 2i\pi R(-1) = 2\mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\alpha\pi}$$



Sur AB : $z = x$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$. Sur ED : $z = xe^{2\mathrm{i}\pi} = x$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$, $z^{\alpha} = x^{\alpha} e^{2\mathrm{i}\pi\alpha} \neq x^{\alpha}$.

$$\int_{\Gamma} = \int_A^B \frac{x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_C \frac{z^{\alpha}}{1+z}\mathrm{d}z + \int_D^E \frac{x^{\alpha}e^{2\mathrm{i}\pi\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x - \int_{\gamma} \frac{z^{\alpha}}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$\left|\int_C \frac{z^{\alpha}}{1+z}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{R^{\alpha}}{R-1} \times 2\pi R \sim 2\pi R^{\alpha} \xrightarrow[R\to\infty]{\alpha<0} 0$$

Donc : $\qquad \left(1-e^{2\mathrm{i}\pi\alpha}\right)\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\alpha\pi}$

En multipliant membre à membre par $e^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(1+\alpha)\pi} = -\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,.$$

4.4. *4ème type d'application : le calcul des séries*

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n}$$

<u>Exemple</u> : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \frac{1}{(a+bn)^2} \qquad \frac{a}{b}$ non entier $\;\; b \neq 0$

<u>Méthode</u>

1°) On considère la fonction : $\dfrac{1}{(a+bz)^2}$

2°) On considère ensuite la fonction : $f(z) = \dfrac{1}{(a+bz)^2}\,\pi\operatorname{cotg}\pi z$

$$f(z) = \frac{\pi}{b^2}\,\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z\left(z+\frac{a}{b}\right)^2}$$

3°) On considère le carré : Γ_n : $x_n = n \pm \dfrac{1}{2}$; $y_n = n \pm \dfrac{1}{2}$.

Le théorème des résidus donne :

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\Gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=-n}^{n} R(k) + R\left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$R(k) = \frac{\pi}{b^2}\,\frac{\cos\pi k}{2\left(\frac{a}{b}+k\right)\sin\pi k + \pi\cos\pi k\left(\frac{a}{b}+k\right)^2} = \frac{1}{(a+bk)^2}$$

$$R\left(-\frac{a}{b}\right)=\left[\left(z+\frac{a}{b}\right)^2 f(z)\right]'_{z=-\frac{a}{b}}=-\frac{\pi^2}{b^2}\,\frac{1}{\sin^2\pi\frac{a}{b}}$$

4°) Montrons que l'intégrale est nulle quand n tend vers l'infini :

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right|^2=\frac{\operatorname{ch}2\pi y+\cos 2\pi x}{\operatorname{ch}2\pi y-\cos 2\pi x}$$

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\right|\left|\int_{\Gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{2\pi}\,\underset{z\ \ \Gamma_n}{Sup}\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\,\frac{1}{(a+bz)^2}\right|\times 8\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Sur les côtés verticaux :

$$\cos 2\pi x=\cos 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right|^2=\frac{\operatorname{ch}2\pi y-1}{\operatorname{ch}2\pi y+1}<1$$

Sur les côtés horizontaux :

$$\operatorname{ch}2\pi y=\operatorname{ch}2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)=\operatorname{ch}(2\pi+1)\pi$$

$$\left|\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}\right|^2=\frac{ch(2n+1)\pi+\cos 2\pi x}{ch(2n+1)\pi\cos 2\pi x}\le\frac{ch(2n+1)\pi+1}{ch(2n+1)\pi-1}=1+\frac{2}{ch(2n+1)\pi-1}<3$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_n} f(z)\mathrm{d}z\right|=0\ \text{ et : }\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}=\frac{\pi^2}{b^2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\pi a}{b}}.$$

Chapitre 4

Séries de Fourier

1. Introduction

C'est au début du XIXième siècle que le mathématicien français Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) fut conduit en 1812, au cours de ses recherches sur la propagation de la chaleur, à la remarquable découverte de certaines fonctions trigonométriques qui portent aujourd'hui son nom. Depuis lors, les séries de Fourier, leur généralisation aux intégrales de Fourier et les fonctions orthogonales sont devenues des outils indispensables tant du point de vue théorique que des applications.

2. Fonctions périodiques - Définitions

On dit qu'une fonction f, réelle ou complexe, de la variable réelle t est ***périodique*** s'il existe un ou plusieurs nombre θ, réels positifs, tels que :

$$\forall t, \quad f(t+\theta) = f(t) \tag{1}$$

Tout multiple de θ vérifie encore (1). En effet :

$$\forall t, \quad f(t+2\theta) = f(t+\theta+\theta) = f(t+\theta) = f(t)$$

$$\forall t, \quad f(t+n\theta) = f(t)$$

Par exemple la fonction $f(t) = \sin(nt)$, avec $n \in \mathbf{N}^+$, est une fonction périodique avec $\theta = 2\pi/n$ ou avec tout autre multiple de $2\pi/n$, en particulier avec 2π :

$$\forall t, \quad f\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) = \sin(nt+2\pi) = \sin(nt)$$

On appelle ***période*** T d'une fonction périodique f le plus petit réel positif θ vérifiant (1).

La période est unique. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi :

$$\forall t, \quad f(t+T_1) = f(t) \quad \text{et} \quad \forall t, \quad f(t+T_2) = f(t)$$

avec $T_1 \neq T_2$ et, par exemple $T_1 < T_2$. On a :

$$t, \quad f(t+T_1) = f(t+T_1-T_2+T_2) = f(t+T_1-T_2) = f(t)$$

ce qui est absurde puisque une période est positive. On a donc $T_1 = T_2$.

Toute fonction périodique f, de période T peut être rendue égale, quelque soit t, à une fonction g de période 2π.

Posons en effet : $t = \dfrac{T}{2\pi}u$

On a alors : $f(t+T) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}(u+2\pi)\right)$

Posons alors : $f(t) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}u\right) = g(u)$

On obtient : $f(t+T) = g(u+2\pi)$

3. Forme et produit hermitique

3.1. *Définition*

Une forme hermitique (à droite) associe à tout couple de fonctions f et g à valeurs dans **C**, un nombre complexe noté :

$$< f,g >$$

Cette opération doit être linéaire relativement à f, pour tout g fixée et linéaire par rapport à g, pour tout f fixée, ainsi on a :

$$\begin{aligned}
< f_1+f_2,g > &= < f_1,g > + < f_2,g > \\
< \lambda f,g > &= \lambda < f,g > \\
< f,g_1+g_2 > &= < f,g_1 > + < f,g_2 > \\
< f,\lambda g > &= \bar{\lambda} < f,g >
\end{aligned}$$

Une forme hermitique est symétrique si :

$$< f,g > = \overline{< g,f >}$$

alors $< f, f >$ est réel puisque $< f, f > \; = \; \overline{< f, f >}$

Une forme hermitique symétrique est définie positive si :

$$0 < \; < f, f >$$

et ne s’annule que si $f = 0$.

3.2. ***Produit hermitique***

Une forme hermitique définie positive définit un produit hermitique, l’équivalent en complexe d’un produit scalaire, avec les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} < f, f > \; = \|f\|^2 & \text{(définition d' une norme)} \\ \|\lambda f\| \; = |\lambda| \, \|f\| & \\ |< f, g >| \; < \|f\| \, \|g\| & \text{(inégalité de Schwarz)} \\ \|f + g\| \; < \|f\| + \|g\| & \text{(inégalité triangulaire)} \end{array}$$

Par exemple, pour a **R** et b **R**, on vérifiera que, si l’intégrale définie suivante existe, elle définit un produit hermitique :

$$< f, g > \; = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

La norme associée s’écrit :

$$< f, f > \; = \|f\|^2 \; = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \|f\| \; = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}$$

L’inégalité de Schwarz donne :

$$|< f, g >| \; = \left| \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \; < \|f\| \, \|g\| \; = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t} \sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}$$

et l’inégalité triangulaire s’écrit :

$$\|f + g\| \; = \sqrt{\int_a^b \left(f(t) + g(t) \right)^2 dt} \; < \|f\| + \|g\| \; = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$$

3.3. *Inégalité de Schwarz*

Soit $f \neq g \neq 0$, deux fonctions quelconques et λ un scalaire complexe. On peut écrire :

$$< f+\lambda g, f+\lambda g > \; = \; < f,f > + \bar{\lambda} < f,g > + \lambda \overline{< f,g >} + \lambda \bar{\lambda} < g,g >$$

Posons $< f,g > \; = \; |< f,g >| \; e^{i\theta}$ et choisissons $\lambda = pe^{i\theta}$ où p est quelconque. On a :

$$< f+\lambda g, f+\lambda g > \; = \; < f,f > + 2p|< f,g >| + p^2 < g,g >$$

L'expression précédente est un trinôme du second degré en p dont tous les coefficients sont positifs. Elle n'a donc pas de racine ou une racine au plus. On en déduit que le discriminant associé est négatif ou nul. Celui-ci s'écrit :

$$|< f,g >|^2 \; < \; < f,f >< g,g >$$

C'est l'inégalité de Schwarz.

4. Etude des fonctions $u_n(t) = e^{int} / \sqrt{2\pi}$

Définissons les fonctions $u_n(t) = e^{int} / \sqrt{2\pi}$ pour n entier positif, négatif ou nul et pour t réel. Rappelons que, d'après la formule de Moivre, on a :

$$e^{int} = (e^{it})^n = \cos(nt) + i\sin(nt) = (\cos(t) + i\sin(t))^n$$

Les fonctions $u_n(t)$ sont définies, continues, infiniment dérivables, infiniment intégrables. Elles sont périodiques de période $2\pi / n$, sauf $u_0(t)$ qui est la constante $1/\sqrt{2\pi}$.

Définissons alors le produit hermitique suivant :

$$< u_m(t), u_n(t) > \; = \; \int_0^{2\pi} u_m(t)\overline{u_n(t)}\mathrm{d}t \; = \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\mathrm{d}t$$

si $m \neq n$, on a :

$$< u_m(t), u_n(t) > \; = \; \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}\right]_0^{2\pi} = 0$$

puisque $e^{i(m-n)t}$ est périodique sur 2π.

si $m = n$, on a :

$$< u_n(t), u_n(t) > \; = \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 1$$

On conclue que l'ensemble des $u_n(t)$ forme une base orthonormale vis-à-vis du produit hermitique défini :

$$\begin{array}{lll} \dfrac{e^{imt}}{\sqrt{2\pi}} & \dfrac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} & si \;\; n \neq m \\ \left\| \dfrac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\| = 1 & & n \end{array}$$

5. Séries de Fourier généralisées

Soit $f(t)$ une fonction périodique de période 2π. On développe, par définition, cette fonction sur la base des $u_m(t)$ selon :

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m u_m(t) \qquad (2)$$

Ce développement est plausible si l'on peut calculer les c_m de manière univoque. Formons :

$$< f(t), u_n(t) > \; = \; < \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m u_m(t), u_n(t) >$$

$$< f(t), u_n(t) > \; = \; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m < u_m(t), u_n(t) >$$

$$< f(t), u_n(t) > \; = \; c_n$$

On obtient donc :

$$c_n = \; < f(t), u_n(t) > \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t$$

Les nombres c_n, réels ou complexes, s'appellent ***coefficients de Fourier généralisés*** de $f(t)$.

Exemple : Soit $f(t) = 1$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(t) = 0$ si $t \in]\pi, 2\pi]$. Cette fonction est périodique et de période 2π. On a :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{-int} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad c_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}$$

Pour $n \neq 0$, on a :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n - 1}{-in}$$

d'où, pour $p \neq 0$, $c_{2p} = 0$ et $c_{2p+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{2}{i(2p+1)}$

On peut alors écrire le développement de Fourier généralisé de $f(t)$:

$$f(t) = c_0 u_0(t) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p+1} u_{2p+1}(t)$$

$$f(t) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i(2p+1)} \frac{e^{i(2p+1)t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)t}}{(2p+1)}$$

On remarquera que la valeur moyenne de $f(t)$ peut se calculer directement :

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

ou par la série de Fourier :

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)t}}{(2p+1)} \right) \mathrm{d}t$$

En remarquant que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(2p+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(2p+1)t}}{i(2p+1)}\right]_0^{2\pi} = 0$$

on obtient directement :

$$m = c_0 u_0(t) = \frac{1}{2}$$

6. Conditions d'existence

6.1. *Fonctions régulières par morceaux*

Nous avons posé, au paragraphe précédent, l'égalité suivante :

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m u_m(t)$$

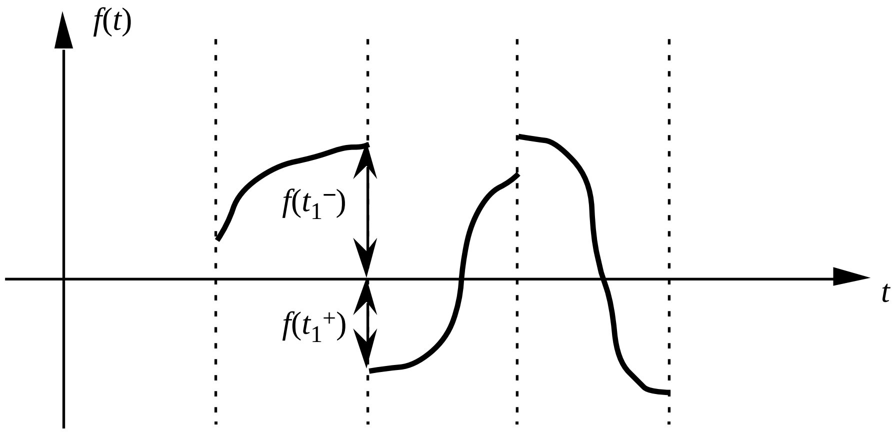
sans nous préoccuper de la convergence effective d'une telle série vers la fonction $f(t)$. Le mathématicien Dirichlet a établi les conditions de convergence des séries de Fourier. Commençons par définir certaines propriétés de fonctions.

Une fonction $f(t)$ est dite ***régulière par morceaux*** dans un intervalle donné si :

a) l'intervalle peut être divisé en un nombre fini d'intervalles élémentaires tels que $f(t)$ est continue dans chacun d'eux, et

b) les limites de $f(t)$ sont finies, lorsque t tend vers les bornes de chaque intervalle élémentaire

Une fonction régulière par morceaux est donc une fonction qui a au plus un nombre fini de discontinuités finies. Un exemple d'une telle fonction est représentée ci-dessous :



La limite de $f(t)$ à droite ou limite atteinte par valeurs croissantes est notée :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(t+\varepsilon) = f(t^+) \qquad \text{avec } \varepsilon > 0$$

De même, la limite de $f(t)$ à gauche ou limite atteinte par valeurs décroissantes est notée :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(t-\varepsilon) = f(t^-) \qquad \text{avec } \varepsilon > 0$$

6.2. *Conditions de Dirichlet*

Les conditions de convergence des séries de Fourier s'énoncent sous la forme du théorème suivant :

Soit une fonction $f(t)$ supposée :

1) définie et continue dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, à l'exception d'un nombre fini de points,
2) périodique, de période 2π,
3) telle que $f(t)$ et $f'(t)$ sont régulières par morceaux dans $[0, 2\pi]$.

Dans ces conditions, la série de Fourier converge vers :

a) $f(t)$ si t est un point de continuité,
b) $\dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ si t est un point de discontinuité.

Les conditions 1), 2) et 3) imposées à $f(t)$ sont *suffisantes*, elles ne sont pas *nécessaires*, c'est-à-dire que si elles sont satisfaites, la convergence est assurée. Si elles ne le sont pas, la série peut cependant converger. Les conditions précédentes sont en général satisfaites dans le cas de signaux physiques.

7. Théorème de Parseval

Formons le produit hermitique suivant :

$$< f(t), f(t) > \; = \; < \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m u_m(t), \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(t) >$$

$$< f(t), f(t) > \; = \; \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m \overline{c_n} < u_m(t), u_n(t) >$$

$$< f(t), f(t) > \; = \; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

On obtient donc :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

C'est le théorème de Parseval. Il a une interprétation physique : si l'on considère que c_n est l'amplitude généralisée (complexe) de $u_n(t)$, le théorème exprime que la somme des carrés des amplitudes, donc la somme des intensités, est égale à la somme des carrés de la fonction sur une période, c'est-à-dire son énergie.

Reprenons l'exemple précédent, $f(t) = 1$ si t $]0,\pi]$ et $f(t) = 0$ si t $]\pi, 2\pi]$, on a :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \pi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = c_0^2 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_{2p+1}|^2$$

d'où

$$\pi = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{i(2p+1)}\right|^2$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

On en déduit :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{et} \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On constate donc que le théorème de Parseval est également un moyen simple de calculer certaines sommes de séries (séries non géométriques par exemple).

8. Développement en série de Fourier d'une fonction à valeurs réelles

Si $f(t)$ est à valeurs réelles (cas des signaux physiques élémentaires), on a , pour $n \geq 1$:

$$c_n = \langle f(t), u_n(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t$$

$$c_{-n} = \langle f(t), u_{-n}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \mathrm{d}t = \overline{c_n}$$

Deux termes symétriques par rapport $n = 0$ sont donc conjugués, d'où l'idée de les associer. Posons, pour $n > 0$:

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(a_n - ib_n\right)$$

où a_n et b_n sont des coefficients réels. On a alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(a_n - ib_n\right)e^{int} + \left(a_n + ib_n\right)e^{-int}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n(e^{int} + e^{-int}) - ib_n(e^{int} - e^{-int})\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}\right) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

La fonction $f(t)$ peut alors s'écrire :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

Les coefficients a_n et b_n sont donc donnés, pour $n \geq 0$, par les formules :

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\quad (c_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\quad (c_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

On a également :

$$\left|c_0\right|^2 = \frac{\pi}{2}a_0^2 \qquad \text{et} \qquad \left|c_n\right|^2 = c_n\overline{c_n} = \frac{\pi}{2}(a_n^2 + b_n^2)\text{, pour } n > 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n\overline{c_n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n c_{-n}\right|$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|^2 = \left|c_0\right|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left|c_n\right|^2$$

En appliquant le théorème de Parseval, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|^2 = \left|c_0\right|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left|c_n\right|^2 = \frac{\pi}{2}a_0^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}a_0^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

d’où :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Par exemple, déterminons le développement en série de Fourier de la fonction continue, périodique, de période 2π, valant $f(t) = \pi + t$ si $t \in]-\pi, 0]$ et $f(t) = \pi - t$ si $t \in]0, \pi]$. Cette fonction $f(t)$ est paire ; son développement en série de Fourier ne contient donc que des termes de rang nul ou pair. On a :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

En posant $n = 2p + 1$, on a :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \cos(3t) + \ldots + \frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^2} + \ldots\right)$$

De cette identité on peut déduire par exemple, pour $t = 0$:

$$f(0) = \pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

d’où :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

A l’aide du théorème de Parseval, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

9. Séries de Fourier en cosinus ou en sinus

Un développement en série de Fourier en cosinus ou en sinus est un développement où seuls sont présents des termes en cosinus ou en sinus. Quand on désire obtenir ce genre de développement pour une fonction donnée, celle-ci est généralement définie dans l'intervalle [0, π] représentant la moitié de l'intervalle [-π,π] et on spécifie la symétrie de la fonction, paire ou impaire, de l'autre moitié de l'intervalle. Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t & \text{pour les développement en sinus} \\ b_n = 0, \quad a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t & \text{pour les développement en cosinus} \end{cases}$$

10. Formules pour une période quelconque

Nous avons vu au paragraphe 2 qu'une fonction périodique, de période T peut être rendue égale à une fonction de période 2π, à l'aide d'un changement de variable adéquat. Les différentes formules de calcul énoncées précédemment pour des fonctions de période 2π s'écrivent pour une période T quelconque de la manière suivante :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{2i\pi nt/T} \qquad c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi nt/T}\mathrm{d}t$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

Chapitre 5

Transformée de Fourier

1. Introduction

Nous avons étudié précédemment la théorie du développement d'une fonction *f*(*t*) de période T en série de Fourier. La question se pose tout naturellement, maintenant, de savoir ce qui se passe lorsque $T \to \infty$. Nous allons trouver que dans ce cas la série de Fourier devient une *intégrale de Fourier*.

2. La transformée de Fourier - Définitions

On considère une fonction *f*(*t*) satisfaisant les conditions suivantes :

1) *f*(*t*) et *f'*(*t*) sont continues par morceaux dans *tout* intervalle fini.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire que *f*(*t*) est intégrable absolument dans $]-\infty,+\infty[$

On peut alors montrer que l'on peut écrire les relations suivantes :

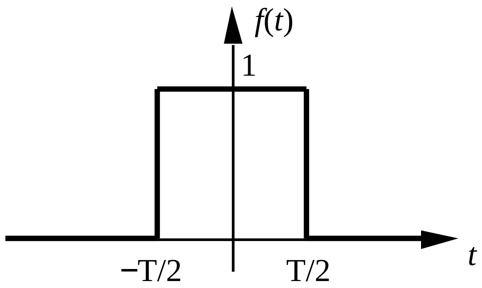
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}\nu = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) \qquad \text{et} \qquad F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t = \mathcal{F}(f(t))$$

$F(\nu)$ est appelé Transformée de Fourier de *f*(*t*) et *f*(*t*) est la transformée de Fourier inverse de $F(\nu)$.

On constate une similitude d'écriture entre la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique et la transformée de Fourier. Les coefficients complexes de la décomposition sont devenus une fonction continue de la fréquence ν au lieu d'être une suite discontinue de coefficients pour des fréquences distinctes.

3. Exemple

Calculons la transformée de Fourier du créneau de largeur T et de hauteur 1 centré sur l'origine $f(t) = \Pi_T(t)$:



$$F(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2i\pi\nu}\left[e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$F(\nu) = \frac{1}{2i\pi\nu}\left(e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T}\right)$$

Soit : $F(\nu) = T\dfrac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T}$

Calculons la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac à l'instant t_0 : $f(t) = \delta(t - t_0)$. Par définition, on a :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = e^{-2i\pi\nu t_0}$$

En particulier, si $t_0 = 0$ (Dirac à l'origine), on a :

$F(\nu) = 1$ (spectre blanc)

4. Transformation en sinus et en cosinus

Toute fonction $f(t)$ peut être décomposée en une somme d'une fonction paire $p(t)$ et d'une fonction impaire $q(t)$:

$$f(t) = p(t) + q(t)$$

où : $p(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right)$ et $q(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right)$

La transformée de Fourier étant une opération linéaire, on obtient, en remplaçant $f(t)$ par cette expression :

$$F(\nu) = 2\int_0^{\infty} p(t)\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}t - 2i\int_0^{\infty} q(t)\sin(2\pi\nu t)\mathrm{d}t$$

que l'on écrit :

$$\mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}_{\cos}(p(t)) - i\mathcal{F}_{\sin}(q(t))$$

où $\mathcal{F}_{\cos}$ et $\mathcal{F}_{\sin}$ représentent respectivement les transformations de Fourier en cosinus et en sinus définies par :

$$\mathcal{F}_{\cos}(f(t)) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_{\sin}(f(t)) = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin(2\pi\nu t)\mathrm{d}t$$

Ces transformations sont surtout utiles pour le calcul numérique. Lorsque $f(t)$ est réel, on peut ainsi calculer séparément la partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier. Remarquons que, pour que la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ réelle soit également réelle, il faut et il suffit que $f(t)$ soit paire.

Lorsque la fonction $f(t)$ est elle même complexe, il faut décomposer $p(t)$ et $q(t)$ en parties réelles et imaginaires. On obtient alors la correspondance indiquée par les flèches :

$f(t)$ = partie réelle paire + imaginaire paire + réelle impaire + imaginaire impaire

$F(\nu)$ = partie réelle paire + imaginaire paire + réelle impaire + imaginaire impaire

5. Propriétés de la transformée de Fourier

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que les transformations de Fourier et transformations de Fourier inverses existent et sont inverses l'une de l'autre. Examinons maintenant comment une opération effectuée sur une fonction $f(t)$ se traduit par une autre opération sur la fonction $F(\nu)$.

5.1. *Linéarité*

L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Fourier l'est évidemment aussi, c'est-à-dire, λ et μ étant des scalaires :

$$\mathcal{F}\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) = \lambda\,\mathcal{F}\big(f(t)\big) + \mu\,\mathcal{F}\big(g(t)\big)$$

5.2. *Transposition, conjugaison*

La transposée de $f(t)$ étant $-f(t)$, on a :

$$\mathcal{F}\big(f(-t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}\big(f(-t)\big) = F(-\nu)$$

D'autre part, on a :

$$\mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2i\pi\nu t} \mathrm{d}t}$$

$$\mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right) = \overline{F(-\nu)}$$

5.3. *Changement d'échelle*

$$\mathcal{F}\big(f(at)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi(\nu/a)t} \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}\big(f(at)\big) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Une compression de l'échelle des t entraîne une dilatation de l'échelle des fréquences.

5.4. *Translation*

Cherchons la transformation de Fourier de $f(t-a)$. En posant $x = t-a$, on obtient :

$$\mathcal{F}\big(f(t-a)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu(x+a)} \mathrm{d}x = e^{-2i\pi\nu a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{F}\big(f(t-a)\big) = e^{-2i\pi\nu a} F(\nu)$$

A une translation de $f(t)$ correspond un "déphasage" de $F(\nu)$ proportionnel à la fréquence ν.

5.5. *Modulation*

Inversement, la transformée de Fourier de $e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2i\pi\nu_0 t} e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)\right) = F(\nu - \nu_0)$$

Moduler une fonction $f(t)$ par une exponentielle imaginaire revient à translater sa transformée de Fourier.

5.6. *Dérivation par rapport à la variable t*

Supposons $f(t)$ sommable, dérivable, à dérivée sommable :

$$\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t$$

Intégrons par parties :

$$\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = \left[f(t)e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t$$

Le premier terme est nul car f est sommable, $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$. Il reste :

$$\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = 2i\pi\nu\mathcal{F}\left(f(t)\right) = 2i\pi\nu F(\nu)$$

A la dérivation correspond une multiplication par $2i\pi\nu$. Plus généralement, pour la dérivée d'ordre m :

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(t)\right) = (2i\pi\nu)^m F(\nu)$$

Le résultat précédent conduit à une importante majoration. De l'expression :

$$(2i\pi\nu)^m F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(t) e^{-2i\pi\nu t} \mathrm{d}t$$

on tire :

$$|2i\pi\nu|^m |F(\nu)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| f^{(m)}(t) \right| \mathrm{d}t$$

On conclue donc que plus f est dérivable, à dérivées sommables, plus F décroît rapidement à l'infini.

5.7. *Dérivation par rapport à la fréquence* ν

Calculons $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} F(\nu)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}F(\nu)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

Soit, en dérivant sous le signe somme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} -2i\pi t f(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t=\mathcal{F}\big(-2i\pi t f(t)\big)$$

Cette expression est légitime si $tf(t)$ est sommable. Plus généralement :

$$\mathcal{F}\Big((-2i\pi t)^m f(t)\Big)=F^{(m)}(\nu)$$

Ce résultat conduit encore à une majoration :

$$\left|F^{(m)}(\nu)\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|2\pi t|^m f(t)\mathrm{d}t$$

Plus $f(t)$ décroît à l'infini, plus $F(\nu)$ est dérivable (avec des dérivées bornées).

6. L'opérateur de convolution

6.1. *Produit de convolution de deux fonctions*

On appelle, lorsqu'il existe, produit de convolution de deux fonctions localement sommables $f(t)$ et $g(t)$ la fonction $h(t)$ définie par :

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

que l'on écrit symboliquement : $h(t)=f(t)*g(t)$. Le mot “produit” se justifie aisément si l'on remarque que l'opération est commutative, car en posant $\theta=t-\tau$, il vient :

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\theta)g(\theta)\mathrm{d}\theta=g(t)*f(t)$$

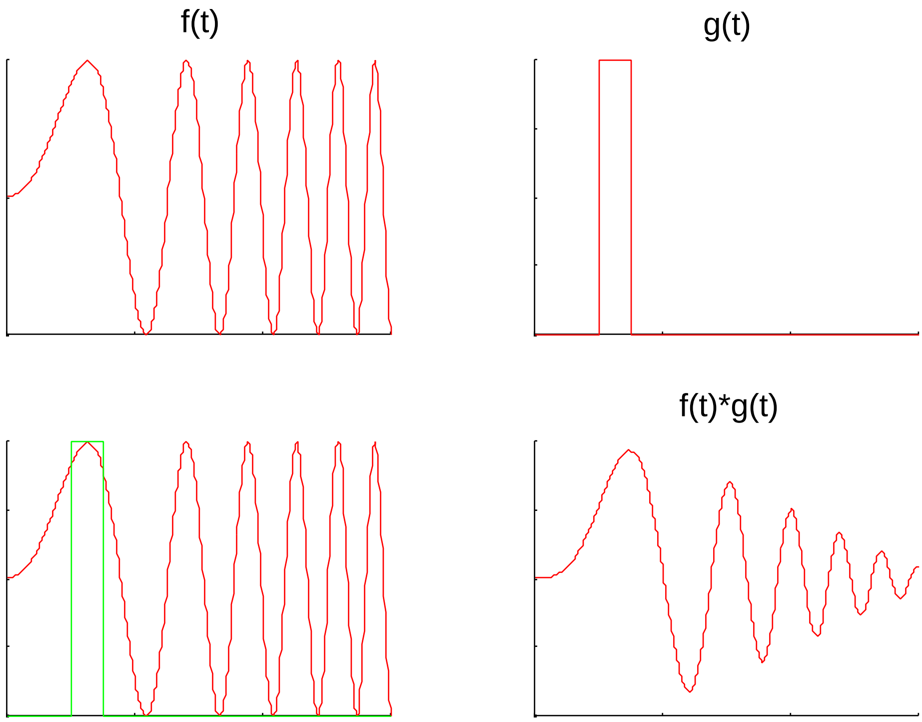
et que l'opération est distributive par rapport à l'addition (linéarité de l'intégrale) :

$$f(t)*\big(g_1(t)+g_2(t)\big)=f(t)*g_1(t)+f(t)*g_2(t)$$

En général, l'une des deux fonctions est à support borné, ou très rapidement décroissante (ici $g(t)$) de sorte que le produit a un sens. La fonction $h(t)$ représente alors une moyenne de $f(t)$

pondérée au voisinage de chaque valeur t par $g(t-\tau)$. Il s'ensuit que, si $g(t)$ est suffisamment régulière, $h(t)$ présente des fluctuations moins rapides que $f(t)$.

La figure ci-après montre la convolution d'un signal $f(t)$ avec une “impulsion” de largeur finie $g(t)$.



6.2. *Les opérateurs de convolution en physique*

Très souvent, un système physique peut être décrit par un opérateur faisant correspondre à tout signal x d'excitation, une réponse y unique du système :

$$x \xrightarrow{\text{opérateur}} y$$

y et x peuvent être des fonctions du temps, par exemple les tensions à l'entrée et à la sortie d'un circuit électrique ou des fonctions dans l'espace, par exemple la répartition des brillances d'un objet et dans l'image qu'en fournit un système optique. Ces grandeurs x et y ne sont pas forcément des grandeurs de même nature, par exemple x peut être la force imposée à un système mécanique et y le mouvement du système sous l'action de cette force. L'étude du système physique se ramène alors à l'étude des propriétés de l'opérateur qui le décrit. Pour qu'un système physique soit décrit par un opérateur de convolution, il faut et il suffit qu'il soit linéaire, continu et invariant par translation. Dans ce cas, la réponse y à un signal x quelconque est donnée par :

$$y = x * g$$

Pour déterminer g, on applique au système une excitation de Dirac δ. La réponse correspondante est :

$$y = \delta * g = g$$

g est appelée réponse impulsionnelle du système. Sans donner de démonstration précise, justifions l'usage de l'opérateur de convolution. Soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle d'un système physique quelconque :

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{opérateur}} g(t)$$

Si le système est invariant par translation, on a :

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{opérateur}} g(t - t_0)$$

Considérons alors une excitation $x(t)$ combinaison linéaire finie d'excitations de Dirac :

$$x(t) = \sum_n x_n \delta(t - t_n)$$

où les x_n sont des scalaires. Si le système est linéaire, la réponse sera :

$$y(t) = \sum_n x_n g(t - t_n)$$

Enfin, si le système est continu, on imagine aisément que l'on puisse, par un passage à la limite, obtenir la réponse à une excitation $x(t)$ quelconque en la décomposant en une combinaison linéaire continue d'excitations de Dirac :

$$x(t) = \int_0^t x(\theta)\delta(t - \theta)\mathrm{d}\theta$$

La réponse correspondante est alors :

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) g(t - \theta)\mathrm{d}\theta$$

c'est-à-dire :

$$y(t) = x(t) * g(t)$$

6.3. *Transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions*

Supposons $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions sommables telles que $f(t)*g(t)$ existe :

$$\mathcal{F}\big(f(t)*g(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2i\pi\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}\big(f(t)*g(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)e^{-2i\pi\nu t}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$

soit en posant $\theta = t-\tau$

$$\mathcal{F}\big(f(t)*g(t)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-2i\pi\nu\tau}\,\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{\infty}g(\theta)e^{-2i\pi\nu\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathcal{F}\big(f(t)*g(t)\big)=\mathcal{F}\big(f(t)\big)\mathcal{F}\big(g(t)\big)=F(\nu)G(\nu)$$

On démontrerait de même que :

$$\mathcal{F}^{-1}\big(F(\nu)*G(\nu)\big)=\mathcal{F}^{-1}\big(F(\nu)\big)\mathcal{F}^{-1}\big(G(\nu)\big)=f(t)g(t)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution est le produit ordinaire des transformées de Fourier.

6.4. *Formule de Parseval-Plancherel*

Cherchons à évaluer l'expression : $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t=\Big[\mathcal{F}\big(f(t)\overline{g(t)}\big)\Big]_{\nu=0}=\Big[\mathcal{F}\big(f(t)\big)*\mathcal{F}\big(\overline{g(t)}\big)\Big]_{\nu=0}=\Big[F(\nu)*\overline{G(-\nu)}\Big]_{\nu=0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t=\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\overline{G(x-\nu)}\,\mathrm{d}x\right]_{\nu=0}=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\overline{G(x)}\,\mathrm{d}x$$

Un cas particulier important est $f(t) = g(t)$, soit :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu$$

Si $f(t)$ est un signal physique, ces deux intégrales expriment respectivement dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel l'énergie de ce signal.

7. Transformée de Fourier des signaux périodiques - T.F. généralisée

Considérons un signal périodique de période T sur $]-\infty,+\infty[$. Dans le cas général, un tel signal n'admet pas de transformée de Fourier car il n'est pas à énergie finie. On peut en revanche décomposer un tel signal en série de Fourier et écrire :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n\nu_0 t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t \qquad \text{avec } \nu_0 = \frac{1}{T}$$

Considérons la transformée de Fourier inverse de la fonction $\delta(\nu - n\nu_0)$ (Dirac à la fréquence $n\nu_0$). Par suite des propriétés de la fonction de Dirac, on peut écrire :

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\delta(\nu - n\nu_0)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n\nu_0) e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu = e^{2i\pi n\nu_0 t}$$

On a donc :

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi n\nu_0 t}\right) = \delta(\nu - n\nu_0)$$

En appliquant ce résultat au signal $f(t)$, on peut écrire :

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big) = F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathcal{F}\left(e^{2i\pi n\nu_0 t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\nu - n\nu_0)$$

Autrement dit, la transformée de Fourier d'un signal périodique de période T est une suite de fonctions impulsions de Dirac (raies) de poids c_n aux fréquences $n\nu_0$, les c_n étant les coefficients du développement en série de Fourier de $f(t)$.

Par exemple, calculons la transformée de Fourier de $\cos(2\pi\nu_0 t)$, Par définition le développement en série de Fourier de $\cos(2\pi\nu_0 t)$ est :

$$\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi\nu_0 t} + e^{-2\pi\nu_0 t}\right)$$

On a alors :

$$\mathcal{F}\left(\cos(2\pi\nu_0 t)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta(\nu+\nu_0)+\delta(\nu-\nu_0)\right)$$

On obtient deux raies de poids 1/2 aux fréquences ν_0 et $-\nu_0$.

Calculons maintenant la transformée de Fourier d'un cosinus de fréquence ν_0 vu à travers une fenêtre de largeur T (signal non périodique) :

$$\begin{cases} f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut écrire :

$$f(t) = \Pi_T(t)\cos(2\pi\nu_0 t)$$

On en déduit donc :

$$F(\nu) = \frac{T}{2}\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} * \left(\delta(\nu+\nu_0)+\delta(\nu-\nu_0)\right)$$

On retrouve donc la transformée de Fourier de la fenêtre de largeur T centrée sur les deux fréquences $+\nu_0$ et $-\nu_0$.

8. Transformée de Fourier numérique d'un signal

8.1. *Estimation de la transformée de Fourier*

Si l'on veut calculer numériquement la transformée de Fourier d'un signal f(t), on ne peut le faire sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ (sauf dans le cas où $f(t)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[a, b]$, a et b étant finis). On est donc obligé de considérer ce signal sur un intervalle de temps fini T.

Pour calculer une estimation de la transformée de Fourier d'un tel signal sur T, on considère que ce signal est périodique de période T. Soit $\hat{x}(t)$ le signal périodique obtenu :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = x(t) & \text{pour } t_0 < t < t_0 + T \\ \hat{x}(t) \text{ périodique de période T} & \end{cases}$$

Ce signal $\hat{x}(t)$ possède alors une transformée de Fourier que l'on peut écrire :

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\nu - n\nu_0) \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{1}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

Afin de simplifier les écritures, on a posé ici $t_0 = 0$.

L'estimation de la transformée de Fourier d'un signal $f(t)$ sur un intervalle de temps T est donc une suite de raies (Dirac) de poids c_n distantes de $\nu_0 = 1/T$. La résolution minimale de cette transformée de Fourier est donc égale à $1/T$.

8.2. *Calcul des coefficients c_n*

Pour calculer numériquement les c_n donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t \quad \text{avec } \nu_0 = \frac{1}{T}$$

on utilise une méthode classique qui consiste à discrétiser l'intégrale en un nombre N d'intégrales élémentaires obtenues en échantillonnant $\hat{x}(t)$ en N points sur l'intervalle de largeur T. On écrit alors :

$$c_n = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t)e^{-2i\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$

Si T/N est petit, en intégrant par la méthode des rectangles, on obtient :

$$c_n = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T}{N}f\left(\frac{kT}{N}\right)e^{-2i\pi nk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right)e^{-2i\pi nk/N}$$

L'expression précédente permet de constater que pour un c_n, il y a N sinus et N cosinus à calculer, car :

$$e^{-2i\pi nk/N} = \cos\left(2\pi n\frac{k}{N}\right) - i\sin\left(2\pi n\frac{k}{N}\right)$$

Il y aurait donc nN sinus et nN cosinus à calculer. Mais quel est le nombre de c_n qu'il faut calculer ? Calculons c_{n+N} :

$$c_{n+N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi(n+N)k/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi nk/N} e^{-2i\pi k}$$

Comme $e^{-2i\pi k} = 1$, on a $c_{n+N} = c_n$. Les c_n sont donc périodiques de période N. Il y aura donc à calculer N coefficients c_n, n variant de 0 à $N-1$.

Plaçons nous maintenant dans le cas d'un signal réel (cas le plus fréquent) et calculons c_{-n}.

$$c_{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{2i\pi nk/N} = \overline{c_n}$$

Calculons également c_{N-n} :

$$c_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{2i\pi nk/N} e^{-2i\pi k} = \overline{c_n} = c_{-n}$$

Autrement dit, dans le cas d'un signal réel, on est ramené à calculer les c_n pour n variant de 0 à $N/2$; les coefficients suivants se déduisant de ceux-ci. Cette constatation permet en outre de montrer que si l'on veut obtenir la transformée de Fourier de $f(t)$ sans erreur, il faut que les c_n soient nuls pour n > N/2 (spectre total) sinon on n'aura pas tout le spectre du signal. Cela implique que la fréquence maximale contenue dans le signal doit être inférieure à $N/2T$ puisque $c_{N/2}$ correspond à cette fréquence.

On retrouve ici le *théorème de Shannon* qui donne la fréquence minimale ν_e d'échantillonnage d'un signal :

$$\nu_e \geq 2\,\nu_{max}$$

La fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois la fréquence maximum du signal échantillonné.

8.3. *Algorithme de la Transformée de Fourier Rapide*

Cet algorithme de Transformée de Fourier Rapide (en anglais FFT pour Fast Fourier Transform) est dû à Cooley et Tuckey (1965). La méthode exploite le fait qu'en posant $w = e^{-2i\pi/N}$, racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité, on a $w^{kn} = e^{-2i\pi kn/N}$ avec kn entier. Ainsi w^{kn} ne peut prendre que N valeurs différentes (les racines de l'unité) et lorsque kn évolue, on "repasse" par les mêmes valeurs.

On cherche donc à calculer :

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right)e^{-2i\pi nk/N}$$

Pour simplifier l'exposé, nous allons calculer les quantités :

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2i\pi nk/N}$$

où f_k est la valeur de $f(t)$ à l'instant kT/N. Comme il y a N coefficient c_n, on aurait théoriquement N^2 sinus et cosinus à calculer.

Supposons que N soit divisible par 2

On a alors :

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k e^{2i\pi nk/N} + \sum_{k=N/2}^{N-1} f_k e^{2i\pi nk/N}$$

Soit, par un changement de variable sur l'indice de sommation du second terme :

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k e^{2i\pi nk/N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{k+N/2} e^{2i\pi n(k+N/2)/N}$$

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/2-1} \left(f_k + f_{k+N/2}e^{i\pi n}\right)e^{2i\pi nk/N} \qquad \text{avec } e^{i\pi n} = (-1)^n$$

Posons :

$$f_k^0 = f_k$$
$$f_k^1 = f_k^0 + f_{k+N/2}^0 e^{i\pi n}$$

On peut alors écrire :

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k^1 e^{2i\pi nk/N}$$

Supposons alors que N/2 soit divisible par 2, c'est-à-dire N divisible par 4

Comme précédemment, on peut écrire :

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/4-1} f_k^1 e^{2i\pi nk/N} + \sum_{k=N/4}^{N/2-1} f_k^1 e^{2i\pi nk/N}$$

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/4-1} f_k^1 e^{2i\pi nk/N} + \sum_{k=0}^{N/4-1} f_{k+N/4}^1 e^{2i\pi n(k+N/4)/N}$$

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/4-1}\left(f_k^1 + f_{k+N/4}^1 e^{i\pi n/2}\right)e^{2i\pi nk/N} \qquad \text{avec } e^{i\pi n/2} = 1,\ i,\ -1,\ -i$$

Posons :

$$f_k^2 = f_k^1 + f_{k+N/4}^1 e^{i\pi n/2}$$

On peut alors écrire :

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/4-1} f_k^2 e^{2i\pi nk/N}$$

On peut continuer et généraliser en supposant N divisible par 2^I. On écrit alors :

$$f_k^I = f_k^{I-1} + f_{k+N/2^I}^{I-1}\ e^{i\pi n/2^{I-1}}$$

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{N/2^I-1} f_k^I e^{2i\pi nk/N}$$

Si N est une puissance 2, $N = 2^m$, on aura finalement :

$$f_k^m = f_k^{m-1} + f_{k+1}^{m-1}\ e^{i\pi n/2^{m-1}}$$

$$N\overline{c_n} = \sum_{k=0}^{0} f_k^m = f_0^m$$

Donc, pour calculer $\overline{c_n}$, il suffit de connaître :

$f_k^0 = f_k = f\left(\frac{kT}{n}\right)$	N termes
$f_k^1 = f_k^0 + f_{k+N/2}^0 e^{i\pi n}$	$N/2$ termes
$f_k^2 = f_k^1 + f_{k+N/4}^1 e^{i\pi n/2}$	$N/4$ termes
$\vdots$	
$f_k^I = f_k^{I-1} + f_{k+N/2^I}^{I-1}\ e^{i\pi n/2^{I-1}}$	$N/2^I$ termes
$\vdots$	
$f_k^m = f_k^{m-1} + f_{k+1}^{m-1}\ e^{i\pi n/2^{m-1}}$	1 terme ($k = 0$)

On a alors :

$$N\overline{c_n} = f_0^m$$

Il n'y a donc à calculer que les termes $e^{i\pi n/2^{I-1}}$, pour I allant de 1 à m, tel que $N = 2^m$. Cela nécessite au total $N \log_2(N)/2$ calculs de sinus et cosinus au lieu de N^2 calculs. Cette réduction est considérable. Par exemple, pour la transformée de Fourier d'un signal connu en $1024 = 2^{10}$ points, il y a théoriquement environ 10^6 calculs de sinus et cosinus alors qu'avec la transformée de Fourier Rapide, il n'en faut plus que 5120.

Chapitre 6

Transformation de Laplace

1. La transformée de Laplace - Définitions

De nombreuses fonctions importantes en pratique n'ont pas de transformée de Fourier, citons par exemple $f(t)$ = cte, t, t^2,... Si l'originale $f(t)$ croît moins vite que la fonction exponentielle, c'est-à-dire s'il existe, quelque soit t, deux constantes M et α positives telles que :

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}$$

La convergence de l'intégrale de Fourier peut être assurée en multipliant l'intégrant par le facteur $e^{-\sigma t}$ où σ est une constante réelle positive supérieure ou égale à l'indice de croissance α de $f(t)$. Comme ce facteur diverge pour t tendant vers moins l'infini, nous limiterons l'intégration aux valeurs de t positives. $\mathrm{H}(t)$ étant l'échelon unité (fonction de Heaviside), la fonction $g(t) = f(t)e^{-\sigma t}\mathrm{H}(t)$, nulle pour $t < 0$ admet une transformée de Fourier lorsque $\sigma > \alpha$:

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\mathrm{H}(t)e^{-2i\pi\nu t}\mathrm{d}t$$

telle que :

$$f(t)e^{-\sigma t}\mathrm{H}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)e^{2i\pi\nu t}\mathrm{d}\nu$$

En faisant apparaître la pulsation $\omega = 2\pi\nu$ correspondant à la fréquence ν et en effectuant le changement de variable $p = \sigma + i\omega$, on obtient :

$$G(\nu) = F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\mathrm{H}(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

et

$$f(t)e^{-\sigma t}\mathrm{H}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)e^{i\omega t}\mathrm{d}\nu$$

avec $p = \sigma + i\omega = \sigma + 2i\pi\nu$, on a $\nu = \dfrac{p-\sigma}{2i\pi}$. Quand $\nu \to -\infty$, $p \to \sigma - i\infty$ et quand $\nu \to +\infty$, $p \to \sigma + i\infty$. On a également $\mathrm{d}\nu = \dfrac{\mathrm{d}p}{2i\pi}$. On déduit alors :

$$f(t)\mathrm{H}(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p \qquad \sigma = \mathrm{Re}(p) > \alpha$$

Par définition $F(p)$ est la *transformée de Laplace*[1] de $f(t)$. $F(p)$ est l'image de l'original $f(t)$: $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$. Le paramètre σ est une abscisse au delà de laquelle on a convergence de l'intégrale, celui-ci est donc appelé *abscisse de convergence*. La fonction $F(p)$ est holomorphe dans le demi-plan droit des p à partie réelle $\sigma > \alpha$. Remarquons que l'intégrale précédente inversant la transformée de Laplace est toujours nulle lorsque t est négatif. En effet, si l'on ferme le contour σ = cte > α par le demi-cercle C_R de rayon R dans le demi-plan droit, il vient :

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p = 0$$

car $F(p)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine d'intégration. Lorsque t est négatif, la première intégrale est nulle car la seconde tend vers zéro lorsque $R \to +\infty$. Il est donc possible de supprimer $\mathrm{H}(t)$ dans la formule initiale et d'écrire :

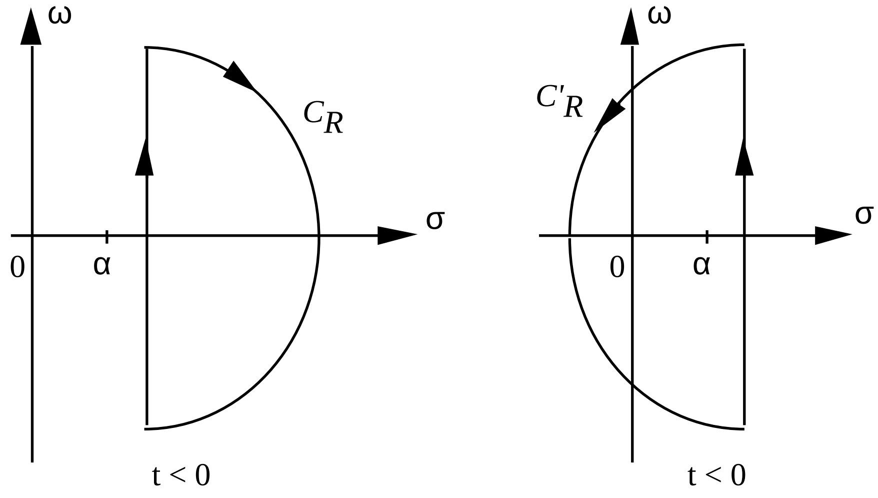
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p \qquad \sigma = \mathrm{Re}(p) > \alpha$$

Cette transformation, dite de Mellin-Fourier, n'est pratiquement utilisée que par les mathématiciens pour dresser les tables de transformées de Laplace. Son usage est mal aisé et lorsqu'on cherche l'original d'une image, on procède plutôt par analogie avec des cas déjà calculés et consignés dans les tables.

Lorsque t est positif, un moyen puissant de calcul de $f(t)$ est l'emploi de la méthode des résidus sur le contour σ = cte > α, fermé par le demi-cercle C'_R de rayon R du coté gauche, à l'intérieur duquel $F(p)$ n'est pas holomorphe. D'après le théorème des résidus, on a :

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p + \lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p = 2i\pi\sum \text{Résidus}\left(F(p)e^{pt}\right)$$

[1] Pierre Simon de Laplace (1749-1827) fils d'un cultivateur normand, cofondateur avec Monge de l'Ecole Polytechnique sous Bonaparte fut un homme politique discret et un scientifique de renom. Contemporain de Fourier qu'il connut à Polytechnique, il rédigea, entre autres publications, la théorie exposée dans ce chapitre.



Comme la deuxième intégrale tend vers zéro lorsque $t > 0$, $f(t)$ est donné par :

$$f(t) = \sum \text{Résidus}\left(F(p)e^{pt}\right) \qquad \text{avec } t > 0 \text{ et } \sigma > \alpha$$

2. Propriétés de la transformée de Laplace

Dans tout ce qui suit nous supposerons que les transformées de Laplace sont définies c'est-à-dire que l'on s'est placé, pour les calculs, à la droite de la plus grande abscisse de convergence. Certaines propriétés dont la démonstration est évidente seront justes énoncées.

2.1. *Linéarité*

L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Laplace l'est évidemment aussi, c'est-à-dire, λ et μ étant des scalaires :

$$\mathcal{L}\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) = \lambda \mathcal{L}\left(f(t)\right) + \mu \mathcal{L}\left(g(t)\right)$$

2.2. *Changement d'échelle*

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \qquad \text{avec } a > 0$$

2.3. *Translation de la variable t*

$$\mathcal{L}\left(f(t-\tau)\right) = e^{-a\tau} F(p)$$

2.4. *Translation de la variable p*

$$\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) = F(p+a)$$

2.5. *Dérivation de l'image*

Si $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ alors $\dfrac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt}\mathrm{d}t$

et plus généralement :

$$\mathcal{L}\big((-t)^n f(t)\big) = F^{(n)}(p) = \int_0^\infty f(t)(-t)^n e^{-pt}\mathrm{d}t$$

L'apparition du monôme $(-t)^n$ sous le signe intégral n'affecte en rien la convergence. Si la transformée de Laplace de $H(t)f(t)$ existe moyennant certaines conditions, la transformée de $(-t)^n H(t)f(t)$ existera moyennant les mêmes conditions.

2.6. *Dérivation de l'original*

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties :

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) - f(0^+)$$

Plus généralement, en appliquant plusieurs fois la même démarche, on a :

$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

La transformation de Laplace transforme une dérivation en une multiplication (à une constante additive près). Elle transforme donc les équations différentielles en équations algébriques, ce qui simplifie considérablement leur résolution. On peut dire qu'à cause de cette propriété, la transformation de Laplace est aux fonctions ce que les logarithmes sont aux nombres.

2.7. *Intégration de l'original*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Soit $g(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$ avec $g(0) = 0$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right) = pG(p) - g(0^+) \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{L}\big(f(t)\big) = pG(p) = F(p)$$

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{F(p)}{p}$$

2.8. *Transformation du produit de convolution*

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Rappelons que, par souci de simplicité, nous avons omis l'écriture de la fonction de Heaviside pour chacune des fonctions intervenant dans le produit de convolution. La fonction $f(t)$ est telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$, on peut donc écrire :

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Faisons entrer le terme e^{-pt} dans l'intégrale de convolution et permutons l'ordre des intégrations :

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\tau$$

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = \int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-pt} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\tau$$

On reconnaît dans l'intégrale intérieure la transformée de Laplace d'une fonction (nulle pour $t < \tau$) retardée ; d'après le théorème du retard, on a :

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} G(p) \mathrm{d}\tau$$

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = G(p) \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$\mathcal{L}\big(f(t) * g(t)\big) = F(p) G(p)$$

Le produit de convolution est transformé en produit simple.

2.9. *Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale*

$$\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{t \to \infty} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{p \to \infty} pF(p) = \lim_{t \to 0} f(t)$$

En partant de la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} \mathrm{d}t = pF(p) - f(0^+)$$

Prenons la limite de cette égalité quand $p \to 0$:

$$\int_0^\infty f'(t) \mathrm{d}t = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0^+)$$

$$[f(t)]_0^\infty = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0^+)$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) - f(0^+) = \lim_{p \to 0} pF(p) - f(0^+)$$

d'où :

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

Prenons la limite de l'égalité quand $p \to \infty$, on obtient directement :

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = f(0^+) = \lim_{t \to 0} f(t)$$

3. Exemples de calculs

3.1. *Echelon unitaire - Fonction de Heaviside*

$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$, on a :

$$\mathcal{L}(\mathrm{H}(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right)$$

$$\mathcal{L}(\mathrm{H}(t)) = \frac{1}{p}$$

3.2. *Impulsion*

Considérons maintenant la fonction décrite par morceaux suivante :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & t \leq 0 \\ f(t) = K & 0 < t \leq 1/K \\ f(t) = 0 & t > 1/K \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{1/K} Ke^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-\frac{K}{p}e^{-pt}\right]_0^{1/K}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = -\frac{K}{p}e^{-p/K} + \frac{K}{p} = \frac{K}{p}\left(1 - e^{-p/K}\right)$$

Si l'on fait tendre K vers l'infini, la fonction $f(t)$ tend vers une impulsion, dans ce cas, le terme p/K est un infiniment petit que l'on peut approximer par les premiers termes de son développement :

$$\mathcal{L}(f(t)) \approx \frac{K}{p}\left(1 - \left(1 - \frac{p}{K}\right)\right) = 1$$

La fonction $f(t)$ est appelée fonction de Dirac, elle est notée $\delta(t)$. La transformée de Laplace de la fonction de Dirac est donc une constante. Inversement, la seule fonction temporelle dont la transformée de Laplace est une constante est une fonction de Dirac.

La fonction de Dirac est donc l'élément unitaire de la convolution. En effet dans le domaine temporel, $f(t) * \delta(t) = f(t)$ et en transformée de Laplace, $F(p).1 = F(p)$. Cela signifie, en physique, que la fonction de transfert d'un système est sa réponse impulsionnelle.

3.3. Fonction exponentielle

Calculons la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{at}$:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \int_0^\infty e^{at}e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(p-a)t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{p-a}\left[e^{-(p-a)t}\right]_0^\infty$$

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{1}{p-a}$$

Cherchons maintenant à calculer la transformée de Laplace de la fonction $\cos(\omega t)$. Afin de faciliter l'intégration rappelons que l'on a $\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)$. On a alors, d'après le résultat précédent :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{p-i\omega}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

On déduit également :

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \mathrm{Im}\left(\mathcal{L}\left(e^{i\omega t}\right)\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Cherchons maintenant, en calculant l'intégrale $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{p}{p^2+\omega^2}e^{pt}\mathrm{d}p$ à l'aide des résidus, à inverser cette transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \sum \text{Résidus}\left(\frac{pe^{pt}}{p^2+\omega^2}\right) = \sum \text{Résidus}\left(\frac{pe^{pt}}{(p-i\omega)(p+i\omega)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \left.\frac{pe^{pt}}{(p-i\omega)}\right|_{p=-i\omega} + \left.\frac{pe^{pt}}{(p+i\omega)}\right|_{p=i\omega} = \frac{-i\omega e^{-i\omega t}}{-2i\omega} + \frac{i\omega e^{i\omega t}}{2i\omega}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \cos(\omega t)$$

3.4. Extension à un cas complexe

Calculons la transformée de Laplace de $f(t) = \sin\left(\sqrt{t}\right)$. Exprimons tout d'abord la fonction sinus sous la forme d'une somme de série :

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On peut donc écrire :

$$\sin\left(\sqrt{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{t}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1/2}}{(2n+1)!}$$

d'où :

$$\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{t}\right)\right)=\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1/2}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\mathcal{L}\left(t^{n+1/2}\right)$$

Pour calculer $\mathcal{L}\left(t^{n+1/2}\right)$, rappelons la définition de la fonction gamma :

$$\Gamma(u)=\int_0^{\infty}x^{u-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

Rappelons également que $\Gamma(u+1)=u\Gamma(u)$. On cherche à calculer :

$$\mathcal{L}\left(t^{n+1/2}\right)=\int_0^{\infty}t^{n+1/2}e^{-pt}\mathrm{d}t$$

avec le changement de variable $v=pt$, on a $\frac{\mathrm{d}v}{p}=\mathrm{d}t$

$$\mathcal{L}\left(t^{n+1/2}\right)=\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1/2+1}\int_0^{\infty}v^{n+1/2}e^{-v}\mathrm{d}v=\frac{\Gamma(n+1/2+1)}{p^{n+1/2+1}}$$

On peut alors écrire (voir annexe 1) :

$$\mathcal{L}\left(t^{n+1/2}\right)=\frac{(2n+1)!}{2p^{n+1/2+1}4^n n!}\sqrt{\pi}$$

d'où :

$$\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{t}\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\mathcal{L}\left(t^{n+1/2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{(2n+1)!}{2p^{n+1/2+1}4^n n!}\sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{t}\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2p^{n+1/2+1}4^n n!}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4p}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{t}\right)\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}e^{-1/4p}$$

Annexe

Calculs complémentaires pour l'évaluation de $\mathcal{L}\left(\sin\left(\sqrt{t}\right)\right)$

Evaluation de $\Gamma(n+1/2+1)$:

$$\Gamma(n+1/2+1)=(n+1/2)\Gamma(n+1/2)$$

$$\Gamma(n+1/2+1)=(n+1/2)(n-1+1/2)\Gamma(n-1+1/2)$$

En poursuivant le processus :

$$\Gamma(n+1/2+1)=(n+1/2)(n-1+1/2)....(1/2)\Gamma(1/2)$$

Calculons $\Gamma(1/2)$:

$$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\mathrm{d}x$$

En posant $x = u^2$, c'est-à-dire dx = 2 u du, on a :

$$\Gamma(1/2)=2\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$\left(\Gamma(1/2)\right)^2=\left(2\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\left(2\int_0^\infty e^{-v^2}\mathrm{d}v\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

En passant en coordonnées polaires, $u = \rho\cos(\varphi)$, $v = \rho\sin(\varphi)$, on obtient :

$$\left(\Gamma(1/2)\right)^2=4\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\infty}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi=4\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^\infty\mathrm{d}\varphi=2\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi=\pi$$

d'où le résultat :

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

On peut alors écrire :

$$\Gamma(n+1/2+1)=(n+1/2)(n-1+1/2)....(1/2)\sqrt{\pi}$$

Calculons :

$$X=\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1/2+1)=(n+1/2)(n-1+1/2)....(1/2)$$

On a :

$$2^{n+1} X = (2n+1)(2n-1)(2n-3)....(3)(1)$$

$$2^{n+1} X = \frac{(2n+1)!}{(2n)(2n-2)(2n-4)....(2)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$X = \frac{(2n+1)!}{2\ n!\ 4^n}$$

d’où :

$$\Gamma(n+1/2+1) = \frac{(2n+1)!}{2\ n!\ 4^n}\sqrt{\pi}$$

Références

Ce document s'inspire, pour partie, des cours polycopiés “Analyse de Fourier” et “Fonctions de variables complexes” créés par le Professeur Jean-Louis Greffe

Les références suivantes ont également été utilisées pour la conception de ce cours :

E. Dieulesaint et **D. Royer**. *Automatique appliquée.* 1. Systèmes linéaires de commande à signaux analogiques. Masson, 1987.

J.L. Greffe. "Analyse de Fourier" et "Fonctions de variables complexes". Cours de première année ENSG, 1993/1994.

M. Rivoire et **J.L. Ferrier**. *Cours d'automatique*. Tome 1 : Signaux et systèmes. Eyrolles, 1989.

F. Rodier. *Distributions et transformation de Fourier à l'usage des physiciens et des ingénieurs.* Mac Graw Hill, 1988.