

Identification robuste en présence de mesures aberrantes

José Ragot⁽¹⁾, Kamel Ben Othman⁽²⁾
Didier Maquin⁽¹⁾, Mohamed Benrejeb⁽²⁾

⁽¹⁾Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)

⁽²⁾LARA Automatique. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis



STA'07, Sousse, 5-7 novembre 2007

- 1 Introduction
- 2 Modèles utilisés
- 3 Estimation paramétrique
- 4 Résultats pour un système du premier ordre
- 5 Détermination de l'ordre du modèle
- 6 Conclusion & perspectives

- 1 Introduction
- 2 Modèles utilisés
- 3 Estimation paramétrique
- 4 Résultats pour un système du premier ordre
- 5 Détermination de l'ordre du modèle
- 6 Conclusion & perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèles utilisés
- 3 Estimation paramétrique
- 4 Résultats pour un système du premier ordre
- 5 Détermination de l'ordre du modèle
- 6 Conclusion & perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèles utilisés
- 3 Estimation paramétrique
- 4 Résultats pour un système du premier ordre
- 5 Détermination de l'ordre du modèle
- 6 Conclusion & perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèles utilisés
- 3 Estimation paramétrique
- 4 Résultats pour un système du premier ordre
- 5 Détermination de l'ordre du modèle
- 6 Conclusion & perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Modèles utilisés
- 3 Estimation paramétrique
- 4 Résultats pour un système du premier ordre
- 5 Détermination de l'ordre du modèle
- 6 Conclusion & perspectives

Problématique

Estimer les paramètres d'un modèle de type ARX à partir de mesures corrompues simultanément par des bruits à caractères aléatoires de valeurs moyennes nulles et des erreurs systématiques

Approche classique

Estimation paramétrique par moindres carrés simples

- Sensibilité importante aux valeurs aberrantes
- Procédure itérative d'élimination

Utilisation de méthodes robustes

- LMS *Least Median of Squares* (Rousseeuw 1984)
- LTS *Least Trimmed Squares* (Rousseeuw 1985)

Problématique

Estimer les paramètres d'un modèle de type ARX à partir de mesures corrompues simultanément par des bruits à caractères aléatoires de valeurs moyennes nulles et des erreurs systématiques

Approche classique

Estimation paramétrique par moindres carrés simples

- Sensibilité importante aux valeurs aberrantes
- Procédure itérative d'élimination

Utilisation de méthodes robustes

- LMS *Least Median of Squares* (Rousseeuw 1984)
- LTS *Least Trimmed Squares* (Rousseeuw 1985)

Problématique

Estimer les paramètres d'un modèle de type ARX à partir de mesures corrompues simultanément par des bruits à caractères aléatoires de valeurs moyennes nulles et des erreurs systématiques

Approche classique

Estimation paramétrique par moindres carrés simples

- Sensibilité importante aux valeurs aberrantes
- Procédure itérative d'élimination

Utilisation de méthodes robustes

- LMS *Least Median of Squares* (Rousseeuw 1984)
- LTS *Least Trimmed Squares* (Rousseeuw 1985)

Problématique

Estimer les paramètres d'un modèle de type ARX à partir de mesures corrompues simultanément par des bruits à caractères aléatoires de valeurs moyennes nulles et des erreurs systématiques

Approche classique

Estimation paramétrique par moindres carrés simples

- Sensibilité importante aux valeurs aberrantes
- Procédure itérative d'élimination

Utilisation de méthodes robustes

- LMS *Least Median of Squares* (Rousseeuw 1984)
- LTS *Least Trimmed Squares* (Rousseeuw 1985)

Problématique

Estimer les paramètres d'un modèle de type ARX à partir de mesures corrompues simultanément par des bruits à caractères aléatoires de valeurs moyennes nulles et des erreurs systématiques

Approche classique

Estimation paramétrique par moindres carrés simples

- Sensibilité importante aux valeurs aberrantes
- Procédure itérative d'élimination

Utilisation de méthodes robustes

- LMS *Least Median of Squares* (Rousseeuw 1984)
- LTS *Least Trimmed Squares* (Rousseeuw 1985)

Modèles utilisés (1)

On considère un modèle autorégressif mono-entrée – mono-sortie

$$y^*(k) = \sum_{i=1}^p a_i^* y^*(k-i) + \sum_{i=1}^q b_i^* x(k-i)$$

ou en utilisant l'opérateur retard q^{-1}

$$y^*(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i^* q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i^* q^{-i}} x(k)$$

On dispose de mesures des signaux de sortie (l'entrée x est connue)

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + e(k)$$

$e(k)$ est une réalisation particulière d'une variable aléatoire e pouvant recouvrir deux types d'erreur.

- 1er type : erreurs de faibles amplitudes centrées autour de l'origine
- 2ème type : grosses erreurs (*outliers*) à caractère accidentel non nécessairement de valeur moyenne nulle

Modèles utilisés (1)

On considère un modèle autorégressif mono-entrée – mono-sortie

$$y^*(k) = \sum_{i=1}^p a_i^* y^*(k-i) + \sum_{i=1}^q b_i^* x(k-i)$$

ou en utilisant l'opérateur retard q^{-1}

$$y^*(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i^* q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i^* q^{-i}} x(k)$$

On dispose de mesures des signaux de sortie (l'entrée x est connue)

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + e(k)$$

$e(k)$ est une réalisation particulière d'une variable aléatoire e pouvant recouvrir deux types d'erreur.

- 1er type : erreurs de faibles amplitudes centrées autour de l'origine
- 2ème type : grosses erreurs (*outliers*) à caractère accidentel non nécessairement de valeur moyenne nulle

Modèles utilisés (1)

On considère un modèle autorégressif mono-entrée – mono-sortie

$$y^*(k) = \sum_{i=1}^p a_i^* y^*(k-i) + \sum_{i=1}^q b_i^* x(k-i)$$

ou en utilisant l'opérateur retard q^{-1}

$$y^*(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i^* q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i^* q^{-i}} x(k)$$

On dispose de mesures des signaux de sortie (l'entrée x est connue)

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + e(k)$$

$e(k)$ est une réalisation particulière d'une variable aléatoire e pouvant recouvrir deux types d'erreur.

- 1er type : erreurs de faibles amplitudes centrées autour de l'origine
- 2ème type : grosses erreurs (*outliers*) à caractère accidentel non nécessairement de valeur moyenne nulle

Modèles utilisés (1)

On considère un modèle autorégressif mono-entrée – mono-sortie

$$y^*(k) = \sum_{i=1}^p a_i^* y^*(k-i) + \sum_{i=1}^q b_i^* x(k-i)$$

ou en utilisant l'opérateur retard q^{-1}

$$y^*(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i^* q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i^* q^{-i}} x(k)$$

On dispose de mesures des signaux de sortie (l'entrée x est connue)

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + e(k)$$

$e(k)$ est une réalisation particulière d'une variable aléatoire e pouvant recouvrir deux types d'erreur.

- 1er type : erreurs de faibles amplitudes centrées autour de l'origine
- 2ème type : grosses erreurs (*outliers*) à caractère accidentel non nécessairement de valeur moyenne nulle

Modèles utilisés (2)

Loi de distribution de la variable e (**distribution contaminée**) :

$$p(e) = \pi p_1(e) + (1 - \pi) p_2(e)$$

forme additive dépendant d'un facteur de mélange π ($0 \leq \pi \leq 1$)

π : proportion du nombre de mesures saines par rapport au nombre total de mesures

Lois "partielles" (avec $\sigma_2 \gg \sigma_1$)

$$p_1(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_1}\right)^2\right)$$

$$p_2(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

Loi de distribution de la variable e (**distribution contaminée**) :

$$p(e) = \pi p_1(e) + (1 - \pi) p_2(e)$$

forme additive dépendant d'un facteur de mélange π ($0 \leq \pi \leq 1$)

π : proportion du nombre de mesures saines par rapport au nombre total de mesures

Lois "partielles" (avec $\sigma_2 \gg \sigma_1$)

$$p_1(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_1}\right)^2\right)$$

$$p_2(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

Modèles utilisés (2)

Loi de distribution de la variable e (**distribution contaminée**) :

$$p(e) = \pi p_1(e) + (1 - \pi) p_2(e)$$

forme additive dépendant d'un facteur de mélange π ($0 \leq \pi \leq 1$)

π : proportion du nombre de mesures saines par rapport au nombre total de mesures

Lois "partielles" (avec $\sigma_2 \gg \sigma_1$)

$$p_1(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_1}\right)^2\right)$$

$$p_2(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

Modèles utilisés (2)

Loi de distribution de la variable e (**distribution contaminée**) :

$$p(e) = \pi p_1(e) + (1 - \pi) p_2(e)$$

forme additive dépendant d'un facteur de mélange π ($0 \leq \pi \leq 1$)

π : proportion du nombre de mesures saines par rapport au nombre total de mesures

Lois "partielles" (avec $\sigma_2 \gg \sigma_1$)

$$p_1(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_1}\right)^2\right)$$

$$p_2(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

Méthode d'estimation (1)

Principe : estimation au sens du maximum de vraisemblance

On considère un échantillon de N mesures $\tilde{y}(k)$ et l'on fait l'hypothèse que les erreurs de mesure sont indépendantes.

La log-vraisemblance de l'échantillon s'écrit :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log (\pi p_1(y(k)) + (1 - \pi)p_2(y(k)))$$

avec :

$$p_1(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_1} \right)^2 \right)$$

$$p_2(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_2} \right)^2 \right)$$

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k)$$

Méthode d'estimation (1)

Principe : estimation au sens du maximum de vraisemblance

On considère un échantillon de N mesures $\tilde{y}(k)$ et l'on fait l'hypothèse que les erreurs de mesure sont indépendantes.

La log-vraisemblance de l'échantillon s'écrit :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log (\pi p_1(y(k)) + (1 - \pi)p_2(y(k)))$$

avec :

$$p_1(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_1} \right)^2 \right)$$

$$p_2(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_2} \right)^2 \right)$$

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k)$$

Méthode d'estimation (1)

Principe : estimation au sens du maximum de vraisemblance

On considère un échantillon de N mesures $\tilde{y}(k)$ et l'on fait l'hypothèse que les erreurs de mesure sont indépendantes.

La log-vraisemblance de l'échantillon s'écrit :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log (\pi p_1(y(k)) + (1 - \pi)p_2(y(k)))$$

avec :

$$p_1(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_1} \right)^2 \right)$$

$$p_2(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_2} \right)^2 \right)$$

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k)$$

Méthode d'estimation (1)

Principe : estimation au sens du maximum de vraisemblance

On considère un échantillon de N mesures $\tilde{y}(k)$ et l'on fait l'hypothèse que les erreurs de mesure sont indépendantes.

La log-vraisemblance de l'échantillon s'écrit :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log (\pi p_1(y(k)) + (1 - \pi)p_2(y(k)))$$

avec :

$$p_1(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_1} \right)^2 \right)$$

$$p_2(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_2} \right)^2 \right)$$

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k)$$

Méthode d'estimation (2)

Equations d'optimalité de \mathcal{V} par rapport à a_j , b_j , σ_1 , σ_2 et π

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a_j} = - \sum_{k=1}^N \left(\pi \frac{p_{1,k}}{p_k \sigma_1^2} + (1 - \pi) \frac{p_{2,k}}{p_k \sigma_2^2} \right) (\tilde{y}(k) - y(k)) \frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial b_j} = - \sum_{k=1}^N \left(\pi \frac{p_{1,k}}{p_k \sigma_1^2} + (1 - \pi) \frac{p_{2,k}}{p_k \sigma_2^2} \right) (\tilde{y}(k) - y(k)) \frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \pi} = \sum_{k=1}^N \frac{p_{1,k} - p_{2,k}}{p_k} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma_1} = \pi \sum_{k=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} \left(\frac{(\tilde{y}(k) - y(k))^2}{\sigma_1^3} - \frac{1}{\sigma_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma_2} = (1 - \pi) \sum_{k=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} \left(\frac{(\tilde{y}(k) - y(k))^2}{\sigma_2^3} - \frac{1}{\sigma_2} \right) = 0$$

Méthode d'estimation (3)

Notations :

$$p_{1,k} = p_1(y(k)) \quad p_{2,k} = p_2(y(k)) \quad p_k = \pi p_{1,k} + (1 - \pi) p_{2,k}$$

Sensibilité de la sortie $y(k)$ par rapport aux paramètres du modèle :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial a_j} + y(k-j) \quad j = 1..p$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial b_j} + x(k-j) \quad j = 1..q$$

ou plus simplement avec l'opérateur q^{-1} :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} y(k) \quad j = 1..p$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k) \quad j = 1..q$$

Méthode d'estimation (3)

Notations :

$$p_{1,k} = p_1(y(k)) \quad p_{2,k} = p_2(y(k)) \quad p_k = \pi p_{1,k} + (1 - \pi) p_{2,k}$$

Sensibilité de la sortie $y(k)$ par rapport aux paramètres du modèle :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial a_j} + y(k-j) \quad j = 1..p$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial b_j} + x(k-j) \quad j = 1..q$$

ou plus simplement avec l'opérateur q^{-1} :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} y(k) \quad j = 1..p$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k) \quad j = 1..q$$

Méthode d'estimation (3)

Notations :

$$p_{1,k} = p_1(y(k)) \quad p_{2,k} = p_2(y(k)) \quad p_k = \pi p_{1,k} + (1 - \pi) p_{2,k}$$

Sensibilité de la sortie $y(k)$ par rapport aux paramètres du modèle :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial a_j} + y(k-j) \quad j = 1..p$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial b_j} + x(k-j) \quad j = 1..q$$

ou plus simplement avec l'opérateur q^{-1} :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} y(k) \quad j = 1..p$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k) \quad j = 1..q$$

Résolution hiérarchisée multi-niveau

- Solutions analytiques partielles

Par exemple : si les quantités $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$ sont connues, alors σ_1 et σ_2 revêtent des expressions analytiques simples

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k}}$$

- Solutions itératives

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta(H^{(m)})^{-1}G^{(m)} \quad (1)$$

Résolution hiérarchisée multi-niveau

- Solutions analytiques partielles

Par exemple : si les quantités $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$ sont connues, alors σ_1 et σ_2 revêtent des expressions analytiques simples

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k}}$$

- Solutions itératives

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta(H^{(m)})^{-1}G^{(m)} \quad (1)$$

Résolution hiérarchisée multi-niveau

- Solutions analytiques partielles

Par exemple : si les quantités $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$ sont connues, alors σ_1 et σ_2 revêtent des expressions analytiques simples

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k}}$$

- Solutions itératives

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta(H^{(m)})^{-1} G^{(m)} \quad (1)$$

Résolution hiérarchisée multi-niveau

- Solutions analytiques partielles

Par exemple : si les quantités $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$ sont connues, alors σ_1 et σ_2 revêtent des expressions analytiques simples

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k}}$$

- Solutions itératives

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta(H^{(m)})^{-1} G^{(m)} \quad (1)$$

Résolution hiérarchisée multi-niveau

- Solutions analytiques partielles

Par exemple : si les quantités $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$ sont connues, alors σ_1 et σ_2 revêtent des expressions analytiques simples

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k}}$$

- Solutions itératives

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta(H^{(m)})^{-1} G^{(m)} \quad (1)$$

Résultats pour un premier ordre

Modèle

$$y^*(k+1) = a^*y^*(k) + b^*u(k), \quad y^*(0) = 0$$

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + \varepsilon(k) + \delta(k)$$

avec $a^* = 0.9$ et $b^* = 0.1$.

ε distribué selon une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 0.1)$

δ distribué selon une loi uniforme

Sortie prédite

$$\hat{y}_{RLS}(k+1) = \hat{a}_{RLS}\hat{y}_{RLS}(k) + \hat{b}_{RLS}u(k), \quad \hat{y}_{RLS}(0) = 0$$

Critères d'appréciation

$$\tilde{\Phi}_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - \tilde{y}(k))^2$$

$$\tilde{\Phi}_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - \tilde{y}(k))^2$$

$$\Phi_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - y^*(k))^2$$

$$\Phi_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - y^*(k))^2$$

Résultats pour un premier ordre

Modèle

$$y^*(k+1) = a^*y^*(k) + b^*u(k), \quad y^*(0) = 0$$

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + \varepsilon(k) + \delta(k)$$

avec $a^* = 0.9$ et $b^* = 0.1$.

ε distribué selon une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 0.1)$

δ distribué selon une loi uniforme

Sortie prédite

$$\hat{y}_{RLS}(k+1) = \hat{a}_{RLS}\hat{y}_{RLS}(k) + \hat{b}_{RLS}u(k), \quad \hat{y}_{RLS}(0) = 0$$

Critères d'appréciation

$$\tilde{\Phi}_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - \tilde{y}(k))^2$$

$$\tilde{\Phi}_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - \tilde{y}(k))^2$$

$$\Phi_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - y^*(k))^2$$

$$\Phi_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - y^*(k))^2$$

Résultats pour un premier ordre

Modèle

$$y^*(k+1) = a^*y^*(k) + b^*u(k), \quad y^*(0) = 0$$

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + \varepsilon(k) + \delta(k)$$

avec $a^* = 0.9$ et $b^* = 0.1$.

ε distribué selon une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 0.1)$

δ distribué selon une loi uniforme

Sortie prédite

$$\hat{y}_{RLS}(k+1) = \hat{a}_{RLS}\hat{y}_{RLS}(k) + \hat{b}_{RLS}u(k), \quad \hat{y}_{RLS}(0) = 0$$

Critères d'appréciation

$$\tilde{\Phi}_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - \tilde{y}(k))^2$$

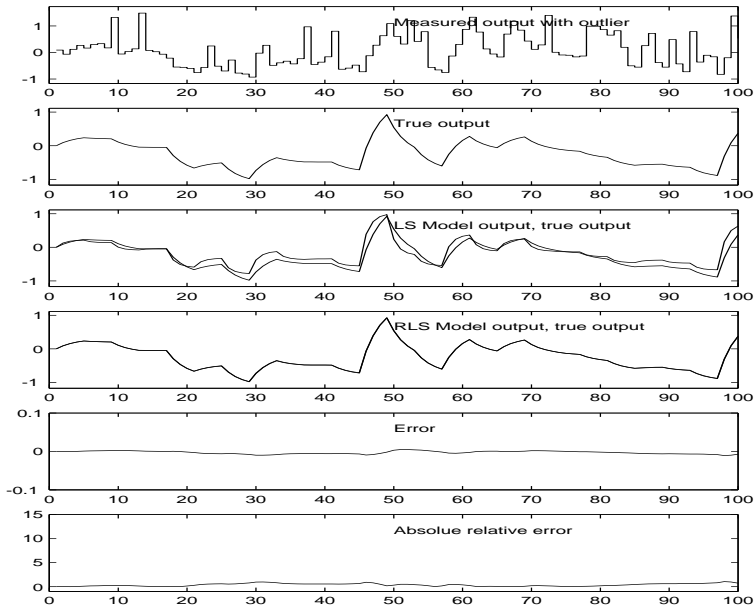
$$\tilde{\Phi}_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - \tilde{y}(k))^2$$

$$\Phi_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - y^*(k))^2$$

$$\Phi_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - y^*(k))^2$$

Premier essai

Un seul jeu de mesures avec valeurs aberrantes : $0 \leq \delta(k) \leq 0.75$



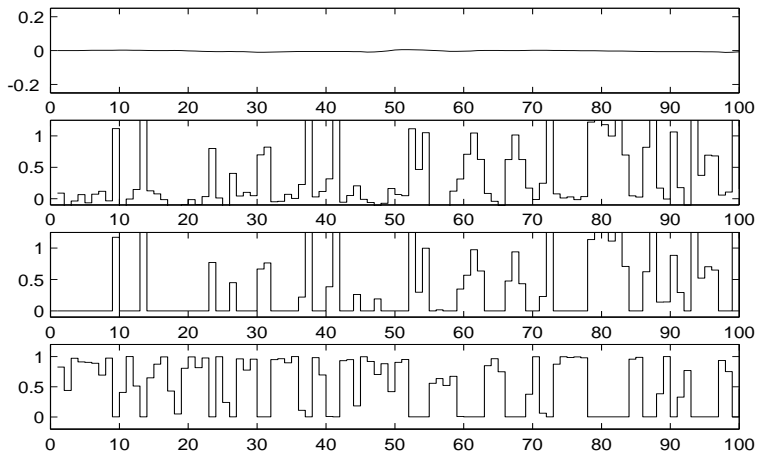


FIG.: $\hat{y}_{RLS} - y$, $\hat{y}_{RLS} - \tilde{y}$, δ et w

Second essai

Même conditions que précédemment : résultats sur 10 simulations

Second essai

	\hat{a}_{RLS}	\hat{b}_{RLS}	\hat{a}_{LS}	\hat{b}_{LS}	σ_1	σ_2	π	$\check{\Phi}_{LS}$	Φ_{LS}	$\check{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}
1	0.904	0.097	0.189	0.100	0.082	0.621	0.573	10.092	4.360	9.172	0.143
2	0.897	0.105	0.229	0.085	0.087	0.635	0.577	10.563	4.126	9.353	0.218
3	0.891	0.111	0.186	0.146	0.091	0.629	0.565	10.438	4.450	9.403	1.380
4	0.905	0.100	0.260	0.097	0.087	0.638	0.609	10.365	4.363	9.038	0.186
5	0.892	0.103	0.184	0.082	0.083	0.635	0.592	10.056	4.411	9.184	0.221
6	0.898	0.103	0.261	0.125	0.087	0.629	0.580	10.336	4.566	9.227	0.229
7	0.893	0.100	0.252	0.109	0.088	0.625	0.586	10.266	4.651	9.118	0.494
8	0.898	0.098	0.204	0.095	0.085	0.638	0.586	10.470	4.811	9.302	0.337
9	0.907	0.096	0.276	0.075	0.084	0.619	0.581	10.048	4.701	9.070	1.752
10	0.903	0.101	0.263	0.102	0.085	0.605	0.557	10.573	5.144	9.109	0.175

Résultats obtenus sur dix jeux de simulation

Troisième essai

- 12 résultats issus de moyennes sur 100 essais
- Les écart-types σ_1 et σ_2 et le coefficient de mélange π ne sont pas optimisés, mais fixés *a priori*
- L'amplitude des grosses erreurs varie entre 0 et 1.5
 - $\eta = 0 : -1.5 \leq \delta(k) \leq 1.5$
 - $\eta = 1 : \delta(k) = 1.5$
 - $\eta = 2 : \delta(k) = -1.5$ ou $\delta(k) = 1.5$

Troisième essai

N	a_{RLS}	b_{RLS}	a_{LS}	b_{LS}	σ_1	σ_2	μ	$\check{\Phi}_{LS}$	Φ_{LS}	$\check{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}	η
1	0.905	0.097	0.583	0.131	0.1	2.0	0.5	15.86	9.7	12.5	0.43	0
2	0.900	0.100	0.284	0.159	0.1	2.0	0.5	24.11	11.89	20.9	0.16	1
3	0.899	0.101	0.162	0.190	0.1	2.0	0.5	33.70	13.11	31.14	0.26	2
4	0.904	0.098	0.590	0.130	0.1	2.0	0.1	15.93	9.7	12.5	0.36	0
5	0.900	0.100	0.276	0.159	0.1	2.0	0.1	24.01	11.7	20.95	0.18	1
6	0.900	0.101	0.149	0.154	0.1	2.0	0.1	33.90	12.67	31.49	0.21	2
7	0.906	0.097	0.589	0.130	0.1	10	0.5	15.94	9.86	12.54	0.52	0
8	0.900	0.100	0.280	0.159	0.1	10	0.5	24.11	11.86	20.97	0.15	1
9	0.901	0.099	0.135	0.189	0.1	10	0.5	33.15	11.96	30.87	0.07	2
10	0.904	0.098	0.586	0.130	0.1	10	0.1	15.83	9.82	12.48	0.35	0
11	0.898	0.101	0.279	0.159	0.1	10	0.1	24.05	11.84	20.95	0.21	1
12	0.898	0.101	0.142	0.163	0.1	10	0.1	33.59	12.63	31.22	0.24	2

Détermination de l'ordre du modèle (1)

Approche empirique consistant à augmenter progressivement l'ordre du modèle identifié et à analyser le critère résiduel

Système d'ordre 1

	F. de T.	F. de T. factorisée	$\tilde{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}	Gain
$S(z)$	$\frac{0.20}{z-0.70}$				0.667
$M_1(z)$	$\frac{0.2018}{z-0.6984}$		7.914	0.038	0.663
$M_2(z)$	$\frac{0.2z+0.1745}{z^2+0.1532z-0.5927}$	$\frac{0.2(z+0.873)}{(z+0.850)(z-0.697)}$	7.914	0.046	0.668
$M_3(z)$	$\frac{0.2124z^2+0.203z+0.1937}{z^3+0.3157z^2+0.2867z-0.6873}$	$\frac{0.1937(z+0.478)(z+0.478)}{(z+0.505)(z+0.505)(z-0.695)}$	7.949	0.501	0.666

TAB.: Système d'ordre 1. Fonctions de transfert identifiées

Détermination de l'ordre du modèle (2)

Système d'ordre 2

	F. de T.	F. de T. factorisée	$\tilde{\Phi}$	Φ	Gain
$S(z)$	$\frac{0.2}{z^2 - 1.6z + 0.63}$	$\frac{0.2}{(z - 0.9)(z - 0.7)}$			6.667
$M_1(z)$	$\frac{0.3474}{z - 0.9599}$		16.69	16.77	16.770
$M_2(z)$	$\frac{0.02554z + 0.1672}{z^2 - 1.616z + 0.645}$	$\frac{0.02554(z + 40.122)}{(z - 0.902)(z - 0.690)}$	6.92	0.55	6.599
$M_3(z)$	$\frac{0.007944z^2 + 0.2019z + 0.1937}{z^3 - 0.5736z^2 - 1.015z + 0.6484}$	$\frac{0.007944(z - 9.527)(z + 0.691)}{(z - 0.896)(z + 0.944)(z - 0.715)}$	7.27	0.45	6.780

TAB.: Système d'ordre 2. Fonctions de transfert identifiées

Conclusion

- Importance de la prise en compte des valeurs aberrantes en identification
- Proposition d'une méthode basée sur la notion de distribution contaminée
- Alternative à des méthodes existantes (type LMS ou LTS)
- Possibilité de prise en compte d'un nombre très important de valeurs aberrantes

Perspectives

- Extension à une estimation "temps-réel" à l'aide d'une mise en œuvre sur un horizon glissant

Conclusion

- Importance de la prise en compte des valeurs aberrantes en identification
- Proposition d'une méthode basée sur la notion de distribution contaminée
- Alternative à des méthodes existantes (type LMS ou LTS)
- Possibilité de prise en compte d'un nombre très important de valeurs aberrantes

Perspectives

- Extension à une estimation "temps-réel" à l'aide d'une mise en œuvre sur un horizon glissant

Conclusion

- Importance de la prise en compte des valeurs aberrantes en identification
- Proposition d'une méthode basée sur la notion de distribution contaminée
- Alternative à des méthodes existantes (type LMS ou LTS)
- Possibilité de prise en compte d'un nombre très important de valeurs aberrantes

Perspectives

- Extension à une estimation "temps-réel" à l'aide d'une mise en œuvre sur un horizon glissant

Conclusion

- Importance de la prise en compte des valeurs aberrantes en identification
- Proposition d'une méthode basée sur la notion de distribution contaminée
- Alternative à des méthodes existantes (type LMS ou LTS)
- Possibilité de prise en compte d'un nombre très important de valeurs aberrantes

Perspectives

- Extension à une estimation "temps-réel" à l'aide d'une mise en œuvre sur un horizon glissant

Conclusion

- Importance de la prise en compte des valeurs aberrantes en identification
- Proposition d'une méthode basée sur la notion de distribution contaminée
- Alternative à des méthodes existantes (type LMS ou LTS)
- Possibilité de prise en compte d'un nombre très important de valeurs aberrantes

Perspectives

- Extension à une estimation "temps-réel" à l'aide d'une mise en œuvre sur un horizon glissant

Conclusion

- Importance de la prise en compte des valeurs aberrantes en identification
- Proposition d'une méthode basée sur la notion de distribution contaminée
- Alternative à des méthodes existantes (type LMS ou LTS)
- Possibilité de prise en compte d'un nombre très important de valeurs aberrantes

Perspectives

- Extension à une estimation "temps-réel" à l'aide d'une mise en œuvre sur un horizon glissant