Conception de multi-observateurs à variables de décision non mesurables

Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot, Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy,
UMR 7039, Nancy-Université, CNRS.
2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandoeuvre-les-Nancy, France

{*dalil.ichalal*, *benoit.marx*, *jose.ragot*, *didier.maquin*}@ensem.inpl-nancy.fr
http://www.cran.uhp-nancy.fr

Résumé— **Dans cette communication, nous proposons une méthode d'estimation d'état d'un système non linéaire représenté par un multi-modèle de type** $Takagi - Sugeno$ **dont les fonctions d'activation dépendent de l'état. Pour cela, nous proposons la synthèse d'un multi-observateur de Luenberger et nous montrons comment déterminer les gains du multi-observateur pour garantir la convergence globale asymptotique vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. Les conditions de stabilité et de convergence sont formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI).**

Mots-clés— **Approche multi-modèle, Estimation d'état, Variables de décision non mesurables, Stabilité asymptotique, Inégalités linéaires matricielles (LMI).**

I. Introduction

Les méthodes de diagnostic de fonctionnement de systèmes à base de modèles linéaires ont atteint actuellement une certaine maturité. Cependant, la linéarité des modèles de représentation du processus à surveiller constitue une hypothèse forte qui limite la pertinence des résultats que l'on peut obtenir. L'extension directe des méthodes développées dans le contexte des modèles linéaires au cas des modèles non linéaires quelconques est délicate. En revanche, des résultats intéressants ont d'ores et déjà été obtenus si la démarche de modélisation s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de modèles de structure simple, chaque modèle décrivant le comportement du système dans une « zone de fonctionnement » particulière. Dans ce contexte, l'approche multi-modèle [15] qui consiste à élaborer le modèle global par interpolation de modèles locaux linéaires a produit des résultats intéressants [1] [7].

Dans le contexte des modèles linéaires, la détection de défauts peut s'effectuer en s'appuyant sur les méthodes à base d'observateurs d'état [8]. Pour la phase de localisation des défauts, celles-ci s'appuient le plus généralement sur la mise en place de bancs d'observateurs pilotés par des jeux de grandeurs différentes. Dans le cas de systèmes décrits à l'aide de multi-modèles, la technique précédente ne se transpose pas immédiatement en raison des couplages introduits dans la structure. Dans cette problématique, plusieurs travaux portant sur la conception d'observateurs par approche multi-modèle, ont été réalisés. D'une manière générale, la conception d'un multi-observateur pour un système décrit par une structure multi-modèle passe par la conception d'observateurs locaux, puis par l'interpolation de ces derniers, suivant des fonctions poids définies à partir d'une variable du système. Cette technique de conception permet alors l'extension des outils d'analyse et de synthèse développés pour les systèmes linéaires, au cas non-linéaire. En effet, en se basant sur le mécanisme d'interpolation, Tanaka [10] a proposé une étude concernant la stabilité et la synthèse de multi-régulateurs et de multi-observateurs. Patton [9] a proposé un multi-observateur basé sur l'utilisation d'observateurs de Luenberger, qui a ensuite été utilisé pour le diagnostic. Dans [2], [3], [4] et [5], les observateurs à mode glissant développés pour les systèmes linéaires (voir [16] [17]), ont été transposés aux systèmes décrits par des multi-modèles. Le principal intérêt de ce type d'observateurs est sa robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation. Les observateurs à entrées inconnues des systèmes linéaires ont été transposés, de la même manière, au cas de modèles non linéaires décrits par des structures multi-modèles [4].

Cependant, tous ces travaux concernent des multi-modèles avec des fonctions d'activation qui dépendent de variables de décision mesurables (entrée ou sortie du système) ; ces mêmes fonctions étant également utilisées dans le multi-observateur. Dans la littérature, peu de travaux ont été réalisés sur la conception de multi-observateurs d'état avec des fonctions d'activation dépendant de variables non mesurables (état du système par exemple). Dans ce contexte, on peut citer les travaux de Bergsten, Palm et Driankov [6], [11], [12] et [13], qui ont proposé une étude et une méthode de conception de multi-observateurs de Luenberger et à mode glissant, en supposant que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est soumise à l'influence d'une perturbation externe (liée à l'hypothèse de variables de décision non mesurables). Ils démontrent alors la convergence de l'erreur d'estimation d'état sans perturbations, puis ils établissent les conditions pour lesquelles la stabilité est toujours vérifiée en présence de perturbations. On peut aussi citer les travaux de Guerra [18], où les auteurs ont établi des conditions de stabilisation des systèmes non linéaires décris sous forme $Takagi - Sugeno$ avec multi-observateur, dans le cas de variables de décision partiellement ou entièrement non mesurables.

Notre contribution dans cet article, réside dans l'estimation d'état d'un système non linéaire décrit par une structure multi-modèle avec des fonctions d'activation dépendant de variables de décision non mesurables (état du système). Les conditions de convergence du multi-observateur sont établies en utilisant une fonction quadratique de Lyapu-

nov et elles sont exprimées sous la forme d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMI) [14].

II. Structure multi-modèle

Considérons un système non linéaire représenté sous la forme multi-modèle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie. $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice d'influence de l'entrée et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ représente la matrice de sortie ou d'observation. Enfin, les fonctions $\mu_i(x(t))$ représentent les fonctions d'activation qui dépendent de l'état $x(t)$, et qui ont les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases} \quad (2)$$

III. Structure du multi-observateur

Le problème à résoudre est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$ à partir des informations disponibles notamment l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$.
La structure du multi-observateur proposée est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i(y(t) - C\hat{x}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

Les gains G_i doivent être déterminés de manière à assurer la convergence asymptotique vers zéro de l'erreur d'estimation d'état.

A. Conditions de stabilité du multi-observateur

L'erreur d'estimation d'état s'écrit :

$$e = x - \hat{x} \quad (4)$$

La dynamique de cette erreur est obtenue en utilisant les équations (1), (3) et (4) :

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{N} (A_i(\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}) + B_i(\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u - \mu_i(\hat{x})G_i C(x - \hat{x})) \quad (5)$$

Si l'on ajoute et retranche au membre de droite de l'équation (5) le terme $A_i\mu_i(\hat{x})e$, on obtient :

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i\delta_i + B_i\Delta_i + \mu_i(\hat{x})\overline{A_i}e\right) \quad (6)$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))x \\ \Delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u \\ \overline{A_i} = A_i - G_i C \end{cases} \quad (7)$$

Pour démontrer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e) = e^T P e \quad (8)$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (9)$$

Puis, en utilisant (6) :

$$\dot{V}(e) = \sum_{i=1}^{N} (\delta_i^T A_i^T P e + e^T P A_i \delta_i + \Delta_i^T B_i^T P e + e^T P B_i \Delta_i + \mu_i(\hat{x})(e^T \overline{A_i}^T P e + e^T P \overline{A_i} e)) \quad (10)$$

Hypothèse 1 : les fonctions d'activation sont lipschitziennes, alors :

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq M_i |x - \hat{x}| \quad (11)$$

M_i est un scalaire positif qui représente la constante de Lipschitz (on verra ultérieurement comment calculer cette constante).

Hypothèse 2 : l'entrée $u(t)$ du système et son état $x(t)$ sont bornés :

$$\begin{cases} \|x(t)\| \leq \beta_1 \\ \|u(t)\| \leq \beta_2 \end{cases} \quad (12)$$

avec β_1 et β_2 des scalaires positifs. Compte tenu de la définition (7) et des hypothèses 1 et 2, on a alors :

$$\begin{cases} |\delta_i| \leq M_i \beta_1 |e| \\ |\Delta_i| \leq M_i \beta_2 |e| \end{cases} \quad (13)$$

Puis :

$$\begin{aligned} \delta_i^T A_i^T P e + e^T P A_i \delta_i &\leq \delta_i^T \delta_i + e^T P A_i A_i^T P e \\ &\leq M_i^2 \beta_1^2 e^T e + e^T P A_i A_i^T P e \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i^T B_i^T P e + e^T P B_i \Delta_i &\leq \Delta_i^T \Delta_i + e^T P B_i B_i^T P e \\ &\leq M_i^2 \beta_2^2 e^T e + e^T P B_i B_i^T P e \end{aligned} \quad (15)$$

En utilisant ces majorations, la dérivée de la fonction de Lyapunov (10) obéit à l'inégalité :

$$\dot{V}(e) \leq \sum_{i=1}^{N} e^T (\mu_i(\hat{x})(\overline{A_i}^T P + P\overline{A_i}) + M_i^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)I + P A_i A_i^T P + P B_i B_i^T P) e \quad (16)$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est donc assurée si :

$$\mu_i(\hat{x})(\overline{A_i}^T P + P\overline{A_i}) + M_i^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)I + P A_i A_i^T P + P B_i B_i^T P < 0 \quad (17)$$

On peut considérer que les termes $A_i\delta_i + B_i\Delta_i$ de l'équation (6) constituent une perturbation. L'étude de la convergence

de l'erreur d'estimation d'état se ramène donc à l'étude de la stabilité d'un système perturbé. Supposons que pour une matrice symétrique Q, il existe une matrice symétrique définie positive P tel que :

$$\mu_i(\hat{x})(\overline{A}_i^T P + P\overline{A}_i) < Q \tag{18}$$

Cette inégalité conduit à :

$$(A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) < Q \tag{19}$$

En reportant l'inégalité (19) dans (17) on obtient :

$$Q + M_i^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)I + PA_iA_i^TP + PB_iB_i^TP \quad < 0 \tag{20}$$

Remarquons que les inégalités matricielles (19) et (20) sont non linéaires par rapport à P et G_i. Cependant, si l'on pose le changement de variable :

$$K_i = PG_i \tag{21}$$

et si l'on utilise le complément de Schur, on obtient :

$$A_iP + PA_i - C^TK_i^T - K_iC < Q \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} Q + \theta_i I & PA_i & PB_i \\ A_i^TP & -I & 0 \\ B_i^TP & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{23}$$

$\theta_i = M_i^2(\beta_1^2 + \beta_2^2)$
Ainsi (22) et (23) sont des LMI par rapport à P et K_i.

B. Calcul de la constante de Lipschitz

Le calcul de la constante de Lipschitz intervenant dans l'équation (11) s'effectue en utilisant des développements de $\mu_i(x)$ en série de Taylor avec retse intégral à l'ordre 0 au voisinage de $\hat{x}$:

$$\mu_i(x) = \mu_i(\hat{x}) + \int_{\hat{x}}^{x} \dot{\mu}_i(t)dt \tag{24}$$

$$\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^{x} \dot{\mu}_i(t)dt \tag{25}$$

$$\begin{aligned} |\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| &\leq \left| \int_{\hat{x}}^{x} \dot{\mu}_i(t)dt \right| \\ &\leq \int_{\hat{x}}^{x} |\dot{\mu}_i(t)|\, dt \\ &\leq M_i\, |x - \hat{x}| \end{aligned} \tag{26}$$

Puisque nous allons choisir des fonctions d'activation lipschitziennes (continues et dérivables), il suffit d'étudier les extrema de la fonction $\dot{\mu}_i(x)$ pour trouver la valeur de M_i.

C. Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x(t))(A_ix(t) + B_iu(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{27}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les conditions initiales sur l'état sont : $x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.7 \end{pmatrix}^T$. Les fonctions d'activation sont choisies sous la forme :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1-\tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) = \frac{1+\tanh(x_1)}{2} \end{cases} \tag{28}$$

et ne dépendent que de la première composante de l'état. Les constantes de Lipschitz sont données par la même valeur $M_1 = M_2 = M = 0.5$. L'entrée utilisée est visualisée sur la figure 1, elle est bornée par la valeur $\beta_2 = 1$. La simulation du système a permis de trouver la borne $\beta_1 = 1.1$ de l'état. La résolution des inégalités (22) et (23) mène aux matrices suivantes Q, P et G_i :

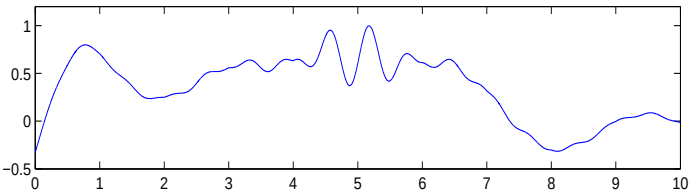

Fig. 1. Entrée du système

$$Q = \begin{bmatrix} -1.23 & -0.28 & -0.77 \\ -0.28 & -5.80 & -2.12 \\ -0.77 & -2.12 & -3.14 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.05 & 0.04 \\ 0.05 & 0.35 & 0.16 \\ 0.04 & 0.16 & 0.22 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -0.49 & 6.08 \\ 10.11 & -7.71 \\ -7.61 & 6.99 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 4.84 & -1.63 \\ 10.95 & -6.65 \\ -11.04 & 10.28 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation du système apparaissent sur les figures 2 et 3. On constate une bonne adéquation entre l'état réel du système et celui délivré par l'observateur.

IV. Extension de la méthode proposée

D'après l'exemple précédent, si on fixe la valeur de la borne de l'entrée à une valeur supérieure à 1.2, les inégalités matricielles (22) et (23) n'ont plus de solution. L'approche utilisée ne garantit pas l'existence d'une solution

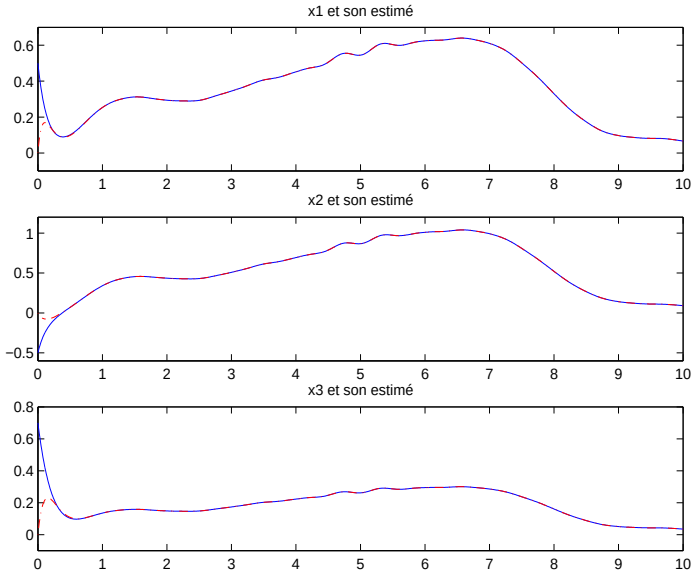

Fig. 2. États du système et leurs estimés

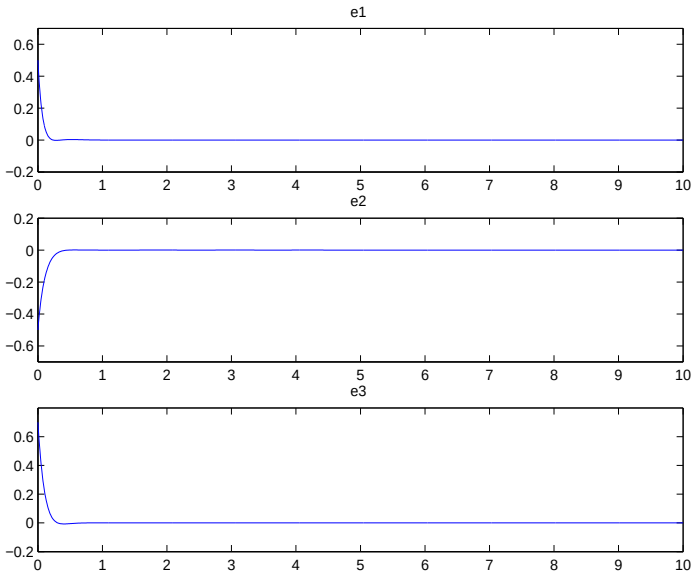

Fig. 3. Évolution de l'erreur d'estimation

à cause des majorations effectuées qui peuvent se révéler très conservatives. Afin d'accroître la portée de la méthode proposée, il est possible d'augmenter le nombre de paramètres de synthèse de l'observateur en affinant les majorations effectuées. De plus, l'utilisation d'une matrice A_0, qui représente la moyenne des matrices A_i, permet d'éviter de faire apparaître la borne de l'état dans les équations. Cette façon de procéder élargit sensiblement les possibilités d'application de la méthode proposée.

Posons A_0 la matrice moyenne des matrices A_i :

$$A_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i \tag{29}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} A_i &= A_i - A_0 + A_0 && (30)\\ &= \overline{A_i} + A_0 && (31)\end{aligned}$$

avec :

$$\overline{A_i} = A_i - A_0 \tag{32}$$

Le système (1) devient alors ;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x + \sum_{i=1}^{N} \mu_i(x(t))(\overline{A_i}x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{33}$$

Le multi-observateur est donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i(\hat{x}(t))(\overline{A_i}\hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i(y-\hat{y})) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{34}$$

La dynamique de l'erreur d'éstimation d'état s'écrit :

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(\hat{x})\Phi_i e + \sum_{i=1}^{N} (\overline{A_i}\delta_i + B_i\Delta_i) \tag{35}$$

avec :

$$\begin{cases} \delta_i = \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x} \\ \Delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u \\ \overline{A_i} = A_i - A_0 \\ \Phi_i = A_0 - G_i C \end{cases} \tag{36}$$

A. Nouvelles conditions de stabilité

Pour démontrer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e) = e^T P e \tag{37}$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \tag{38}$$

Puis, en utilisant (35) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = \sum_{i=1}^{N} (\mu_i(\hat{x}) \left(e^T(A_0 - G_i C)^T P e + e^T P(A_0 - G_i C)e\right) \\ + \delta_i^T \overline{A_i}^T P e + e^T P \overline{A_i}\delta_i + \Delta_i^T B_i^T P e + e^T P B_i \Delta_i) \end{aligned} \tag{39}$$

Hypothèse 3 : les fonctions d'activation sont lipschitziennes, alors :

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i |x - \hat{x}| \tag{40}$$

$$|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i |x - \hat{x}| \tag{41}$$

M_i et N_i sont des scalaires positifs qui représentent des constantes de Lipschitz.

En utilisant la deuxième contrainte de l'hypothèse 2 ainsi que l'hypothèse 3, et en suivant le même raisonnement, on aboutit aux conditions de convergence suivantes :

$$A_0^T P + P A_0 - C^T K_i^T - K_i C < Q \tag{42}$$

$$\begin{bmatrix} Q + (M_i^2 + N_i^2\beta_2^2)I & P\overline{A_i} & PB_i \\ \overline{A_i}^T P & -I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{43}$$

D'après des simulations effectuées sur l'exemple précédent, on constate que la modification apportée par l'introduction de la matrice moyenne A_0 améliore la portée de la méthode. En effet, la borne maximale de l'entrée pour avoir une solution avec la première méthode est de $\beta_2 = 1.2$ alors que dans la seconde méthode $\beta_2 = 8.44$. En plus de cet avantage, on remarquera que l'on n'utilise plus la contrainte portant sur l'état (première inégalité de l'hypothèse 2).

Toujours dans le but d'améliorer les performances de la méthode i.e. augmenter la borne maximale de l'entrée pour laquelle l'existence d'une solution est assurée, le conservatisme apporté par les majorations (14) et (15) peut être réduit en utilisant le lemme suivant :

Lemme : pour toutes matrices X et Y de dimensions appropriées, λ étant une constante non nulle, la propriété suivante est vérifiée :

$$X^TY + Y^TX \leq \lambda X^TX + \lambda^{-1}Y^TY \quad \lambda > 0 \tag{44}$$

En appliquant ce lemme, ainsi que les hypothèses 2 et 3, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_i^T\overline{A_i}^TPe + e^TP\overline{A_i}\delta_i &\leq \lambda_1\delta_i^T\delta_i + \lambda_1^{-1}e^TP\overline{A_iA_i}^TPe \\ &\leq \lambda_1M_i^2e^Te + \lambda_1^{-1}e^TP\overline{A_iA_i}^TPe \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \Delta_i^TB_i^TPe + e^TPB_i\Delta_i &\leq \lambda_2\Delta_i^T\Delta_i + \lambda_2^{-1}e^TPB_iB_i^TPe \\ &\leq \lambda_2N_i^2\beta_2^2e^Te + \lambda_2^{-1}e^TPB_iB_i^TPe \end{aligned} \tag{46}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (39) peut alors être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq e^T(&\sum_{i=1}^{N}\mu_i(\hat{x})\left(\Phi_i^TP + P\Phi_i\right) + \lambda_1M_i^2I \\ &+\lambda_2N_i^2\beta_2^2I + \lambda_1^{-1}P\overline{A_iA_i}^TP + \lambda_2^{-1}PB_iB_i^TP)e \end{aligned} \tag{47}$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est assurée si :

$$\begin{aligned} \mu_i(\hat{x})\left(\Phi_i^TP + P\Phi_i\right) + (\lambda_1M_i^2 + \lambda_2N_i^2\beta_2^2)I& \\ +\lambda_1^{-1}P\overline{A_iA_i}^TP + \lambda_2^{-1}PB_iB_i^TP \quad &< \quad 0 \end{aligned} \tag{48}$$

En utilisant la même démarche de résolution que celle utilisé au début de l'article on obtient :

$$(A_0 - G_iC)^TP + P(A_0 - G_iC) < Q \tag{49}$$

$$\begin{aligned} Q + (\lambda_1M_i^2 + \lambda_2N_i^2\beta_2^2)I& \\ +\lambda_1^{-1}P\overline{A_iA_i}^TP + \lambda_2^{-1}PB_iB_i^TP \quad &< \quad 0 \end{aligned} \tag{50}$$

En faisant le changement de variables $K_i = PG_i$, et en appliquant le complément de Schur, on obtient les inégalités matricielles linéaires suivantes :

$$A_0^TP + PA_0 - C^TK_i^T - K_iC < Q \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} Q + (\lambda_1M_i^2 + \lambda_2N_i^2\beta_2^2)I & P\overline{A_i} & PB_i \\ \overline{A_i}^TP & -\lambda_1I & 0 \\ B_i^TP & 0 & -\lambda_2I \end{bmatrix} < 0 \tag{52}$$
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

D'après les résultats de simulation obtenues sur l'exemple précédent, nous avons constaté une nette amélioration sur la borne maximale de l'entrée ; en effet, elle peut être fixée à de grandes valeurs (par exemple $\beta_2 = 100$) et l'algorithme fournit une solution pour les LMIs (51) et (52). On peut aussi ajouter un autre degré de liberté en considérant la borne de l'entrée comme variable à déterminer qu'on appellera ρ. En utilisant le complément de Schur, l'inégalité (52) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q + \lambda_1M_i^2I & P\overline{A_i} & PB_i & N_i\lambda_2\rho I \\ \overline{A_i}^TP & -\lambda_1I & 0 & 0 \\ B_i^TP & 0 & -\lambda_2I & 0 \\ N_i\lambda_2\rho I & 0 & 0 & -\lambda_2I \end{bmatrix} < 0 \tag{53}$$
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Cette inégalité n'est plus linéaire en les inconnues (présence du produit $\lambda_2\rho$). Pour l'écrire sous forme LMI, on pose : $\gamma = \lambda_2\rho$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 1 : l'erreur d'estimation d'état entre le multi-modèle (33) et le multi-observateur (34) converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe une matrice symétrique et définie positive P, une matrice symétrique Q et des matrices K_i ainsi que des scalaires positifs γ, λ_1 et λ_2 tels que :

$$A_0^TP + PA_0 - C^TK_i^T - K_iC < Q \tag{54}$$

$$\begin{bmatrix} Q + \lambda_1M_i^2I & P\overline{A_i} & PB_i & N_i\gamma I \\ \overline{A_i}^TP & -\lambda_1I & 0 & 0 \\ B_i^TP & 0 & -\lambda_2I & 0 \\ N_i\gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2I \end{bmatrix} < 0 \tag{55}$$
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma > 0$$

Connaissant γ et λ_2, on peut déduire la valeur ρ de la borne sur l'entrée :

$$\rho = \frac{\gamma}{\lambda_2} \tag{56}$$

Cependant, si on laisse les variables γ et λ_2 libres, dans certain cas, les valeurs déterminées par l'algorithme ne permettent pas de satisfaire la condition de l'hypothèse 2 (la valeur de ρ trouvée par l'algorithme doit être supérieure ou égale à la borne β_2 de l'entrée). Pour cela, on propose d'ajouter des contraintes sur γ et λ_2 pour garantir que le rapport $\frac{\gamma}{\lambda_2}$ soit supérieur ou égal à la borne de l'entrée.
On sait que :

$$\|u(t)\| \leq \beta_2 \tag{57}$$

La valeur de ρ trouvée par l'algorithme doit satisfaire $\rho \geq \beta_2$, on obtient alors $\frac{\gamma}{\lambda_2} \geq \beta_2$, qui conduit à la contrainte :

$$\gamma - \beta_2\lambda_2 \geq 0 \tag{58}$$

En utilisant la contrainte (58) avec le théorème 1, la valeur de ρ trouvée est supérieure ou égale à la borne de l'entrée β_2.

B. Exemple

Considérons à nouveau le système précédent avec les conditions initiales $x_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T$. Le théorème 1 est appliqué en considérant une entrée bornée par 15 . Les constantes de Lipschitz sont données par $M_1 = M_2 = 1.1$ et $N_1 = N_2 = 0.5$. La résolution des LMIs présentées dans le théorème 1 mène aux matrices Q, P et G_i ainsi qu'aux scalaires λ_1, λ_2 et γ suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 0.17 & -0.01 & -1.12 \\ -0.01 & 0.12 & 0.01 \\ -1.12 & 0.01 & 0.39 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 3.19 & 6.89 \\ 14.16 & -10.48 \\ -0.05 & 3.94 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 2.94 & 7.00 \\ 15.30 & -11.28 \\ -0.25 & 4.02 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} -3.12 & -0.04 & 0.02 \\ -0.04 & -3.33 & -0.06 \\ 0.02 & -0.06 & -3.53 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0.71, \quad \lambda_2 = 0.02, \quad \gamma = 0.32$$

A partir de ces résultats, on déduit que : $\rho = 15.07$. Les résultats de simulation sont présentés à la figure 4. Clairement, cette dernière méthode permet d'obtenir une solution, i.e. de concevoir un observateur, pour des signaux d'entrée d'amplitude nettement supérieure en comparaison de celle utilisée pour les deux premières méthodes.

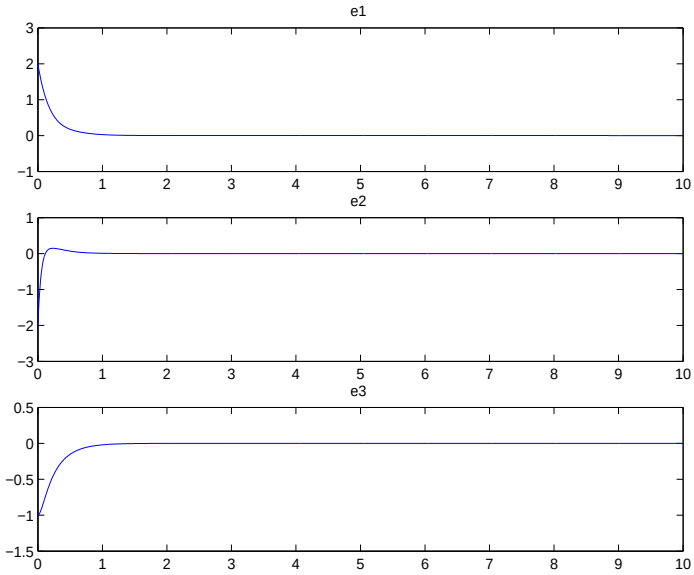

Fig. 4. Evolution de l'erreur d'estimation d'état

V. Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode d'estimation d'état d'un système non-linéaire décrit par une structure multi-modèle avec des fonctions d'activation dépendantes de l'état du système. Cette méthode est basée sur l'interpolation de plusieurs observateurs pour synthétiser un multi-observateur global. En utilisant une fonction quadratique de Lyapunov, nous avons montré la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro même pour des entrées de grandes amplitude. Les conditions de stabilité sont exprimées sous forme d'un problème d'inégalités linéaires matricielles (LMI). L'exemple de simulation présenté a été testé avec succès pour différentes entrées d'amplitudes très grande. Les extensions de ce travail concernent d'une part, la réduction du conservatisme de certaines majorations, et d'autre part, la reformulation du problème sous forme d'un problème EVP (*Eigen Values Problem*) ou GEVP (*Generalized Eigen Values Problem*) pour maximiser la borne de l'entrée, ou bien éviter totalement l'apparition de cette dernière dans les conditions de convergence.

Références

[1] Akhenak A.« Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic ». Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 16 décembre 2004.

[2] Akhenak A., Chadli M., Ragot J., Maquin D.« Estimation of state and unknown inputs of a non linear system represented by a multiple model ». 11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM 2004, Nancy, France, September 8-10, 2004.

[3] Akhenak A., Chadli M., Ragot J., Maquin D. « Estimation d'état et d'entrées inconnues d'un système non linéaire représenté sous forme multi-modèle ». Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2004, Douz, Tunisie, 22-24 novembre 2004.

[4] Akhenak A., Chadli M., Ragot J., Maquin D. « Unknown input multiple observer based approach. Application to secure communications ». 1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, Reims, France, June 28-30, 2006.

[5] Akhenak A., Chadli, M., Ragot J., Maquin D. « Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multi-modèle incertain à entrées inconnues : approche LMI ». Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, Bordeaux, France, 30-31 mai - 1 juin 2006.

[6] Bergsten P., Palm R. « Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems ». 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE 2000, San Antonio, TX, USA, May 7-10, 2000.

[7] Chadli M.« Analyse des systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles ». Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 9 décembre 2002.

[8] Maquin D., Ragot J.« Diagnostic des systèmes linéaires ». Collection Pédagogique d'Automatique, 143 p., ISBN 2-7462-0133-X, Hermès Science Publications, Paris, 2000.

[9] Patton R.J., Chen J., Lopez-Toribio C.J.« Fuzzy Observers for non-linear Dynamic Systems Fault Diagnosis ». 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida USA, December 1998

[10] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O.« Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs ». IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, 1998.

[11] Palm R., Driankov D. « Towards a systematic analysis of fuzzy observers ». 18th NAFIPS Conference, New York, NY, USA, June 10-12, 1999.

[12] Bergsten P., Palm R., Driankov D.« Fuzzy Observers ». IEEE International Fuzzy Systems Conference, Melbourne Australia, December 2-5, 2001.

[13] Bergsten P., Palm R., Driankov D. « Observers for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems ». IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B : Cybernetics, Vol. 32, No. 1, pp. 114-121, 2002.

[14] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. « Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory », SIAM, Philadelphia, 1994.

[15] Murray-Smith R., Johansen T.A. « Multiple Model Approaches to Modelling and Control ». Taylor and Francis, London, 1997.

[16] Walcott B.L., Zak S.H. « State observation of nonlinear uncertain dynamical systems ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 2, pp. 166-170, 1987.

[17] Edwards Ch., Spurgeon S.K. « Sliding mode control : theory and applications ». Taylor and Francis, 1998.

[18] Guerra T.M., Kruszewski A.,Vermeiren L.,Tirmant H. « Conditions of output stabilization for nonlinear models in the $Takagi-Sugeno's$ form ». Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157, pp. 1248-1259, 2006.