Chapitre 2

Génération de résidus à l'aide de reconstructeurs d'état

1. Introduction

La génération de résidus à l'aide d'une estimation d'état consiste à reconstruire l'état ou, plus généralement, la sortie du processus à l'aide d'observateurs et à utiliser l'erreur d'estimation comme résidu. Cette méthode s'est beaucoup développée car elle donne lieu à la conception de générateurs de résidus flexibles.

Nous ne développerons pas, au cours de ce chapitre, les méthodes d'estimation d'état des systèmes statiques contraints ou non contraints. Pour un panorama assez complet des différentes méthodes que l'on peut mettre en oeuvre, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage "*Validation de données et diagnostic*" cosigné par J. Ragot, M. Darouach, D. Maquin et G. Bloch, paru aux éditions Hermès en 1990 (Ragot *et al.*, 1990). Nous présenterons cependant des extensions de ces méthodes à l'estimation d'état des systèmes dynamiques.

Nous nous focaliserons donc sur les systèmes dynamiques et présenterons deux types distincts de méthodes d'estimation d'état. Le premier repose sur l'utilisation d'observateurs (au sens classique du terme). De très nombreux travaux concernant la conception d'observateurs pour tout type de systèmes ont été développés depuis les travaux fondateurs de Luenberger (1966) et la détection de défauts à base de modèles en a tout naturellement tiré profit. La seconde approche, moins classique, utilise des techniques d'estimation de systèmes statiques appliquées sur des données observées à travers une "fenêtre glissante". Nous détaillerons cette approche au paragraphe 6, mais commençons tout d'abord par rappeler les concepts de base de la reconstruction d'état par observateur.

2. Reconstruction d'état à l'aide d'observateurs

Le premier à avoir utilisé des observateurs pour détecter des défauts est sans doute Clark (1975, 1978, 1979, 1989). Cette idée a ensuite été très largement développée (Frank, 1987, 1990, 1993 ; Patton *et al.*, 1989 ; Patton et Chen, 1991c, 1991d ; Magni et Mouyon, 1991 ; Marquez et Diduch, 1992). Nous en donnons ici une présentation sommaire en utilisant un observateur généralisé de Luenberger.

Considérons un système dynamique linéaire invariant décrit par la représentation d'état suivante[1] :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1 f(t) \tag{2.1a}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_2 f(t) \tag{2.1b}$$

où $x(t) \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbf{R}^r$ est le vecteur des entrées connues associé à la matrice B, $y(t) \in \mathbf{R}^m$ est le vecteur des mesures. Le vecteur de défaut $f(t) \in \mathbf{R}^p$ agit, au moyen des matrices F_1 et F_2 sur l'évolution de l'état et sur la mesure.

La forme la plus générale d'un observateur de Luenberger s'écrit :

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Ky(t) + Ju(t) \tag{2.2a}$$
$$r(t) = L_1 w(t) + L_2 y(t) + L_3 u(t) \tag{2.2b}$$

où $w = Tx$ est l'estimation d'une combinaison linéaire de l'état. L'erreur d'estimation $e = w - Tx$ est donnée par :

$$\dot{e}(t) = Fw(t) + K\big(Cx(t) + Du(t) + F_2 f(t)\big) + Ju(t) - T\big(Ax(t) + Bu(t) + F_1 f(t)\big) \tag{2.3a}$$
$$\dot{e}(t) = Fe(t) + \big(FT - TA + KC\big)x(t) + \big(J - TB + KD\big)u(t) + \big(KF_2 - TF_1\big)f(t) \tag{2.3b}$$

Le vecteur résidu peut alors s'exprimer en fonction de cette erreur :

$$r(t) = L_1 e(t) + \big(L_1 T + L_2 C\big)x(t) + \big(L_3 + L_2 D\big)u(t) + L_2 F_2 f(t) \tag{2.4}$$

En l'absence de défaut, r doit être nul ; cela conduit aux conditions suivantes :

$$TA - FT = KC \tag{2.5a}$$

[1] La présentation est effectuée ici avec un modèle d'état continu ; une démarche analogue peut être conduite avec un modèle discret.

$$J = TB - KD \tag{2.5b}$$
$$L_1 T + L_2 C = 0 \tag{2.5c}$$
$$L_3 + L_2 D = 0 \tag{2.5d}$$

En exprimant la transformée de Laplace du résidu (2.2b), on obtient :

$$r(s) = \left(L_1(sI - F)^{-1} K + L_2\right) y(s) + \left(L_1(sI - F)^{-1} J + L_3\right) u(s) \tag{2.6a}$$

Cela permet d'exprimer les matrices de transfert intervenant dans l'expression générale (0.2) des résidus :

$$H_u(s) = L_1(sI - F)^{-1} J + L_3 \tag{2.6b}$$
$$H_y(s) = L_1(sI - F)^{-1} K + L_2 \tag{2.6c}$$

Compte tenu de la contrainte (0.3), le résidu peut également s'exprimer en fonction du vecteur de défauts :

$$r(s) = H_y(s)\left(F_2 + C(sI - F)^{-1} F_1\right) f(s) \tag{2.7}$$

Si l'on a $H_y(s)F_2 = 0$, les défauts d'actionneurs pourront être détectés et différentiés des défauts de capteurs. De même, si $H_y(s)C(sI - F)^{-1}F_1 = 0$, les défauts de capteurs pourront être détectés et différentiés des défauts d'actionneurs. On remarquera que l'erreur de reconstruction $e = w - Tx$ ne dépend que des défauts. Frank et Wünnenberg proposent un choix de matrice T basé sur une transformation d'état mettant en oeuvre la forme canonique de Kronecker, ce qui conduit à une matrice de transition d'état sous forme bloc-diagonale. Si l'on choisit $T = I$, on obtient l'observateur identité de Luenberger. Le travail originel de Clark (1978) était basé sur l'utilisation d'observateurs de plein rang et de nombreux auteurs ont poursuivi dans cette voie (Frank, 1987a, 1987b ; Patton *et al*., 1987). La justification de ce choix est aisée. Pour la détection de défauts, il est nécessaire de concevoir des résidus dont la structure permet leur détection et leur isolation. Or, la conception d'un observateur identité est celle qui utilise le moins de degré de liberté. Les degrés de liberté restants peuvent alors être utilisés pour maximiser la détectabilité et l'isolabilité des défauts et/ou minimiser la sensibilité aux erreurs de modélisation et aux perturbations.

3. Amélioration de la méthode

3.1. *Observateurs à entrées inconnues*

De très nombreux travaux ont été effectués pour concevoir des observateurs capables de reconstruire l'état d'un système excité par un certain nombre d'entrées inconnues. On peut essentiellement les regrouper en deux catégories. La première suppose la connaissance a priori d'informations sur les entrées non-mesurables. Citons les travaux de Johnson (1975) qui propose une approche polynomiale et ceux de Meditch et Hostetter (1974) qui supposent que les entrées inconnues peuvent être approchées par la réponse d'un système dynamique connu. La seconde catégorie nécessite l'estimation ou l'élimination des l'entrées inconnues. Parmi les techniques qui estiment les entrées inconnues, on peut citer les travaux de Wang *et al*. (1975). Kobayashi et Nakamiso (1982) ainsi que Lyubchik et Kostenko (1993) utilisent des techniques d'inversion de modèles. Moon et Bien (1991) proposent un filtre adaptatif à variance minimale servant à l'estimation d'état. Nous avons proposé une simplification de ce filtre (Ragot et Maquin, 1993). Saif (1992) a proposé une technique mettant en oeuvre un observateur proportionnel intégral. Ce type d'observateur, initialement introduit par Kaczorek (1979) a été ré-utilisé par Beale et Shafai (1988) en raison de sa robustesse vis-à-vis des variations des paramètres du processus. En ce qui concerne les travaux basés sur l'élimination des entrées inconnues, les travaux de Kudva *et al*. (1980) et Kurek (1983) sont fondateurs puisqu'ils fournissent des conditions nécessaires et suffisantes d'existence des observateurs à entrées inconnues. Watanabe et Himmelblau (1982), Ge et Fang (1988) et Phatak et Viswanadham (1988) ont développé des "observateurs de diagnostic" (au sens observateurs utilisés à des fins de diagnostic) sur la base des observateurs à entrées inconnues de Kudva *et al*. (1980). On peut également citer les travaux de Guan et Saif (1991), repris par Wang et Daley (1992, 1993). Parmi les travaux récents les plus avancés, on citera ceux de Hou et Müller (1991), généralisant des travaux antérieurs (Hou et Müller, 1992) qui, eux-mêmes, s'appuient sur l'approche proposée par Fairman *et al*. (1984). Enfin, les travaux de Darouach *et al*. (1994a, 1994b, 1996) proposent des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes réguliers et singuliers unifiant ainsi les travaux de Kurek (1983) et Hou et Müller (1991).

Décrivons sommairement le problème de conception de tels observateurs. Le système est maintenant décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1 f(t) + E_1 d(t) \tag{2.8a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_2 f(t) + E_2 d(t) \tag{2.8b}$$

Les matrices de distribution E_1 et E_2 sont associées aux entrées inconnues (perturbations) $d(t) \in \mathbf{R}^q$ agissant sur les entrées et sorties du système. On considérera ici que l'on est en présence d'*incertitudes structurées*, c'est-à-dire que les matrices E_1 et E_2 sont connues.

La construction d'un observateur à entrées inconnues consiste à rendre l'erreur d'estimation indépendante des incertitudes. Par construction, si cette erreur est découplée des incertitudes, le résidu l'est également. Conservons la forme (2.2) de l'observateur de Luenberger. L'évolution de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) = Fe(t) + (FT - TA + KC)x(t) + (J - TB + KD)u(t) \\ + (KF_2 - TF_1)f(t) + (KE_2 - TE_1)d(t)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Le vecteur résidu s'écrit alors :

$$r(t) = L_1 e(t) + (L_1 T + L_2 C)x(t) + (L_3 + L_2 D)u(t) + L_2 F_2 f(t) + L_2 E_2 d(t) \tag{2.10}$$

Aux conditions (2.5) pour que le résidu soit nul en l'absence de défaut, s'ajoutent les conditions suivantes :

$$KE_2 - TE_1 = 0 \tag{2.11a}$$

$$LE_2 = 0 \tag{2.11b}$$

Si elles sont satisfaites, l'erreur d'estimation et le résidu s'écrivent :

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (KF_2 - TF_1)f(t) \tag{2.12}$$

$$r(t) = L_1 e(t) + L_2 F_2 f(t) \tag{2.13}$$

Ces équations montrent que, pour le cas d'incertitudes structurées, le vecteur résidu n'est affecté ni par les entrées inconnues $d(t)$, ni par l'état $x(t)$ ni par l'entrée $u(t)$.

Les conditions (2.5) et (2.11) sont assez simples à obtenir ; il n'en est pas de même de leur satisfaction et la construction systématique, à partir des matrices d'état du système initial et des spécifications sur les performances de l'observateur, des matrices d'un observateur à entrées inconnues n'est pas toujours aisée. Pour une présentation des principales méthodes d'obtention de solutions à ce problème, nous renvoyons le lecteur aux publications citées au début de ce paragraphe. Des synthèses de ces méthodes peuvent

également être consultées dans les thèses de Kondo Adjallah (1993) et Besma Gaddouna (1995).

3.2. *Estimation des entrées inconnues*

Le terme correspondant aux entrées inconnues dans les équations (2.8) peut correspondre indifféremment à des variations limitées des valeurs des paramètres du modèle (erreurs de modélisation ou non linéarités), à de réelles grandeurs non mesurables intervenant sur le système ou encore, dans certains cas, à des défauts. Il peut donc être intéressant d'estimer, à tout instant, la valeur de ces entrées inconnues. Dans le cas de systèmes décrits par les équations (2.1), nous avons proposé une technique mixte utilisant observateur et relations de parité pour effectuer cette estimation. La technique employée s'inspire des travaux de Hou et Müller (1992) dont nous allons rappeler les principes.

3.2.1. Méthode de Hou et Müller

On considère le système linéaire invariant discret suivant :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + E_1 d_k \tag{2.14a}$$
$$y_k = Cx_k \tag{2.14b}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$, $y \in \mathbf{R}^m$, $d \in \mathbf{R}^q$ sont respectivement les vecteurs d'états, de commandes, de mesures et d'entrées inconnues. Sans perte de généralité, on peut supposer que la matrice C est de plein rang ligne et que la matrice E_1 est de plein rang colonne. Cette dernière hypothèse permet d'écrire la décomposition en valeurs singulières de la matrice E_1 sous la forme :

$$E_1 = H\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} K^T \tag{2.15}$$

où $H \in \mathbf{R}^{n.n}$ et $K \in \mathbf{R}^{q.q}$ sont deux matrices orthogonales et $R \in \mathbf{R}^{q.q}$ est une matrice régulière. En effectuant les changements de variables suivants :

$$\bar{x}_k = H^T x_k \tag{2.16a}$$
$$\bar{d}_k = K^T d_k \tag{2.16b}$$

Le système (2.14) est équivalent à :

$$\bar{x}_{k+1} = \overline{A}\bar{x}_k + \overline{B}u_k + \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}\bar{d}_k \tag{2.17a}$$

$$y_k = \overline{C}\bar{x}_k \tag{2.17b}$$

avec $\overline{A} = H^T AH$, $\overline{B} = H^T B$ et $\overline{C} = CH$

Le vecteur d'état peut alors être partitionné en deux sous-vecteurs $\bar{x}_1$ ($\in \mathbf{R}^q$) et $\bar{x}_2$ ($\in \mathbf{R}^{n-q}$) de manière à clairement faire apparaître deux sous-systèmes dont l'un seulement dépend des entrées inconnues :

$$\bar{x}_{1(k+1)} = \overline{A}_{11}\bar{x}_{1k} + \overline{A}_{12}\bar{x}_{2k} + \overline{B}_1 u_k + R\bar{d}_k \tag{2.18a}$$

$$\bar{x}_{2(k+1)} = \overline{A}_{21}\bar{x}_{1k} + \overline{A}_{22}\bar{x}_{2k} + \overline{B}_2 u_k \tag{2.18b}$$

$$y_k = \overline{C}_1\bar{x}_{1k} + \overline{C}_2\bar{x}_{2k} \tag{2.18c}$$

où toutes les matrices du système (2.17) ont été partitionnées selon la partition du vecteur d'état avec des notations évidentes. Comme *R* est une matrice régulière, l'équation (2.18a) permettra ultérieurement d'estimer le vecteur d'entrées inconnues $\bar{d}$ et par conséquence *d*. Si l'on pose l'hypothèse que le sous-vecteur d'état $\bar{x}_1$ peut être déduit de l'équation (2.18c), Hou et Müller montrent que les équations (2.18b) et (2.18c) forment un système dynamique qui ne dépend que de la variable d'état $\bar{x}_2$. En effet, supposons que la matrice $\overline{C}_1$ est de plein rang colonne. Elle peut alors être décomposée en valeurs singulières selon :

$$\overline{C}_1 = H_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} K_1^T \tag{2.19}$$

où $H_1 \in \mathbf{R}^{m.m}$ et $K_1 \in \mathbf{R}^{q.q}$ sont deux matrices orthogonales et $R_1 \in \mathbf{R}^{q.q}$ est la matrice diagonale des valeurs singulières de $\overline{C}_1$. En effectuant une partition de la matrice H_1 en $H_1 = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \end{pmatrix}$, avec $H_{11} \in \mathbf{R}^{m.q}$ et $H_{12} \in \mathbf{R}^{m.(m-q)}$, et avec le changement de variable :

$$\bar{y}_k = H_1^T y_k = \begin{pmatrix} H_{11}^T \\ H_{12}^T \end{pmatrix} y_k = \begin{pmatrix} \bar{y}_{1k} \\ \bar{y}_{2k} \end{pmatrix}$$

l'équation de mesure (2.18c) peut être écrite :

$$\bar{y}_{1k} = R_1 K_1^T \bar{x}_{1k} + H_{11}^T \overline{C}_2 \bar{x}_{2k} = G_q^T \bar{y}_k \tag{2.20a}$$

$$\bar{y}_{2k} = H_{12}^T \overline{C}_2 \bar{x}_{2k} \tag{2.20b}$$

avec $G_q^T = \left(I_q \;\; 0_{q.(m-q)}\right)$. Comme les matrices R_1 et K_1 sont régulières, le sous-vecteur d'état $\bar{x}_1$ pourra effectivement être déduit de l'expression (2.20a) :

$$\bar{x}_{1k} = K_1 R_1^{-1} G_q^T H_1^T \left(y_k - \overline{C}_2 \bar{x}_{2k}\right) \tag{2.21}$$

Le report de (2.21) dans (2.18b) couplé à l'équation de mesure (2.20b) permet d'écrire un système ne dépendant que de $\bar{x}_2$:

$$\bar{x}_{2(k+1)} = A_2 x_{2k} + B_2 u_k + L_2 y_k \tag{2.22a}$$
$$\bar{y}_{2k} = C_2 \bar{x}_{2k} \tag{2.22b}$$

avec :

$$A_2 = \overline{A}_{22} - \overline{A}_{21} K_1 R_1^{-1} G_q^T H_1^T \overline{C}_2 \tag{2.23a}$$
$$B_2 = \overline{B}_2 \tag{2.23b}$$
$$L_2 = \overline{A}_{21} K_1 R_1^{-1} G_q^T H_1^T \tag{2.23c}$$
$$C_2 = H_{12}^T \overline{C}_2 \tag{2.23d}$$

Si la paire $\left(A_2, C_2\right)$ est observable, la reconstruction d'état peut être réalisée à l'aide d'un observateur de Luenberger défini par :

$$\hat{\bar{x}}_{2(k+1)} = \left(A_2 - LC_2\right)\hat{\bar{x}}_{2k} + B_2 u_k + \left(L_2 + LH_{12}^T\right) y_k \tag{2.24}$$

Enfin, de façon à obtenir une estimation du vecteur d'entrées inconnues, on utilise la définition (2.16b) et l'équation (2.18a) dans laquelle on remplace $\bar{x}_1$ par son expression (2.21) et $\bar{x}_2$ par son estimation $\hat{\bar{x}}_2$. On obtient alors :

$$\hat{d}_k = \alpha(q) y_k + \beta(q) \hat{\bar{x}}_{2k} + \gamma(q) u_k \tag{2.25}$$

où q est l'opérateur avance ($qz_k = z_{k+1}$) et avec :

$$\alpha(q) = KR^{-1}(qI - \overline{A}_{11}) K_1 R_1^{-1} G_q^T H_1^T \tag{2.26a}$$
$$\beta(q) = -KR^{-1}\left(\overline{A}_{12} + (qI - \overline{A}_{11}) K_1 R_1^{-1} G_q^T H_1^T \overline{C}_2\right) \tag{2.26b}$$
$$\gamma(q) = -KR^{-1}\overline{B}_1 \tag{2.26c}$$

3.2.2. Exemple

Considérons le système discret décrit par les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 0.5\\ 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad E_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

La décomposition en valeurs singulières de E_1 permet d'obtenir :

$$H=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad K=1 \qquad R=1$$

Les changements de variables (2.16) conduisent à :

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad \overline{B}=\begin{pmatrix}-1\\ 0.5\\ 1\end{pmatrix} \qquad \overline{C}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Les équations d'état (2.18) s'expriment alors :

$$\bar{x}_{1(k+1)}=-\bar{x}_{1k}+\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}\bar{x}_{2k}-u_k+d_k$$
$$\bar{x}_{2(k+1)}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\bar{x}_{1k}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\bar{x}_{2k}+\begin{pmatrix}0.5\\ 1\end{pmatrix}u_k$$
$$y_k=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\bar{x}_{1k}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}_{2k}$$

L'entrée inconnue *d* peut alors être estimée par :

$$\hat{d}_k=-(q+1)y_k^{(1)}+\hat{\bar{x}}_{2k}^{(1)}+u_k$$

où la notation $z_k^{(i)}$ désigne la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur z_k.

3.2.3. Mise en évidence du conservatisme de la méthode

Afin de montrer la non-applicabilité de la méthode précédente, considérons le modèle dynamique d'ordre quatre suivant :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0.5\\ 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Il est clair que l'on a, pour cet exemple :

$$\overline{C}_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Comme $\overline{C}_1$ n'est pas de plein rang colonne, sa décomposition sous la forme (2.19) n'est pas possible et l'extraction du sous-vecteur d'état $\bar{x}_1$ n'est pas réalisable. Cependant, comme nous allons le montrer ci-dessous, l'estimation du vecteur d'entrées inconnues peut être effectuée. En effet, comme E_1 est de plein rang colonne, le système (2.18) peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{x}_{1(k+1)}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}_{1k}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}_{2k}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}u_k+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}\bar{d}_k \tag{2.27a}$$

$$\bar{x}_{2(k+1)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}_{1k}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\bar{x}_{2k}+\begin{pmatrix}0.5\\ 1\end{pmatrix}u_k \tag{2.27b}$$

$$y_k=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\bar{x}_{1k}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bar{x}_{2k} \tag{2.27c}$$

On constate qu'à partir de (2.27b), on peut exprimer $\bar{x}_1$ en fonction de $\bar{x}_2$ et u. Le report de cette expression dans l'équation de mesure (2.27c) permet donc d'exprimer la partie de l'état $\bar{x}_2$ en fonction des observations y et des commandes u :

$$\bar{x}_{2k}=-\frac{1}{q}\begin{pmatrix}1 & -(q+1)\\ 0 & -q\end{pmatrix}y_k-\frac{1}{q}\begin{pmatrix}0.5\\ 0\end{pmatrix}u_k$$

puis d'exprimer $\bar{x}_1$:

$$\bar{x}_{1k}=\begin{pmatrix}-1 & q+1\\ 0 & q+1\end{pmatrix}y_k$$

enfin le report de $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ dans (2.27a) fournit l'expression des entrées inconnues :

$$\bar{d}_k = \begin{pmatrix} -\left(q+1+\dfrac{1}{q}\right) & \dfrac{(q+1)(q^2+q+1)}{q} \\ 0 & 2(q^2-2) \end{pmatrix} y_k + \begin{pmatrix} 1+\dfrac{0.5}{q} \\ 0 \end{pmatrix} u_k \tag{2.28}$$

L'exemple présenté ci-dessus montre que dans certain cas, même si la matrice $\overline{C}_1$ n'est pas de plein rang colonne, la détermination des entrées inconnues reste possible. De manière claire, l'hypothèse fixée sur $\overline{C}_1$ permet une extraction aisée de $\bar{x}_1$ à partir des équations d'état, mais ne constitue pas une condition d'existence de la reconstruction des entrées inconnues. Nous proposons une méthode systématique de reconstruction basée sur l'utilisation d'une projection à l'instar des méthodes présentées au chapitre 1.

Le système décrit par les équations (2.18) peut être ré-écrit en séparant l'état inconnu, que l'on cherche à éliminer, des autres variables :

$$M(q)\begin{pmatrix} \bar{x}_{1k} \\ \bar{x}_{2k} \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} u_k \\ y_k \end{pmatrix} + P\bar{d}_k \tag{2.29}$$

avec :

$$M(q) = \begin{pmatrix} -\overline{A}_{21} & qI - \overline{A}_{22} \\ \overline{C}_1 & \overline{C}_2 \\ qI - \overline{A}_{11} & -\overline{A}_{12} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} \overline{B}_2 & 0 \\ 0 & I \\ \overline{B}_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

L'état inconnu peut alors être éliminé en prémultipliant l'équation (2.29) par une matrice polynomiale $W(q) = \begin{pmatrix} W_1(q) & W_2(q) & W_3(q) \end{pmatrix}$ orthogonale à $M(q)$. On obtient ainsi les relations liant les commandes *u*, les mesures *y* et les entrées inconnues $\bar{d}$:

$$\left(W_1(q)\overline{B}_2 + W_3(q)\overline{B}_1\right)u_k + W_2(q)y_k + W_3(q)R\bar{d}_k = 0 \tag{2.31}$$

La reconstructibilité des entrées inconnues est liée au rang de la matrice polynomiale $W_3(q)R$. Si celle-ci n'est pas de plein rang, seules certaines composantes du vecteur d'entrées inconnues peuvent être reconstruites.

3.2.4. Exemple (suite)

Pour l'exemple du paragraphe précédent, les matrices (2.30) s'écrivent :

$$M(q)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & q & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q+1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

La matrice W suivante est orthogonale à $M(q)$:

$$W=\begin{pmatrix} 0 & q-1 & 0 & 2-q^2 & 0 & 1 \\ 1 & -(1+q+q^2) & -(1+q+q^2) & (1+q)(1+q+q^2) & -q & 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi :

$$N\begin{pmatrix} u_k \\ y_k \end{pmatrix}+P\bar{d}_k=\begin{pmatrix} 0.5u_k \\ 0 \\ y_{1k} \\ y_{2k} \\ -u_k+\bar{d}_{1k} \\ 0.5\bar{d}_{2k} \end{pmatrix}$$

Compte-tenu de la régularité de la matrice $W_3(q)R$, le lecteur vérifiera que l'on obtient bien les mêmes expressions que (2.28).

3.3. *Approche utilisant des factorisations des matrices de transfert*

La génération de résidus dans le domaine fréquentiel offre des potentialités intéressantes, particulièrement en ce qui concerne la prise en compte d'incertitudes. En effet les techniques modernes de l'automatique telle la théorie H_∞ permet non seulement cette prise en compte mais également celle de spécifications fréquentielles permettant une discrimination supplémentaire des défauts. Cette approche fréquentielle, initialement introduite par Viswanadham *et al.* (1987) a été étendue récemment par Ding et Frank (1990a, 1991). Résumons succinctement l'idée essentielle de cette approche (Frank *et al.*, 1993 ; Frank, 1993).

Si les incertitudes sont structurées, les matrices F_1, F_2, E_1, E_1 sont connues et le système peut être décrit dans l'espace fréquentiel, par la relation entrée-sortie :

$$y(s) = G_u(s)u(s) + G_d(s)d(s) + G_f(s)f(s) \tag{2.32}$$

Les matrices de transfert $G_u(s)$, $G_d(s)$, $G_f(s)$ peuvent être aisément calculées à partir des relations (2.8). Le générateur de résidus construit est un observateur linéaire de la sortie du système où l'erreur d'estimation est utilisée en tant que résidu. Rappelons sa forme générale :

$$r(s) = H_u(s)u(s) + H_y(s)y(s) \tag{2.33}$$

où les matrices de transfert $H_u(s)$ et $H_y(s)$ appartiennent à l'espace[2] RH_∞. Définissons :

$$H_y(s) = P(s) - P \tag{2.34}$$

tel que $P(s) \in RH_\infty$ et rang$(P) = m$, la dimension du vecteur d'observation y. On peut alors écrire :

$$r(s) = H_u(s)u(s) + P(s)y(s) - Py(s) \tag{2.35}$$

Le terme $r(s)$ sera donc un résidu si :

$$\eta(s) = H_u(s)u(s) + P(s)y(s) \tag{2.36}$$

est une estimation de $Py(s)$, c'est-à-dire :

$$\eta(s) - Py(s) = 0 \qquad \text{pour } f(s) = 0 \text{ et } d(s) = 0 \tag{2.37}$$

Le problème de conception de générateur de résidus revient donc bien à construire un observateur de la sortie du système. Cela peut s'effectuer dans le domaine fréquentiel. En effet, considérons une double factorisation coprime de la matrice de transfert $G_u(s)$:

$$G_u(s) = N_u(s)M_u^{-1}(s) = \hat{M}_u^{-1}(s)\hat{N}_u(s) \tag{2.38}$$

---

[2] H_∞ désigne l'espace de Hardy. Cet espace est constitué de toutes les fonctions complexes $F(s)$ de la variable complexe s qui sont analytiques et bornées dans le demi-plan complexe de droite (Re(s) > 0). Le sous-ensemble de H_∞ constitué des fractions rationnelles réelles est noté RH_∞.

telle que les matrices $F_0(s), P_0(s), \hat{F}_0(s)$ et $\hat{P}_0(s)$ appartenant à RH_∞ satisfont l'identité de Bezout[3] :

$$\begin{pmatrix} F_0 & P_0 \\ -\hat{N}_u & \hat{M}_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_u & -\hat{P}_0 \\ N_u & \hat{F}_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_u & \hat{P}_0 \\ -N_u & \hat{F}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_0 & -P_0 \\ \hat{N}_u & \hat{M}_u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

dont on peut, en particulier, extraire l'égalité :

$$F_0(s)M_u(s) + P_0(s)N_u(s) = I \tag{2.40}$$

Le système dynamique (2.36) est alors un observateur de $Py(s)$ si et seulement si :

$$F(s) = PN_u(s)F_0(s) - Q(s)\hat{N}_u(s) \tag{2.41a}$$
$$P(s) = PN_u(s)P_0(s) + Q(s)\hat{M}_u(s) \tag{2.41b}$$

où $Q(s) \in RH_\infty$ est une matrice de paramétrisation. Cette matrice de paramétrisation de l'observateur conduit à la paramétrisation du générateur de résidus qui s'écrit alors :

$$r(s) = Q(s)\left(\hat{M}_u(s)y(s) - \hat{N}_u(s)u(s)\right) + P\left(N_u(s)F_0(s)u(s) + N_u(s)P_0(s)y(s) - y(s)\right) \tag{2.42}$$

En utilisant les égalités extraites de l'identité (2.39) :

$$N_u(s)P_0(s) + \hat{F}_0(s)\hat{M}_u(s) = I \tag{2.43a}$$
$$N_u(s)F_0(s) = \hat{F}_0(s)\hat{N}_u(s) \tag{2.43b}$$

on peut également écrire :

$$r(s) = \left(Q(s)\hat{M}_u(s) - P\hat{F}_0(s)\hat{M}_u(s)\right)y(s) + \left(P\hat{F}_0(s)\hat{N}_u(s) - Q(s)\hat{N}_u(s)\right)u(s) \tag{2.44}$$

En choisissant comme valeur de la matrice de paramétrisation $Q(s)$:

$$Q(s) = R(s) + P\hat{F}_0(s) \tag{2.45}$$

on obtient une forme qui généralise l'équation (0.2) :

---

[3]Cette identité est également connue sous le nom équation de Diophantine. Diophantus of Alexandria a écrit un livre au III^{ième} siècle après Jésus-Christ à propos des solutions entières de l'équation pa + qb = c lorsque a, b et c sont des entiers donnés. Ces notions ont ensuite été étendues au cas polynomial, puis au cas polynomial matriciel.

$$r(s) = R(s)\left(\hat{M}_u(s)y(s) - \hat{N}_u(s)u(s)\right) \tag{2.46}$$

Les matrices $\hat{M}_u(s)$ et $\hat{N}_u(s)$ peuvent être déterminée aisément à l'aide des matrices de la représentation du système (Francis, 1987) :

$$\hat{M}_u(s) = I - C(sI - A + KC)^{-1}K \tag{2.47a}$$
$$\hat{N}_u(s) = D + C(sI - A + KC)^{-1}(B - KD) \tag{2.47b}$$

où K est la matrice de gain d'un observateur assurant la stabilité de la matrice $A - KC$. Le problème de conception du générateur de résidus se réduit donc à trouver une matrice de paramétrisation et le gain d'un observateur de façon à satisfaire les spécifications de la détection de défauts. La matrice de paramétrisation joue un rôle important dans la possibilité d'isolation des défauts. Ecrivons en effet l'expression du résidu en substituant (2.32) dans (2.46) :

$$r(s) = R(s)\hat{M}_u(s)\left(G_d(s)d(s) + G_f(s)f(s)\right) \tag{2.48a}$$

En utilisant (2.32), le résidu peut également s'écrire :

$$r(s) = R(s)\hat{M}_u(s)\left(y(s) - G_u(s)u(s)\right) \tag{2.48b}$$

Pour simplifier les écritures, on peut également remarquer, en utilisant le lemme d'inversion de matrice, que la matrice $\hat{M}_u(s)$ peut s'écrire sous la forme $\hat{M}_u(s) = (I + C(sI - A)^{-1}K)^{-1}$ où le gain K n'apparaît qu'une seule fois et que l'on a aussi $\hat{N}_u(s) = \hat{M}_u(s)G_u(s)$.

Si l'on ne cherche pas à structurer le résidu ($R(s) = I$), on observe qu'il peut être considéré comme la sortie d'un système dynamique dont l'entrée est le "signal d'erreur" $\varepsilon(s) = y(s) - G_u(s)u(s)$. La matrice $\hat{M}_u^{-1}(s)$ est donc le transfert entre $\varepsilon(s)$ et $r(s)$; dans le domaine temporel, $r(t)$ est la sortie du système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{\nu}(t) = A\nu(t) + K\varepsilon(t) \\ r(t) = C\nu(t) + \varepsilon(t) \end{cases}$$

Pour que (2.48a) soit réellement l'expression d'un résidu, on doit avoir (sensibilité aux défauts) :

$$R(s)\hat{M}_u(s)G_f(s) \neq 0$$

De plus la détection et l'isolation seront parfaites si l'on arrive à obtenir une insensibilité aux perturbations (2.49a) et un découplage des effets des défauts (2.49b) :

$$R(s)\hat{M}_u(s)G_d(s) = 0 \tag{2.49a}$$
$$R(s)\hat{M}_u(s)G_f(s) = diag\left(t_1(s) \text{L } t_p(s)\right) \tag{2.49b}$$

Ceci n'est possible que si les conditions de rang suivantes sont vérifiées :

$$rang\left(G_f(s)G_d(s)\right) = rang(G_f(s)) + rang(G_d(s)) \tag{2.50a}$$
$$rang(G_f(s)) = p = \text{nombre de défauts} \tag{2.50b}$$

Il faut noter que les conditions (2.50) de découplage parfait ont été obtenues par différents auteurs en utilisant d'autres approches. Citons Massoumnia (1986), qui a utilisé une approche géométrique, Ge et Fang (1988), Viswanadham et Srichander (1987), Frank et Wünenberg (1989) et Hou et Müller (1992), à partir de l'approche observateurs à entrées inconnues, Patton et Kangethe (1989) en utilisant l'affectation de la structure propre, Gertler et Singer (1990) dans le contexte espace de parité et enfin Viswanadham (1987) à partir de cette même approche fréquentielle.

Si les conditions (2.50) ne sont pas satisfaites, il convient de rechercher une solution approchée optimale au sens d'un critère de performance à définir. De la même manière que pour l'approche espace de parité, on peut définir un index de performance que l'on cherchera à minimiser. Par exemple, on minimisera, par rapport à $R(s)$, le critère suivant :

$$J = \frac{\left\| R(s)\hat{M}_u(s)G_d(s) \right\|}{\left\| R(s)\hat{M}_u(s)G_f(s) \right\|} \tag{2.51}$$

où $\| \ \|$ représente une norme à choisir. Si l'on choisit la norme L_2 et si on limite $R(s)$ à un vecteur, Ding et Frank (1990b) ont montré que la minimisation de J conduit à un problème de recherche de valeurs propres généralisées dans le domaine fréquentiel. La plus grande valeur propre correspond à la valeur optimale du critère et le vecteur propre correspondant $v(s)$ est utilisé pour construire le vecteur de paramétrisation :

$$R_{opt}(s) = q_f(s)v(s) \tag{2.52}$$

où $q_f(s)$ représente la fonction de transfert d'un filtre passe-bande optimisant J. Ce filtre sélectionne donc le résidu à la fréquence ω_0 supportant la plus grande variation lors de l'apparition d'un défaut. L'optimisation peut également être effectuée en utilisant d'autres normes et en particulier la norme H_∞ (Ding et Frank, 1991).

On notera cependant qu'en pratiquant de cette manière, l'optimisation effectuée ne porte que sur la matrice de pondération $R(s)$; le gain K de l'observateur ayant été fixé préalablement. Or ce traitement séquentiel peut induire une perte de degrés de liberté dans la conception des résidus. Un travail très récent de Duan et Patton (1997) permet de s'affranchir de cet inconvénient. Exploitant les résultats antérieurement acquis sur la conception de la structure propre[4] des systèmes linéaires et sur la conception de générateurs de résidus, ces auteurs proposent une méthode permettant la détermination simultanée du gain de l'observateur et de la matrice de pondération conservant ainsi tous les degrés de liberté. De plus, la méthode proposée peut être implémentée en utilisant le calcul formel, ce qui permet de bien mettre en évidence toute la famille des solutions possibles.

4. Résidus structurés - bancs d'observateurs

Les observateurs d'état (ou de sortie) permettent l'estimation de la sortie d'un système à partir de la connaissance de la commande et des mesures de la sortie. Cette estimation, comparée à la valeur mesurée de la sortie permet la génération de résidus. Cette technique permet de surveiller les défauts de capteurs (IFD : Instrument Fault Detection), les défauts d'actionneurs (AFD : Actuator Fault Detection) ou les défauts de processus (CFD : Component Fault detection).

La technique consiste à mettre en oeuvre plusieurs observateurs excités par une combinaison judicieusement choisie des entrées et des sorties du système, générant chacun des résidus destinés à révéler un ou plusieurs défauts spécifiques du système. Cette technique a été introduite par Clark *et al*. (1975). Les objectifs poursuivis peuvent être différents : soit tous les défauts, même simultanés doivent être détectés et isolés, soit on se limite à détecter et isoler un seul défaut à la fois.

Dans le premier cas, chaque résidu doit être sensible à un seul défaut à la fois. De cette façon, plusieurs défauts peuvent être détectés simultanément. La technique présentée par

[4] Traduction libre du terme anglais *eigenstructure assignment.*

Wünnenberg (1990) est une généralisation de celle présentée par Clark *et al.* (1975). Une stratégie pour générer ce type de résidus consiste à considérer l'ensemble des défauts par rapport auxquels un résidu particulier doit être insensible et à construire l'observateur à entrées inconnues correspondant. Ceci n'est malheureusement pas toujours possible, car les conditions d'existence d'un tel observateur peuvent ne pas être satisfaites, rendant compte d'une impossibilité de découplage de certains défauts. La structure du banc d'observateurs ainsi obtenu est appelée structure d'observateurs dédiés (Dedicated Observer Scheme : DOS). Selon qu'il s'agit de défauts actionneurs, de défauts composants systèmes ou de défauts capteurs, la structure diffère par les variables d'entrée des observateurs. Le lecteur trouvera une illustration de cette méthode, pour des défauts de capteurs d'un système non-linéaire, au paragraphe 5.4.

Afin d'améliorer les performances de détection-localisation, on peut poser l'hypothèse que les défauts ne peuvent survenir simultanément. Dans ce cas, on peut construire des résidus sensibles potentiellement à tous les défauts sauf un. Cela correspond à la mise en oeuvre d'un observateur à une seule entrée inconnue. Les chances que les conditions d'existence d'un tel observateur soient satisfaites sont beaucoup plus grandes que dans le cas précédent. La méthode a initialement été proposée par Frank (Tzafestas *et al*, 1987). Des exemples de cette technique peuvent être consultés dans les publications de Ge et Fang (1988), Patton *et al*. (1987) ou Wünnenberg et Frank (1987). La structure du banc d'observateurs ainsi obtenu est appelée Structure généralisée d'observateurs (Generalized Observer Scheme : GOS).

5. Observateurs non-linéaires

5.1. *Introduction*

La plupart du temps, le système à surveiller a un comportement non-linéaire. Si le générateur de résidus est basé sur un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement, lorsque l'état du système s'écarte notablement de ce point de fonctionnement normal, des dérives importantes peuvent être observées, dues à cette non prise en compte du comportement non-linéaire. Afin de rendre les résidus robustes dans cette situation, il semble naturel d'employer un modèle non-linéaire décrivant au mieux le comportement du système considéré. Cette approche a été essentiellement développée par le professeur Paul Frank et son équipe (Hengy et Frank, 1986 ; Frank, 1987 ; Seliger et Frank, 1991). Elle est, en général, assez complexe et ne peut être utilisée que dans le cas de non-linéarité bien

définies. Kondo Adjallah (1993) a également proposé une démarche de conception de tels observateurs. Nous en exposons les principes ci-après.

5.2. *Une méthode de conception d'un observateur non-linéaire*

On considère les systèmes non-linéaires de la forme :

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t),\ u(t)\big), \qquad x(0) = x_0 \quad x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m \tag{2.53a}$$

$$y(t) = h\big(x(t),\ u(t)\big) \qquad y \in \mathbf{R}^p \tag{2.53b}$$

où f et h sont des fonctions continûment dérivables. Un observateur d'état de ce type de système peut revêtir la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f\big(\hat{x}(t),\ u(t)\big) + g\big(y(t)\big) - g\big(\hat{y}(t)\big) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad \hat{x} \in \mathbf{R}^n \tag{2.54a}$$

$$\hat{y} = h\big(\hat{x}(t),\ u(t)\big) \qquad \hat{y} \in \mathbf{R}^p \tag{2.54b}$$

où g est une fonction de $\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ qui doit être déterminée. Les erreurs d'estimation d'état et de sortie sont définies par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{2.55a}$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{2.55b}$$

L'évolution de l'erreur d'estimation d'état est régie par l'équation suivante :

$$\dot{e} = f(x,\ u) - f(\hat{x},\ u) - g(y) + g(\hat{y}) \tag{2.56}$$

Afin de simplifier les notations, nous omettrons désormais d'écrire la dépendance des fonctions par rapport au temps. L'observateur reconstruit asymptotiquement l'état du système (2.53) si l'erreur de reconstruction e tends asymptotiquement vers zéro lorsque t tends vers l'infini, quelque soit l'état initial $\hat{x}_0$ de l'observateur et la commande u du système. Dans ce cas, on peut considérer que e se trouve au voisinage de zéro au bout d'un certain temps. On peut alors approximer la fonction $f(x,\ u)$ par son développement de Taylor au premier ordre, le long de la trajectoire de $\hat{x}$ si l'on admet que $\hat{x}$ est suffisamment proche de x.

$$f(x,\ u) = f(\hat{x} + e,\ u) = f(\hat{x},\ u) + \mathbf{D}_{\hat{x}}(f)e \tag{2.57}$$

où $\mathbf{D}_{\hat{x}}(\ )$ est l'opérateur différentiel défini par :

$$\mathbf{D}_{\hat{x}}(f) = \left.\frac{\partial f(x,\ u)}{\partial x^T}\right|_{x=\hat{x}} \tag{2.58}$$

On obtient, de la même manière, pour les fonctions h et g :

$$h(x,\ u) = h(\hat{x},\ u) + \mathbf{D}_{\hat{x}}(h)e \tag{2.59a}$$
$$g\big(h(x,\ u)\big) = g\big(h(\hat{x},\ u)\big) + \mathbf{D}_h(g)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)e \tag{2.59b}$$

où $\mathbf{D}_h(g)$ est défini par :

$$\mathbf{D}_h(g) = \left.\frac{\partial g\big(h(x,\ u)\big)}{\partial h^T(x,\ u)}\right|_{h(x,\ u)=h(\hat{x},\ u)} \tag{2.60}$$

L'équation d'évolution de l'erreur d'estimation d'état peut alors être écrite sous la forme :

$$\dot{e} = \big(\mathbf{D}_{\hat{x}}(f) - \mathbf{D}_h(g)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\big)e \tag{2.61}$$

Si la paire $\big(\mathbf{D}_{\hat{x}}(f),\ \mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\big)$ est détectable, à tout instant t, la matrice $\mathbf{D}_h(g)$ doit être déterminée pour que la matrice de l'équation (2.61) ait des pôles stables, quelque soit la commande u. La première question que l'on peut se poser concerne l'existence de la fonction g satisfaisant ces contraintes. Jusqu'à présent, seules des conditions suffisantes ont pu être établies (Misawa and Hedrick, 1989). Afin de proposer une construction systématique d'un tel observateur, nous proposons d'employer la structure utilisée par Thau (1973), c'est-à-dire un observateur d'ordre plein de type Luenberger non-linéaire (Adjallah, 1993) :

$$\dot{\hat{x}} = f\big(\hat{x},\ u\big) + R\big(\hat{x},\ u\big)\big(y - h(\hat{x},\ u)\big) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \qquad \hat{x} \in \mathbf{R}^n \tag{2.62a}$$
$$\hat{y} = h\big(\hat{x}(t),\ u(t)\big) \qquad \hat{y} \in \mathbf{R}^p \tag{2.62b}$$

L'erreur d'estimation d'état est alors solution de l'équation :

$$\dot{e} = f(x,\ u) - f(\hat{x},\ u) - R\big(\hat{x},\ u\big)\big(y - h(\hat{x},\ u)\big) \tag{2.63}$$

En appliquant la démarche précédente (développement en série de Taylor de f et h), cette erreur doit vérifier l'équation :

$$\dot{e} = \left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(f) - R(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right)e \tag{2.64}$$

Pour assurer la convergence asymptotique de e vers 0, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T P e \tag{2.65}$$

où P est une matrice symétrique définie positive. Pour garantir la décroissance de V par rapport à t, sa dérivée doit être négative :

$$\dot{V}(e) = e^T P \dot{e} \tag{2.66a}$$
$$\dot{V}(e) = e^T P\left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(f) - R(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right)e \tag{2.66b}$$

Cette condition assure que l'erreur e décroît asymptotiquement vers 0 (Ogata, 1970), (Corless *et al.*, 1988). Pour une classe particulière de non-linéarité, Tsinias (1989) a proposé une méthode pour déterminer la matrice de gain $R(\hat{x},\ u)$, basée sur l'hypothèse que $\mathrm{Ker}\left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right) \neq \{0\}$. La méthode proposée généralise la précédente. Elle est basée sur la détermination séquentielle des matrices P et $R(\hat{x},\ u)$. L'algorithme comporte les deux étapes suivantes :

Etape 1 : Supposons que $e \in \mathrm{Ker}\left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right)$ pour une trajectoire de u dans l'espace de commande ne rendant pas le système inobservable. On cherche une matrice P symétrique et définie telle que :

$$\dot{V}(e) = e^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f) e < 0 \tag{2.67}$$

Deux cas sont alors à envisager :

1) $\mathrm{Ker}\left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right) = \{0\}$

   La matrice P peut être quelconque, en particulier on peut choisir $P = I$.

2) $\mathrm{Ker}\left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right) \neq \{0\}$

   Dans ce cas, on cherche à satisfaire $\dot{V}(e) = e^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f) e < 0$. Il existe donc une matrice de projection K et un vecteur $\bar{e}$ tels que :

   $$e = K\bar{e} \tag{2.68}$$

   où K est orthogonale à droite à $\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)$. On obtient alors :

$$\dot{V}(e) = \bar{e}^T K^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f) K \bar{e}$$

La matrice P est alors déterminée par la résolution d'inéquations algébriques en utilisant les techniques de majoration de fonction. Une solution existe si les non-linéarités du système considéré sont bornées, ce qui est toujours le cas d'un système physique.

◊

Etape 2 : La matrice P étant maintenant connue car ayant été déterminée lors de l'étape précédente, on cherche maintenant à déterminer $R(\hat{x},\ u)$ satisfaisant l'inégalité :

$$\dot{V}(e) = e^T P\left(\mathbf{D}_{\hat{x}}(f) - R(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\right)e < 0 \tag{2.69}$$

Une condition suffisante pour que cette égalité soit satisfaite est que la matrice $\mathbf{D}_{\hat{x}}(f) - R(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)$ soit semi-définie négative. Adoptons la structure suivante pour $R(\hat{x},\ u)$:

$$R(\hat{x},\ u) = P^{-1}F(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q \tag{2.70}$$

où F et Q sont des matrices carrées de dimensions respectives n et p. En substituant l'expression de R dans l'équation (2.69), on a :

$$\dot{V}(e) = e^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f)e - e^T F(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q \mathbf{D}_{\hat{x}}(h)e < 0 \tag{2.71}$$

d'où l'inégalité suivante :

$$\dot{V}(e) \le \left|e^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f)e\right| - e^T F(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q \mathbf{D}_{\hat{x}}(h)e \tag{2.72}$$

Afin de majorer le premier terme du membre de droite de l'inégalité (2.72) cherchons une matrice $\overline{F}(\hat{x},\ u)$ telle que :

$$\left\|P\mathbf{D}_x(f)\right\| < \left\|\overline{F}(x,\ u)\right\| \tag{2.73}$$

Adjallah (1993) a montré que la matrice diagonale $\overline{F}(\hat{x},\ u)$ suivante satisfait (2.73):

$$\overline{F}(x,\ u) = \mathrm{diag}\left(\phi_i(x,\ u)\right) \tag{2.74}$$

avec:

$$\phi_i(x,\ u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}(x,\ u) + \alpha_{ji}(x,\ u)\right| \tag{2.75}$$

où α_{ij} sont les éléments de la matrice $P\mathbf{D}_x(f)$. En posant $F(x,\ u) = \overline{F}(x,\ u)$, les inégalités (2.72) et (2.73) permettent d'écrire :

$$\dot{V}(e) \le e^T \overline{F}(\hat{x},\ u)e - e^T \overline{F}(\hat{x},\ u)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)e \tag{2.76a}$$

$$\dot{V}(e) \le e^T \overline{F}(\hat{x},\ u)\Big(I - \mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)\Big)e \tag{2.76b}$$

Pour garantir la négativité de $\dot{V}(e)$, il suffit donc de choisir Q de façon à ce que la matrice $\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q\mathbf{D}_{\hat{x}}(h) - I$ soit semi-définie positive.

◊

En résumé, s'il existe une matrice P satisfaisant (2.67), obtenue le plus souvent par majoration et une matrice Q vérifiant la semi-définie positivité de $\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q\mathbf{D}_{\hat{x}}(h) - I$, alors l'observateur décrit par :

$$\dot{\hat{x}} = f\big(\hat{x},\ u\big) + P^{-1}F\big(\hat{x},\ u\big)\mathbf{D}_{\hat{x}}(h)^T Q\big(y - h(\hat{x},\ u)\big) \tag{2.77}$$

estime asymptotiquement l'état du système (2.53). Le schéma fonctionnel de cet observateur non-linéaire est présenté à la figure 2.1 :

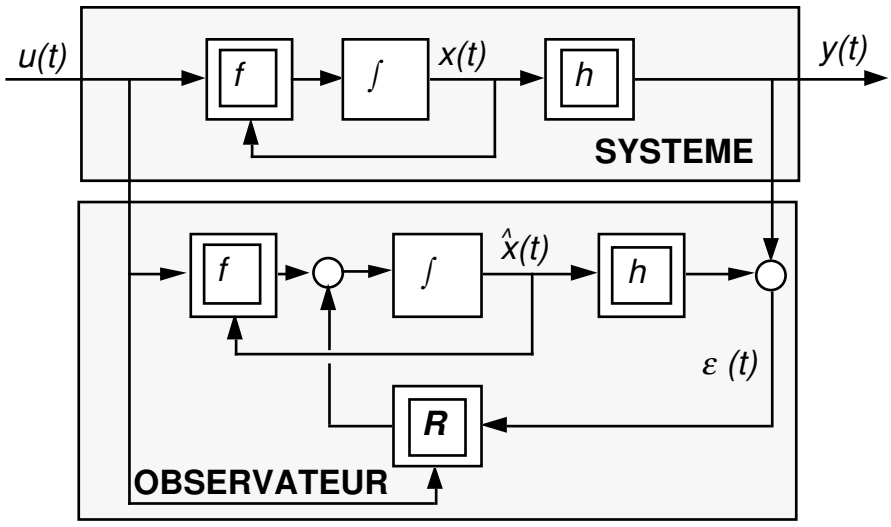

Figure 2.1 : Observateur non-linéaire

5.3. *Exemple : 1ère partie - Conception*

Considérons l'exemple décrit par les équations suivantes :

$$\dot{x} = f(x,\ u) \qquad\qquad x_0 = x(0)$$

$$y = Cx + \zeta$$

où ζ représente le vecteur des défauts de capteurs. La fonction f et la matrice C sont :

$$f(x,\ u) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) + u\cos(x_1) - 0.4x_2x_3 \\ \dfrac{1}{1+x_2^2} - x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}_x(h) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La commande u appartient à l'intervalle $[-1,\ 1]$. Selon la méthode proposée, la première étape consiste à chercher une matrice P définie positive telle que pour $e \in \mathrm{Ker}(C)$ l'inégalité (14) soit satisfaite. Comme suggéré, on cherche une matrice K orthogonale à droite de C, par exemple :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

et choisissons une matrice P diagonale :

$$P = \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3)$$

avec $p_i > 0,\ (i = 1,\ldots,3)$. La dérivée de f par rapport à x s'écrit :

$$\mathbf{D}_x(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos(x_1) - u\sin(x_1) & -0.4x_3 & -0.4x_2 \\ 0 & \dfrac{-2x_2}{\left(1+x_2^2\right)^2} & -1 \end{pmatrix}$$

On peut alors exprimer la matrice $K^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f) K$:

$$K^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f) K = p_1 - p_2\left(\cos(x_1) + u\sin(x_1)\right) + 0.4p_2(x_2 - x_3) - p_3\left(1 - \frac{2x_2}{\left(1+x_2^2\right)^2}\right)$$

Comme la commande u, les fonctions sinus et cosinus et tous les états évoluent dans l'intervalle $[-1,\ 1]$, on peut établir l'inégalité suivante :

$$K^T P \mathbf{D}_{\hat{x}}(f) K \le p_1 + 2.8p_2 - 0.35p_3$$

En fixant arbitrairement $p_1 = 0.5$ et $p_2 = 0.1$, la limite inférieure de p_3 est égale à 2.23. Pour l'exemple considéré, nous avons arbitrairement choisi $p_3 = 2.7$. On calcule ensuite $F(x,u) = \mathrm{diag}\left(\phi_i(x,u)\right)$:

$$\phi_1(x,\ u) = \frac{1}{2}\left(\left|0.5 - 0.1\left(\cos(x_1) + u\sin(x_1)\right)\right|\right)$$

$$\phi_2(x,\ u) = \frac{1}{2}\left(2\left|0.5 - 0.1\left(\cos(x_1) + u\sin(x_1)\right)\right| + 2\left|-0.04x_3\right| + \left|-0.04x_2 - 5.4\frac{x_2}{\left(1+x_2^2\right)^2}\right|\right)$$

$$\phi_3(x,\ u) = \frac{1}{2}\left(\left|-0.04x_2 - 5.4\frac{x_2}{\left(1+x_2^2\right)^2}\right| + \ 5.4\right)$$

La dernière étape consiste à chercher une matrice Q telle que $C^TQC - I$ soit semi-définie positive. On peut, par exemple, choisir :

$$Q = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

L'observateur est alors décrit par l'équation :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},\ u) + P^{-1}F(\hat{x},\ u)C^TQ(y - C\hat{x})$$

La figure 2.2 montre l'évolution du signal de commande et la figure 2.3, celles des deux signaux de sortie.

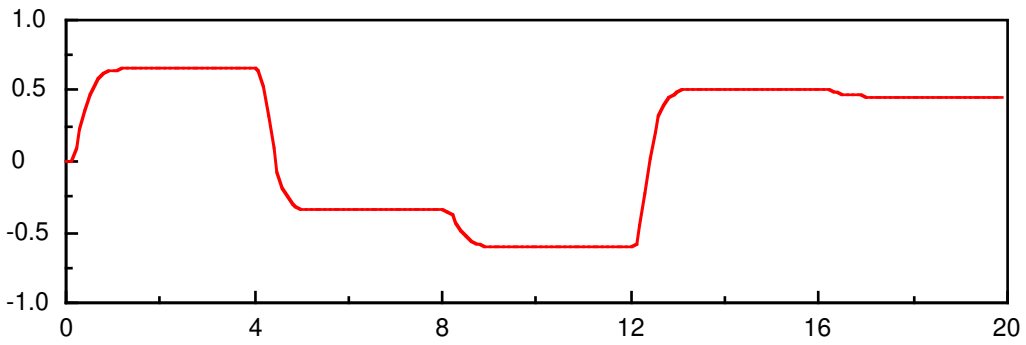

Figure 2.2 : Signal de commande $u(t)$ (t en secondes)

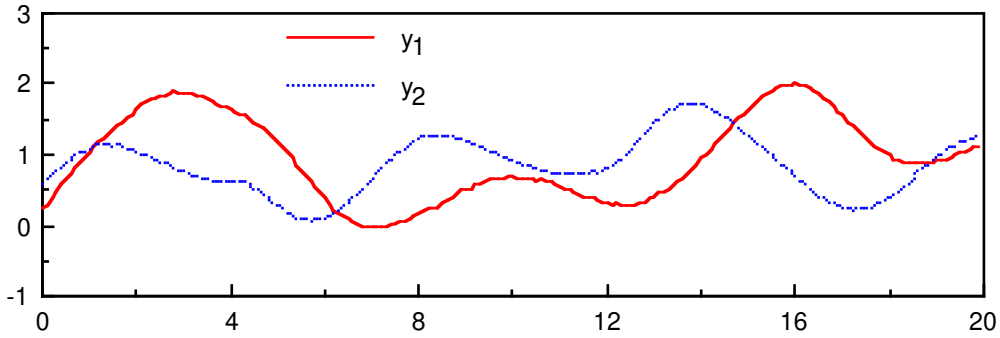

Figure 2.3 : Signaux de sortie $y_1(t)$ et $y_2(t)$ (t en secondes)

Des biais de 10 % de l'amplitude des signaux ont été ajouté, d'une part, sur $y_1(t)$ de l'instant 2 s à l'instant 6 s et, d'autre part, sur $y_2(t)$ de l'instant 12 s à l'instant 16 s. Les résidus $r_i(t)$, i=1, 2 avec $r_i(t) = y_i(t) - \hat{y}_i(t)$ sont présentés aux figures 2.4 et 2.5.

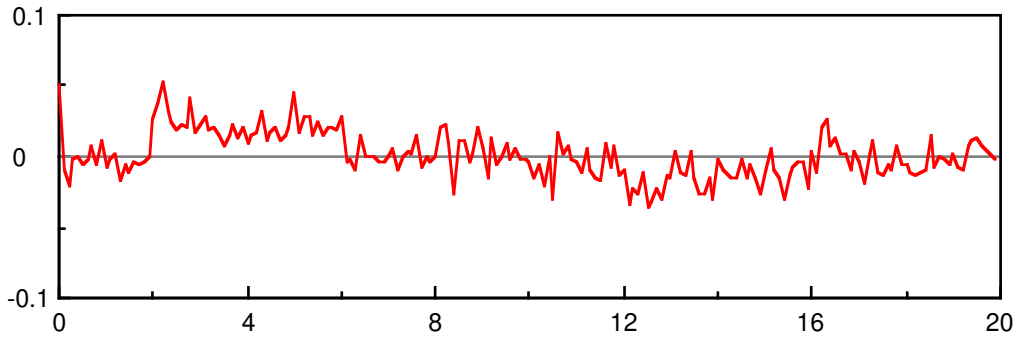

Figure 2.4 : Résidu $r_1(t) = y_1(t) - \hat{y}_1(t)$ (t en secondes)

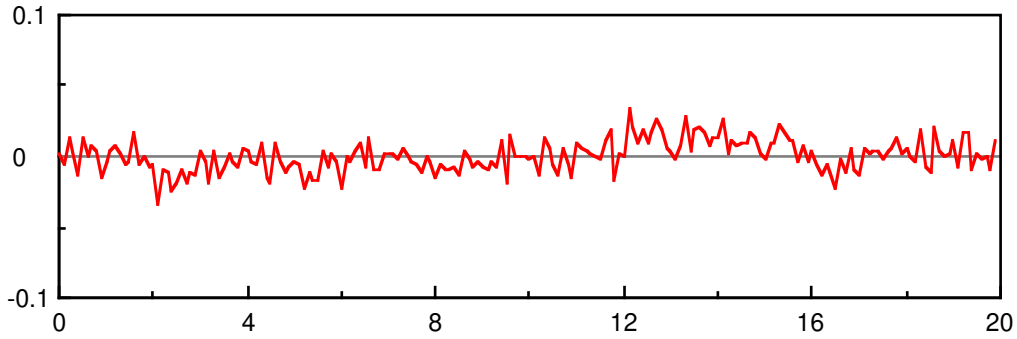

Figure 2.5 : Résidu $r_2(t) = y_2(t) - \hat{y}_2(t)$ (t en secondes)

On observe un léger transitoire dû aux conditions initiales arbitraires de l'observateur. En dehors des périodes où il y a défaut, les résidus sont sensiblement centrés autour de l'origine. En revanche, les deux défauts sont visibles sur les deux résidus et il est impossible de les localiser. La mise en oeuvre d'un banc d'observateurs devrait permettre d'atteindre cet objectif.

5.4. *Exemple : 2ème partie - Observateurs dédiés*

Nous allons maintenant, en utilisant la même technique que précédemment, construire deux observateurs non-linéaires. Le premier piloté par la commande $u(t)$ et la première sortie $y_1(t)$, le second par cette même commande et la seconde sortie $y_2(t)$ (on remarquera ici que le système est observable dans les deux configurations ce qui ne constitue pas un cas général). Si la reconstruction d'état (de sortie) est satisfaisante, le $j^{\text{ième}}$ résidu du $i^{\text{ième}}$ observateur, $r_{ij}(t)$, $i \neq j$, doit être sensible à tous les défauts de capteurs alors que le résidu $r_{ii}(t)$ ne doit être sensible qu'aux défauts sur le $i^{\text{ième}}$ capteur.

Pour le premier observateur, la matrice d'observation se réduit à :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice orthogonale à droite de C_1 s'écrit :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$$

Toutes les autres matrices de l'observateur peuvent aisément être déterminées ; nous n'expliterons pas plus leurs calculs. Les deux résidus que l'on peut ensuite calculer sont représentés aux figures 2.6 et 2.7.

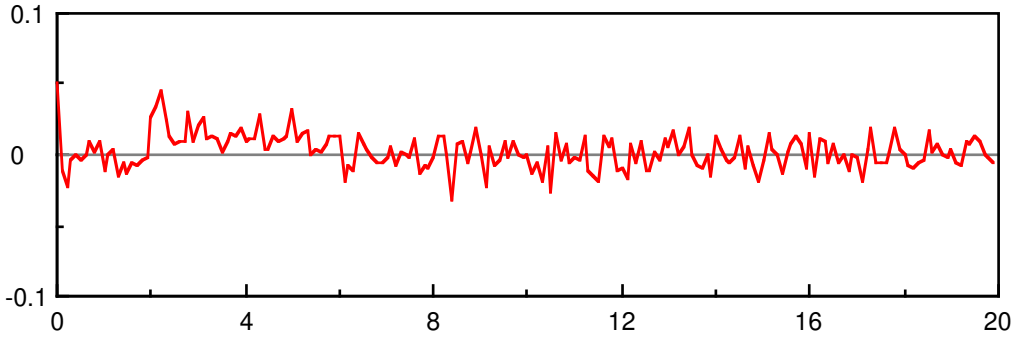

Figure 2.6 : Résidu $r_{11}(t) = y_1(t) - \hat{y}_1(t)$ (t en secondes)

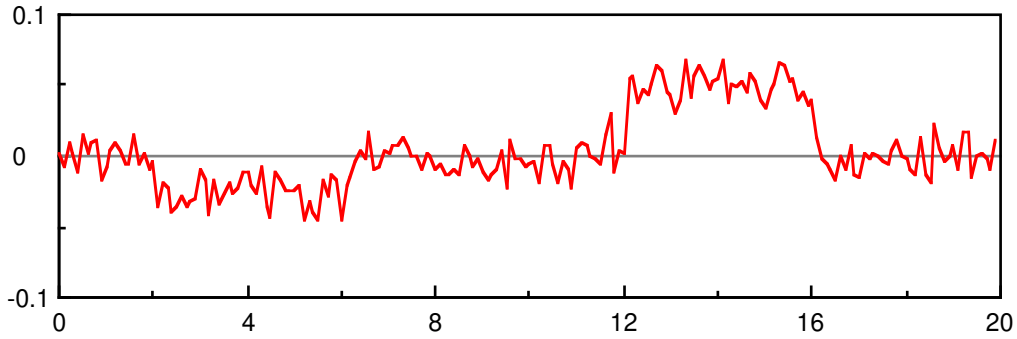

Figure 2.7 : Résidu $r_{12}(t) = y_2(t) - \hat{y}_2(t)$ (t en secondes)

De la même manière on peut construire un second observateur avec cette fois :

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices suivantes satisfont les contraintes de conception :

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Les résidus que l'on peut ensuite générer sont les suivants :

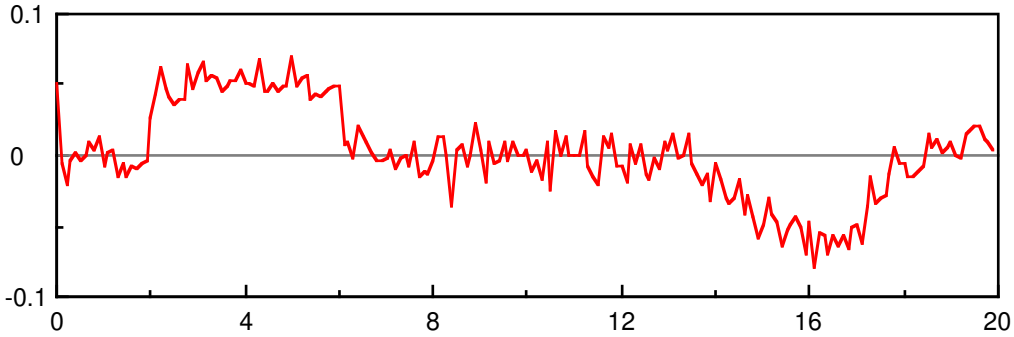

Figure 2.8 : Résidu $r_{21}(t) = y_1(t) - \hat{y}_1(t)$ (t en secondes)

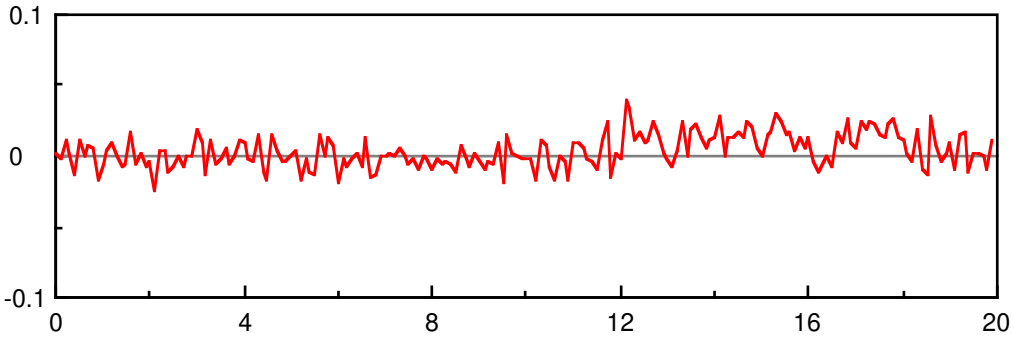

Figure 2.9 : Résidu $r_{22}(t) = y_2(t) - \hat{y}_2(t)$ (t en secondes)

On observe clairement le phénomène annoncé. Le résidu $r_{11}(t)$ n'est sensible qu'au défaut sur $y_1(t)$ et $r_{22}(t)$ qu'au défaut sur $y_2(t)$. Ce banc d'observateurs permet donc, sous réserve d'amplitude suffisante, de détecter et localiser un défaut de capteur quelconque.

6. Reconstruction d'état généralisé

6.1. *Introduction*

Comme nous l'avons déjà mentionné de nombreuses fois, le cumul des équations décrivant un système dynamique (équation d'évolution d'état et équation d'observation) sur un horizon temporel donné permet de se ramener à l'écriture d'équations décrivant un système statique. Cette propriété peut être mise à profit lorsqu'il s'agit d'estimation d'état.

Nous considérons ici la classe des systèmes décrits par les équations suivantes :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2.78a}$$
$$y_k = Cx_k + v_k \tag{2.78b}$$
$$z_k = Du_k + w_k \tag{2.78c}$$

Les deux premières équations sont "classiques" pour la représentation de systèmes dynamiques. La première exprime la loi d'évolution de l'état $x \in \mathbf{R}^n$ en fonction de la commande $u \in \mathbf{R}^r$ alors que la seconde précise la dépendance de la sortie $y \in \mathbf{R}^m$ en fonction de l'état et d'un bruit additif v. La dernière équation traduit le fait que l'on ne connaît pas exactement la commande mais que l'on dipose de "mesures" $z \in \mathbf{R}^q$ de celles-ci. Cette équation a la même structure que la précédente. Cette formulation est intéressante car elle permet, par exemple, en modifiant la matrice D, de considérer que certaines entrées (commandes) sont inconnues.

Les erreurs de mesures v et w sont des variables aléatoires distribuées selons des lois normales centrées de matrices de variance-covariance V_y et V_z. Elles sont supposées connues et constantes quelque soit l'instant d'observation.

6.2. *Estimation d'état sur un horizon fixe*

On considère ici que l'on observe le comportement du système dynamique sur un horizon donné correspondant à N pas d'échantillonnage. Définissons alors le vecteur composite X_N formé alternativement des vecteurs d'états et des vecteurs de commandes aux différents instants (vecteur d'état généralisé), le vecteur composite Z_N formé alternativement des vecteurs de mesures et le vecteur composite W_N des bruits de mesure :

$$X_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \\ x_2 \\ \text{M} \\ u_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \qquad Z_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ \text{M} \\ z_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \qquad W_N = \begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ \text{M} \\ w_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

L'ensemble des équations peut alors être écrit sous la forme :

$$MX_N = 0 \tag{2.80a}$$

$$Z_N = HX_N + W_N \tag{2.80b}$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} A & B & -I & . & . & \text{L} & . & . & . \\ . & . & A & B & -I & \text{L} & . & . & . \\ \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ . & . & . & . & . & \text{L} & A & B & -I \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} C & . & \text{L} & . & . \\ . & D & \text{L} & . & . \\ \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} & \text{M} \\ . & . & \text{L} & D & . \\ . & . & \text{L} & . & C \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

où M est de dimension $\big(n(N-1),\ (n+m)(N-1)+n\big)$ et H est de dimension $\big((r+q)(N-1)+r,\ (n+m)(N-1)+n\big)$. Le système est observable si :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} H \\ M \end{pmatrix} = (N-1)(n+m)+n \tag{2.82}$$

Dans ce cas, l'estimation au sens du maximum de vraisemblance (qui correspond ici à l'estimation au sens des moindres carrés) de l'état du système (2.80) s'obtient aisément en résolvant le problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires suivant :

$$\min_{\hat{X}_N} \phi = \frac{1}{2}\left\| Z_N - H\hat{X}_N \right\|^2_{V^{-1}} \tag{2.83}$$

où V est la matrice composite de variance-covariance des bruits de mesure. Après avoir formé le lagrangien correspondant à ce problème puis cherché ses conditions de stationnarité au premier ordre, on obtient aisément la solution :

$$\hat{X}_N = PR^{-1}H^T V^{-1} Z_N \tag{2.84a}$$

avec :

$$R = H^T V^{-1} H + M^T M \tag{2.84b}$$

$$P = I - R^{-1}M^T (MR^{-1}M^T)^{-1} M \tag{2.84c}$$

La seule difficulté du calcul réside dans la dimension de la matrice à inverser. En effet celle-ci croît très vite avec la dimension du système. De nombreuses techniques ont été développées afin de remédier à cet inconvénient (Ragot *et al.*, 1990, Kratz-Bousghiri, 1994).

6.3. ***Estimation d'état sur "fenêtre glissante"***

Lorsqu'on s'intéresse à la détection de défauts, l'aspect "temps réel" joue un rôle important. Il en effet important de détecter précocément les dysfonctionnement afin d'y remédier avant que leurs conséquences sur le fonctionnement du processus ne soient trop importantes. La méthode présentée précédemment doit donc subir quelques adaptations. Supposons tout d'abord que l'on fasse croître l'horizon "fixe" de la méthode précédente au fur et à mesure de la disponiblité des informations collectées au cours du temps. Intuitivement, on conçoit fort bien que lorsque l'horizon va être "grand" les estimations des grandeurs à l'instant N (borne supérieure de l'horizon) ne vont plus être influencées par les mesures de l'instant initial (k=1). Le système possède une "mémoire" correspondant à une fenêtre d'observation de largeur L à travers laquelle on l'observe.

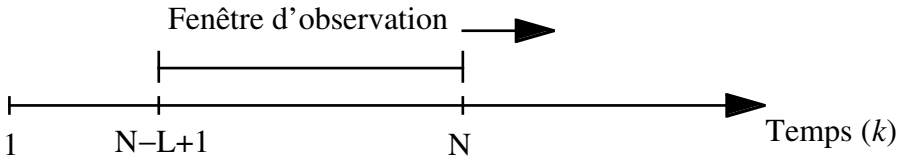

Figure 2.10 : Estimation sur fenêtre glissante.

Lors de l'acquisition de mouvelles mesures, comme l'indique la figure 2.10, on décale la fenêtre d'observation vers la droite. L'estimation des différentes grandeurs s'effectue sur cette fenêtre d'observation de largeur L comme dans la méthode exposée au paragraphe précédent. Cependant, on constate que, par le jeu de glissement de la fenêtre, une même grandeur est estimée plusieurs fois. Afin de pouvoir utiliser les résultats de cette méthode à des fins de diagnostic, seules les estimations des grandeurs les plus récentes, $\hat{u}_{N-1}$ et $\hat{x}_N$ sont conservées. Remarquons qu'une fois que la largeur de la fenêtre d'observation est fixée, la matrice de projection $PR^{-1}H^TV^{-1}$ qui intervient dans l'estimation est fixe ; son calcul ne doit donc être effectué qu'une seule fois. De plus, comme on ne s'intéresse qu'aux estimations $\hat{u}_{N-1}$ et $\hat{x}_N$, on peut également réduire la dimension de la matrice en sélectionnant juste ses dernières colonnes (Bousghiri *et al.*, 1993 ; Kratz-Bousghiri, 1994).

La largeur L de la fenêtre d'observation qui est un paramètre de la méthode proposée doit être choisie correctement. Pour la déterminer, on peut examiner l'évolution de l'estimation à un instant donné en fonction du nombre de mesures antérieures prises en compte où examiner l'évolution de la variance de cette même estimation (Zasadzinski, 1990). Lors de l'initialisation du calcul, la fenêtre d'observation est placée à l'origine et on effectue l'estimation des $L-1$ premières commandes et des L premiers états. Ensuite, on estime le couple $(\hat{u}_L,\ \hat{x}_{L+1})$, puis le couple $(\hat{u}_{L+1},\ \hat{x}_{L+2})$ etc.

6.4. *Filtrage entrée-sortie généralisé*

Le système décrit par les équations (2.78) peut être ré-écrit en utilisant une formulation système singulier. En effet, définissons les vecteurs généralisés d'état, de mesures et de bruits :

$$\mathtt{X}_k = \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} \qquad \mathtt{Z}_k = \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix} \qquad \mathtt{W}_k = \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ v_k \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

ainsi que les matrices suivantes :

$$E = \begin{pmatrix} -B & I \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & A \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_z & 0 \\ 0 & V_y \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

Les équations (2.78) peuvent alors s'écrire sous la forme du système singulier suivant :

$$E\mathrm{X}_{k+1} = F\mathrm{X}_k \tag{2.87a}$$
$$\mathrm{Z}_k = H\mathrm{X}_k + \mathrm{W}_k \tag{2.87b}$$

L'état généralisé du système (2.87) peut alors être estimé en utilisant les résultats établis pour les systèmes singuliers (Bernhard *et al.*, 1990 ; Boutayeb, 1993).

Nous proposons d'établir une forme récurrente de l'estimation de l'état généralisé. Considérons tout d'abord l'estimation sur le plus petit horizon possible, c'est-à-dire un horizon de largeur égale à 2. Au sens du maximum de vraisemblance et avec l'hypothèse d'une distribution normale des erreurs de mesure, on doit minimiser le critère :

$$\phi = \sum_{k=1}^{2} \left\| \mathrm{Z}_k - H\hat{\mathrm{X}}_{k/2} \right\|^2_{V^{-1}} \tag{2.88a}$$

sous la contrainte :

$$E\hat{\mathrm{X}}_{2/2} - F\hat{\mathrm{X}}_{1/2} = 0 \tag{2.88b}$$

La notation $\hat{\mathrm{X}}_{k/2}$ signifie que l'on estime $\hat{\mathrm{X}}_k$ pour $k = 1,2$ à l'aide des informations observées sur un horizon de largeur 2. Considérons alors le lagrangien :

$$L = \sum_{k=1}^{2} \left\| \mathrm{Z}_k - H\hat{\mathrm{X}}_{k/2} \right\|^2_{V^{-1}} + \lambda_1^T \left(E\hat{\mathrm{X}}_{2/2} - F\hat{\mathrm{X}}_{1/2} \right) \tag{2.89}$$

Les équations d'optimalité s'écrivent :

$$\begin{cases} H^T V^{-1} \left(H\hat{\mathrm{X}}_{1/2} - \mathrm{Z}_1 \right) - F^T \lambda_1 = 0 & (2.90a) \\ H^T V^{-1} \left(H\hat{\mathrm{X}}_{2/2} - \mathrm{Z}_2 \right) + E^T \lambda_1 = 0 & (2.90b) \\ E\hat{\mathrm{X}}_{2/2} - F\hat{\mathrm{X}}_{1/2} = 0 & (2.90c) \end{cases}$$

Après quelques calculs matriciels élémentaires, on obtient :

$$\hat{\mathrm{X}}_{2/2} = R_{2/2}^{-1}\left(H^T V^{-1}\mathrm{Z}_2 + E^T (FR_{1/2}^{-1}F^T)^{-1} FR_{1/2}^{-1}H^T V^{-1}\mathrm{Z}_1\right) \tag{2.91a}$$

avec :

$$R_{1/2} = H^T V^{-1}H + F^T F \tag{2.91b}$$

$$R_{2/2} = H^T V^{-1}H + E^T\left(FR_{1/2}^{-1}F^T\right)^{-1} E - E^T E \tag{2.91c}$$

De façon analogue, on peut s'intéresser à l'estimation $\hat{\mathrm{X}}_{3/3}$ obtenue en minimisant le critère :

$$\phi = \sum_{k=1}^{3} \left\| \mathrm{Z}_k - H\hat{\mathrm{X}}_{k/3} \right\|_{V^{-1}}^2 \tag{2.92a}$$

sous les contraintes :

$$E\hat{\mathrm{X}}_{2/3} - F\hat{\mathrm{X}}_{1/3} = 0 \tag{2.92b}$$

$$E\hat{\mathrm{X}}_{3/3} - F\hat{\mathrm{X}}_{2/3} = 0 \tag{2.92c}$$

Les équations d'optimalité s'écrivent cette fois sous la forme :

$$\begin{cases} H^T V^{-1}\left(H\hat{\mathrm{X}}_{1/3} - \mathrm{Z}_1\right) - F^T \mu_1 = 0 & (2.93a) \\ H^T V^{-1}\left(H\hat{\mathrm{X}}_{2/3} - \mathrm{Z}_2\right) + E^T \mu_1 - F^T \mu_2 = 0 & (2.93b) \\ H^T V^{-1}\left(H\hat{\mathrm{X}}_{3/3} - \mathrm{Z}_3\right) + E^T \mu_2 = 0 & (2.93c) \\ E\hat{\mathrm{X}}_{2/3} - F\hat{\mathrm{X}}_{1/3} = 0 & (2.93d) \\ E\hat{\mathrm{X}}_{3/3} - F\hat{\mathrm{X}}_{2/3} = 0 & (2.93e) \end{cases}$$

Quelques calculs matriciels permettent d'exprimer $\hat{\mathrm{X}}_{3/3}$; on obtient :

$$\hat{\mathrm{X}}_{3/3} = R_{3/3}^{-1}\left(H^T V^{-1}\mathrm{Z}_3 + E^T (FR_{2/3}^{-1}F^T)^{-1} FR_{2/3}^{-1}R_{2/2}\hat{\mathrm{X}}_{2/2}\right) \tag{2.94a}$$

avec :

$$R_{1/3} = H^T V^{-1}H + F^T F \tag{2.94b}$$

$$R_{2/3} = H^T V^{-1}H + E^T\left(FR_{1/3}^{-1}F^T\right)^{-1} E + F^T F + E^T E \tag{2.94c}$$

$$R_{3/3} = H^T V^{-1}H + E^T\left(FR_{2/3}^{-1}F^T\right)^{-1} E - E^T E \tag{2.94d}$$

En remarquant que l'on a $R_{2/3} = R_{2/2} + F^T F$ et en appliquant le lemme d'inversion matricielle à $(FR_{2/3}^{-1}F^T)^{-1}$, l'expression plus simple suivante peut encore être obtenue :

$$\hat{\mathrm{X}}_{3/3} = R_{3/3}^{-1}\left(E^T(FR_{2/2}^{-1}F^T)^{-1}F\hat{\mathrm{X}}_{2/2} + H^T V^{-1}\mathrm{Z}_3\right) \tag{2.95a}$$

avec :

$$R_{3/3} = H^T V^{-1}H + E^T\left(FR_{2/2}^{-1}F^T\right)^{-1}E \tag{2.95b}$$

Avec un raisonnement par récurrence, on montre aisément que ces expressions se généralisent à l'ordre N et l'on a :

$$\hat{\mathrm{X}}_{N/N} = R_{N/N}^{-1}\left(E^T(FR_{N-1/N-1}^{-1}F^T)^{-1}F\hat{\mathrm{X}}_{N\text{-}1/N\text{-}1} + H^T V^{-1}\mathrm{Z}_N\right) \tag{2.96a}$$

$$R_{N/N} = H^T V^{-1}H + E^T\left(FR_{N-1/N-1}^{-1}F^T\right)^{-1}E \tag{2.96b}$$

La matrice $R_{N/N}^{-1}$ est la variance de l'estimation $\hat{\mathrm{X}}_{N/N}$. Remarquons que l'équation d'évolution de cette variance revêt la forme d'une équation de Riccati généralisée. On consultera les travaux de Caines (1988), Zazadzinski *et al.* (1991) ou Darouach *et al.* (1993) en ce qui concerne les conditions de convergence de cette équation. Si $R_{N/N}^{-1}$ converge vers une valeur limite R (solution de l'équation de Ricatti), l'estimateur (2.96a) s'écrit en fonction de cette solution :

$$\hat{\mathrm{X}}_{N/N} = R^{-1}\left(E^T(FR^{-1}F^T)^{-1}F\hat{\mathrm{X}}_{N\text{-}1/N\text{-}1} + H^T V^{-1}\mathrm{Z}_N\right) \tag{2.96c}$$

Les expressions (2.96) constituent une extension de la formulation du filtre de Kalman aux systèmes singuliers (en posant la matrice E égale à l'identité, on retrouve d'ailleurs, à partir des expressions (2.96) la forme classique du filtre de Kalman).

6.5. *Extension aux systèmes non-linéaires*

La technique d'estimation d'état sur fenêtre glissante présentée aux paragraphes 6.2. et 6.3. peut être étendue aux systèmes non-linéaires. Considérons le système décrit par les équations suivantes :

$$x_{k+1} = f\left(x_k,\ u_k\right) \tag{2.97a}$$

$$y_k = Cx_k + v_k \tag{2.97b}$$

Le problème d'estimation d'état, sur une fenêtre de largeur l, débutant à l'instant d, revient à minimiser le critère :

$$\phi_k = \sum_{k=d}^{d+l-1} \left\| C\hat{x}_k - y_k \right\|^2_{V^{-1}} \tag{2.98a}$$

sous les contraintes :

$$\hat{x}_{k+1} - f\left(\hat{x}_k,\ u_k\right) = 0 \qquad k = d,\ldots,d+l-2 \tag{2.98b}$$

Le principe de résolution consiste à linéariser les contraintes non-linéaires. A partir d'une solution approchée, on effectue un développement en série de Taylor limité au premier ordre. On résout le problème d'estimation et l'on obtient ainsi une solution autour de laquelle on effectue de nouveau une linéarisation. Ce processus de "linéarisation-estimation" est répété jusqu'à convergence de l'estimation.

Appelons i la variable repérant le numéro d'itération du processus de linéarisation et $\hat{x}_k^i$, l'estimation de $\hat{x}_k$ obtenue à la fin de l'itération i. Pour l'itération $i+1$, on peut écrire :

$$\hat{x}_{k+1}^{i+1} = f(\hat{x}_k^i,\ u_k) + \left(\frac{\partial f(\hat{x}_k,\ u_k)}{\partial \hat{x}_k^T} \right)_{\hat{x}_k = \hat{x}_k^i} \left(\hat{x}_k^{i+1} - \hat{x}_k^i \right) \tag{2.99}$$

Notons :

$$A_k^i = \left(\frac{\partial f(\hat{x}_k,\ u_k)}{\partial \hat{x}_k^T} \right)_{\hat{x}_k = \hat{x}_k^i} \qquad \text{et} \qquad F_k^i = f(\hat{x}_k^i,\ u_k) \tag{2.100}$$

L'équation (2.99) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_k^i & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_k^{i+1} \\ \hat{x}_{k+1}^{i+1} \end{pmatrix} + F_k^i - A_k^i \hat{x}_k^i = 0 \tag{2.101}$$

En cumulant ces contraintes linéarisées sur la fenêtre d'estimation, pour $k = d,\ldots,d+l-2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_d^i & -I & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ 0 & A_{d+1}^i & -I & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{O} & \mathtt{M} & \mathtt{M} \\ 0 & 0 & 0 & & A_{d+l-2}^i & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_d^{i+1} \\ \hat{x}_{d+1}^{i+1} \\ \mathtt{M} \\ \hat{x}_{d+l-1}^{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_d^i - A_d^i \hat{x}_d^i \\ F_{d+1}^i - A_{d+1}^i \hat{x}_{d+1}^i \\ \mathtt{M} \\ F_{d+l-2}^i - A_{d+l-2}^i \hat{x}_{d+l-2}^i \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.102)$$

que l'on peut écrire de manière plus compacte :

$$M_d^i \hat{Z}_d^{i+1} - b_d^i = 0 \qquad (2.103)$$

avec des définitions évidentes pour M_d^i, $\hat{Z}_d^{i+1}$ et b_d^i. On remarquera que M_d^i et b_d^i dépendent de $\hat{Z}_d^i$ (équation (2.100)). A chaque itération de la linéarisation, le problème d'estimation d'état sur une fenêtre de largeur l, débutant à l'instant d, revient donc à minimiser le critère :

$$\phi_d^{i+1} = \left\| C\hat{Z}_d^{i+1} - Z_d \right\|_{V^{-1}}^2 \qquad (2.104a)$$

sous les contraintes :

$$M_d^i \hat{Z}_d^{i+1} - b_d^i = 0 \qquad (2.104b)$$

Les équations (2.104) décrivent un problème d'optimisation quadratique sous contraintes égalité. Si le système est observable, la solution est donnée par :

$$\hat{Z}_d^{i+1} = PRC^T V^{-1} Z_d + RM_d^{iT} \left(M_d^i R M_d^{iT} \right)^{-1} b_d^i \qquad (2.105a)$$

$$P = I - RM_d^{iT} \left(M_d^i R M_d^{iT} \right)^{-1} M_d^i \qquad (2.105b)$$

$$R = \left(C^T V^{-1} C + M_d^{iT} M_d^i \right)^{-1} \qquad (2.105c)$$

Lorsque la suite des itérés $\hat{Z}_d^i$ a convergé, on obtient l'estimation $\hat{Z}_d$. Comme pour le cas linéaire, pour effectuer l'estimation sur un horizon de N observations, on calcule $\hat{Z}_l$, ce qui permet d'obtenir les estimations $\hat{x}_k$, pour $k = 1,...,l$. On calcule ensuite $\hat{Z}_d$ pour $d = 2,...,N-l$ et l'on ne conserve de chaque estimation $\hat{Z}_d$ que la dernière composante, c'est-à-dire $\hat{x}_{d+l}$.

7. Références bibliographiques

Adjallah, K. (1993). *Contribution au diagnostic de systèmes par observateur d'état*. Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 13 octobre.

Adjallah, K., Maquin, D. et Ragot, J. (1994). Non-linear observer-based fault detection. Proc. of the 3rd IEEE Conference on Control Applications, August 24-26, Glasgow, U.K.

Beale, S.R. et Shafai, B. (1988). Robust control system with the proportional integral observer. Proc. of the 27th IEEE-CDC, p. 554-557, December, Austin, Texas, USA.

Bernhard, P, Grimm, J. et Wang, X.M. (1990). Commande optimale quadratique des systèmes implicites discrets. *Revue Automatique, Productique et Informatique Industrielle*, vol. 24, n° 1, p. 16-36.

Bousghiri, S. (1994). Diagnostic de fonctionnement de procédés continus par reconciliation d'état généralisé. Application à la détection de pannes de capteurs et d'actionneurs. Thèses de Doctorat de l'Université de Nancy I, 30 septembre.

Bousghiri, S, Dorr, R. et Maquin, D. (1993). Utilisation de la réconciliation de données pour la détection et l'isolation des défaillances de capteurs ou d'actionneurs. 11th IASTED International Conference on Applied Informatics, Annecy, France, May 19-21, 1993.

Boutayeb, M. (1993). Contribution à l'estimation de l'état et des paramètres des systèmes singuliers. Application au diagnostic. Thèse de doctorat de l'Université de Nancy I.

Clark, R.N., Fosth, D.C. et Walton, V.M. (1975). Detection intrument malfunctions in control systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-11, p. 465-473.

Clark, R.N. (1978). A simplified instrument failure detection scheme. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-14, n° 4, p. 558-563.

Clark, R.N. (1979). The dedicated observer approach to instrument fault detection. Proc. of the 18th IEEE-CDC, p. 237-241, December 12-14, Fort Lauderdale, FL, USA.

Clark, R.N. (1989). State estimation schemes for instrument fault detection. In *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application* (Ed. R. Patton, P. Frank and R. Clark), Prentice Hall.

Corless, M., Garofalo, F. et Leitmann, G. (1988). Garanteeing ultimate boundedness and exponential rate convergence for a class of uncertain systems. In *Robustness in identification and control*, Plenum Press.

Darouach, M. (1994a). On the novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, n° 3, pp. 698-699.

Darouach, M., Zasadzinski, M. et Xu, S-J. (1994b). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, n° 3, pp. 606-609.

Darouach, M., Zasadzinski, M. et Hayar, M. (1996). Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n° 7, pp. 1068-1072.

Ding, X. et Frank, P.M. (1990a). Fault detection via factorization approach. *Systems and Control Letters*, vol. 14, p. 431-436.

Ding, X. et Frank, P.M. (1990b). Fault detection and identification via frequency domain observation approaches. Proc. of the IMACS Annals on Computing & Applied Mathematics MIM-S2'90, September 3-7, Brussels, Belgium.

Ding, X. et Frank, P.M. (1991). Frequency domain approach and threshold selector for robust model-based fault detection and isolation. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '91, September 10-13, Baden-Baden, Germany.

Duan, G.R., Patton, R.J. et Chen J. (1997). A parametric approach for robust fault detection in linear systems with unknown disturbances. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '97, August 26-28, Hull, United Kingdom.

Fairman, F.W., Mahil, S.S. et Luk, L. (1984). Distrurbance decoupled observer design via singular value decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, pp. 84-86.

Francis, B.A. (1987). A course in H_∞ Control Theory. Lecture Notes in Control and Infomation Sciences, n° 88, Springer-Verlag.

Frank, P.M. (1987a). Fault diagnosis in dynamic systems via state estimation - A survey. In *System Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge-Based Approaches*, S. Tzafestas et al. (Eds.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, vol. 1, p. 35-98.

Frank, P.M. (1987b). Advanced fault detection and isolation schemes using nonlinear and robust observers. Proc. of the 10th IFAC World Congress, vol. 3, p. 63-68, München, Germany.

Frank, P.M. et Wünnenberg, J. (1989). Robust fault diagnosis using unknown input observer schemes. In *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application* (Ed. R. Patton, P. Frank and R. Clark), Prentice Hall.

Frank, P.M. (1990). Fault detection in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy. A survey and some new results. *Automatica,* vol. 26, n° 3, p. 459-474.

Frank, P.M. (1991). Fault diagnosis in dynamic systems using software redundancy. Invited Lecture Second Makuhari International Conference on High Technology, 31 January - 3 February 1991, Chiba, Japan. In *Revue Européenne Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement*, vol. 1, n° 2, p. 113-143, 1991.

Frank, P.M. (1993). Advances in observer-based fault diagnosis. Proc. of the Conference TOOLDIAG'93, April, 5-8, Toulouse, France.

Frank, P.M., Ding, X. et Köppen, B. (1993). A frequency domain approach for fault detection at the inverted pendulum. Proc. of the Conference TOOLDIAG'93, April, 5-8, Toulouse, France.

Gaddouna, B., Maquin, D. et Ragot, J. (1994). Fault detection observers for systems with unknown inputs. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '94, June 13-15, Espoo, Finland.

Ge, W. et Fang, C.Z. (1988). Detection of faulty components via robust observation. *International Journal of Control,* vol. 47, n° 2, p. 581-599.

Gertler, J. et Singer, D. (1990). A new structural framework for parity equation based failure detection and isolation. *Automatica*, vol. 26, n° 2, p. 381-388.

Guan, Y et Saif, M. (1991). A novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-36, n° 5, p. 632-635.

Hengy, D. et Frank, P.M. (1986). Component failure detection via nonlinear state observers. Proc. of the IFAC Workshop on Fault Detection and Safety in Chemical Plants, p. 153-157, Kyoto, Japan.

Hou, M. et Müller, P.C. (1991). Design of robust observers for fault isolation. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '91, September 10-13, Baden-Baden, Germany.

Hou, M. et Müller, P.C. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-37, n° 6, p. 871-875.

Johnson, C.D. (1975). Observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, vol. 21, p. 825-831.

Kaczorek, T. (1979). Proportional-integral observers for linear multivariable time-varying systems. Regelungstechnik 27, heft 11, p. 359-363.

Kobayashi, N. et Nakamizo, T. (1982). An observer design for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, vol. 35, p. 605-619.

Kudva, P., Viswanadham, N. et Ramakrishna, A. (1980). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-25, n° 1, p. 113-115.

Kurek, J.E. (1983). The state vector reconstruction for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-28, n° 12, p. 1120-1122.

Luenberger, D. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-11, p. 190-197.

Lyubchik, L.M. et Kostenko, Y.T. (1993). The output control of multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances - The inverse model approach. Proc. of the European Control Conference, ECC'93, p. 1160-1165, June 28-July 1, Gröningen, The Netherlands.

Magni, J.F. et Mouyon, P. (1991). A generalized approach to observers for fault diagnosis. Proc. of the 30th IEEE-CDC, vol. 3, p. 2236-2241, December 11-13, Brighton, UK.

Marquez, H.J et Diduch, C.P. (1992). Sensitivity of failure detection using generalized observers. *Automatica*, vol. 28, p. 837-840.

Massoumnia, M.A. (1986). A geometric approach to failure detection and identification in linear systems. Ph.D. Thesis, Dept. of Aero. and Astro., MIT, Cambridge, MA, USA.

Meditch, J.S. et Hostetter, G.H. (1974). Observers for systems with unknown and inaccesible inputs. *International Journal of Control*, vol. 34, n° 3, pp.316-321.

Misawa, E. A. et Hedrick, L.K. (1989). Non linear observers - A state of the art survey. *Transactions of ASME Journal, Dynamic System Measurement and Control*, vol. 111, n° 9, p. 344-352.

Moon, B.C. et Bien, Z. (1991). Failure detection, identification and accomodation based on a new accomodation filter. *International Journal of Systems Sciences*, vol. 22, n° 6, p. 1025-1034.

Ogata, K. (1970). *Modern control engineering*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.

Patton, R.J., Willcox, S.W. et Winter S.J. (1987). A parameter insensitive technique for aircraft sensor fault analysis. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 10, n°4, p. 359-367.

Patton, R.J., Frank, P.M. et Clark, R.N. (1989). *Fault diagnosis in dynamic systems : Theory and application*. Prentice Hall.

Patton, R.J. et Kangethe, S.M. (1989). Robust fault diagnosis using eigenstructure assignment of observers. In *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application* (Ed. R. Patton, P. Frank and R. Clark), Prentice Hall.

Patton, R. J. et Chen, J. (1991a). A robust parity space approach to fault detection based on optimal eigenstructure assignment, Proc. of the IEE Conference Control 91, Conference Publication n° 332, 25-28 March, Peregrinus Press, Edinburgh, UK.

Patton R.J. et Chen, J. (1991b). A parity space approach to robust fault diagnosis using eigenstructure assignment. Proc. of the First European Control Conference ECC '91, p. 1419-1424, July 2-5, Grenoble, France.

Patton, R.J. et Chen, J. (1991c). A review of parity space approaches to fault diagnosis. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS'91, September 10-13, Baden-Baden, Germany.

Patton, R.J. et Chen, J. (1991). A re-examination of the relationship between parity space and observer-based approaches in fault diagnosis. *Revue Européenne Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement*, vol. 1, n° 2, p. 183-200.

Phatak, M.S. et Viswanadham, N. (1988). Actuator fault detection and isolation in linear systems. *International Journal of System Sciences*, vol. 19, p. 2593-2603.

Ragot, J., Darouach, M., Maquin, D. et Bloch, G. (1990). *Validation de données et diagnostic*. Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, 432 p., Hermès, 1990.

Ragot, J. et Maquin, D. (1993). Failure detection, identification and accomodation based on new accomodation filter. *International Journal of System Sciences*, vol. 24, n° 6, p. 1215-1220.

Saif, M. (1992). Reduced order proportional integral observer with application. *Journal of Guidance*, vol. 16, n° 5, p. 985-988.

Seliger, R. et Frank, P.M. (199la). Robust Component fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems using nonlinear unknown input observers. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '91, September 10-13, Baden-Baden, Germany.

Seliger, R. et Frank, P.M. (1991b), Fault diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. Proc. of the 30th IEEE-CDC, vol. 3, p. 2248-2253, December 11-13, Brighton, UK.

Thau, F.E. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, vol. 17, p. 471-479.

Tsinias, J. (1989). Observer design for nonlinear systems. *System and Control Letters*, vol. 13, p. 135-142.

Viswanadham, N. et Srichander, R. (1987). Fault detection using unknown input observers. *Control-Theory and Advanced Technology, MITA Press*, vol. 3, n° 2, p. 91-101.

Viswanadham, N., Taylor, J.H. et Luce, E.C. (1987). A frequency-domain approach to failure detection and isolation with application to GE-21 turbine engine control systems. *Control-Theory and Advanced Technology, MITA Press,* vol. 3, n° 1, p. 45-72.

Wang, S.H., Davison, E.J. et Dorato, P. (1975). Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-20, p. 716-717.

Wang, S.H. et Daley, S. (1992). A fault detection and diagnosis method for unknown systems with unknown input. Conférence Canadienne et exposition, Automatisation Industrielle, vol. 1, p. 319-322, 1-3 juin.

Wang, S.H. et Daley, S. (1993). A fault detection method for unknown systems with unknown input and its application to hydraulic turbine monitoring. *International Journal of Control*, vol. 57, n° 2, p. 247-260.

Watanabe, K. et Himmelblau, D.M. (1982). Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal of Systems Science,* vol. 13, p. 137-158.

Zasadzinski, M. (1990). Contribution à l'estimation d'état des systèmes singuliers. Application à la validation de données des systèmes dynamiques linéaires. Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I, octobre.