Chapitre 1

Panorama des méthodes de génération de relations de redondance analytique

1. Introduction

Depuis les travaux fondateurs de Potter et Suman (1977), le problème de génération de relations de redondance analytique a fait l'objet de très nombreuses études. Sans prétendre à l'exhaustivité, ce chapitre présente les principes fondamentaux de ces méthodes.

Une relation de redondance analytique est une équation dans laquelle toutes les variables sont connues. La génération de telles relations permet d'engendrer des résidus. Pour la détection de défauts basée sur l'utilisation de modèles, un résidu est un signal temporel, fonction des entrées et des sorties du processus, indépendant (le plus possible !) du point de fonctionnement de celui-ci. En l'absence de défauts, ce résidu est statistiquement nul. Lors de l'apparition d'un défaut, son amplitude croît de manière significative.

Sauf lorsque cela sera expressément indiqué, la présentation qui suit traitera essentiellement des modèles linéaires. Dans le cas de systèmes non-linéaires, on peut utiliser un modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Pour certaines classes de non-linéarités, par exemple, des non-linéarités polynomiales, des méthodes spécifiques peuvent être mises en oeuvre (cf. § 2.3).

2. L'approche espace de parité

Les relations de parité utilisent la *redondance directe* au moyen de relations algébriques statiques liant les différents signaux ou la *redondance temporelle* issue de l'utilisation de relations dynamiques. Le terme "parité" a été emprunté au vocabulaire employé pour les systèmes logiques où la génération de bits de parité permet la détection d'erreur.

Les méthodes utilisant des relations de parité ont tout d'abord utilisé des schémas dits de *redondance parallèle* (Evans et Willcox, 1970 ; Potter et Suman, 1977 ; Gai *et al.*, 1978 ; Daly *et al.* 1979 ; Ray et Luck, 1991). Pour ces structures, le nombre de mesures est plus grand que le nombre de variables et les résidus sont directement issus de la comparaison de mesures redondantes. Cette technique a notamment été utilisée pour le diagnostic de défaut de centrale de navigation inertielle où des relations de redondance sont établies entre des signaux gyroscopiques et des accélérations. Ces notions ont ensuite été généralisées tout d'abord par Labarrère (1980) et Mironovskii (1980) puis par Chow et Willsky (1984) et Lou *et al.* (1986) pour l'utilisation de la redondance temporelle. Par dualité, cette redondance est également appelée, par certains auteurs, *redondance série* (Kitamura, 1989). Nous rappelons ici les principes de base de cette méthode.

2.1. ***Espace de parité statique***

Considérons le cas général d'une équation de mesure à l'instant k :

$$y_k = Cx_k + e_k + Ff_k \qquad (1.1)$$
$$x \in \mathbf{R}^n,\ y \in \mathbf{R}^m,\ f \in \mathbf{R}^p,\ e \in \mathbf{R}^m$$
$$C \in \mathbf{R}^{m.n},\ F \in \mathbf{R}^{m.p}$$

où y_k est le vecteur de mesure, x_k le vecteur des variables à mesurer, f_k le vecteur des défaillances pouvant affecter certains capteurs et e_k le vecteur des bruits de mesure souvent considéré comme normalement distribué, de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance Σ ; C est la matrice caractérisant le système de mesure et F est la matrice qui traduit la direction des défaillances. Dans la suite, on considère le cas où le nombre m de mesures est supérieur au nombre n de variables de façon à se placer dans une situation de redondance (cette condition est suffisante mais non nécessaire).

2.1.1. Génération de redondance par projection

On définit le vecteur parité p_k projection du vecteur des mesures y_k :

$$p_k = Wy_k \qquad (1.2)$$

où W est la matrice (de dimension $q.m$) de projection (Potter et Suman, 1977) telle que :

$$WC = 0$$

Cette orthogonalité de W avec C entraîne en particulier :

$$p_k = We_k + WFf_k \tag{1.3}$$

L'expression (1.2) constitue la forme “calcul” du vecteur parité à partir des mesures disponibles y_k alors que l'expression (1.3) explique l'influence des erreurs de mesure et des défaillances sur le vecteur parité. On note que, en l’absence de défaillance f_k, le vecteur parité est statistiquement nul (espérance nulle et matrice de variance-covariance égale à $W\Sigma W^T$). Dans cette situation, l'équation (1.4) traduit l'ensemble des redondances qui lient les mesures y_k :

$$Wy_k = 0 \tag{1.4}$$

Considérons, par exemple, le système de mesure suivant :

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e_k + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f_k$$

On obtient, par exemple :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de donner les deux formes du vecteur parité, en fonction des mesures ou en fonction des “perturbations” :

$$p_k = \begin{pmatrix} -y_{1k} + 2y_{3k} - y_{4k} \\ -2y_{1k} + 4y_{3k} - y_{5k} \end{pmatrix} \tag{1.5a}$$

$$p_k = \begin{pmatrix} 0 \\ e_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2f_{1k} - f_{2k} \\ -2f_{1k} \end{pmatrix} \tag{1.5b}$$

La forme (1.5a) permet le calcul du vecteur parité ; comme les erreurs e_k sont à valeur moyenne nulle, la forme (1.5b) est utilisable pour détecter et estimer les défaillances éventuelles.

Dans le cas où la matrice $W\,F$ est de plein rang colonne, et en négligeant les erreurs de mesure, l'expression (1.3) fournit un moyen de localiser les défaillances f_k. On voit alors la nécessité d'étudier avec soin le rang de la matrice $W\,F$ et on imagine alors qu'un choix malencontreux de W peut faire disparaître certaines directions de défaillance (cas où la matrice $W\,F$ contient une colonne de "0").

De façon plus générale, le concepteur peut souhaiter disposer d'un vecteur parité sensible à certaines défaillances à détecter et insensible à d'autres défaillances. Ceci conduit à détailler l'expression du vecteur de mesure sous la forme :

$$y_k = Cx_k + e_k + F^+ f_k^+ + F^- f_k^- \tag{1.6}$$

où f_k^+ et f_k^- désignent respectivement les défaillances auxquelles on veut être sensible et insensible ; F^+ (de dimension $m.p^+$) et F^- (de dimension $m.p^-$) sont les matrices associées à ces directions. Le principe de la génération du vecteur parité est conservé. On cherche alors une matrice W orthogonale à l'espace engendré par les colonnes de $\begin{pmatrix} C & F^- \end{pmatrix}$ et non orthogonale à l'espace engendré par les colonnes de F^+ :

$$\begin{cases} WC = 0 \\ WF^- = 0 \\ WF^+ \neq 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Sous réserve que la matrice $\begin{pmatrix} C & F^- \end{pmatrix}$ ait un rang adéquat, les deux premières conditions permettent le calcul de la matrice W ; la troisième condition n'est respectée que si les colonnes de F^+ n'appartiennent pas à l'espace engendré par les colonnes de $\begin{pmatrix} C & F^- \end{pmatrix}$. Les deux formes (calcul et explication) du vecteur parité s'expriment alors :

$$\begin{cases} p_k = Wy_k \\ p_k = We_k + WF^+ f_k^+ \end{cases} \tag{1.8}$$

2.1.2. Extension aux systèmes avec contraintes

Le formalisme précédent s'étend aisément au cas de systèmes de mesure dont les variables sont contraintes. Cette situation apparaît quand on considère un processus caractérisé par un modèle et une équation de mesure :

$$\begin{cases} y_k = Cx_k + e_k + Ff_k \\ Ax_k = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

On retrouve la structure du cas non contraint en écrivant ce système sous la forme agrégée :

$$\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} y_k = \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} e_k + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} f_k \tag{1.10}$$

Comme précédemment, la génération du vecteur parité et des équations de redondance qui lui sont associées repose sur l'élimination des variables inconnues x_k. Il suffit donc de chercher une matrice W telle que :

$$W \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} = 0$$

Le vecteur parité est alors défini par ses formes calcul (1.11a) et “explication” (1.11b) :

$$p_k = W \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} y_k \tag{1.11a}$$

$$p_k = W \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} e_k + W \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} f_k \tag{1.11b}$$

Comme précédemment le vecteur f_k peut être décomposé en composantes vis-à-vis desquelles on souhaite être sensible et en composantes vis-à-vis desquelles on souhaite être insensible.

2.1.3. Décomposition systématique

Les résultats maintenant classiques issus de la classification des variables par l’analyse d’observabilité peuvent être utilisés pour l’extraction des équations de redondance (Darouach, 1986), (Maquin, 1987), (Ragot *et al.*, 1990).

Les systèmes contraints (1.9) et non contraints (1.1) peuvent être traités de la même manière sous réserve de transformations préalables (élimination de la contrainte). Considérons en effet le système (1.9), les colonnes de la matrice des contraintes A peuvent être permutées de façon à faire apparaître la partie régulière A_1 de A. La contrainte s’écrit alors :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.12}$$

La matrice A_1 étant régulière, on peut alors exprimer une partie de l'état en fonction de l'autre. Le vecteur d'état s'écrit alors :

$$x_k = \begin{pmatrix} I \\ -A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} x_{k2} \tag{1.13}$$

Le report de cette expression dans l'équation de mesure de (1.9) permet d'écrire :

$$y_k = C \begin{pmatrix} I \\ -A_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} x_{k2} + e_k + F f_k \tag{1.14}$$

Cette expression revêt une forme tout à fait identique à la description des systèmes non contraints (1.1). De manière générale, les deux types de systèmes (1.1) et (1.9) peuvent donc être décrits par l'équation :

$$\begin{pmatrix} I & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix} = e_k + F f_k \tag{1.15}$$

ou encore, avec une écriture plus "compacte" :

$$M z_k = b_k \tag{1.16}$$

L'analyse d'observabilité d'un tel système peut être conduite de la manière suivante. La matrice de contrainte M est tout d'abord partitionnée en accord avec le partitionnement de z en composantes mesurées et non mesurées :

$$z_k = \begin{pmatrix} z_{mk} \\ z_{\overline{m}k} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_m & M_{\overline{m}} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Des permutations de lignes et de colonnes permettent ensuite de faire apparaître la partie régulière $M_{\overline{m}12}$ de la matrice $M_{\overline{m}}$:

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{M_{m1}}^{\text{Variables mesurées}} & \overbrace{M_{\overline{m}11} \quad M_{\overline{m}12}}^{\text{Variables non mesurées}} \\ M_{m2} & M_{\overline{m}21} \quad M_{\overline{m}22} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

La multiplication à gauche de M par la matrice régulière $T = \begin{pmatrix} M_{\overline{m}12}^{-1} & 0 \\ -M_{\overline{m}22}M_{\overline{m}12}^{-1} & I \end{pmatrix}$ permet d'obtenir la forme "canonique" de M (les conditions de compatibilité du système imposent en effet $M_{\overline{m}21} - M_{\overline{m}22}M_{\overline{m}21}^{-1}M_{\overline{m}11} = 0$) :

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{M_1}^{\text{Var. mes.}} & \overbrace{M_2 \quad I}^{\text{Var. non mes.}} \\ M_r & 0 \quad 0 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

La matrice M_r décrit alors les équations de redondance recherchées. D'un point de vue pratique, les transformations décrites peuvent être obtenues à l'aide de techniques numériques variées, techniques de projection (Crowe *et al.*, 1983), de décomposition en valeurs singulières (Maquin, 1987), de décomposition Q-R (Sanchez et Romagnoli, 1996), etc.

2.2. ***Espace de parité dynamique***

2.2.1. Approche temporelle (numérique)

On considère le système linéaire invariant décrit par les équations discrètes suivantes :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F_1 f_k \tag{1.21a}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k + F_2 f_k \tag{1.21b}$$

où $x \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbf{R}^r$ est le vecteur des entrées connues associé à la matrice B, $y \in \mathbf{R}^m$ est le vecteur des mesures. Le vecteur de défaut $f \in \mathbf{R}^p$ agit, au moyen des matrices F_1 et F_2 sur l'évolution de l'état et sur la mesure.

Sur un horizon d'observation de longueur s, les équations d'observation peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} y_{k-s} \\ y_{k-s+1} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^s \end{pmatrix} x_{k-s} + H_1 \begin{pmatrix} u_{k-s} \\ u_{k-s+1} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} + H_2 \begin{pmatrix} f_{k-s} \\ f_{k-s+1} \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

où les matrices H_1 et H_2 sont données par :

$$H_1 = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CA^{s-1}B & CA^{s-2}B & CA^{s-3}B & \mathtt{L} & CB & D \end{pmatrix} \tag{1.23a}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} F_2 & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CF_1 & F_2 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CAR_1 & CF_1 & F_2 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CA^{s-1}F_1 & CA^{s-2}F_1 & CA^{s-3}F_1 & \mathtt{L} & CF_1 & F_2 \end{pmatrix} \tag{1.23b}$$

L'équation (1.22) peut être ré-écrite en séparant ce qui est connu de ce qui ne l'est pas :

$$\begin{pmatrix} y_{k-s} \\ y_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ y_k \end{pmatrix} - H_1 \begin{pmatrix} u_{k-s} \\ u_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \mathtt{M} \\ CA^s \end{pmatrix} x_{k-s} + H_2 \begin{pmatrix} f_{k-s} \\ f_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ f_k \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

Remarquons que cette équation a la même structure – au bruit près que l'on a omis d'écrire dans les équations (1.21) – que (1.1), le membre de gauche de l'égalité jouant le rôle du vecteur de mesure (les *y* et les *u* sont connus). La technique d'élimination est donc identique. Si l'on pré-multiplie l'équation matricielle (1.24) par un vecteur ω^T de dimension appropriée tel que :

$$\omega^T \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \mathtt{M} \\ CA^s \end{pmatrix} = 0 \tag{1.25}$$

ce qui permet de s'affranchir de l'état inconnu x_{k-s}, on obtient une relation de parité scalaire à partir de laquelle on peut calculer un résidu r_k ne dépendant que des défauts (dans le cas idéal où le modèle est parfait) :

$$r_k = \omega^T \left(\begin{pmatrix} y_{k-s} \\ y_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ y_k \end{pmatrix} - H_1 \begin{pmatrix} u_{k-s} \\ u_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ u_k \end{pmatrix} \right) = \omega^T H_2 \begin{pmatrix} f_{k-s} \\ f_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ f_k \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Le second terme de l'égalité (1.26) représente la forme de calcul du résidu (elle contient les variables connues), le troisième est la forme interne (contenant les défauts). L'espace engendré par les solutions de l'équation (1.26) est appelé espace de parité d'ordre *s* (Lou *et al.*, 1986).

2.2.2. Approche fréquentielle (symbolique)

Considérons de nouveau le modèle (1.21). Les équations de redondance peuvent être obtenues en appliquant les principes utilisés pour les système statiques. En effet, en utilisant le calcul symbolique, le système (1.21) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A - zI \\ C \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} f_k = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ -D & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ y_k \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

La structure de cette équation est la même que celle de l'équation (1.1) (au bruit près). La génération du vecteur parité peut donc être effectuée de la même manière. Cela conduit à chercher une matrice de "projection" $W(z) = \begin{pmatrix} W_1(z) & W_2(z) \end{pmatrix}$ telle que :

$$W(z) \begin{pmatrix} A - zI \\ C \end{pmatrix} = 0 \tag{1.28}$$

Les deux formes du vecteur parité s'écrivent alors :

$$p_k = \left(W_1(z) F_1 + W_2(z) F_2 \right) f_k \tag{1.29a}$$

$$p_k = -\left(W_1(z) B + W_2(z) D \right) u_k + W_2(z) y_k \tag{1.29b}$$

Comme dans le cas statique, le vecteur f_k peut être décomposé en sous-vecteurs de défaillances par rapport auxquelles on désire être sensible ou insensible. Avec des notations évidentes, le problème revient à chercher une matrice polynomiale $W(z)$ telle que :

$$W(z) \begin{pmatrix} A - zI & F_1^- \\ C & F_2^- \end{pmatrix} = 0 \tag{1.30}$$

Les équations (1.28) ou (1.30) ne sont pas que des écritures mathématiques. Avec l'aide de logiciels de calcul symbolique comme Maple ou Mathematica par exemple, la recherche de telles matrices polynomiales est très facile. De plus, ces logiciels fournissent non seulement une solution mais toute la famille de solutions au problème.

Ce type d'approche peut très facilement être étendu au cas des systèmes dynamiques singuliers (Maquin *et al.*, 1993) ou, de manière équivalente à celui des systèmes à entrées inconnues (Ragot *et al.,* 1993).

2.2.3. Exemple

Considérons un système décrit par l'équation (1.21) avec :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad F_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \quad F_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

et supposons que l'on cherche à être insensible à f_k qui ne comporte ici qu'une composante, c'est-à-dire $F_1^- = F_1$ et $F_2^- = F_2$. La matrice polynomiale multiplicative des inconnues à éliminer s'écrit, en accord avec (1.30) :

$$\begin{pmatrix}A-zI & F_1^-\\ C & F_2^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-z & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}-z & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-z & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Le logiciel Maple, permet, par résolution de système linéaire, de trouver l'expression paramétrée du vecteur orthogonal à cette matrice :

$$w(z)=\left(-\alpha \;\; \alpha \;\; \beta \;\; \alpha(1-z) \;\; -\tfrac{1}{2}\alpha(3-4z) \;\; \tfrac{1}{2}\left(\alpha(3-4z)-\beta(1-2z)\right)\right)$$

On en déduit aisément, à l'aide de (1.29b), l'expression paramétrée du vecteur parité :

$$p_{k+1}=-(\alpha+\beta)u_k+\alpha(1-z)y_{1k}-\tfrac{1}{2}\alpha(3-4z)y_{2k}+\tfrac{1}{2}\left(\alpha(3-4z)-\beta(1-2z)\right)y_{3k}$$

ou encore, sous une forme plus directement utilisable[1] :

$$p_k = -(\alpha+\beta)u_{k-1} + \alpha\left(y_{1(k-1)} - y_{1k}\right) - \tfrac{3}{2}\alpha y_{2(k-1)} + 2\alpha y_{2k} + \tfrac{1}{2}(3\alpha-\beta)y_{3(k-1)} - (2\alpha-\beta)y_{3(k-1)}$$

Cette expression paramétrée est génératrice de toutes les relations de redondance qu'il est possible de générer. Elle permet en particulier une structuration aisée des résidus. En effet, si les degrés de liberté, pour cet exemple, α et β, permettent de rendre identiquement nul le polynôme multiplicateur d'une entrée ou d'une sortie, le résidu correspondant ne sera pas sensible aux défauts portant sur cette entrée ou cette sortie.

2.2.4. Utilisation des techniques d'analyse d'observabilité

La technique générale exposée au paragraphe 2.1.3. peut être mise en oeuvre pour les systèmes dynamiques. En effet, l'équation (1.24) peut être ré-écrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} -I & H_1 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathtt{y} \\ \mathtt{u} \\ x_{k-s} \end{pmatrix} = H_2\,\mathtt{f} \tag{1.31}$$

avec :

$$\mathtt{y} = \begin{pmatrix} y_{k-s} \\ y_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ y_k \end{pmatrix} \qquad \mathtt{u} = \begin{pmatrix} u_{k-s} \\ u_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ u_k \end{pmatrix} \qquad \mathtt{f} = \begin{pmatrix} f_{k-s} \\ f_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ f_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \mathtt{M} \\ CA^s \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

L'équation (1.31) revêt une forme tout à fait identique à (1.16) et la technique proposée peut donc être employée. A titre d'exemple considérons le système dynamique de type (1.21), en l'absence de défauts, décrit par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice du membre de gauche de l'équation (1.31) s'écrit alors :

---

[1] On notera que l'écriture de l'expression (1.29) n'est pas tout à fait rigoureuse. En effet, le vecteur parité, à l'instant k ne doit faire apparaître que des grandeurs antérieures à cet instant ; comme on ne connaît pas, a priori, le retard maximum introduit par $W(z)$, ce "recalage" doit être effectué a posteriori.

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc|cc}
-1 & 0 & \mathtt{L} & \mathtt{L} & \mathtt{L} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & \mathtt{O} & & & \mathtt{M} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\mathtt{M} & \mathtt{O} & -1 & \mathtt{O} & & \mathtt{M} & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 \\
\mathtt{M} & & \mathtt{O} & -1 & \mathtt{O} & \mathtt{M} & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\
\mathtt{M} & & & \mathtt{O} & -1 & 0 & 0.2 & 0 & 0.49 & 0.24 \\
0 & \mathtt{L} & \mathtt{L} & \mathtt{L} & 0 & -1 & 0.5 & 1 & 0 & 0.25 \\
\hline
y_{1k} & y_{2k} & y_{1(k+1)} & y_{2(k+1)} & y_{1(k+2)} & y_{1(k+2)} & u_k & u_{k+1} & x_{1k} & x_{2k}
\end{array}\right)$$

où la dernière ligne rapelle le nom des variables. La forme canonique de cette matrice s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccc}
0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathtt{L} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -1 & 0 & 1 & \mathtt{O} & \mathtt{M} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathtt{M} & \mathtt{O} & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 1 \\
\hline
0.7 & 0.2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.49 & 0.14 & 0 & 0.2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
y_{1k} & y_{2k} & y_{1(k+1)} & y_{2(k+1)} & y_{1(k+2)} & y_{2(k+2)} & u_k & u_{k+1} & x_{1k} & x_{2k}
\end{array}\right)$$

Les équations de redondance s'expriment alors par :

$$0.7y_{1k} + 0.2y_{2k} - y_{1(k+1)} = 0$$
$$0.49y_{1k} + 0.14y_{2k} + 0.2y_{2(k+1)} - y_{1(k+2)} = 0$$

2.3. *Théorie de l'élimination*

Fondamentalement, le découplage parfait consiste à éliminer dans un ensemble d'équations, toutes les variables inconnues. Des résultats très intéressants issus de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique peuvent être utilisés à cette fin. Notre propos n'est pas de décrire précisément les théories sous-jacentes à ces disciplines, mais d'utiliser leurs résultats. On consultera avec profit l'ouvrage de Cox *et al.* (1992) pour une présentation théorique de ces notions.

Considérons un système modélisé par un ensemble de contraintes $\mathbf{F} = \{f_1, \mathtt{L}\ , f_m\}$ liant un ensemble de variables inconnues $\mathbf{X} = \{x_1, \mathtt{L}\ , x_p\}$ et un ensemble de variables connues

$\mathbf{K} = \{k_1, \mathtt{L}\ , k_q\}$. Chaque contrainte f_i s'écrit $f_i(x_1, \mathtt{L}\ , x_p, k_1, \mathtt{L}\ , k_q) = 0$. La présentation qui suit est limitée à des contraintes polynomiales de la forme suivante :

$$f_i = \sum_j c_j x_1^{a_{j,1}} \mathtt{L}\ x_p^{a_{j,p}} k_1^{b_{j,1}} \mathtt{L}\ k_p^{b_{j,q}} \tag{1.33}$$

où $c_j \in \mathbf{R}$, et les exposants $a_{j,k}, b_{j,k} \in \mathbf{N}$.

L'ensemble (ou plus précisément l'anneau) des polynômes des variables $x_1, \mathtt{L}\ , x_p, k_1, \mathtt{L}\ , k_q$ à coefficients dans $\mathbf{R}$ est noté $\mathbf{R}[x_1, \mathtt{L}\ , x_p, k_1, \mathtt{L}\ , k_q]$.

Soit $f_1, \mathtt{L}\ , f_m \in \mathbf{R}[x_1, \mathtt{L}\ , x_p, k_1, \mathtt{L}\ , k_q]$. L'*idéal* généré par les f_i est l'ensemble de tous les polynômes f qui peuvent s'écrire $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \mathtt{L}\ + \alpha_m f_m$ pour $\alpha_i \in \mathbf{R}[x_1, \mathtt{L}\ , x_p, k_1, \mathtt{L}\ , k_q]$. Cet idéal est noté $(f_1, \mathtt{L}\ , f_m)$.

L'objectif est d'éliminer les éléments de $\mathbf{X}$ afin d'obtenir une relation polynomiale ne faisant intervenir que des éléments de $\mathbf{K}$. La théorie de l'élimination fournit les outils mathématiques permettant d'obtenir ces relations.

En particulier, les bases de Gröbner, inventées par Bruno Buchberger (1985) constituent un outil intéressant de génération de tels idéaux. Ces bases ont les propriétés suivantes :

Considérons les deux ensembles de variables, $\mathbf{X}$ and $\mathbf{K}$. Si G est une base de Gröbner pour l'idéal $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{K}]$ par rapport à la hiérarchie (*ranking*) de variables $\mathbf{X}\ \mathtt{f}\ \mathbf{K}$ alors :

$$\mathbf{I} \cap \mathbf{R}[\mathbf{K}] = (\mathrm{G} \cap \mathbf{R}[\mathbf{K}]) \tag{1.34}$$

La hiérarchie détermine simplement l'ordre d'élimination des variables. La notation $\mathbf{X}\ \mathtt{f}\ \mathbf{K}$ signifie simplement que toutes les variables de l'ensemble $\mathbf{X}$ ont une hiérarchie supérieure à toutes les variables de l'ensemble $\mathbf{K}$ et donc qu'elles seront les premières à être éliminées.

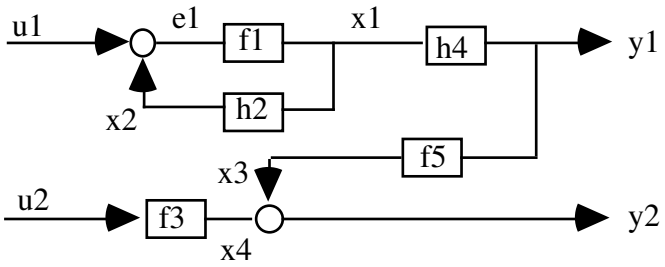
Ainsi, $\mathbf{I} \cap \mathbf{R}[\mathbf{K}]$ est un ensemble de polynômes qui ne sont que la conséquence des polynômes originaux dans lesquels toutes les variables de $\mathbf{X}$ ont été éliminées. Cet ensemble est donc bien constitué des relations de redondance analytique (Guernez *et al.*, 1996 ; Forsmann, 1992).

Un résultat de l'algèbre commutative qui nous sera utile ultérieurement est la notion de dépendance algébrique. On dit que $p_1,\mathtt{L}\ ,p_m \in \mathbf{R}[x_1,\mathtt{L}\ ,x_n]$ sont algébriquement dépendantes sur $\mathbf{R}$ s'il existe un polynôme non nul f tel que $f(p_1,\mathtt{L}\ ,p_m) \equiv 0$. Une méthode très simple pour calculer cette relation de dépendance f en utilisant les bases de Gröbner consiste simplement à former l'idéal :

$$\mathbf{I} = \left(z_1 - p_1(x), z_2 - p_2(x), \mathtt{L}\ , z_m - p_m(x)\right) \tag{1.35}$$

et à calculer l'une de ses bases de Gröbner en utilisant une hiérarchie permettant d'éliminer les x_i.

Considérons par exemple le système interconnecté suivant :



et supposons que seules les variables d'entrée-sortie $u1$, $u2$, $y1$ et $y2$ sont connues. Existe-t-il une ou plusieurs relations de redondance entre ces grandeurs ?

Le système est décrit par l'ensemble d'équations suivant :

$$\{u1 - x2 - e1, x1 - f1 * e1, x2 - h2 * x1, y1 - h4 * x1, x4 - f3 * u2, x3 - f5 * y1, y2 - x3 - x4\}$$

Dans cette écriture, on a systématiquement omis les seconds membres des équations identiquement nuls. Une des bases de Gröbner de cet ensemble avec la hiérarchie :

$$e1 \mathtt{\ p\ } x1 \mathtt{\ p\ } x2 \mathtt{\ p\ } x3 \mathtt{\ p\ } x4 \mathtt{\ p\ } u2 \mathtt{\ p\ } y2 \mathtt{\ p\ } u1 \mathtt{\ p\ } y1$$

est la suivante :

$$\{-y1 + h4\,f1\,e1, -y1 + h4\,x1, h4\,x2 - h2\,y1, x3 - f5\,y1, x4 - y2 + f5\,y1, -y2 + f5\,y1 + f3\,u2,$$
$$(-h2\,f1 - 1)\,y1 + h4\,f1\,u1\}$$

On constate que les deux derniers polynômes de cette base ne font intervenir que des variables mesurées. Ces relations, $-y2 + f5y1 + f3u2$ et $(-h2f1-1)y1 + h4f1u1$, constituent donc des relations de redondance analytique.

Pour les systèmes dynamiques décrits sous forme d'état, la procédure est légèrement plus complexe. Considérons un système différentiel, éventuellement non-linéaire, mais dont les non-linéarités peuvent s'écrire sous forme polynomiale.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x,u) \\ \text{M} \\ \dot{x}_n = f_n(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \tag{1.36}$$

où les x_i représentent les composantes du vecteur d'état x. On dérive (par rapport au temps) plusieurs fois l'expression de la sortie dans laquelle les dérivées de x sont remplacées par leurs définitions (on effectue en fait des dérivations de Lie). Cette opération de dérivation est effectuée jusqu'à l'ordre n (ordre du système différentiel) ce qui génère donc n polynômes supplémentaires. On construit alors l'ensemble d'équations F de la manière suivante :

$$F = \left(y - h, \dot{y} - L_f h, \ \ldots, y^{(n)} - L_f^n h \right) \tag{1.37}$$

où $L_f = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ représente la dérivée de Lie suivant la direction de f.

Comme on sait qu'il existe une dépendance algébrique entre la sortie y est ses dérivées successives, il suffit, pour trouver les relations entrée-sortie (relations de redondance analytique) de calculer une base de Gröbner avec une hiérarchie éliminant les variables d'état.

A titre d'exemple, considérons le système dynamique non linéaire suivant (Forsmann, 1992) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

On a $\dot{y} = \dot{x}_1 = u - x_1 x_2$ et $\ddot{y} = \dot{u} - \dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \dot{u} - (u - x_1 x_2) x_2 - x_1 (x_1^2 - 2x_2)$.

L'ensemble initial est donc constitué des $n+1=3$ équations suivantes :

$$F = \{y - x_1, \dot{y} - u + x_1 x_2, \ddot{y} - \dot{u} + (u - x_1 x_2) x_2 + x_1 (x_1^2 - 2x_2)\}$$

Avec la hiérarchie $x_1 \triangleright x_2 \triangleright \ddot{y} \triangleright \dot{y} \triangleright y \triangleright \dot{u} \triangleright u$, une base de Gröbner de F s'écrit :

$$G = \{x_2 \dot{y} + \ddot{y} + 2\dot{y} - 2u - \dot{u} + y^3, \dot{y} - u + y x_2, -y + x_1, y\ddot{y} + 2y\dot{y} - 2yu - y\dot{u} + y^4 - \dot{y}^2 + \dot{y}u\}$$

Le dernier polynôme de cette base ne contient pas de variable d'état, c'est une relation de redondance analytique :

$$\left(\ddot{y} + 2\dot{y} - 2u - \dot{u} + y^3\right) y - \dot{y}^2 + \dot{y}u = 0$$

3. Amélioration des méthodes : robustesse aux perturbations

Comme nous l'avons présenté dans les paragraphes précédents, la détection de défauts basée sur l'utilisation de modèles repose sur un certain nombre d'hypothèses idéales au premier rang desquelles figure la disponibilité d'un modèle (exact !) du processus à surveiller. En pratique, cette hypothèse ne peut être satisfaite ; les paramètres sont souvent incertains ou varient au cours du temps. De plus, les caractéristiques des perturbations et des bruits sont inconnues. Il n'y a donc pas adéquation parfaite entre le comportement du système réel et de son modèle, même en l'absence de défauts.

Lorsque le modèle du système n'est pas parfait (ce qui toujours le cas !), les résidus ne sont pas nuls, même en fonctionnement normal. De manière évidente, en l'absence d'incertitudes, le problème de détection des défauts est un problème trivial puisque les résidus non-nuls sont nécessairement dûs à des défauts. Notons cependant que l'isolation (au sens localisation) n'est cependant pas aussi directe, même sans incertitudes. Lors d'applications réelles, les décisions prises sur la base des résidus peuvent conduire à des fausses alarmes (détection de défauts qui n'existent pas) ou des non-détections de défauts, car les erreurs de modélisation rendent ces décisions plus difficiles. On ressent donc clairement la nécessité de rendre plus robustes les méthodes exposées précédemment par rapport à ces incertitudes. Le mot robustesse doit être compris ici comme une insensibilité, une invariance des résultats fournis, par rapport à ces erreurs de modélisation et/ou par

rapport à l'action de perturbations inconnues. La spécificité de ce problème, dans le cadre de la détection de défauts, provient du fait qu'il ne s'agit pas seulement de réduire la sensibilité du modèle aux erreurs de modélisation ce qui se traduit le plus souvent également par une diminution de la sensibilité aux défauts. Il convient de réduire cette sensibilité sans perdre (au minimum) ou en augmentant la sensibilité aux défauts. La nécessité de robustesse a été reconnue très tôt (Deckert *et al.*, 1977 ; Clark, 1978 ; Frank et Keller, 1979 ; Leininger, 1981 ; Watanabe et Himmelblau, 1982 ; Lou *et al.*, 1986) cependant le développement de méthodes ayant cette qualité est relativement récent.

Cette notion de robustesse peut être introduite dans l'une ou l'autre des deux grandes étapes que sont la génération de résidus et l'évaluation de ceux-ci (prise de décision). Les premiers travaux intervenant lors de la génération de résidus sont dus à Frank et Keller (1979), Elmadbouly *et al*. (1982) et Watanabe et Himmelblau (1982). Les travaux de Chow et Willsky (1984), Weiss *et al*. (1985), Massoumnia (1986), Lou *et al*. (1986), Wünnenberg et Frank (1986, 1988), Patton *et al*. (1986), Viswanadham et Srichander (1987), Frank (1987a, 1987b, 1990, 1991), Ge et Fang (1988), Wünnenberg (1990c), Seliger et Frank (1991a, 1991b) sont ensuite venus compléter cette recherche. En ce qui concerne les méthodes robustes d'évaluation, citons les travaux de Emami-Naeini *et al*. (1988), Rougée *et al*. (1987), Viswanadham *et al.* (1987), Clark (1989), Kroshel et Wernz (1990), Ding et Frank (1990a, 1991), Ragot *et al*. (1997).

3.1. ***Cas des modèles statiques***

Le découplage parfait présenté au paragraphe 2. peut rarement être obtenu. Pour des raisons géométriques évidentes, ce découplage a ses limites et le système (1.7) n'a pas toujours de solution par rapport à W. Dans cette situation, on peut chercher une solution approchée. Examinons dans ce sens l'équation de mesure (1.6) avec les objectifs suivants : générer un vecteur parité découplé "totalement" par rapport à l'état x du système, et qui soit "très" insensible aux perturbations d_k^- et "très" sensible aux perturbations à détecter d_k^+.

3.1.1. Découplage approché

Le problème revient alors à chercher l'existence d'un vecteur ω solution du système :

$$\begin{cases} \omega^T C = 0 \\ \max\limits_{\omega} \; f^+\left(\omega^T F^+\right) \\ \min\limits_{\omega} \; f^-\left(\omega^T F^-\right) \end{cases} \tag{1.38}$$

où les fonctions $f^+(\mathbf{R}^{p^+} \rightarrow \mathbf{R})$ et $f^-(\mathbf{R}^{p^-} \rightarrow \mathbf{R})$ sont à définir par l'utilisateur. Il s'agit d'un problème multicritère (Staroswiecki *et al.*, 1986 ; Chen *et al.*, 1993), dont la solution ne peut être exhibée que si le poids relatif d'un critère par rapport à l'autre est précisé. Ceci dépend “du cahier des charges” du problème de génération d'équations de redondance, qui doit définir, éventuellement à partir d'autres considérations (de fiabilité, de coût, de simplicité), ces poids relatifs.

Une façon classique pour obtenir une solution, consiste à modifier le problème (1.38) en un problème mono-critère, par exemple en recherchant le vecteur ω (de dimension *m*) solution de :

$$\begin{cases} \omega^T C = 0 \\ \max\limits_{\omega} \; \dfrac{f^+\left(\omega^T F^+\right)}{f^-\left(\omega^T F^-\right)} \end{cases} \tag{1.39}$$

Il s'agit alors de rechercher le maximum d'une fonction sous contrainte de type égalité. Dans le cas où la fonction à maximiser est le rapport de fonctions quadratiques, cela conduit à une recherche de valeur propre et vecteur propre généralisé. En effet le problème (1.39) s'écrit :

$$\begin{cases} \omega^T C = 0 \\ \max \; \dfrac{\left\|\omega^T F^+\right\|^2}{\left\|\omega^T F^-\right\|^2} \end{cases} \tag{1.40}$$

et on peut montrer que ω est solution de :

$$\left(QA - \lambda QB\right)\omega = 0 \tag{1.41a}$$

avec :

$$A = F^+\left(F^+\right)^T \qquad B = F^-\left(F^-\right)^T \qquad Q = I - C^{\dagger}C^T \tag{1.41b}$$

où $C^{\dagger}$ est une inverse généralisée de C^T (si, comme indiqué au paragraphe 2.1., C est de dimension $m.n$ avec $m > n$ et $rang(C) = n$, on pourra choisir $C^{\dagger} = C(C^TC)^{-1}$).

La structure de (1.41) montre que ω est vecteur propre généralisé de la paire (QA, QB) et comme le problème posé est relatif à une recherche de maximum, on peut montrer que λ est la plus grande valeur propre associée à ce vecteur propre.

Une deuxième façon d'aborder le problème formulé en (1.38), consiste à attribuer des poids aux critères de recherche du minimum et du maximum, par exemple au moyen de fonctions de pénalisation. Ainsi, on peut substituer au problème (1.38) celui défini par :

$$\begin{cases} \omega^T C = 0 \\ \max\limits_{\omega} \; f^+\left(\omega^T F^+\right) - \alpha^2 f^-\left(\omega^T F^-\right) \end{cases} \tag{1.42}$$

où α^2 pondère les deux objectifs de sensibilité et d'insensibilité. La solution du problème (1.42) est alors classique et résulte de la recherche du maximum d'une fonction sous contrainte linéaire. Dans le cas de fonctions quadratiques, le problème (1.42) prend la forme plus simple :

$$\begin{cases} \omega^T C = 0 \\ \max\limits_{\omega} \left\|\omega^T F^+\right\|^2 - \alpha^2 \left\|\omega^T F^-\right\|^2 \end{cases} \tag{1.43}$$

La solution est obtenue en écrivant et en résolvant le système des conditions de stationarité au premier ordre du lagrangien associé à ce problème d'optimisation quadratique sous contrainte égalité. Le vecteur solution $\left(\omega^T \quad \lambda^T\right)^T$ appartient au noyau de la matrice *R* :

$$R = \begin{pmatrix} A - \alpha^2 B & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$$

où les matrices *A* et *B* sont celles définies en (1.41b). On notera que les solutions proposées ne font pas intervenir la matrice de variance-covariance du bruit des mesures. Celle-ci peut très facilement être prise en compte en ajoutant dans les problèmes d'optimisation la contrainte supplémentaire de normalisation du vecteur parité :

$$\omega^T \Sigma \omega - 1 = 0$$

Remarquons également que la résolution de problèmes du type (1.38) reste "ouverte" en ce sens que la solution dépend entièrement de la manière dont on formule le critère à

optimiser et qu'il est difficile d'établir une hiérarchie de qualité entre les différentes solutions.

3.1.2. Vecteur parité d'un système à modèles multiples

Le problème de découplage peut également se poser par rapport à de petites variations de paramètres du modèle du système. Considérons le modèle (1.1) pour lequel la matrice C appartient à un ensemble fini $C \in \{C_0, C_1, \mathtt{L}\ , C_q\}$. En pratique, C_0 peut être considérée comme la valeur "nominale" de C et les matrices C_i "distribuées" autour de C_0. La matrice W doit satisfaire les relations :

$$WC_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,q \tag{1.44}$$

Comme il est impossible de trouver une unique matrice W orthogonale à tous les C_i, on cherche une solution approchée ; celle-ci peut être obtenue en cherchant W "le plus orthogonal possible" à toutes les matrices C_i. Une solution consiste à rechercher le minimum du critère suivant (Lou *et al.*, 1986) :

$$J = \|W\mathbf{C}\|_{\mathrm{F}} \tag{1.45}$$

où $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \mathtt{L} & C_q \end{pmatrix}$, et où $\|M\|_{\mathrm{F}}$ désigne la norme de Frobenius de la matrice M, c'est-à-dire $\|M\|_{\mathrm{F}} = \left(\mathrm{Tr}(MM^T)\right)^{1/2}$ où Tr( ) est l'opérateur trace de matrice.

La solution de ce problème peut être obtenue très simplement en utilisant la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = U\Sigma V \text{ avec } \Sigma = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \mathtt{O} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & & \mathtt{M} \\ \mathtt{M} & \mathtt{O} & \mathtt{O} & 0 & \mathtt{M} & & \mathtt{M} \\ 0 & \mathtt{L} & 0 & \sigma_m & 0 & \mathtt{L} & 0 \end{array}\right) \tag{1.46}$$

où U et V sont des matrices orthogonales, et $\sigma_1 \leq \mathtt{L} \leq \sigma_m$ sont les valeurs singulières de $\mathbf{C}$, classées selon les valeurs croissantes. La matrice W minimisant (1.45) est donnée par :

$$W = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \mathtt{L} & u_p \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

où $u_i,\ i = 1,..,p$ sont les p premiers vecteurs singuliers à gauche de $\mathbf{C}$, c'est-à-dire les p premières colonnes de U. Dans ce cas, le critère résiduel qui est un indicateur de la

robustesse (insensibilité aux variations de paramètres) des vecteurs parité engendrés, est égal à $J_r = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^2$.

Cette technique peut être étendue aux systèmes dont les paramètres évoluent dans des intervalles connus. Considérons le modèle suivant :

$$y_k = C(\theta)x_k + e_k + Ff_k \tag{1.48a}$$

avec $\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ (1.48b)

Le problème consiste alors à rechercher un vecteur parité le plus orthogonal à toutes les valeurs possibles de $C(\theta)$. Si l'on considère, par exemple, une distribution uniforme des différents paramètres dans leurs intervalles respectifs, une solution consiste à minimiser le critère suivant :

$$J = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \|WC(\theta)\|_F d\theta \tag{1.49}$$

(Dans cette notation, l'intégration doit être effectuée par rapport à tous les paramètres du vecteur θ). D'après les résultats précédents, la matrice optimale W est donnée par (1.47) où, cette fois, les $u_i,\ i = 1,..,p$ sont les p vecteurs propres associés aux p plus petites valeurs propres $\lambda_i,\ i = 1,..,p$ de la matrice :

$$\mathbf{C} = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} C(\theta)C^T(\theta)d\theta \tag{1.50}$$

Considérons l'exemple suivant de modèle incertain :

$$y_k = C(\theta)x_k + e_k$$

avec $\theta = \begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}^T$, $\theta_1 \in [0.8,1.2]$, $\theta_2 \in [1,2]$ et $C(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \theta_2 \end{pmatrix}$

D'après (1.50), la matrice $\mathbf{C}$ est définie par :

$$\mathbf{C} = \int_{\theta_2=1}^{2} \left(\int_{\theta_1=0.8}^{1.2} \begin{pmatrix} \theta_1^2+1 & 0 & \theta_1 & \theta_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \theta_1 & 1 & 2 & 1 \\ \theta_2 & 1 & 1 & \theta_2^2+1 \end{pmatrix} d\theta_1 \right) d\theta_2 = \begin{pmatrix} 0.805 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0.4 & 1.333 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres associés de **C** sont les suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.375\ 10^{-2} & u_1 &= (0.433\ \ 0.733\ \ -0.444\ \ -0.282) \\ \lambda_2 &= 0.561 & u_2 &= (-0.672\ \ 0.372\ \ -0.374\ \ 0.521) \\ \lambda_3 &= 0.658 & u_3 &= (0.383\ \ -0.501\ \ -0.686\ \ 0.363) \\ \lambda_4 &= 2.116 & u_4 &= (0.464\ \ 0.270\ \ 0.442\ \ 0.719) \end{aligned}$$

On remarquera avec intérêt, pour cet exemple, que la dernière valeur propre est très petite par rapport aux autres. Il est donc tout à fait justifié, pour générer la matrice la plus orthogonale possible à $C(\theta)$, de ne conserver que le premier vecteur propre. On obtient ainsi la relation de redondance :

$$p_k = 0.433y_{1k} + 0.733y_{2k} - 0.444y_{3k} - 0.282y_{4k}$$

Dans le cas général, l'étude de l'évolution du critère en fonction du nombre p de vecteurs propres est un élément d'appréciation pour le choix du paramètre p.

3.2. *Cas des modèles dynamiques*

Nous avons déjà, à plusieurs reprises, montré qu'il n'y a pas de différence importante entre le cas des systèmes statique et dynamique, que l'on cumule les variables sur un horizon donné ou que l'on utilise une formulation symbolique. Les techniques proposées sont donc identiques à celles du paragraphe précédent.

On considère un système linéaire invariant décrit par les équations d'état discrètes :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F_1 f_k + E_1 d_k \qquad (1.51a)$$
$$y_k = Cx_k + Du_k + F_2 f_k + E_2 d_k \qquad (1.51b)$$

De la même manière que précédemment, sur un horizon de longueur s, les équations d'observation prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} y_{k-s} \\ y_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \mathtt{M} \\ CA^s \end{pmatrix} x_{k-s} + H_1 \begin{pmatrix} u_{k-s} \\ u_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ u_k \end{pmatrix} + H_2 \begin{pmatrix} f_{k-s} \\ f_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ f_k \end{pmatrix} + H_3 \begin{pmatrix} d_{k-s} \\ d_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ d_k \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

où les matrices H_1 et H_2 sont données par les expressions (1.23a) et (1.23b) et avec :

$$H_3 = \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CE_1 & E_2 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CAE_1 & CE_1 & E_2 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CA^{s-1}E_1 & CA^{s-2}E_1 & CA^{s-3}E_1 & \mathtt{L} & CE_1 & E_2 \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

En prémultipliant (1.52) par un vecteur ω^T satisfaisant la contrainte (1.25) de manière à éliminer l'influence de l'état inconnu, on obtient cette fois :

$$r_k = \omega^T \left(\begin{pmatrix} y_{k-s} \\ y_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ y_k \end{pmatrix} - H_1 \begin{pmatrix} u_{k-s} \\ u_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ u_k \end{pmatrix} \right) = \omega^T H_2 \begin{pmatrix} f_{k-s} \\ f_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ f_k \end{pmatrix} + \omega^T H_3 \begin{pmatrix} d_{k-s} \\ d_{k-s+1} \\ \mathtt{M} \\ d_k \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Afin de rendre "robuste" cette relation, il faut que r_k soit indépendant des entrées inconnues d. On doit donc déterminer ω^T de manière à satisfaire la condition :

$$\omega^T H_3 = 0 \tag{1.55}$$

De plus, le résidu devant être affecté par les défauts, on doit avoir :

$$\omega^T H_2 \neq 0 \tag{1.56}$$

Le fait que les entrées inconnues d aient complètement disparues signifie qu'un défaut peut être détecté indépendamment de la nature de l'évolution et de l'amplitude de f et d, simplement en analysant le résidu. En fait, l'équation (1.56) constitue une condition nécessaire mais non suffisante de détection de l'apparition de défauts. Il peut en effet arriver que plusieurs défauts se compensent, n'influençant donc pas le résidu, même si la condition (1.56) est satisfaite. Afin d'éviter cette situation, la condition plus restrictive (1.57) doit être imposée (Wünnenberg et Frank, 1990b) :

$$\omega^T H_{2,i} \neq 0 \tag{1.57}$$

où :

$$H_{2,i} = \begin{pmatrix} F_{2,i} & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ 0 & F_{2,i} & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{2,i} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & F_{2,i} \end{pmatrix} \qquad i = 1,..., l_1 \tag{1.58a}$$

où $F_{2,i}$ représente la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice F_2 et :

$$H_{2,i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CF_{1,i} & 0 & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CAF_{1,i} & CF_{1,i} & 0 & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{M} & \mathtt{L} & 0 & 0 \\ CA^{s-1}F_{1,i} & CA^{s-2}F_{1,i} & CA^{s-3}F_{1,i} & \mathtt{L} & CF_1,i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} = 1, ..., l_2 \tag{1.58b}$$

où $F_{1,i}$ représente la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice F_1, l_1 représente le nombre total de défauts de capteurs et l_2, la somme du nombre de défauts actionneurs et défauts système. La somme $l_1 + l_2$ étant égale à la dimension p du vecteur de défauts f_k.

Si l'équation (1.56) est satisfaite, le résidu sera différent de zéro *si et seulement si* un défaut intervient. De manière claire, le choix de l'horizon d'observation s influence l'existence de solution au problème (1.16)-(1.56)-(1.57). Cependant la borne supérieure de s est égale à la dimension n du vecteur d'état. L'augmentation de l'horizon au delà de cette borne n'apporte pas de degrés de liberté supplémentaires pour la recherche d'une solution "idéale" (solution satisfaisant exactement les conditions (1.16)-(1.56)-(1.57)), ce qui n'est plus vrai si l'on cherche une solution approchée. En effet, très souvent, le problème précédent n'admet pas de solution idéale et il convient de rechercher une solution approchée optimale au sens d'un critère de performance à définir (Wünnenberg, 1990c ; Wünnenberg *et al.*, 1990a, 1990b). La minimisation du critère de performance (1.59) est sans doute la plus intuitive :

$$J = \frac{\left\| \omega^T H_2 \right\|^2}{\left\| \omega^T H_3 \right\|^2} \tag{1.59}$$

Elle correspond à maximiser l'influence des défauts en minimisant l'effet des perturbations sur les résidus. Rappelons que cette optimisation doit être effectuée en respectant également la condition (1.25). Si l'on note V_0 la matrice engendrée par les solutions de (1.25), le problème consiste donc à chercher un vecteur ω minimisant :

$$J = \frac{\left\| \omega^T V_0 H_2 \right\|^2}{\left\| \omega^T V_0 H_3 \right\|^2} \tag{1.60}$$

La solution s'obtient aisément en dérivant (1.60) par rapport à ω^T. On obtient alors la relation :

$$\omega^T \left(V_0 H_2 H_2^T V_0^T - P V_0 H_3 H_3^T V_0^T \right) = 0 \tag{1.61}$$

La recherche d'une solution correspond donc à la recherche de valeurs propres généralisées. La plus petite valeur propre donne la valeur minimale du critère et le vecteur propre correspondant est le vecteur ω recherché. Cette formulation et la solution présentée sont en tout point identiques à celles présentées pour les systèmes statiques (équations (1.40) et (1.41)).

Les équations (1.54) peuvent ne pas être toutes indépendantes, surtout si la fenêtre d'observation $[k-s,\ k]$ est "large". Afin de sélectionner les équations les plus pertinentes, on peut générer des équations dites d'auto-redondance (relations de redondance liant les mesures d'un même capteur à des instants différents) en utilisant la même technique que précédemment mais en ne conservant que la $j^{\text{ième}}$ composante du vecteur d'observation y_k. Dans ce cas, un corollaire du théorème de Cayley-Hamilton permet de déterminer la largeur de la fenêtre d'observation qui permet d'engendrer la redondance (Brunet *et al.*, 1990). Cette largeur optimale est directement lié à l'indice d'observabilité du système par rapport à une sortie particulière. La technique précédente peut également être appliquée pour générer des relations d'inter-redondance (relations de redondance liant les mesures de plusieurs capteurs) faisant intervenir deux ou plusieurs sorties. Là encore l'analyse des indices d'observabilité du système par rapport à ces différentes sorties permet d'engendrer des relations de redondance indépendantes.

L'analyse précédente ne tient compte que de la structure des équations engendrées. En pratique, si l'on considère l'aspect stochastique du bruit qui va influencer les décisions statistiques concernant la nullité des résidus, il peut être intéressant de choisir un horizon temporel d'observation de taille supérieure au strict minimum, ce qui permettra d'engendrer une certaine insensibilité au bruit. On doit donc rechercher un compromis entre la rapidité de détection (horizon "petit") et la robustesse vis-à-vis des perturbations (horizon "grand"). Pour une analyse plus détaillée de ce problème, le lecteur pourra consulter la thèse de Philippe (1992). Un article récent de Cocquempot *et al*. (1997) aborde également ce problème.

4. Conception de résidus structurés

Les méthodes présentées précédemment permettent de générer des signaux sensibles à la présence de défauts, cependant, la localisation de ces défauts peut s'avérer délicate. Une façon d'améliorer la décision concernant cette localisation consiste à générer des résidus qui ne sont sensibles qu'à un sous-ensemble particulier de défauts. Ces résidus sont alors dits "résidus structurés". La localisation des défauts est alors grandement facilitée par l'utilisation de tels résidus. En effet, la plupart du temps, les valeurs des résidus sont, à chaque instant, comparées à des seuils. Les tests peuvent être réalisés en parallèle et chaque décision issue de ces tests conduit à une valeur booléenne (0 : la valeur du résidu est en dessous du seuil ; 1: la valeur du résidu a dépassé le seuil fixé). L'ensemble de ces valeurs booléennes forme un vecteur binaire appelé *signature de défaut*.

On peut également établir, sur la base de la forme "explication" du vecteur parité, une *matrice théorique des signatures de défauts* du vecteur parité traduisant l'influence des défauts sur les résidus. Pour que tous les défauts puissent être détectés, aucunne colonne de la matrice théorique des signatures de défauts ne doit être nulle (il faut qu'un défaut apparaissent au moins dans une équation de redondance). Pour que tous les défauts puissent être localisés, toutes les signatures théoriques doivent être distinctes. Les matrices théoriques de signature de défauts satisfaisant ces deux contraintes engendrent des résidus dont les défauts sont dits "faiblement isolables" (Gertler et Singer, 1985) ou "isolables de manière déterministe" (Gertler et Anderson, 1992). En effet cette situation serait tout à fait idéale si les décisions portant sur l'amplitude des résidus étaient parfaites. Cependant, il ne peut en être ainsi, car les décisions sont des décisions statistiques. Dans un environnement bruité, mais également à cause des erreurs de modélisation, le test de nullité des résidus doit être effectué de manière statistique. La décision qui en résulte n'est donc pas toujours exacte. La situation de loin la plus fréquente correspond à fixer un seuil élevé de façon à se

prémunir contre les fausses alarmes ; quelques “1” dans la signature de défaut se transforment alors en “0” conduisant à une signature dégradée. Pour garantir une localisation correcte des défauts, la matrice théorique des signatures de défauts ne doit alors pas comporter de signature théorique égale à une signature dégradée. Dans ce cas, les défauts seront dits “fortement isolables” ou “statistiquement isolables”. Cette dernière condition est une condition forte vers laquelle le concepteur doit tendre. Elle est souvent, en pratique, irréalisable et seule un sous-ensemble seulement des défauts satisferont cette condition. On notera de plus que les conditions énoncées font l’hypothèse qu’il n’y a occurrence que d’un seul défaut à la fois.

Les techniques de découplage présentées précédemment constituent un cas particulier des méthodes d’obtention de résidus structurés. Examinons et commentons en effet les matrices théoriques de signatures de défauts suivantes (Gertler, 1993) :

$$S_1 = \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S_2 = \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En ce qui concerne S_1, dont les deux premières colonnes sont identiques, les défauts p_1 et p_2 ne sont pas localisables (isolables). En revanche, les défauts sont “faiblement isolables” pour S_2.

$$S_3 = \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S_4 = \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice S_3 correspond à des défauts “fortement isolables” ; la modification d’un bit quelconque d’une signature ne génère pas une signature déjà existante. La matrice S_4 correspond à la génération d’équations de redondance découplées par rapport à une perturbation particulière. La situation présentée ici est “idéale” en ce sens que l’on a réussi à générer des équations de redondance qui dépendent systématiquement de tous les défauts sauf un. Nous aborderons à nouveau ce problème dans le cadre de la génération de résidus

par estimation d'état[2] (chapitre 2, paragraphe 4). Le problème de génération de résidus structurés peut être posé en terme d'analyse, quelles sont les combinaisons linéaires de résidus permettant d'atteindre l'objectif de localisation des défauts, mais également en termes de synthèse, que faut-il mesurer pour garantir cette isolabilité des défauts. Pour une classe particulière de modèle, ce problème sera abordé lors du chapitre 3.

[2]Cette situation est à mettre en parallèle avec la structure d'observateurs généralisée (GOS : Generalized Observer Scheme).

Références bibliographiques

Brunet, J., Jaume, D., Labarrère, M., Rault, A. et Vergé, M. (1990). *Détection et diagnostic de pannes*. Traité des Nouvelles Technologies, série Diagnostic et Maintenance, Hermès, Paris.

Buchberger, B. (1985). Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory. In *Multidimensional Systems Theory*, N.K. Bose, editor, p. 184-232, Dordrecht Reidel.

Chen, J., Patton, R.J. et Zhang, H.Y. (1993). A multi-criteria optimization approach to the design of robust fault detection algorithms. Proc. of the Conference TOOLDIAG'93, April, 5-8, Toulouse, France.

Chow, E.Y. et Willsky, A.S. (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-29, n° 7, p. 603-614.

Clark, R.N. (1978). A simplified instrument failure detection scheme. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, vol. AES-14, n° 4, p. 558-563.

Clark, R.N. (1989). State estimation schemes for instrument fault detection. In *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application* (Ed. R. Patton, P. Frank and R. Clark), Prentice Hall.

Cocquempot, V., Cassar, J.P. et Staroswiecki, M. (1997). How does the time window size influence the sensitivity/robustness trade-off of optimal structured residuals ? Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '97, August 26-28, Hull, United Kingdom.

Cox, D., Little, J. et O'Shea, D. (1992). *Ideals, varieties and algorithms:an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Undergraduate texts in mathematics, Springer.

Crowe, C.M., Garcia Campos, Y.A. et Hrymak, A. (1983). Reconciliation of process flow rates by matrix projection. Part 1: the linear case. *AIChE Journal*, vol. 29, n° 6, p. 881-888.

Daly, K.C., Gai, E. et Harrison, J.V. (1979). Generalized likelihood test for FDI in redundant sensor configurations. *Journal of Guidance & Control*, vol. 2, n° 1, p. 9-17.

Darouach, M. (1986). Observabilité et validation de données de systèmes de grandes dimensions. Application à l'équilibrage de bilans de mesures. Thèse de doctorat-ès-sciences, Université de Nancy I, juin.

Deckert, J.C., Desai, M.N., Deyst, J.J. et Willsky, A.S. (1977). F8-DFBW sensor failure identification using analytic redundancy. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC 22, n° 5, p. 795-803.

Ding, X. et Frank, P.M. (1990). Fault detection via factorization approach. *Systems and Control Letters*, vol. 14, p. 431-436.

Ding, X. et Frank, P.M. (1991). Frequency domain approach and threshold selector for robust model-based fault detection and isolation. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '91, September 10-13, Baden-Baden, Germany.

Elmadbouly, E., Keller, L. et Frank, P.M. (1982). Proc. of the IFAC Symposium on theory and Applications of Digital Control, New Delhi, India.

Emami-Naeini, A., Akhter, M.M. et Rock, S.M. (1988). Effect of model uncertainty on failure detection - The threshold selector. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-33, n° 12, p. 1106-1115.

Evans, F.A. et Wilcox, J.C. (1970). Experimental strapdown redundant sensor inertial navigation system. *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 7, p. 1070-1074.

Forsmann, K. (1992). The hitch hicker's guide to Gröbner bases: commutative algebra for amateurs. Internal report, Dept. of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.

Frank, P.M. et Keller, L. (1979). Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection. Proc. of the 18th IEEE-CDC, Fort Lauderdale, and *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-16, p. 460-467, 1980.

Frank, P.M. (1987a). Fault diagnosis in dynamic systems via state estimation - A survey. In *System Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge-Based Approaches*, S. Tzafestas et al. (Eds.), D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, vol. 1, p. 35-98.

Frank, P.M. (1987b). Advanced fault detection and isolation schemes using nonlinear and robust observers. Proc. of the 10th IFAC World Congress, vol. 3, p. 63-68, München, Germany.

Gai, E., Harrison, J.V. et Daly, KC. (1978). Failure detection and isolation performance of two redundancy sensor configurations. Proc. of the Position Location and Navigation Symposium (PLANS), p. 122-131, San Diego, USA.

Ge, W. et Fang, C.Z. (1988). Detection of faulty components via robust observation. *International Journal of Control,* vol. 47, n° 2, p. 581-599.

Guernez, C., Cassar, J.P. et Staroswiecki, M. (1996). Fault detection and isolation on polynomial systems: analytical redundancy relations generation and residual structuration. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation, CESA'96, Lille, France, July 9-12.

Kitamura, M. (1989). Fault detection in nuclear reactors with the aid of parametric modelling method. In *Fault Diagnosis in Dynamic Systems : Theory and Application* (Ed. R. Patton, P. Frank and R. Clark), Prentice Hall.

Kroschel, K. and Wernz, A. (1990). Sensor fault detection and localization using decorrelation methods. Proc. of the 4th Eurosensors Conference, oct. 1 - 3, Karlsruhe and *Sensors and Actuators A*, 25/27, p. 43-50, 1991.

Labarrère, M. (1980). Détection de pannes de capteurs d'avions par utilisation de la redondance analytique. Nato Advisor Group for Aerospace Research and Development, Lecture Series n° 109, p. 4.1-4.17, Neuilly-sur-Seine, France.

Leininger, G.G. (1981). Model degradation effects on sensor failure detection. Paper FP-3A, Proc. of the Joint Automatic Control Conference, vol. 2, Charlottesville, VA, USA.

Lou, X.C., Willsky, A.S. et Verghese, G.C. (1986). Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems. *Automatica,* vol. 22, n° 3, p. 333-344.

Maquin, D. (1987). Observabilité, diagnostic et validation de données des procédés industriels. Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I, 13 novembre.

Maquin, D., Gaddouna, B. et Ragot, J. (1993). Generation of parity equations for singular systems. Application to diagnosis. Proc. of the IEEE-SMC, Systems engineering in the service of humans, Le Touquet, France, October 17-20.

Massoumnia, M.A. (1986). A geometric approach to failure detection and identification in linear systems. Ph.D. Thesis, Dept. of Aero. and Astro., MIT, Cambridge, MA, USA.

Mironovskii, L.A. (1980). Functional diagnosis of dynamic system - a survey. *Automation Remote Control* (traduit de Avtomatika i Telemekhanika), vol. 41, p. 1122-1143.

Patton, R.J., Willcox, S.W. et Winter, S.J. (1986). A parameter insensitive technique for aircraft sensor fault analysis using eigenstructure assignment and analytical redundancy. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, paper 86-2029-CP, Williamsburg, VA, USA.

Philippe, D. (1992). Contribution au développement de stratégies de diagnostic. Application à un train de laminage à chaud. Thèse de doctorat de l'Université de Nancy I, 12 novembre 1992.

Potter, J.E. et Suman, M.C. (1977). Thresholdless redundancy management with arrays of skewed instruments. Integrity in Electronic Flight Control Systems, AGARDOGRAPH-224, 15-11 to 15-25.

Ragot, J., Darouach, M., Maquin, D. et Bloch, G. (1990). *Validation de données et diagnostic*. Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, 432 p., Hermès, 1990.

Ragot, J., Maquin, D. et Kratz, F. (1993). Analytical redundancy for system with unknown inputs. Application to faults detection. *Control-Theory and Advanced Technology*, vol. 9, n° 3, pp. 775-788.

Ragot, J., Kratz, F. et Maquin, D. (1997). Espace de parité pour les systèmes linéaires incertains. Synthèse, quelques résultats nouveaux et mise en oeuvre. Seizième Colloque GRETSI, Grenoble, France, 15-19 septembre 1997.

Ray, A. et Luck, R. (1991). An introduction to sensor signal validation in redundant measurement systems, *IEEE Control Magazine*, vol. 11, n° 2, p. 44-49.

Rougée, A., Basseville, M., Benveniste, A. et Moustakides, G.V. (1987). Optimum robust detection of changes in the AR part of a multivariable ARMA process. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, p. 1116-1120.

Sanchez, M. et Romagnoli, J. (1996). Use of orthogonal transformations in data classification-reconciliation. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 20, n°5, p. 483-493.

Seliger, R. et Frank, P.M. (199la). Robust Component fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems using nonlinear unknown input observers. Proc. of the IFAC/IMACS Symposium SAFEPROCESS '91, September 10-13, Baden-Baden, Germany.

Seliger, R. et Frank, P.M. (1991b), Fault diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. Proc. of the 30th IEEE-CDC, vol. 3, p. 2248-2253, December 11-13, Brighton, UK.

Staroswiecki, M. et Hamad, M. (1986). Validation of measurements and detection of sensors failures in control systems. Signal processing III : theory and applications. I.T. Young editor, Elsevier.

Viswanadham, N. et Srichander, R. (1987). Fault detection using unknown input observers, *Control-Theory and Advanced Technology, MITA Press*, vol. 3, n° 2, p. 91-101.

Viswanadham, N., Taylor, J.H. et Luce, E.C. (1987). A frequency-domain approach to failure detection and isolation with application to GE-21 turbine engine control systems. *Control-Theory and Advanced Technology, MITA Press,* vol. 3, n° 1, p. 45-72.

Watanabe, K. et Himmelblau, D.M. (1982). Instrument fault detection in systems with uncertainties. *International Journal of Systems Science,* vol. 13, p. 137-158.

Weiss, J.L., Pattipati, K.R., Willsky, A.S., Eterno, J.S. et Crawford, J.T. (1985). Robust detection/accomodation for sensor failures. Research report n° TR 213, Alphatec Inc., Burlington, MA, USA.

Wünnenberg, J. et Frank, P.M. (1986). Sensor fault detection via robust observers. First European Workshop on Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge-Based Approaches, Rhodes, Greece. In *System Fault Diagnostics, Reliability and Related knowledge-Based Approaches*, Tzafestas, Singh and Schmidt (Eds.), Dr. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, vol. 1, p. 147-160, 1987.

Wünnenberg, J. et Frank, P.M. (1988). Model-based residual generation for dynamic systems with unknown inputs, Proc. of the 12th IMACS World Congress on Scientific Computation, vol. 2, p. 435-437, July 18-22, Paris, France.

Wünnenberg, J. (1990). Observer-based fault detection in dynamic systems. Ph.D. Thesis, University of Duisburg, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik.

Wünnenberg, J. et Frank, P.M. (1990a). Dynamic model based incipient fault detection concept for robots. Proc. of the 11th IFAC World Congress, august, Tallin, USSR.

Wünnenberg, J. et Frank, P.M. (1990b). Robust observer-based detection for linear and non-linear systems with application to robots. Proc. of the IMACS Annals on Computing & Applied Mathematics MIM-S2'90, September 3-7, Brussels, Belgium.

Wünnenberg, J. (1990c). Observer-based fault detection in dynamic systems. Ph.D. Thesis, University of Duisburg, Fachgebiet Mess- und Regelungstechnik.