

*INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE*  
*UNIVERSITE HENRI POINCARÉ - NANCY 1*

***Module***  
***Estimation d'état - Application au diagnostic***

Diplôme d'Etudes Approfondies  
Contrôle, Signaux et Communications

Didier MAQUIN  
Centre de Recherche en Automatique de Nancy  
Vandœuvre-les-Nancy, Janvier 2001  
(révision n° 1 : janvier 2004)



# *Estimation d'état - Application au diagnostic*

1.	Mise en évidence de l'incohérence des mesures	5
2.	Le problème de validation de mesures	7
2.1.	Introduction	
2.2.	Position du problème	7
2.3.	Méthode de résolution - un exemple introductif	11
2.4.	Méthode de résolution - cas général à variance connue	14
3.	Cas des modèles linéaires	14
3.1.	Résolution globale	15
3.2.	Propriétés statistiques de l'estimateur	17
3.3.	Résolution par élimination des contraintes	18
3.4.	Exemple	19
4.	Cas des modèles non-linéaires	21
4.1.	Solution itérative par linéarisation des contraintes	21
4.2.	Propriétés statistiques de l'estimateur	24
4.3.	Un exemple élémentaire	25
5.	Notions d'observabilité et de redondance pour les modèles linéaires	27
5.1.	Observabilité - définition et analyse	27
5.2.	Exemple traité	29
6.	Extensions des méthodes au cas dynamique	31
6.1.	Estimation d'état sur horizon fixe	32
6.2.	Estimation d'état sur "fenêtre glissante"	33
6.3.	Filtrage entrée-sortie généralisé	33
7.	Application au diagnostic	36
7.1.	Cas des modèles linéaires	37
7.2.	Estimation de l'amplitude des biais	40
	Annexe 1 : Estimateur des moindres carrés	41
	Annexe 2 : Eléments de choix d'une méthode d'estimation	42
	Annexe 3 : Opérations de dérivation matricielle	43
	Annexe 4 : Un exemple d'estimation - modèle linéaire	47
	Annexe 5 : Un exemple d'estimation - modèle non-linéaire	48
	Annexe 6 : Exemple d'estimation et d'analyse d'observabilité	49



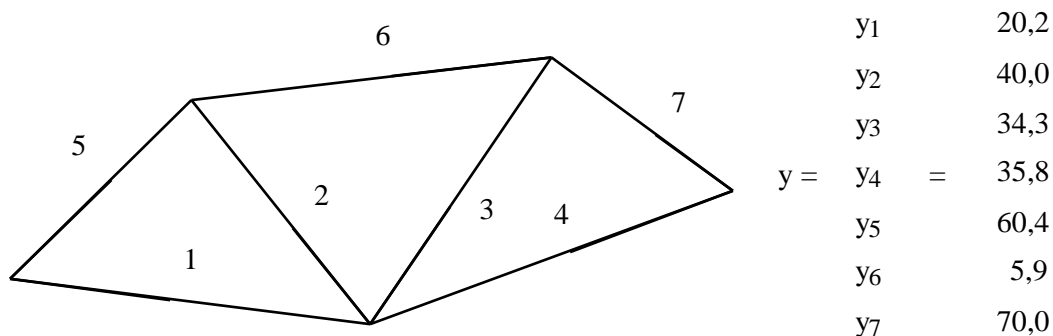
L'estimation est un "problème de décision" qui trouve de nombreuses applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Ainsi l'utilise-t-on lorsqu'il est nécessaire, pour caractériser le phénomène que l'on veut étudier, d'extraire des informations de l'observation de grandeurs physiques. Le plus souvent, l'étape d'estimation est rendue nécessaire du fait de la nature même des observations qui sont réalisées au moyen de capteurs. En dépit du soin apporté lors de la conception de ceux-ci, ils ne peuvent cependant s'affranchir totalement des grandeurs d'influence qui perturbent leur fonctionnement (température, humidité, pression, champ magnétique,...). De plus, un capteur étant un objet technologique, il possède nécessairement un "domaine de fonctionnement" limité lié, par exemple, à la linéarité de l'évolution de la sortie par rapport à l'entrée. Si l'on représente le fonctionnement d'un capteur au moyen d'une transmittance, on retrouve de plus les notions de gain, d'inertie, de frottements ou de bande passante qui limitent nécessairement la qualité des mesures fournies.

Parmi les applications des méthodes d'estimation, celles liées à la *validation de mesures* sont importantes. Il ne sert à rien, en effet, d'élaborer des commandes complexes si les algorithmes qui les génèrent reçoivent des informations erronées et incohérentes. S'assurer que les mesures sont correctes apparaît donc comme indispensable aussi bien lors de la caractérisation d'un processus (étape de modélisation-identification) que lors de l'étape de conduite de celui-ci (étape de commande).

### 1. Mise en évidence de l'incohérence des mesures

Afin de montrer la nécessité d'un traitement préalable des mesures prélevées sur un processus, examinons un exemple de relevés topographiques.

On mesure, sur un terrain, les différences de hauteur entre cinq points (les flèches sur le dessin sont dirigées vers les hauteurs décroissantes). Les résultats des mesures sont les suivants :



On vérifie sans peine que ces mesures sont entachées d'erreurs. En effet, les dénivelés ne sont pas indépendants. Si l'on note  $y_i^*$  les dénivelés "vrais" inconnus, on a :

$$\begin{aligned}
 y_5^* - y_1^* - y_2^* &= 0 \\
 y_6^* - y_2^* + y_3^* &= 0 \\
 y_7^* - y_3^* - y_4^* &= 0
 \end{aligned}$$

En substituant les mesures aux grandeurs "vraies", on obtient :

$$\begin{aligned} y_5 - y_1 - y_2 &= 60,4 - 20,2 - 40 = 0,2 \\ y_6 - y_2 + y_3 &= 5,9 - 40 - 34,3 = 0,2 \\ y_7 - y_3 - y_4 &= 70 - 34,3 - 35,8 = -0,1 \end{aligned}$$

En fait, chaque mesure s'exprime en fonction de la grandeur vraie correspondante :

$$y_i = y_i^* + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, 7$$

Les termes  $\varepsilon_i$  sont des erreurs de mesure (erreur de visée, de lecture, imprécision de l'appareil, etc...). On peut alors se poser le problème suivant : comment estimer "au mieux" les grandeurs vraies  $y_i^*$  sur la base de la connaissance des mesures  $y_i$  ?

On peut tout d'abord remarquer que les grandeurs  $y_i$  ne sont pas indépendantes. En effet, tous les dénivelés peuvent s'exprimer en fonction des quatre premiers ; on a :

$$\begin{array}{lcl} y_1 = y_1^* + \varepsilon_1 & & y_1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad & 1 \\ y_2 = y_2^* + \varepsilon_2 & & y_2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 & \varepsilon_1 \quad 2 \\ y_3 = y_3^* + \varepsilon_3 & & y_3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 & y_1^* \quad 3 \\ y_4 = y_4^* + \varepsilon_4 & \text{soit, matriciellement :} & y_4 = 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 & y_2^* \quad + \quad 4 \\ y_5 = y_1^* + y_2^* + \varepsilon_5 & & y_5 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 & y_3^* \quad 5 \\ y_6 = y_2^* - y_3^* + \varepsilon_6 & & y_6 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 & y_4 \quad 6 \\ y_7 = y_3^* + y_4^* + \varepsilon_7 & & y_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 & 7 \end{array}$$

Sous une forme plus compacte, on peut écrire :

$$Y = HX^* + \varepsilon$$

Les grandeurs inconnues  $X^*$  sont déterministes et la distribution de probabilité des erreurs de mesure est inconnue. On peut donc estimer  $X^*$  à l'aide de la méthode des moindres carrés. La solution est donnée par<sup>1</sup> :

$$\hat{X} = \arg \min_{X^*} \frac{1}{2} \|Y - HX^*\|^2 = (H^T H)^{-1} H^T Y$$

De plus, on a :

$$\hat{Y} = H\hat{X} = H(H^T H)^{-1} H^T Y$$

Numériquement, on obtient :

$$\hat{Y} = (20,224 \quad 40,152 \quad 34,381 \quad 35,709 \quad 60,376 \quad 5,771 \quad 70,090)^T$$

<sup>1</sup> Voir annexe 1

## 2. Le problème de validation de mesures

### 2.1. Introduction

La validation de mesures doit être effectuée en tenant compte de la nature des erreurs de mesure. Rappelons que ces dernières sont réparties en trois catégories.

Les erreurs aléatoires et les erreurs de "faible" amplitude affectant toutes les variables et qui sont généralement supposées indépendantes, gaussiennes, de valeur moyenne nulle.

Les erreurs systématiques, de "grande" amplitude, dues à des événements non aléatoires tels que le biais d'instruments, le mauvais fonctionnement d'un capteur, les modèles incomplets ou imprécis.

Les erreurs accidentelles dues à la défaillance momentanée d'un opérateur ou d'un appareil et détectables par des ruptures dans un signal.

Selon la nature des erreurs, un traitement approprié doit être envisagé. Les mesures affectées d'erreurs aléatoires peuvent être soumises à un filtrage prenant en compte les interactions dues aux modèles : c'est la technique de réconciliation. Lorsque certaines mesures sont entachées de biais systématiques, on doit procéder à la localisation de ces biais, puis à l'estimation de leur amplitude. Enfin, le cas d'erreurs accidentelles peut être pris en compte si l'on dispose de séries chronologiques de mesures sur lesquelles des tests statistiques sont effectués. Seules les erreurs du premier type seront ici considérées. Les traitements proposés ne constituent pas un filtrage des données au sens habituel du terme, mais une réconciliation par rapport à des modèles.

### 2.2. Position du problème

On considère un système pouvant être décrit par :

– un ensemble de contraintes statiques représenté par une fonction vectorielle  $F(X^*)$  (linéaire ou non-linéaire) d'un vecteur d'état inconnu  $X^*$  :

$$F(X^*) = 0 \quad (1)$$

$F(X^*)$  est de dimension  $n$  et  $X^*$  le vecteur d'état du système est de dimension  $v$ .

– une équation d'observation liant un vecteur de mesure  $Z$  aux états :

$$Z = H(X^*) + \quad (2)$$

$Z$  est de dimension  $m$ ,  $H(X^*)$  caractérise le système de mesure et  $\quad$ , de dimension  $m$ , est un vecteur aléatoire d'erreurs de mesure caractérisées par des lois de distributions de probabilité connues.

Très souvent, on fera l'hypothèse que ces erreurs sont distribuées selon des lois normales centrées de variances connues ou inconnues. Dans ce cas, la densité de

probabilité conditionnelle des erreurs de mesure, connaissant le vecteur d'état et la variance des erreurs de mesure, s'écrit<sup>2</sup> :

$$p(Z | X^*, V) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |V|^{1/2}} \exp -\frac{1}{2} (Z - H(X^*))^T V^{-1} (Z - H(X^*)) \quad (3)$$

Sur la base de cette connaissance, on cherche à estimer le vecteur d'état inconnu  $X^*$ . La densité de probabilité des observations est connue et les grandeurs à estimer sont déterministes ; on peut donc employer une estimation au sens du maximum de vraisemblance<sup>3</sup> :

Pour un échantillon de  $k$  observations indépendantes  $Z_i = H(X^*) + \epsilon_i$ , pour  $i = 1, \dots, k$ , la fonction de vraisemblance s'écrit comme le produit des densités de probabilité des erreurs :

$$v = \frac{1}{(2\pi)^{km/2} |V|^k} \exp -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (Z_i - H(X^*))^T V^{-1} (Z_i - H(X^*)) \quad (4)$$

Au sens du maximum de vraisemblance, le meilleur estimateur  $\hat{X}$  est celui qui maximise la fonction de vraisemblance tout en respectant les contraintes du modèle  $F(\hat{X}) = 0$ .

Compte tenu de la forme de cette fonction de vraisemblance et du fait que la fonction logarithme est une fonction monotone, on peut maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance qui possède son maximum pour les mêmes valeurs d'argument que la fonction de vraisemblance.

$$\ln(v) = -\frac{km}{2} \ln(2\pi) - \frac{k}{2} \ln(|V|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (Z_i - H(X^*))^T V^{-1} (Z_i - H(X^*)) \quad (5)$$

En supprimant le terme constant, le problème d'estimation revient donc à chercher le minimum du critère :

$$= \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (Z_i - H(X^*))^T V^{-1} (Z_i - H(X^*)) \quad (6a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X_i^*) = 0 \quad (6b)$$

Selon le degré de connaissance de la matrice de variance-covariance  $V$  des erreurs de mesure, la solution peut être explicitée davantage.

<sup>2</sup> Voir annexe 2

<sup>3</sup> Voir annexe 3



1<sup>er</sup> cas : la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure est inconnue

D'après ce qui précède, on a :

$$= \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \text{Tr} \left( V^{-1} \right) \quad (7)$$

Le critère étant scalaire, on peut encore l'écrire en utilisant l'opérateur trace<sup>4</sup> de matrice (Tr) :

$$= \frac{k}{2} \ln(|V|) + \text{Tr} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \text{Tr} \left( V^{-1} \right) \right) \quad (8)$$

Compte tenu des propriétés de l'opérateur trace<sup>5</sup>, on peut ensuite déduire l'enchaînement :

$$= \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \text{Tr} \left( \text{Tr} \left( V^{-1} \right) \right) = \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \text{Tr} \left( V^{-1} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \sum_{i=1}^k V^{-1} \right) = \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left( V^{-1} \right) \quad (10)$$

En introduisant la matrice des moments des erreurs :

$$M = \sum_{i=1}^k \text{Tr} \left( V^{-1} \right) \quad (11)$$

on obtient :

$$= \frac{k}{2} \ln(|V|) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left( V^{-1} M \right) \quad (12)$$

La contrainte est indépendante de la matrice  $V$  ; la condition de stationnarité du critère par rapport à cette matrice s'écrit<sup>6</sup> :

$$\frac{d}{dV} = \frac{k}{2} V^{-1} - \frac{1}{2} V^{-1} M V^{-1} = 0 \quad (13)$$

d'où :

$$V = \frac{1}{k} M \quad (14)$$

<sup>4</sup> La trace d'une matrice carrée de dimension  $n$  est définie par  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

<sup>5</sup> Pour des matrices de dimensions compatibles :  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$  et  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

<sup>6</sup> Voir annexe 3

En reportant cette expression dans le critère , on obtient :

$$= \frac{k}{2} \ln \left| \frac{M}{k} \right| + \frac{1}{2} \text{Tr}(kI_m) \quad (15)$$

où  $I_m$  est la matrice identité d'ordre  $m$  qui résulte du produit  $V^{-1}M$ .

Le problème d'estimation se ramène donc à la recherche du minimum, par rapport à  $X^*$ , du critère :

$$= \frac{k}{2} \ln(|M|) \quad (16a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X^*) = 0 \quad (16b)$$

Dans le cas particulier, mais fréquent, où les erreurs de mesures sont indépendantes, la matrice de variance  $V$  des erreurs de mesure est diagonale. On a alors :

$$|V| = \prod_{j=1}^m v_{jj} = \prod_{j=1}^m \frac{2}{j} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(V^{-1}M) = \sum_{j=1}^m v_{jj}^{-1} m_{jj}$$

Le critère peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left( k \ln \left( \frac{2}{j} \right) + \frac{m_{jj}}{j} \right) \quad (17)$$

Les conditions de stationnarité du critère par rapport aux inconnues  $j$  s'écrivent :

$$\frac{d}{d_j} = \frac{k}{j} - \frac{m_{jj}}{j^2} = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (18)$$

On obtient donc  $\frac{2}{j} = \frac{m_{jj}}{k}$  et en reportant cette expression dans le critère :

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k \ln \frac{m_{jj}}{k} + k \quad (19)$$

Compte tenu des termes constants, le problème d'estimation revient donc à chercher le minimum, par rapport à  $X^*$ , du critère :

$$= \frac{k}{2} \sum_{j=1}^m \ln(m_{jj}) = \frac{k}{2} \text{Tr}(\ln(M)) \quad (20a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X^*) = 0 \quad (20b)$$

2<sup>ème</sup> cas : la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure est connue

Si la matrice de variance-covariance est connue, le problème d'estimation revient à chercher le minimum du critère :

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (Z_i - H(X^*))^T V^{-1} (Z_i - H(X^*)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|Z_i - H(X^*)\|_{V^{-1}}^2 \quad (21a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X^*) = 0 \quad (21b)$$

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation quadratique sous contraintes égalité. Avant de présenter des méthodes générales de résolution de ce problème, examinons un exemple particulier.

### 2.3. Méthode de résolution - un exemple introductif

La figure 1 schématise l'expérience effectuée pour relever la position d'une plate-forme située en mer. Deux stations, situées à terre, effectuent, à l'aide d'un goniomètre, le relevé de l'angle séparant la direction de l'autre station et celle de la plate-forme.

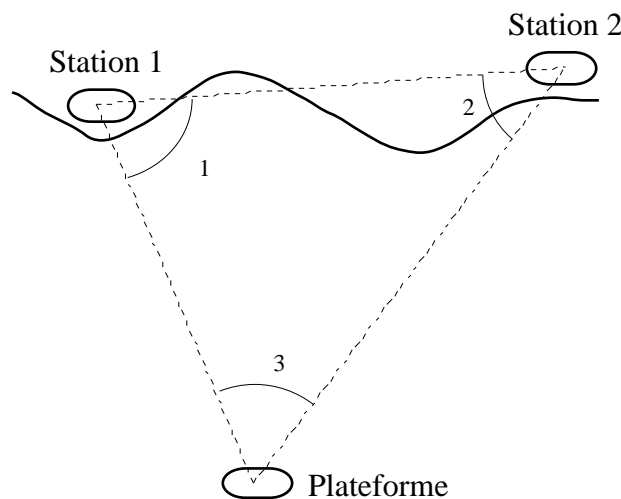


Figure 1 : Stations et plate-forme

Les mesures relevées sont les suivantes :  $\alpha_1 = 70^\circ 11'$ ,  $\alpha_2 = 53^\circ 24'$  et  $\alpha_3 = 54^\circ 01'$ . Les deux stations et la plate-forme sont disposées selon un triangle ; les trois angles sont donc liés par la relation élémentaire :

$$\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* - 180^\circ = 0$$

On remarque immédiatement que les mesures ne vérifient pas cette relation. On va donc chercher, sur la base de cette unique observation, à estimer la valeur de ces angles.

Les variances des mesures sont inconnues

Les mesures étant supposées indépendantes, la matrice de variance-covariance des erreurs de mesure est prise diagonale.

Le problème d'estimation des angles consiste donc à chercher le minimum, par rapport aux  $\alpha_j^*$ , du critère :

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \ln \left( \alpha_j^* - \alpha_j \right)^2 = \sum_{j=1}^3 \ln \left( \alpha_j^* - \alpha_j \right)$$

sous la contrainte  $\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* - 180 = 0$

Le lagrangien associé à ce problème d'optimisation s'écrit :

$$L = \sum_{j=1}^3 \ln \left( \alpha_j^* - \alpha_j \right) + \lambda \left( \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* - 180 \right)$$

Les conditions de stationnarité de ce lagrangien conduisent au système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha_j^*} &= \frac{1}{\alpha_j^* - \alpha_j} + \lambda = 0 \quad j = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* - 180 = 0 \end{aligned}$$

La sommation des trois premières équations permet d'écrire :

$$\left( \frac{1}{\alpha_1^* - \alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2^* - \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3^* - \alpha_3} \right) - \lambda = 0$$

Et en utilisant la quatrième, on a :

$$\left( \frac{1}{\alpha_1^* - \alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2^* - \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3^* - \alpha_3} \right) = \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{3}{\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* - 180}$$

Le report de l'expression du paramètre de Lagrange dans les trois premières équations achève le calcul :

$$\alpha_j^* = \alpha_j + \frac{1}{\lambda} \quad j = 1, 2, 3$$

On obtient ainsi  $\alpha_1^* = 70^\circ 59'$ ,  $\alpha_2^* = 54^\circ 12'$  et  $\alpha_3^* = 54^\circ 49'$ . On peut également calculer une estimation de la variance des erreurs de mesure :

$$\sigma_j^2 = m_{jj} = \left( \alpha_j - \alpha_j^* \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 0.64$$

Les variances des mesures sont connues

Les mesures effectuées à terre ont un écart type de un degré alors que la mesure effectuée depuis la plate-forme a un écart type de deux degrés. Les erreurs de mesure sont supposée indépendantes ; la matrice de variance est donc diagonale.

Le problème d'estimation des angles revient cette fois à chercher le minimum, par rapport aux  $\hat{j}^*$ , du critère :

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{(\hat{j}^* - j)^2}{v_{jj}}$$

sous la contrainte  $\sum_{j=1}^3 \hat{j}^* - 180 = 0$

Les conditions de stationnarité du lagrangien associé à ce problème d'optimisation s'écrivent :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \hat{j}^*} \right|_{\hat{j}^* = \hat{j}} = \frac{\hat{j} - j}{v_{jj}} + \lambda = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right|_{\hat{j}^* = \hat{j}} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3 - 180 = 0$$

Les trois premières équations permettent d'écrire :

$$\hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3 - 180 - (v_{11} + v_{22} + v_{33})\lambda = 0$$

d'où l'expression du paramètre de Lagrange :

$$\lambda = \frac{\hat{j}_1 + \hat{j}_2 + \hat{j}_3 - 180}{v_{11} + v_{22} + v_{33}}$$

Le report de l'expression du paramètre de Lagrange dans les trois premières équations achève le calcul :

$$\hat{j}^* = j - v_{jj} \lambda \quad j = 1, 2, 3$$

On obtient ainsi  $\hat{j}_1 = 70^\circ 35'$ ,  $\hat{j}_2 = 53^\circ 48'$  et  $\hat{j}_3 = 55^\circ 37'$ . Ces estimations peuvent être comparées à celles obtenues dans le cas où les variances sont inconnues. Dans le premier cas, la répartition des erreurs a été effectuée de la même manière sur toutes les grandeurs. Dans le second cas, les inverses des variances des mesures ont servi de facteurs de pondération des corrections apportées. Les mesures les plus précises sont les moins corrigées.

## 2.4. Méthode de résolution - cas général à variance connue

Si la matrice de variance-covariance est connue, le problème d'estimation se ramène à la recherche du minimum du critère :

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left\| Z_i - H(X^*) \right\|_{V^{-1}}^2 \quad (22a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X^*) = 0 \quad (22b)$$

Pour résoudre ce problème, on définit le lagrangien :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left( Z_i - H(X^*) \right)^T V^{-1} \left( Z_i - H(X^*) \right) + F^T(X^*) \quad (23)$$

dont les conditions de stationnarité s'explicitent :

$$\frac{\partial L}{\partial X^*} \Bigg|_{X^* = \hat{X}} = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial H^T(X^*)}{\partial X^*} \Bigg|_{X^* = \hat{X}} V^{-1} \left( Z_i - H(\hat{X}) \right) + \frac{\partial F^T(X^*)}{\partial X^*} \Bigg|_{X^* = \hat{X}} = 0 \quad (24a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X^*} \Bigg|_{X^* = \hat{X}} = F(\hat{X}) = 0 \quad (24b)$$

La difficulté de résolution de ce problème dépend étroitement de la structure et de la dimension des équations du modèle, de la structure des contraintes et du nombre d'observations. Dans le cas de contraintes et d'équations d'observation linéaires, les solutions sont analytiques. Dans tous les autres cas, il faut utiliser les techniques de calcul hiérarchisé, de linéarisation, de changement de variables ou même des solutions approchées. Dans toute la présentation qui suit, afin de simplifier l'exposé des méthodes, on ne s'intéressera qu'au cas où l'on effectue une seule observation ( $k = 1$ ). Le lecteur pourra sans peine généraliser les résultats obtenus dans le cas d'observations multiples.

## 3. Cas des modèles linéaires

Le cas des modèles linéaires peut sembler très restrictif. Néanmoins, sur le plan des applications, cette classe de systèmes se rencontre fréquemment et correspond physiquement à des systèmes décrits par des équations de bilan en flux totaux. De plus, les problèmes décrits par des équations multilinéaires peuvent être traités en utilisant un formalisme linéaire, si l'on cherche une solution approchée obtenue par découplage des équations multilinéaires.

On considère ici un système décrit par une équation de modèle linéaire :

$$MX^* - b = 0 \quad (25)$$

où  $M$  est une matrice de dimension  $n.v$ , de rang  $n$  et  $X^*$  est le vecteur des vraies grandeurs de dimension  $v$ , et une équation de mesure qui s'écrit :

$$Z = HX^* + \quad (26)$$

où  $Z$  est le vecteur des mesures et le vecteur des erreurs de mesure, de dimension  $m$ , distribuées selon une loi normale centrée de matrice de variance-covariance symétrique  $V$ .

On suppose, de plus, que le système est observable c'est-à-dire que la connaissance de  $Z$  et celle du modèle est suffisante pour déterminer de manière unique l'estimation  $\hat{X}$ . Les deux équations décrivant le système peuvent se regrouper :

$$\begin{matrix} 0 \\ Z \end{matrix} = \begin{matrix} M \\ H \end{matrix} X^* + \begin{matrix} -b \\ \end{matrix} \quad (27)$$

Pour que ce système ait une solution, il est nécessaire de satisfaire la contrainte :

$$\text{rang} \begin{matrix} M \\ H \end{matrix} = \dim(X^*) = v \quad (28)$$

Dans ce cas, le problème d'estimation revient à chercher le minimum par rapport à  $X^*$  du critère :

$$= \frac{1}{2} \|Z - HX^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (29a)$$

$$\text{sous la contrainte } MX^* - b = 0 \quad (29b)$$

Ce problème très classique peut être résolu par différentes techniques. Elles donnent toutes le même résultat aux erreurs numériques près dues aux troncatures apparaissant dans les différents calculs.

### 3.1. Résolution globale

Le problème (29) est un problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires. Le lagrangien qui lui est associé est donné par :

$$L = \frac{1}{2} (Z - HX^*)^T V^{-1} (Z - HX^*) + \lambda^T (MX^* - b) \quad (30)$$

où  $\lambda$  est le vecteur des paramètres de Lagrange de dimension  $n$ .

Les conditions de stationnarité de  $L$ , dont la résolution fournit l'optimum recherché, sont :

$$\frac{\partial L}{\partial X^*} \Big|_{X^* = \hat{X}} = -H^T V^{-1} (Z - H\hat{X}) + M^T \lambda = 0 \quad (31a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{X^* = \hat{X}} = M\hat{X} - b = 0 \quad (31b)$$

Ce système d'équations algébriques linéaires comporte autant d'équations que d'inconnues. Prémultiplions l'équation (31b) par  $M^T$  et ajoutons le résultat à l'équation (31a), on obtient alors :

$$\left(H^T V^{-1} H + M^T M\right) \hat{X} + M^T - H^T V^{-1} Z - M^T b = 0 \quad (32)$$

Rappelons que le système est observable, c'est-à-dire :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} M \\ V^{-1/2} H \end{pmatrix} = \text{rang}(A) = v \quad (33)$$

car la matrice de variance-covariance  $V$  est également de rang  $v$ . La matrice  $A$  est de dimension  $(n + m).v$ . On peut donc déduire que :

$$\text{rang}(A^T A) = \text{rang} \begin{pmatrix} M^T & H^T V^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ V^{-1/2} H \end{pmatrix} = \text{rang}(M^T M + H^T V^{-1} H) = v \quad (34)$$

La matrice  $H^T V^{-1} H + M^T M$  étant de dimension  $v.v$ , elle est inversible. De l'équation (32), on obtient alors l'expression suivante pour  $\hat{X}$  :

$$\hat{X} = R^{-1} H^T V^{-1} Z + M^T b - M^T \quad (35)$$

avec

$$R = H^T V^{-1} H + M^T M \quad (36)$$

Le report de cette expression dans l'équation (31b) permet d'exprimer :

$$= \left(MR^{-1}M^T\right)^{-1} MR^{-1} H^T V^{-1} Z + M^T b - b \quad (37)$$

En reportant l'expression de dans celle de  $\hat{X}$ , on obtient :

$$\hat{X} = PR^{-1} \left(H^T V^{-1} Z + M^T b\right) + R^{-1} M^T MR^{-1} M^T^{-1} b \quad (38)$$

avec l'expression de la matrice de projection :

$$P = I - R^{-1} M^T MR^{-1} M^T^{-1} M \quad (39)$$

La relation (38) donne l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un système décrit par le modèle linéaire (25) et l'équation linéaire d'observation (26). Dans l'expression de cet estimateur linéaire, on voit clairement apparaître une classique "matrice de projection" qui projette le vecteur de mesure sur l'espace des contraintes. Selon les structures du modèle et de l'équation d'observation, cet estimateur peut être simplifié. Par exemple, dans le cas où toutes les grandeurs sont mesurées directement ( $H = I$ ) et où le modèle est sans second membre ( $b = 0$ ), on a le résultat :

$$\hat{X} = \left(I - VM^T(MVM^T)^{-1}M\right)Z \quad (40)$$



### 3.2. Propriétés statistiques de l'estimateur

La caractérisation d'un estimateur passe par l'évaluation de ses propriétés statistiques. Intéressons-nous au calcul des deux premiers moments espérance et variance.

On a alors :

$$\text{Esp}(\hat{X}) = \text{Esp}\left(PR^{-1}H^T V^{-1}Z + PR^{-1}M^T b + R^{-1}M^T (MR^{-1}M^T)^{-1}b\right) \quad (41a)$$

$$\text{Esp}(\hat{X}) = PR^{-1}H^T V^{-1}\text{Esp}(Z) + PR^{-1}M^T b + R^{-1}M^T (MR^{-1}M^T)^{-1}b \quad (41b)$$

$$\text{Esp}(\hat{X}) = PR^{-1}H^T V^{-1}HX^* + PR^{-1}M^T b + R^{-1}M^T (MR^{-1}M^T)^{-1}b \quad (41c)$$

On peut alors évaluer la variance de l'estimateur :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \text{Esp} \left( \hat{X} - \text{Esp}(\hat{X}) \right) \left( \hat{X} - \text{Esp}(\hat{X}) \right)^T \quad (42)$$

Evaluons tout d'abord l'expression  $\left( \hat{X} - \text{Esp}(\hat{X}) \right)$  ; on a :

$$\left( \hat{X} - \text{Esp}(\hat{X}) \right) = PR^{-1}H^T V^{-1} Z - HX^* \quad (43a)$$

$$\left( \hat{X} - \text{Esp}(\hat{X}) \right) = PR^{-1}H^T V^{-1} \quad (43b)$$

En remarquant que les matrices  $R$  et  $V$  sont symétriques, on a alors :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \text{Esp} \left( PR^{-1}H^T V^{-1} \right) \left( PR^{-1}H^T V^{-1} \right)^T \quad (44a)$$

$$\text{Var}(\hat{X}) = \text{Esp} \left( PR^{-1}H^T V^{-1} \quad {}^T V^{-1} H R^{-1} P^T \right) \quad (44b)$$

$$\text{Var}(\hat{X}) = PR^{-1}H^T V^{-1} \underbrace{\text{Esp}}_V \quad {}^T V^{-1} H R^{-1} P^T \quad (44c)$$

$$\text{Var}(\hat{X}) = PR^{-1}H^T V^{-1} H R^{-1} P^T \quad (44d)$$

Or, d'après (36), on a :

$$H^T V^{-1} H = R - M^T M \quad (45)$$

En reportant cette expression dans (44d), on obtient :

$$\text{Var}(\hat{X}) = PR^{-1} R - M^T M R^{-1} P^T \quad (46a)$$

$$\text{Var}(\hat{X}) = PR^{-1}P^T - PR^{-1}M^T(MR^{-1}M^T)^{-1}M^T \quad (46b)$$

Le second terme du membre de droite de (46b) est nul ; en effet, on a :

$$PR^{-1}M^T = \left( I - R^{-1}M^T(MR^{-1}M^T)^{-1}M \right) R^{-1}M^T \quad (47a)$$

$$PR^{-1}M^T = R^{-1}M^T - R^{-1}M^T(MR^{-1}M^T)^{-1}MR^{-1}M^T = 0 \quad (47b)$$

De plus, en développant le produit suivant :

$$PR^{-1}P^T = \left( I - R^{-1}M^T(MR^{-1}M^T)^{-1}M \right) R^{-1} \left( I - M^T(MR^{-1}M^T)^{-1}MR^{-1} \right) \quad (48a)$$

le premier terme se simplifie :

$$PR^{-1}P^T = PR^{-1} \quad (48b)$$

La variance de l'estimateur revêt donc une expression très simple :

$$\text{Var}(\hat{X}) = PR^{-1} \quad (49)$$

Dans le cas où toutes les grandeurs sont mesurées directement ( $H = I$ ) et où le modèle est sans second membre ( $b = 0$ ), on a le résultat :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \left( I - VM^T(MVM^T)^{-1}M \right) V \quad (50)$$

Nous verrons, au paragraphe 7, que ces expressions sont utiles pour analyser la qualité des mesures et détecter d'éventuels défauts de mesures.

### 3.3. Résolution par élimination des contraintes

Lors de la présentation de l'exemple relatif à la validation de relevés topographiques, nous avons vu qu'il est possible de réduire la dimension du problème en éliminant les contraintes et en n'estimant que les grandeurs indépendantes. Cette technique peut toujours être appliquée dans le cas de systèmes décrits par des équations linéaires. Afin d'en simplifier la présentation, nous ne l'exposerons que dans le cas particulier où toutes grandeurs sont mesurées directement ( $H = I$ ) et où le modèle est sans second membre ( $b = 0$ ).

La matrice des contraintes  $M$ , de dimension  $n.v$  avec  $n < v$  et de rang  $n$ , peut être décomposée en deux sous-matrices dont l'une, notée  $M_1$ , est carrée et régulière de rang  $n$ . La matrice des contraintes s'écrit alors sous forme partitionnée :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

En décomposant le vecteur  $X^*$  selon cette partition, la contrainte s'écrit :

$$M_1 X_1^* + M_2 X_2^* = 0 \quad (52a)$$

La matrice  $M_1$  étant inversible, on peut écrire :

$$X_1^* = -M_1^{-1}M_2X_2^* \quad (52b)$$

Le vecteur des grandeurs vraies s'exprime alors uniquement en fonction de  $X_2^*$  :

$$X^* = \begin{pmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_1^{-1}M_2 \\ I \end{pmatrix} X_2^* = HX_2^* \quad (53)$$

Le problème d'estimation revient alors à chercher le minimum, par rapport à  $X_2^*$ , du critère :

$$= \frac{1}{2} \|Z - HX_2^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (54)$$

Ce problème d'optimisation quadratique sans contrainte admet comme solution<sup>7</sup> :

$$\hat{X}_2 = (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} Z \quad (55)$$

L'expression de l'estimation des grandeurs vraies devient alors :

$$\hat{X} = H\hat{X}_2 = H(H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} Z \quad (56)$$

Si l'on utilise l'approche "globale", la matrice  $(MR^{-1}M^T)$  que l'on doit inverser (39) est de dimension  $n.n$ . La matrice  $(H^T V^{-1} H)$  de l'expression (56) n'est que de dimension  $(v-n).(v-n)$ . Selon les valeurs respectives du nombre  $n$  de contraintes et du nombre  $v$  de mesures, on utilisera l'une ou l'autre des deux formes (39) ou (56).

### 3.4. Exemple

Une application directe des techniques précédemment décrites concerne la résolution du problème classique d'équilibrage de bilan matière où l'on prend en compte des équations de conservation de masse ou de volume. On représente alors le processus par un graphe orienté dans lequel :

- les arcs (voies) correspondent aux flux de matière dont les directions sont déterminées par la structure du procédé,
- les noeuds représentent les unités de traitement, de transformation ou les points de jonction de plusieurs arcs, chaque noeud est décrit par une équation.

A ce système, on associe une matrice d'incidence  $M$  définie par :

$$M = (m_{ij}) \quad i = 1, \dots, n ; \quad j = 1, \dots, v$$

---

<sup>7</sup> Voir annexe 1

où  $n$  est le nombre de noeuds et  $v$  le nombre de voies, et telle que :

$m_{ij} = 0$  si la voie  $j$  n'est pas reliée au noeud  $i$ ,

$m_{ij} = 1$  si la voie  $j$  "entre" dans le noeud  $i$ ,

$m_{ij} = -1$  si la voie  $j$  "sort" du noeud  $i$ .

Considérons, à titre d'exemple, le réseau de la figure 2 formé de neuf noeuds et seize voies. Pour chaque voie, une mesure de débit massique est disponible. La précision des mesures de débit est exprimée sous forme d'écart-type.

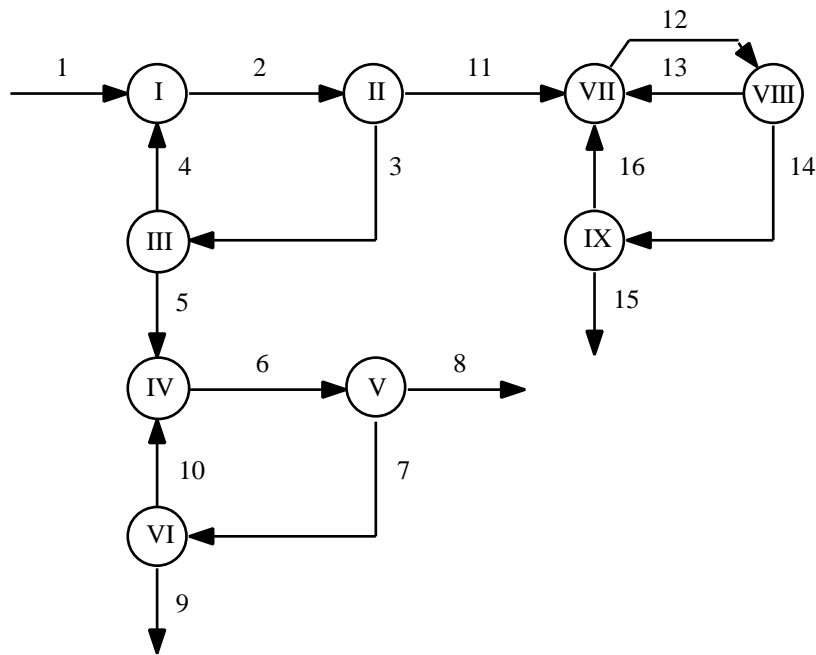


Figure 2 : Réseau de transport de matière

Les mesures brutes des débits ainsi que celles de leurs écarts-type sont regroupées dans le tableau 1.

Voie	Mesure	Ecart-type	Voie	Mesure	Ecart-type
1	111.30	2.78	9	37.90	0.95
2	127.60	1.05	10	20.50	0.51
3	106.40	2.66	11	23.80	0.60
4	18.20	0.46	12	43.80	1.10
5	86.30	2.16	13	4.80	0.12
6	111.00	2.78	14	39.70	0.99
7	72.20	1.81	15	26.40	0.66
8	49.40	1.24	16	13.60	0.34

Tableau 1 : Mesures et écarts-type

L'incohérence des mesures est mise en évidence dans le tableau 2 à l'aide des écarts de bouclage de bilan. Ces écarts sont obtenus à partir des équations de bilan, dans lesquelles les vraies grandeurs sont remplacées par les mesures.

Noeud	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Ecart	1.9	-2.6	1.9	-4.2	-10.6	13.8	-1.6	-0.7	-0.3

Tableau 2 : Ecart de bouclage de bilan

Les méthodes présentées ont été appliquées à la réconciliation de toutes les mesures<sup>8</sup>. Les estimations obtenues et leurs écarts-type sont donnés au tableau 3 ; on constate que les écarts-type obtenus sont inférieurs à ceux des mesures.

Voie	Estimation	Ecart-type	Voie	Estimation	Ecart-type
1	111.75	0.78	9	39.66	0.74
2	129.61	0.76	10	21.47	0.49
3	104.73	0.77	11	24.88	0.38
4	17.86	0.44	12	43.44	0.45
5	86.87	0.78	13	4.80	0.12
6	108.34	0.88	14	38.64	0.44
7	61.13	0.84	15	24.88	0.38
8	47.21	0.87	16	13.76	0.32

Tableau 3 : Estimations et écarts-type

#### 4. Cas des modèles non linéaires

Nous avons vu, au paragraphe 2.4., que l'estimation conduit à la résolution du système d'équations non linéaires (24). En pratique, si les contraintes du modèle peuvent être non linéaires, l'équation de mesure (2) est très souvent linéaire et s'exprime alors sous la forme :

$$Z = HX^* + \quad (57)$$

Afin de simplifier la présentation des méthodes de résolution nous ne considérerons que ce dernier cas.

##### 4.1. Solution itérative par linéarisation des contraintes

Le problème d'estimation des grandeurs vraies consiste à rechercher le minimum, par rapport à  $X^*$  du critère :

<sup>8</sup> Voir annexe 4

$$= \frac{1}{2} \|Z - HX^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (58a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X^*) = 0 \quad (58b)$$

Ce problème d'optimisation quadratique sous contraintes non linéaires peut être résolu de différentes manières. Plutôt que de linéariser le système d'équation issu des conditions de stationnarité du lagrangien (24), on peut ne linéariser que les équations de contrainte (58b). Le système à résoudre étant non linéaire, la solution est nécessairement itérative. A chaque itération  $i$ , on suppose que l'on dispose d'une solution  $\hat{X}_i$ , et partant de cette solution, on cherche à l'améliorer sur la base de l'utilisation d'un développement limité au premier ordre de la contrainte au voisinage de cette solution temporaire  $\hat{X}_i$ . Les solutions successives forment alors une suite qui converge vers la solution du problème.

Pour une solution  $\hat{X}_{i+1}$ , proche de  $\hat{X}_i$ , le développement limité au premier ordre de la contrainte autour de la valeur  $\hat{X}_i$  s'écrit :

$$F(\hat{X}_{i+1}) = F(\hat{X}_i) + G(\hat{X}_i)(\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) \quad (59a)$$

avec l'expression suivante du gradient de la contrainte :

$$G(\hat{X}_i) = \left. \frac{F(X)}{X^T} \right|_{X=\hat{X}_i} \quad (59b)$$

Si l'on considère que  $\hat{X}_{i+1}$  est l'optimum recherché, à l'itération  $i+1$ , le problème d'estimation se ramène à la recherche du minimum, par rapport à  $\hat{X}_{i+1}$  du critère :

$$i+1 = \frac{1}{2} \|Z - H\hat{X}_{i+1}\|_{V^{-1}}^2 \quad (60a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(\hat{X}_i) + G(\hat{X}_i)(\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \quad (60b)$$

La solution de ce problème a déjà été établie. En effet, le problème (60) est en tous points identique au problème (29) avec  $M = G(\hat{X}_i)$  et  $b = G(\hat{X}_i)\hat{X}_i - F(\hat{X}_i)$ . La solution s'écrit :

$$\hat{X}_{i+1} = P_i R_i^{-1} \left( H^T V^{-1} Z + G_i^T (G_i \hat{X}_i - F_i) \right) + R_i^{-1} G_i^T \left( G_i R_i^{-1} G_i^T \right)^{-1} (G_i \hat{X}_i - F_i) \quad (61a)$$

avec les matrices :

$$P_i = I - R_i^{-1} G_i^T \left( G_i R_i^{-1} G_i^T \right)^{-1} G_i \quad (61b)$$

$$R_i = H^T V^{-1} H + G_i^T G_i \quad (61c)$$

Les notations  $G_i$  et  $F_i$  sont utilisées à la place de  $G(\hat{X}_i)$  et  $F(\hat{X}_i)$  afin de simplifier les écritures.

Pratiquement, l'estimation  $\hat{X}$  s'obtient selon la procédure itérative suivante :

*Etape 1 :* Choix d'une estimation initiale  $\hat{X}_0$ .  $i = 1$

*Etape 2 :* Calcul du résidu de contrainte  $F_i$  et du gradient  $G_i$  (59b)

Calcul des matrices intermédiaires  $P_i$  et  $R_i$  (61b) et (61c)

*Etape 3 :* Calcul de l'estimation  $\hat{X}_{i+1}$  (61a)

*Etape 4 :* Test de convergence des estimations. Si le test n'est pas satisfait,  $i = i + 1$  et retour à l'étape 2, sinon  $\hat{X} = \hat{X}_{i+1}$  et arrêt de la procédure.

D'un point de vue mathématique, le test d'arrêt doit porter sur la nullité, à un seuil choisi, des dérivées du lagrangien. En pratique, l'arrêt de la procédure s'effectue souvent en testant que la différence entre deux estimations successives est inférieure à un seuil donné.

Remarquons que l'algorithme proposé n'apporte aucune indication sur la progression de la suite des estimations vers la solution optimale. Cependant, comme cette solution doit vérifier la contrainte  $F(\hat{X}) = 0$ , un test pratique consiste à vérifier la décroissance de la quantité :

$$t_i = \frac{1}{2} \|F(\hat{X}_i)\|^2 \quad (62)$$

Pour une variation  $\hat{X}_i = \hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i$  de deux estimations consécutives, la quantité  $t_i$  varie sensiblement de :

$$t_i = \frac{1}{2} \left. \frac{(F^T(\hat{X})F(\hat{X}))}{\hat{X}^T} \right|_{\hat{X}=\hat{X}_i} \hat{X}_i \quad (63a)$$

$$t_i = F^T(\hat{X}_i) \frac{F(\hat{X})}{\hat{X}^T} \Big|_{\hat{X}=\hat{X}_i} \hat{X}_i \quad (63b)$$

Compte tenu de l'équation (60b), on a :

$$t_i = -F^T(\hat{X}_i)F(\hat{X}_i) \quad (63c)$$

Cette quantité étant toujours négative, les  $t_i$  décroissent à condition que les pas d'itération soient "petits" de façon à valider le développement limité (59a). Dans ce cas, on peut affirmer que chaque itération améliore l'estimation ; ceci ne prouve pas pour autant la convergence de l'algorithme vers la solution optimale.

#### 4.2. Propriétés statistiques de l'estimateur

Contrairement au cas linéaire, il n'est pas possible d'établir des formes analytiques exactes de l'espérance et de la variance de l'estimateur puisque celui-ci est obtenu à l'aide d'une procédure itérative. On peut cependant chercher à établir des expressions approchées de ces grandeurs.

Rappelons la forme de l'équation de mesure :

$$Z = HX^* + \quad (64)$$

L'estimation  $\hat{X}$  peut également être écrite en fonction des grandeurs vraies :

$$\hat{X} = X^* + \hat{x} \quad (65a)$$

On en déduit :

$$H\hat{X} = HX^* + H\hat{x} \quad (65b)$$

Les estimations satisfont la contrainte, on a donc :

$$F(\hat{X}) = 0 \quad (66)$$

Sous l'hypothèse que l'estimation est proche des grandeurs vraies, on peut écrire le développement en série de Taylor des contraintes autour des grandeurs vraies, limité au premier ordre :

$$F(\hat{X}) = F(X^*) + G(X^*)(\hat{X} - X^*) \quad (67)$$

On a, à l'évidence,  $F(X^*) = 0$ , ce qui permet d'établir :

$$G(X^*)(\hat{X} - X^*) = G(X^*)\hat{x} = G\hat{x} = 0 \quad (68)$$

L'estimation  $\hat{X}$  est l'optimum du problème (58), le critère évalué en cette valeur, vaut :

$$\min(\ ) = \frac{1}{2} \|Z - H\hat{X}\|_{V^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \|HX^* + \quad - HX^* - H\hat{x}\|_{V^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \| \quad - H\hat{x}\|_{V^{-1}}^2 \quad (69)$$

La valeur  $\hat{x}$  qui permet d'atteindre cet optimum tout en satisfaisant la contrainte  $G\hat{x} = 0$  est donnée par l'expression suivante (cf. équation (38) avec  $Z = \quad$ ,  $M = G$  et  $b = 0$ ) :

$$\hat{x} = PR^{-1}H^T V^{-1} \quad (70a)$$

avec :

$$R = H^T V^{-1} H + G^T G \quad (70b)$$



$$P = I - R^{-1}G^T (GR^{-1}G^T)^{-1}G \quad (70c)$$

L'espérance mathématique de la correction  $\hat{x}$  s'exprime alors aisément :

$$\text{Esp}(\hat{x}) = \text{Esp}(PR^{-1}H^T V^{-1}) = PR^{-1}H^T V^{-1}\text{Esp}(y) = 0 \quad (71)$$

On en déduit que l'estimateur est non biaisé puisqu'on a, d'après (65a) :

$$\text{Esp}(\hat{X}) = \text{Esp}(X^*) + \text{Esp}(\hat{x}) = \text{Esp}(X^*) \quad (72)$$

La matrice de variance-covariance de la correction peut ensuite être évaluée. Ce calcul a déjà été conduit ((43)-(49)) ; on obtient :

$$\text{Var}(\hat{x}) = \text{Esp}(\hat{x}^T \hat{x}) = PR^{-1} \quad (73)$$

Cependant, sous cette forme ce résultat est inexploitable puisque les deux matrices  $P$  et  $R$  dépendent de la matrice  $G$ , gradient des contraintes que l'on doit évaluer en les valeurs vraies  $X^*$  qui sont inconnues ! Une approximation de la variance peut être obtenue en substituant aux valeurs vraies  $X^*$ , le vecteur des estimations  $\hat{X}$  ; on a alors :

$$\text{Var}(\hat{X}) \approx \tilde{P}\tilde{R}^{-1} \quad (74a)$$

avec :

$$\tilde{P} = I - R^{-1}G^T \hat{X} (G \hat{X} R^{-1}G^T \hat{X})^{-1} G \hat{X} \quad (74b)$$

$$\tilde{R} = H^T V^{-1} H + G^T \hat{X} (G \hat{X}) \quad (74c)$$

### 4.3. Un exemple élémentaire

On considère une pulpe constituée d'une suspension calcaire solide homogène dans de l'eau. La densité de ce mélange,  $d^*$ , est reliée à son pourcentage solide,  $a^*$ , par la relation :

$$a^* = C \left(1 - \frac{1}{d^*}\right)$$

où  $C$  est une constante uniquement fonction de la densité  $d_s$  de la suspension solide pure (dans le cas du calcaire en poudre on a :  $C = \frac{d_s}{d_s - 1} = 1.588$ ).

Considérons le couple de mesures  $d = 1.50$  et  $a = 0.62$  de variances empiriques respectives  $v_d = 0.07$  et  $v_a = 0.03$ .

Ces mesures ne satisfont pas la contrainte du modèle :

$$F(a^*, d^*) = a^* - C \left(1 - \frac{1}{d^*}\right) = 0$$

En effet, en substituant les mesures aux grandeurs vraies, on obtient un "résidu" :

$$r = F(a, d) = 0.09$$

dont la variance approchée, en supposant  $d^*$  et  $a^*$  indépendants, est :

$$\text{Var}(r) = v_a + \frac{C^2}{d^2} v_d = 0.06$$

Ce résidu est non nul et l'on va chercher à réconcilier les données. En l'absence d'indication sur la répartition des erreurs de mesure, la réconciliation des données consiste à déterminer les estimations  $\hat{a}$  et  $\hat{d}$  qui minimisent, par rapport à  $a^*$  et  $d^*$  :

$$= \frac{1}{2} \left( (\hat{a} - a)^2 v_a^{-1} + (\hat{d} - d)^2 v_d^{-1} \right)$$

sous la contrainte  $F(\hat{a}, \hat{d}) = 0$

Ce système peut aisément être résolu en mettant en œuvre la solution itérative par linéarisation des contraintes. Les deux variables  $\hat{a}$  et  $\hat{d}$  peuvent être regroupées dans un vecteur :

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{d} \end{pmatrix}$$

Le gradient des contraintes s'exprime aisément :

$$G(\hat{a}, \hat{d}) = \begin{pmatrix} \frac{F(\hat{a}, \hat{d})}{\hat{a}} & \frac{F(\hat{a}, \hat{d})}{\hat{d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{C}{\hat{d}^2} \end{pmatrix}$$

La matrice  $V$  (indépendante des itérations) s'explique :

$$V = \begin{pmatrix} v_a & 0 \\ 0 & v_d \end{pmatrix}$$

Compte tenu du fait que les deux grandeurs  $a$  et  $d$  sont mesurées, l'équation de mesure est simplifiée et l'on a, par rapport au cas général,  $H = I$ . Le lecteur vérifiera que, dans ce cas, l'estimation à l'étape  $i + 1$  s'écrit (simplification de 61a) :

$$\hat{X}_{i+1} = \left( I - VG_i^T (G_i VG_i^T)^{-1} G_i \right) Z + VG_i^T (G_i VG_i^T)^{-1} G_i (G_i \hat{X}_i - F_i)$$

Le programme Matlab permettant de calculer ces estimations est donné en annexe 5. On notera que la convergence est ici très rapide.

## 5. Notions d'observabilité et de redondance pour les modèles linéaires

### 5.1. Observabilité - définition et analyse

Lors de l'exposé des méthodes d'estimation dans le cas de modèles linéaires, nous avons émis l'hypothèse que le système est observable c'est-à-dire que la connaissance du vecteur de mesure permet d'estimer de façon unique le vecteur d'état. Examinons maintenant plus en détails ce point.

L'équation de modèle et l'équation de mesure sont les suivantes :

$$MX^* - b = 0 \quad (75)$$

$$Z = HX^* + \quad (76)$$

La situation la plus courante est celle où le nombre de mesures est inférieur au nombre de variables  $m < n$  et où l'on n'effectue pas de mesures redondantes, c'est-à-dire  $\text{rang}(H) = \dim(Z) = m$ .

Dans ce cas, le système est globalement observable si :

$$\text{rang} \begin{matrix} M \\ H \end{matrix} = \dim(X^*) = v \quad (77)$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, aucune des méthodes présentées ne peut être mise en œuvre puisque certaines matrices intervenant dans le calcul de l'estimation deviennent non inversibles. On peut cependant imaginer sans peine que certaines variables d'état (ou combinaisons linéaires de celles-ci) sont observables. Il est donc intéressant d'analyser la structure du système pour extraire le sous-système observable. On emploie alors le vocable d'observabilité partielle. On remarquera que cette observabilité est indépendante des erreurs de mesures et ne fait intervenir que la structure des équations de modèle et d'observation. Le terme constant  $b$  intervenant dans l'équation de modèle ne modifie pas non plus la démarche qui va être exposée. Afin de simplifier les écritures, nous le considérerons nul (le lecteur pourra sans peine modifier les résultats obtenus pour sa prise en compte).

Compte tenu des hypothèses formulées sur la matrice d'observation  $H$ , il existe une matrice carrée régulière  $T$ , de dimension  $v.v$ , telle que :

$$HT = (H_1 \quad 0) \quad (78)$$

avec  $\text{rang}(H_1) = m$ . Cette matrice  $T$  peut aisément s'obtenir à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $H$ . Posons alors le changement de variable suivant :

$$X^* = T\bar{X} \quad (79)$$

L'équation de mesure s'écrit :

$$Z = HT\bar{X} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{X} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} + \quad (80)$$

De même, l'équation de modèle se transforme comme suit :

$$MX^* = MT\bar{X} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (81)$$

Le vecteur  $\bar{X}$  a été décomposé en accord avec la partition de la matrice  $HT$ . Le système peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} H_1 \bar{X}_1 + \quad &= Z & H_1 & 0 & \bar{X}_1 & & Z \\ M_1 \bar{X}_1 + M_2 \bar{X}_2 &= 0 & M_1 & M_2 & \bar{X}_2 & + 0 & = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

La matrice  $H_1$  étant régulière, le système est alors globalement observable si  $\bar{X}_2$  peut être déterminé de manière unique ce qui n'est possible que si et seulement si :

$$\text{rang}(M_2) = \dim(\bar{X}_2) = v - m \quad (83)$$

Si  $\text{rang}(M_2) = k < v - m$  alors la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $M_2$  permet de l'écrire en faisant apparaître deux matrices orthogonales  $P$  et  $Q$  :

$$M_2 = PRQ^T = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \quad (84)$$

La matrice  $M_2$  est de dimension  $n.(v - m)$ . La matrice  $P$  est donc de dimension  $n.n$ , la matrice  $R$ , de dimension  $n.(v - m)$  avec  $R_1$ , matrice triangulaire régulière de dimension  $k.k$ , et la matrice  $Q$  est de dimension  $(v - m).(v - m)$ . En remplaçant  $M_2$  par sa décomposition (84) et en multipliant le système par la matrice régulière suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (85)$$

le système (82) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ P^T M_1 & RQ^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (86a)$$

En partitionnant selon les composantes de  $R$ , on a aussi :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ P_1^T M_1 & R_1 Q_1^T \\ P_2^T M_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (86b)$$

Le système initial est donc équivalent aux deux sous-systèmes suivants :

$$\begin{aligned} H_1 \bar{X}_1 + &= Z \\ P_2^T M_1 \bar{X}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (87a)$$

$$\left\{ Q_1^T \bar{X}_2 = -R_1^{-1} P_1^T M_1 \bar{X}_1 \right. \quad (87b)$$

Le sous-système (87a) est globalement observable ; on a en effet :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} P_2^T M_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \dim(\bar{X}_1) = m \quad (88)$$

car  $\text{rang}(H_1) = m$  Les variables  $\bar{X}_1$  peuvent donc être estimées à l'aide d'une des méthodes présentées au paragraphe 3, en minimisant, par rapport à  $\bar{X}_1$ , le critère :

$$= \frac{1}{2} \|Z - H_1 \bar{X}_1\|_{V^{-1}}^2 \quad (89a)$$

$$\text{sous la contrainte } P_2^T M_1 \bar{X}_1 = 0 \quad (89b)$$

Ce système est qualifié de système redondant car l'on dispose de la mesure de chaque variable d'état  $\bar{X}_1$  ( la matrice  $H_1$  est inversible). Le problème (89) est donc équivalent à la recherche du minimum, par rapport à  $\bar{X}_1$  du critère :

$$= \frac{1}{2} \|\bar{Z} - \bar{X}_1\|_{\bar{V}^{-1}}^2 \quad (90a)$$

$$\text{sous la contrainte } P_2^T M_1 \bar{X}_1 = 0 \quad (90b)$$

Le vecteur des mesures modifiées s'écrit  $\bar{Z} = H_1^{-1} Z$  et sa matrice de variance associée  $\bar{V} = H_1^{-1} V^{-1} H_1^{-1 T}$ .

Le système (87b) doit ensuite être analysé. Certaines variables inconnues  $\bar{X}_2$  peuvent être déduite de la connaissance de  $\hat{\bar{X}}_1$ , d'autres sont inobservables.

## 5.2. Exemple traité

Considérons le système linéaire décrit par son modèle constitué des cinq équations suivantes :

$$\begin{aligned} 3x_1^* + 2x_2^* + x_3^* + x_4^* + 5x_5^* &= 0 \\ 5x_2^* + 4x_3^* + 2x_4^* + 2x_6^* + 2x_7^* &= 0 \\ x_1^* + 5x_3^* + 4x_4^* + 2x_5^* + x_6^* + x_7^* &= 0 \\ 3x_2^* + 2x_3^* + x_4^* + x_6^* + x_7^* &= 0 \\ 4x_1^* + x_3^* &= 0 \end{aligned}$$

et par les trois équations de mesure :

$$5x_1 + x_5 = -35.1$$

$$x_2 + 3x_5 = 15.5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_5 = -12.1$$

Comment "résoudre" ce système ? Plus précisément, quelles sont les variables que l'on peut estimer ?

Remarquons tout d'abord que l'équation d'observation peut directement s'écrire sous la forme (78) ; en effet en définissant comme vecteur d'état :

$$X^* = (x_1^* \quad x_2^* \quad x_5^* \quad x_3^* \quad x_4^* \quad x_6^* \quad x_7^*)^T$$

c'est-à-dire :

$$\bar{X}_1 = (x_1^* \quad x_2^* \quad x_5^*)^T \quad \text{et} \quad \bar{X}_2 = (x_3^* \quad x_4^* \quad x_6^* \quad x_7^*)^T$$

On a :

$$H = (H_1 \quad 0) \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Compte tenu de cette partition, la matrice de contraintes s'écrit :

$$(M_1 \quad M_2) = \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

On a  $\text{rang}(M_2) = 3$ , l'ensemble des variables ne sera donc pas observable. Après les diverses transformations exposées précédemment, le système (88a) s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} 5x_1^* + x_5^* + 1 & = & -35,1 \\ x_2^* + 3x_5^* + 2 & = & 15,5 \\ 2x_1^* + 2x_2^* + x_5^* + 3 & = & -12,1 \\ 2.50x_1^* + 2.66x_2^* + 4.06x_5^* & = & 0 \\ 0.17x_1^* + 0.63x_2^* + 0.28x_5^* & = & 0 \end{array}$$

L'estimation des variables  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  et  $x_5^*$  conduit aux valeurs  $\hat{x}_1 = -8.12$ ,  $\hat{x}_2 = 0$  et  $\hat{x}_5 = 5$ . Le système (88b) s'écrit :

$$\begin{aligned}
0,78 \hat{x}_3 + 0,52 \hat{x}_4 + 0,25 \hat{x}_6 + 0,25 \hat{x}_7 &= -0,16 \\
0,01 \hat{x}_3 + 0,57 \hat{x}_4 - 0,58 \hat{x}_6 - 0,58 \hat{x}_7 &= 0,81 \\
0,63 \hat{x}_3 - 0,63 \hat{x}_4 - 0,32 \hat{x}_6 - 0,32 \hat{x}_7 &= -51,53
\end{aligned}$$

La mise sous forme échelon de ce système conduit à :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_3 &= -32,47 \\
\hat{x}_4 &= 33,09 \\
\hat{x}_6 + \hat{x}_7 &= 31,84
\end{aligned}$$

Les variables  $x_6^*$  et  $x_7^*$  sont donc inobservables. Ce résultat était prévisible puisque l'on constate que celles-ci n'interviennent pas dans l'équation de mesure et qu'elles interviennent systématiquement sous la forme d'une même combinaison linéaire ( $x_6^* + x_7^*$ ) dans les équations de contraintes.

## 6. Extension des méthodes au cas dynamique

Les méthodes d'estimation d'état exposées précédemment peuvent être étendues au cas de système dynamiques. Considérons ici la classe des systèmes décrits par les équations suivantes :

$$x_{k+1}^* = Ax_k^* + Bu_k^* \quad (91a)$$

$$y_k = Cx_k^* + v_k \quad (91b)$$

$$z_k = Du_k^* + w_k \quad (91c)$$

Les deux premières équations sont "classiques" pour la représentation de systèmes dynamiques. La première exprime la loi d'évolution de l'état  $x^* \in \mathbf{R}^n$  en fonction de la commande  $u^* \in \mathbf{R}^r$  alors que la seconde précise la dépendance de la sortie  $y \in \mathbf{R}^m$  en fonction de l'état et d'un bruit additif  $v$ . La dernière équation traduit le fait que l'on ne connaît pas exactement la commande mais que l'on dispose de "mesures"  $z \in \mathbf{R}^q$  de celles-ci. Cette équation a la même structure que la précédente. Cette formulation est intéressante car elle permet, par exemple, en modifiant la matrice  $D$ , de considérer que certaines entrées (commandes) sont inconnues.

Les erreurs de mesures  $v$  et  $w$  sont des variables aléatoires distribuées selon des lois normales centrées de matrices de variance-covariance  $V_y$  et  $V_z$ . Elles sont supposées connues et constantes quelque soit l'instant d'observation.

### 6.1. Estimation d'état sur un horizon fixe

On considère ici que l'on observe le comportement du système dynamique sur un horizon donné correspondant à  $N$  pas d'échantillonnage. Définissons alors le vecteur composite  $X_N^*$  formé alternativement des vecteurs d'états et des vecteurs de commandes aux différents instants (vecteur d'état généralisé), le vecteur composite  $Z_N$  formé alternativement des vecteurs de mesures et le vecteur composite  $W_N$  des bruits de mesure :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} x_1^* \\ u_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ u_{N-1}^* \\ x_N^* \end{array} & \begin{array}{c} Z_N = \\ y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ y_N \end{array} & \begin{array}{c} W_N = \\ v_1 \\ w_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ v_N \end{array}
\end{array} \quad (92)$$

L'ensemble des équations peut alors être écrit sous la forme :

$$MX_N^* = 0 \quad (93a)$$

$$Z_N = HX_N^* + W_N \quad (93b)$$

avec :

$$\begin{array}{cccccccc}
A & B & -I & . & . & \dots & . & . & . \\
. & . & A & B & -I & \dots & . & . & . \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
. & . & . & . & . & \dots & A & B & -I
\end{array} \quad M = \quad \begin{array}{ccccccc}
C & . & \dots & . & . \\
. & D & \dots & . & . \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
. & . & \dots & D & . \\
. & . & \dots & . & C
\end{array} \quad H = \quad (94)$$

où  $M$  est de dimension  $(n(N-1), (n+m)(N-1)+n)$  et  $H$  est de dimension  $((r+q)(N-1)+r, (n+m)(N-1)+n)$ . Le système est observable si :

$$\text{rang} \begin{array}{c} H \\ M \end{array} = (N-1)(n+m) + n \quad (95)$$

Dans ce cas, l'estimation au sens du maximum de vraisemblance (qui correspond ici à l'estimation au sens des moindres carrés) de l'état du système (93) s'obtient aisément en résolvant le problème d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires suivant :

$$\min_{X_N^*} = \frac{1}{2} \|Z_N - HX_N^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (96)$$

où  $V$  est la matrice composite de variance-covariance des bruits de mesure. Après avoir formé le lagrangien correspondant à ce problème puis cherché ses conditions de stationnarité au premier ordre, on obtient aisément la solution :

$$\hat{X}_N = PR^{-1}H^T V^{-1}Z_N \quad (97a)$$

avec :

$$R = H^T V^{-1}H + M^T M \quad (97b)$$

$$P = I - R^{-1}M^T(MR^{-1}M^T)^{-1}M \quad (97c)$$



La seule difficulté du calcul réside dans la dimension de la matrice à inverser. En effet celle-ci croît très vite avec la dimension du système. De nombreuses techniques ont été développées afin de remédier à cet inconvénient.

### 6.3. Estimation d'état sur "fenêtre glissante"

Supposons maintenant que l'on fasse croître l'horizon "fixe" de la méthode précédente au fur et à mesure de la disponibilité des informations collectées au cours du temps. Intuitivement, on conçoit fort bien que lorsque l'horizon va être "grand" les estimations des grandeurs à l'instant  $N$  (borne supérieure de l'horizon) ne vont plus être influencées par les mesures de l'instant initial ( $k=1$ ). Le système possède une "mémoire" correspondant à une fenêtre d'observation de largeur  $L$  à travers laquelle on l'observe.

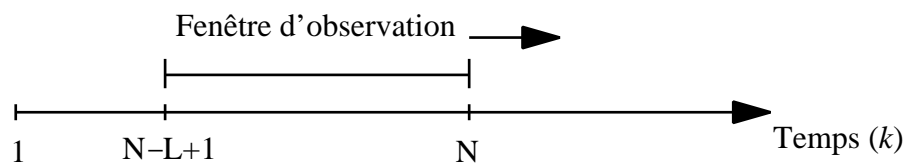


Figure 3 : Estimation sur fenêtre glissante.

Lors de l'acquisition de nouvelles mesures, comme l'indique la figure 3, on décale la fenêtre d'observation vers la droite. L'estimation des différentes grandeurs s'effectue sur cette fenêtre d'observation de largeur  $L$  comme dans la méthode exposée au paragraphe précédent. Cependant, on constate que, par le jeu de glissement de la fenêtre, une même grandeur est estimée plusieurs fois. Afin de pouvoir utiliser les résultats de cette méthode, seules les estimations des grandeurs les plus récentes,  $\hat{u}_{N-1}$  et  $\hat{x}_N$  sont conservées. Remarquons qu'une fois que la largeur de la fenêtre d'observation est fixée, la matrice de projection  $PR^{-1}H^TV^{-1}$  qui intervient dans l'estimation est fixe ; son calcul ne doit donc être effectué qu'une seule fois. De plus, comme on ne s'intéresse qu'aux estimations  $\hat{u}_{N-1}$  et  $\hat{x}_N$ , on peut également réduire la dimension de la matrice en sélectionnant juste ses dernières colonnes.

La largeur  $L$  de la fenêtre d'observation qui est un paramètre de la méthode proposée doit être choisie correctement. Pour la déterminer, on peut examiner l'évolution de l'estimation à un instant donné en fonction du nombre de mesures antérieures prises en compte où examiner l'évolution de la variance de cette même estimation. Lors de l'initialisation du calcul, la fenêtre d'observation est placée à l'origine et on effectue l'estimation des  $L-1$  premières commandes et des  $L$  premiers états. Ensuite, on estime le couple  $(\hat{u}_L, \hat{x}_{L+1})$ , puis le couple  $(\hat{u}_{L+1}, \hat{x}_{L+2})$  etc.

### 6.4. Filtrage entrée-sortie généralisé

Le système décrit par les équations (91) peut être ré-écrit en utilisant une formulation système singulier. En effet, définissons les vecteurs généralisés d'état, de mesures et de bruits :

$$\mathbf{X}_k = \begin{matrix} * \\ u_{k-1} \\ * \\ x_k \end{matrix} \quad \mathbf{Z}_k = \begin{matrix} z_{k-1} \\ y_k \end{matrix} \quad \mathbf{W}'_k = \begin{matrix} w_{k-1} \\ v_k \end{matrix} \quad (98)$$

ainsi que les matrices suivantes :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{matrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{matrix} \quad \mathbf{V} = \begin{matrix} \mathbf{V}_z & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_y \end{matrix} \quad (99)$$

Les équations (91) peuvent alors s'écrire sous la forme du système singulier suivant :

$$\mathbf{E}\mathbf{X}_{k+1}^* = \mathbf{F}\mathbf{X}_k^* \quad (100a)$$

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}\mathbf{X}_k^* + \mathbf{W}_k \quad (100b)$$

L'état généralisé du système (100) peut alors être estimé en utilisant les résultats établis pour les systèmes singuliers.

Nous proposons d'établir une forme récurrente de l'estimation de l'état généralisé. Considérons tout d'abord l'estimation sur le plus petit horizon possible, c'est-à-dire un horizon de largeur égale à 2. Au sens du maximum de vraisemblance et avec l'hypothèse d'une distribution normale des erreurs de mesure, on doit minimiser le critère :

$$= \sum_{k=1}^2 \left\| \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}\mathbf{X}_k^* \right\|_{\mathbf{V}^{-1}}^2 \quad (101a)$$

sous la contrainte :

$$\mathbf{E}\mathbf{X}_2^* - \mathbf{F}\mathbf{X}_1^* = 0 \quad (102b)$$

Considérons alors le lagrangien :

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^2 \left\| \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}\mathbf{X}_k^* \right\|_{\mathbf{V}^{-1}}^2 + \lambda^T (\mathbf{E}\mathbf{X}_2^* - \mathbf{F}\mathbf{X}_1^*) \quad (103)$$

Les équations d'optimalité s'écrivent :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_{1/2} - \mathbf{Z}_1) - \mathbf{F}^T \lambda = 0 \quad (104a)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_{2/2} - \mathbf{Z}_2) + \mathbf{E}^T \lambda = 0 \quad (104b)$$

$$\mathbf{E}\hat{\mathbf{X}}_{2/2} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_{1/2} = 0 \quad (104c)$$

La notation  $\hat{\mathbf{X}}_{k/2}$  signifie que l'on estime  $\hat{\mathbf{X}}_k$  pour  $k = 1, 2$  à l'aide des informations observées sur un horizon de largeur 2. Après quelques calculs matriciels élémentaires, on obtient :

$$\hat{\mathbf{X}}_{2/2} = \mathbf{R}_{2/2}^{-1} \left( \mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{E}^T (\mathbf{F}\mathbf{R}_{1/2}^{-1} \mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{F}\mathbf{R}_{1/2}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Z}_1 \right) \quad (105a)$$

avec :

$$R_{1/2} = H^T V^{-1} H + F^T F \quad (105b)$$

$$R_{2/2} = H^T V^{-1} H + E^T \left( F R_{1/2}^{-1} F^T \right)^{-1} E - E^T E \quad (105c)$$

On a ainsi exprimé l'estimé de l'état  $\hat{X}_{k/2}$ , à l'instant terminal de l'horizon d'observation, en fonction des mesures disponibles. La forme (105a) montre que l'estimation est une combinaison linéaire des mesures. Notons cependant que cette reconstruction n'est possible que si la quantité d'information apportée par ces deux mesures  $Z_1$  et  $Z_2$  est suffisante (problème d'observabilité du système). Si ce n'est pas le cas, l'horizon d'observation doit être augmenté.

De façon analogue, on peut s'intéresser à l'estimation  $\hat{X}_{3/3}$  obtenue en minimisant le critère :

$$= \sum_{k=1}^3 \left\| Z_k - H X_k^* \right\|_{V^{-1}}^2 \quad (106a)$$

sous les contraintes :

$$E X_2^* - F X_1^* = 0 \quad (106b)$$

$$E X_3^* - F X_2^* = 0 \quad (106c)$$

Les équations d'optimalité s'écrivent cette fois sous la forme :

$$H^T V^{-1} \left( H \hat{X}_{1/3} - Z_1 \right) - F^T \mu_1 = 0 \quad (107a)$$

$$H^T V^{-1} \left( H \hat{X}_{2/3} - Z_2 \right) + E^T \mu_1 - F^T \mu_2 = 0 \quad (107b)$$

$$H^T V^{-1} \left( H \hat{X}_{3/3} - Z_3 \right) + E^T \mu_2 = 0 \quad (107c)$$

$$E \hat{X}_{2/3} - F \hat{X}_{1/3} = 0 \quad (107d)$$

$$E \hat{X}_{3/3} - F \hat{X}_{2/3} = 0 \quad (107e)$$

Quelques calculs matriciels permettent d'exprimer  $\hat{X}_{3/3}$  ; on obtient :

$$\hat{X}_{3/3} = R_{3/3}^{-1} \left( H^T V^{-1} Z_3 + E^T \left( F R_{2/3}^{-1} F^T \right)^{-1} F R_{2/3}^{-1} R_{2/2} \hat{X}_{2/2} \right) \quad (108a)$$

avec :

$$R_{1/3} = H^T V^{-1} H + F^T F \quad (108b)$$

$$R_{2/3} = H^T V^{-1} H + E^T \left( F R_{1/3}^{-1} F^T \right)^{-1} E + F^T F + E^T E \quad (108c)$$

$$R_{3/3} = H^T V^{-1} H + E^T \left( F R_{2/3}^{-1} F^T \right)^{-1} E - E^T E \quad (108d)$$

En remarquant que l'on a  $R_{2/3} = R_{2/2} + F^T F$  et en appliquant le lemme d'inversion matricielle à  $(FR_{2/3}^{-1}F^T)^{-1}$ , l'expression plus simple suivante peut encore être obtenue :

$$\hat{X}_{3/3} = R_{3/3}^{-1} \left( E^T (FR_{2/2}^{-1}F^T)^{-1} F \hat{X}_{2/2} + H^T V^{-1} Z_3 \right) \quad (109a)$$

avec :

$$R_{3/3} = H^T V^{-1} H + E^T \left( FR_{2/2}^{-1} F^T \right)^{-1} E \quad (109b)$$

Avec un raisonnement par récurrence, on montre aisément que ces expressions se généralisent à l'ordre  $N$  et l'on a la récurrence générale :

$$\hat{X}_{N/N} = R_{N/N}^{-1} \left( E^T (FR_{N-1/N-1}^{-1}F^T)^{-1} F \hat{X}_{N-1/N-1} + H^T V^{-1} Z_N \right) \quad (110a)$$

$$R_{N/N} = H^T V^{-1} H + E^T \left( FR_{N-1/N-1}^{-1} F^T \right)^{-1} E \quad (110b)$$

initialisée avec :

$$R_{0/0} = I$$

La matrice  $R_{N/N}^{-1}$  est la variance de l'estimation  $\hat{X}_{N/N}$ . Remarquons que l'équation d'évolution de cette variance revêt la forme d'une équation de Riccati généralisée. Si  $R_{N/N}^{-1}$  converge vers une valeur limite  $R$  (solution de l'équation de Riccati), l'estimateur (110a) s'écrit en fonction de cette solution :

$$\hat{X}_{N/N} = R^{-1} \left( E^T (FR^{-1}F^T)^{-1} F \hat{X}_{N-1/N-1} + H^T V^{-1} Z_N \right) \quad (110c)$$

Les expressions (110) constituent une extension de la formulation du filtre de Kalman aux systèmes singuliers (en posant la matrice  $E$  égale à l'identité, on retrouve d'ailleurs, à partir des expressions (110) la forme classique du filtre de Kalman).

## 7. Application au diagnostic

La validation de mesures n'est pas une fin en soi. Les données issues de l'estimation qui sont réputées statistiquement plus pertinentes que les mesures, sont ensuite généralement utilisées pour améliorer la conduite d'un processus, pour évaluer et éditor des rendements de production, etc.. L'analyse des résultats de l'estimation peut, en particulier, permettre la détection et/ou la localisation de défauts de mesures.

### 7.1. Cas des modèles linéaires

On considère ici le sous-système redondant, tel qu'il a été défini au paragraphe 5.1, extrait d'un système linéaire. Après changement de notations, celui-ci est décrit par les deux équations suivantes :

$$X = X^* + \quad (111a)$$

$$MX^* = 0 \quad (111b)$$

L'estimation des grandeurs redondantes est obtenue en minimisant, par rapport à  $X^*$ , le critère :

$$= \frac{1}{2} \|X - X^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (112a)$$

$$\text{sous la contrainte } MX^* = 0 \quad (112b)$$

La solution de ce problème s'écrit :

$$\hat{X} = PX \quad (113a)$$

avec :

$$P = I - VM^T(MVM^T)^{-1}M \quad (113b)$$

on a de plus :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \hat{V} = PV \quad (113c)$$

#### Analyse des corrections

Exprimons le vecteur des corrections apportées par l'estimation. Compte tenu de (113) et de (111), on a :

$$E = X - \hat{X} = VM^T(MVM^T)^{-1}MX \quad (114a)$$

$$E = VM^T(MVM^T)^{-1}M \quad (114b)$$

Le vecteur des erreurs de mesure étant distribué, par hypothèse, selon une loi normale centrée de matrice de variance-covariance  $V$ , le vecteur de correction  $E$  est lui aussi distribué selon une loi normale centrée de matrice de variance-covariance égale à  $V_E$  :

$$V_E = VM^T(MVM^T)^{-1}MV \quad (115)$$

On définit alors un vecteur de corrections normalisées en divisant chaque correction par son écart-type :

$$E_n(i) = \frac{E(i)}{\sqrt{V_E(i,i)}} \quad (116)$$

Chaque composante  $E_n(i)$  de ce vecteur est distribuée selon une loi normale centrée réduite. On peut alors tester la nullité de chaque correction par un test statistique bilatéral. Pour un seuil de confiance  $\alpha$ , l'hypothèse de nullité est acceptée si :

$$-u_{1-\alpha/2} < E_n(i) < u_{1-\alpha/2} \quad (117)$$

où  $u_{1-\alpha/2}$  correspond à la valeur de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour  $1 - \alpha/2$ . Ainsi, pour un seuil de confiance de 5 %, on a  $u_{1-\alpha/2} = 1.96$ .

On peut donc, après l'estimation, éprouver la validité des hypothèses de distribution normale des erreurs de mesures. Une correction normalisée hors de l'intervalle défini par (117) est révélatrice de la présence d'une erreur de mesure non normale correspondant à un biais. Les hypothèses nécessaires à l'utilisation des méthodes exposées n'étant pas satisfaites, il faut alors localiser la mesure suspecte et procéder à une nouvelle estimation en prenant soin de supprimer cette mesure.

On peut montrer que la correction normalisée la plus grande en valeur absolue correspond bien à la mesure soumise à l'erreur la plus importante. En effet, compte tenu des expressions (114b) et (115), on a :

$$E = V_E V^{-1} \quad (118)$$

Examinons l'influence d'une erreur de mesure sur les corrections normalisées. Le vecteur des erreurs de mesures est pris sous la forme suivante où le biais est situé au rang  $i$  :

$$= \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & i & & \end{matrix} \quad (119)$$

Explicitons la  $k^{\text{ième}}$  composante du vecteur de corrections normalisées :

$$E_n(k) = \frac{V_E(k,i)}{V(i,i)\sqrt{V_E(k,k)}} \quad (120)$$

On déduit de cette expression le rapport des corrections normalisées de rangs  $k$  et  $i$  :

$$\frac{E_n(k)}{E_n(i)} = \frac{V_E(k,i)}{\sqrt{V_E(i,i)}\sqrt{V_E(k,k)}} \quad (121)$$

Clairement, ce rapport s'exprime sous la forme d'un coefficient de corrélation qui est donc toujours inférieur ou égal à 1. On en déduit que  $E_n(i)$  est toujours supérieur ou égal

à  $E_n(k)$  ; la correction normalisée la plus grande en valeur absolue correspond bien à la mesure soumise à l'erreur la plus importante.

### Analyse du critère résiduel

Le critère résiduel s'écrit :

$$r = \frac{1}{2} \|X - \hat{X}\|_{V^{-1}}^2 = \frac{1}{2} (X - \hat{X})^T V^{-1} (X - \hat{X}) = \frac{1}{2} E^T V^{-1} E \quad (122a)$$

$$r = \frac{1}{2} X^T M^T (MVM^T)^{-1} MX = \frac{1}{2} X^T M^T (MVM^T)^{-1} M X \quad (122b)$$

La matrice  $(MVM^T)^{-1}$  est symétrique, définie positive et de plein rang. Il existe donc une matrice orthogonale  $H$  ( $H^T H = HH^T = I$ ) et une matrice diagonale  $D$ , telles que :

$$(MVM^T)^{-1} = H^T D H \quad (123)$$

Définissons le vecteur  $Y$  suivant :

$$Y = D^{1/2} H M X \quad (124)$$

Le vecteur  $Y$  s'exprime comme une combinaison linéaire de variables aléatoires normales centrées. On peut donc aisément calculer ses deux premiers moments

$$\text{Esp}(Y) = 0 \quad (125a)$$

$$\text{Var}(Y) = D^{1/2} H M V M^T H^T D^{1/2} \quad (125b)$$

En tenant compte de (123) :

$$\text{Var}(Y) = D^{1/2} H (H^T D H) H^T D^{1/2} = I \quad (126)$$

Le vecteur  $Y$  est donc distribué selon une loi normale centrée réduite. Or, le critère résiduel s'exprime en fonction de  $Y$  :

$$r = \frac{1}{2} Y^T Y \quad (127)$$

Le critère résiduel est donc égal à la somme de carrés de variables aléatoires normales, il est donc distribué selon une loi du khi2 à autant de degrés de liberté que la dimension du vecteur de mesure. L'examen de cette unique grandeur permet de juger globalement de la qualité des résultats de l'estimation en validant ou non l'hypothèse initiale sur la distribution des erreurs de mesure.

## 7.2. Estimation de l'amplitude des biais

Après avoir détecté puis localisé les erreurs de mesure de grande amplitude (biais), il est utile d'en estimer l'amplitude. Cela peut s'effectuer en intégrant ces biais dans les variables à estimer. L'équation de mesure (111a) est alors transformée de la façon suivante :

$$X = X^* + Bd^*$$

La dimension du vecteur de biais  $d^*$  est égale au nombre de biais détecté. La matrice  $B$  permet de "distribuer" ces biais sur les mesures suspectes.

Le problème d'estimation consiste alors à rechercher le minimum, par rapport à  $X^*$  et  $d^*$  du critère :

$$= \frac{1}{2} \|X - X^* - Bd^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (128a)$$

$$\text{sous la contrainte } MX^* = 0 \quad (128b)$$

La méthode d'estimation exposée au paragraphe 3.1 s'applique sans difficulté. Le lecteur est invité à vérifier que la solution est donnée par :

$$\hat{X} = P(X - B\hat{d}) \quad (129a)$$

$$P = I - VM^T(MVM^T)^{-1}M \quad (129b)$$

$$\hat{d} = \left( B^T M^T (MVM^T)^{-1} MB \right)^{-1} B^T M^T (MVM^T)^{-1} MX \quad (129c)$$

Les expressions (129) permettent donc l'estimation simultanée des biais et des grandeurs vraies. Il faut cependant noter qu'une condition de régularité de matrice apparaît dans ce calcul. Dans le cas de l'estimation d'un seul biais, l'observabilité globale est assurée. Dans le cas de plusieurs biais, l'analyse d'observabilité doit être conduite.



## Annexe 1 : Estimateur des moindres carrés

A partir d'un vecteur d'observations bruitées :

$$Z = HX^* +$$

on cherche à estimer le vecteur d'état  $X^*$ . Cette estimation est réalisée en minimisant la somme des carrés des différences entre les mesures et les estimations que l'on cherche.

Le critère que l'on cherche à minimiser peut alors s'écrire :

$$= \frac{1}{2} (Z - HX^*)^T (Z - HX^*) = \frac{1}{2} \|Z - HX^*\|^2$$

Le minimum de est atteint lorsque sa dérivée par rapport à  $X^*$  est nulle :

$$\frac{\partial}{\partial X^*} \Big|_{X^* = \hat{X}} = 0$$

L'expression précédente fait intervenir une opération de dérivation matricielle, plus particulièrement, il faut savoir dériver un scalaire ( ) par rapport à un vecteur ( $X^*$ ). Les règles de dérivation scalaire se transposent aisément au cas matriciel<sup>9</sup> ; développons l'expression du critère :

$$= \frac{1}{2} Z^T Z - Z^T HX^* - (X^*)^T H^T Z + (X^*)^T H^T HX^*$$

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial X^*} \Big|_{X^* = \hat{X}} = \frac{1}{2} (-2H^T Z + 2H^T H\hat{X}) = 0$$

d'où l'égalité matricielle :

$$H^T Z = H^T H\hat{X}$$

c'est-à-dire :

$$\hat{X} = (H^T H)^{-1} H^T Z$$

---

<sup>9</sup> Voir annexe 3

## Annexe 2 : Eléments de choix d'une méthode d'estimation

L'estimation statistique a le plus souvent comme but l'évaluation la plus fidèle possible d'un ou des paramètres d'un signal  $s(t)$  à partir d'une observation bruitée  $x(t)$ . Une approche classique consiste à tenir compte des modèles statistiques supposés du *signal*, de ses *paramètres* et du *bruit*. On recherche alors une stratégie de traitement qui minimise une certaine distance  $d(\hat{\theta}, \theta)$  entre l'observation et la grandeur estimée.

Lorsque la connaissance disponible a priori est réduite, on recherche des procédures robustes, capables de performances proches de l'optimum tout en tolérant d'assez larges déviations de la statistique réelle par rapport au modèle nominal supposé. Différentes stratégies sont utilisables à cet effet selon l'information disponible.

La méthode du *risque minimum* requiert la connaissance de la *densité de probabilité des paramètres* à estimer  $f(\theta)$  et de la *densité de probabilité conditionnelle des observations*  $f(x|\theta)$  ou, de manière équivalente, de la densité conjointe  $f(x, \theta)$  et dépend du choix d'une fonction appropriée de pondération de l'erreur commise.

La méthode du *maximum de vraisemblance* nécessite la connaissance de la *densité de probabilité des observations*  $f(x)$  et s'applique lorsque l'on ignore la statistique des paramètres ou que ceux-ci ne sont tout simplement pas aléatoires (cas fréquent).

En *estimation linéaire à variance minimale*, les hypothèses statistiques précédentes sont levées et l'on suppose juste la connaissance des deux premiers moments, espérance et variance de la distribution des paramètres à estimer (on se limite alors à l'étude d'estimateurs réalisables à l'aide d'opérateurs linéaires).

Enfin, pour la méthode des *moindres carrés*, aucune hypothèse stochastique n'est nécessaire et on traite le problème d'estimation comme un problème d'optimisation déterministe.

### Annexe 3 : Opérations de dérivation matricielle

#### Dérivée d'un vecteur par rapport à un scalaire

On considère un vecteur  $X$ , de dimension  $n$ , dont les composantes dépendent d'un scalaire  $a$  :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{On a :} \quad \frac{X}{a} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{a} \\ \frac{x_2}{a} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{a} \end{pmatrix}$$

#### Dérivée d'un scalaire par rapport à un vecteur

On considère une fonction scalaire  $f$  d'un vecteur  $X$  de dimension  $n$  :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad a = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Par définition, on a :

$$\frac{a}{X} = \begin{pmatrix} \frac{a}{x_1} \\ \frac{a}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{a}{x_n} \end{pmatrix} \quad \frac{a}{X^T} = \frac{a}{x_1} \quad \frac{a}{x_2} \quad \dots \quad \frac{a}{x_n} = \frac{a}{X}^T$$

#### Dérivée d'un vecteur par rapport à un vecteur

Considérons les deux vecteurs  $X$  et  $Y$  :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

On a :

$$\frac{X}{Y^T} = \begin{matrix} \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_1}{y_2} & \dots & \frac{x_1}{y_m} \\ \frac{x_2}{y_1} & \frac{x_2}{y_2} & \dots & \frac{x_2}{y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_n}{y_1} & \frac{x_n}{y_2} & \dots & \frac{x_n}{y_m} \end{matrix} \quad \frac{X^T}{Y} = \frac{X}{Y^T}^T$$

### Dérivée d'une forme quadratique par rapport à un scalaire

On considère un vecteur  $X$  et une matrice carrée  $A$  de dimension  $n$ . En combinant les divers résultats précédents, la dérivée de la forme quadratique  $X^T A X$ , par rapport au scalaire  $a$ , s'écrit :

$$\frac{X^T A X}{a} = \frac{X^T}{a} A X + X^T \frac{A}{a} X + X^T A \frac{X}{a}$$

Si la matrice  $A$  est indépendante du scalaire  $a$ , on a :

$$\frac{X^T A X}{a} = \frac{X^T}{a} A X + X^T A \frac{X}{a} = \frac{X^T}{a} (A + A^T) X$$

Si, de plus, la matrice  $A$  est symétrique :

$$\frac{X^T A X}{a} = 2 \frac{X^T}{a} A X$$

### Dérivée d'une forme quadratique par rapport à un vecteur

L'expression précédente se généralise à la dérivation par rapport à un vecteur :

$$\frac{X^T A X}{Y} = 2 \frac{X^T}{Y} A X$$

En particulier, si  $Y = X$ , on a :

$$\frac{X^T A X}{X} = 2 \frac{X^T}{X} A X = 2 A X$$

### Dérivée du déterminant d'une matrice par rapport à cette matrice

On considère une matrice carrée  $A$  de dimension  $n$ , d'éléments  $a_{ij}$ . Développons le déterminant par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice en utilisant les cofacteurs ; on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^k a_{ik} A_{ik}^*$$

$A_{ik}^*$  est le cofacteur de l'élément  $a_{ij}$ . Par définition, il ne dépend d'aucun élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne. On peut donc écrire :

$$\frac{\det(A)}{a_{ik}} = A_{ik}^*$$

D'autre part, l'inverse d'une matrice s'exprime également à l'aide de la matrice  $A^*$  des cofacteurs :

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det(A)}$$

On en déduit la valeur du cofacteur  $A_{ik}^*$  de l'élément  $a_{ik}$  :

$$A_{ik}^* = (A^{-1})_{ki} \det(A)$$

où la notation  $(A^{-1})_{ki}$  désigne l'élément  $(k, i)$  de la matrice  $A^{-1}$ . On a donc :

$$\frac{\det(A)}{a_{ik}} = (A^{-1})_{ki} \det(A)$$

Et en étendant le raisonnement à l'ensemble des éléments de la matrice  $A$  :

$$\frac{\det(A)}{A} = (A^{-1})^T \det(A)$$

*Dérivée de l'inverse d'une matrice par rapport à cette matrice*

De manière claire, on a :

$$A^{-1} = A^{-1} A A^{-1}$$

d'où :

$$\frac{A^{-1}}{a_{ij}} = \frac{A^{-1}}{a_{ij}} A A^{-1} + A^{-1} \frac{A}{a_{ij}} A^{-1} + A^{-1} A \frac{A^{-1}}{a_{ij}}$$

On obtient donc :

$$\frac{A^{-1}}{a_{ij}} = -A^{-1} \frac{A}{a_{ij}} A^{-1}$$

Calcul de  $\frac{\text{Tr}(V^{-1}M)}{V}$

On a, compte tenu de l'expression précédente et des propriétés de l'opérateur trace :

$$\frac{\text{Tr}(V^{-1}M)}{v_{ij}} = \text{Tr} \frac{(V^{-1}M)}{v_{ij}} = -\text{Tr} V^{-1} \frac{V}{v_{ij}} V^{-1} M = -\text{Tr} \frac{V}{v_{ij}} V^{-1} M V^{-1}$$

Or, on a :

$$\frac{V}{v_{ij}} = [u_{kl}] \quad / \quad \begin{array}{l} u_{kl} = 0 \text{ pour } k \neq i, l \neq j \\ u_{ij} = 1 \end{array}$$

On en déduit :

$$\frac{\text{Tr}(V^{-1}M)}{v_{ij}} = -\left(V^{-1} M V^{-1}\right)_{ji} = -\left(V^{-1} M V^{-1}\right)_{ij}$$

Et en étendant le raisonnement à l'ensemble des éléments de la matrice  $V$ :

$$\frac{\text{Tr}(V^{-1}M)}{V} = -V^{-1} M V^{-1}$$

## Annexe 4 : Exemple d'estimation - modèle linéaire

```

clear
%
% Matrice d'incidence du graphe
%
% 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
M=[1 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
0 0 1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 1 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1];
%
% Vecteur des mesures
%
Z=[111.3 127.6 106.4 18.2 86.3 111.0 72.2 49.4 ...
37.9 20.5 23.8 43.8 4.8 39.7 26.4 13.6]';
%
% Vecteur des écarts-type
%
E=[2.78 1.05 2.66 0.46 2.16 2.78 1.81 1.24 ...
0.95 0.51 0.60 1.10 0.12 0.99 0.66 0.34]';
%
% Calcul des écarts de bouclage de bilan
%
R=M*Z
%
% Constitution de la matrice de variance des mesures
%
V=diag(E.*E);
%
% Evaluation du nombre de mesures
%
v=length(Z);
%
% Calcul de la matrice de projection
%
P=eye(v)-V*M'*inv(M*V*M')*M;
%
% Calcul des estimations
%
Xe=P*Z
%
% Calcul de la matrice de variance-covariance des estimations
%
Ve=P*V;
%
% Ecarts-type des estimations
%
Ee=sqrt(diag(Ve))

```

## Annexe 5 : Exemple d'estimation - modèle non-linéaire

```
clear
%
% Données
%
a = 0.62; d = 1.5;
va = 0.07; vd = 0.03;
C = 1.588;
Z = [a ; d];
%
% Matrice de variance
%
V = [va 0 ; 0 vd];
%
% Estimation initiale
%
X2 = [a ; d];
fini = 0;
while ~fini
    X1 = X2;
    ae = X1(1);
    de = X1(2);
%
% Résidu de contrainte et gradient
%
    F = ae-C*(1-1/de);
    G = [1 -C/de^2];
%
% Estimation
%
    X2 = (eye(2)-V*G'*inv(G*V*G')*G)*Z+V*G'*inv(G*V*G')*(G*X1-F);
%
% Test d'arrêt
%
    if norm(X1-X2) < 1e-6
        fini = 1;
    end
end
%
% Estimation finale
%
Xe=X2
%
% Vérification de la satisfaction de la contrainte
%
ae = Xe(1);
de = Xe(2);
F = ae-C*(1-1/de)
```



## Annexe 6 : Exemple d'estimation et d'analyse d'observabilité

```

clear
%
% Dimensions
%
m=3 ; n=5; v=7;
%
% Vecteur de mesures
%
Z=[-35.1 15.5 -12.1]';
%
% Matrice de mesures
%
HT=[5 0 1 0 0 0 0
     0 2 3 0 0 0 0
     2 2 1 0 0 0 0];
%
% Matrice de contraintes
%
MT=[3 2 5 1 1 0 0
     0 5 0 4 2 2 2
     1 0 2 5 4 1 1
     0 3 0 2 1 1 1
     4 0 0 1 0 0 0];
%
% Partition des matrices initiales
%
H1=HT(:,1:3); M1=MT(:,1:3); M2=MT(:,4:7);
%
% Décomposition en valeurs singulières de M2
%
k=rank(M2);
[P,R,Q]=svd(M2);
%
% Partition des différentes matrices résultats
%
R1=R(1:k,1:k);
P1=P(:,1:k) ; P2=P(:,k+1:n);
Q1=Q(:,1:k) ; Q2=Q(:,k+1:v-m);
%
% Matrice de contrainte du système estimable (88a)
%
MM=P2'*M1;
%
% Estimation de X1b, on minimise
%

$$\phi = \| Z - H1*X1b \|^2$$

%
% sous la contrainte  $P2'*M1*X1b = 0$ 
%
R=H1'*H1+MM'*MM;
invR=inv(R)
P=eye(m)-invR*MM'*inv(MM*invR*MM')*MM;
X1b=P*invR*H1'*Z
%
% Matrice du système (88b)
%
S=[Q1' -inv(R1)*P1'*M1*X1b];
%
% Réduction pour l'obtention des variables déductibles
%
rref(S)

```

