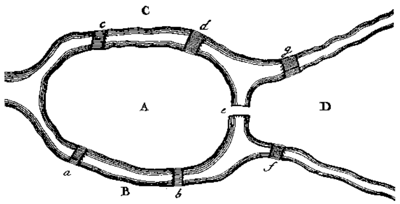
Ecole Nationale Supérieure en Génie des Systèmes Industriels

Optimisation et recherche opérationnelle
Partie 2 : Eléments de théorie des graphes

Didier Maquin



Octobre 2009

Problèmes de cheminement

- Objectif : implémenter “à la main”, un algorithme de cheminement (en particulier l’algorithme de Ford) pour la recherche de chemins de longueur minimale ou maximale, ou pour déterminer les niveaux d’un graphe.
- Algorithme de Ford : on considère un graphe G dont les arcs sont valués positivement par une fonction d.

  On se fixe un sommet a qui sera le sommet de départ et on cherche, pour tout sommet x, un chemin de longueur minimale joignant a à x.
- Pour effectuer cette recherche, on définit, sur tous les sommets du graphe, une fonction p (le “potentiel”), telle que $p(x)$ représente la longueur du plus court chemin reliant a à x.

  De façon assez intuitive, on peut alors écrire :
  1. $p(a) = 0$
  2. pour tout sommet x possédant des antécédents, $p(x) = min(p(y) + d(y, x))$ où y est un antécédent de x.

Problèmes de cheminement

Exemple

Considérons le graphe G décrit par la table de listes d’antécédents ci-dessous. On a également fait figurer dans cette table les différentes valeurs de potentiel pour une recherche des chemins minimaux issus de a.

	a	b	c	d	e	f
Γ^{-1}		a 5	b 4 d 1 e 2	e 3	a 6 b 2	c 4 d 4
P_0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
P_1	0	5	9	$+\infty$	6	13
P_2	0	5	8	9	6	12
P_3	0	5	8	9	6	12

La suite est stationnaire à partir du rang 3 et l’on obtient ainsi les longueurs des chemins minimaux issus du sommet a.

Problèmes de cheminement

Exercice n° 1 : Recherche de chemins optimaux

Considérons le graphe G décrit par la table des antécédents de chaque sommet :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		a 2 f 1	b 3 a 6	c 2 h 4	d 3 i 3		f 3	g 3 b 1	h 3 g 5

Question 1
Donner la longueur des chemins minimaux (de longueur minimale) reliant le sommet a aux autres sommets du graphe ; tous les sommets sont-ils reliés au sommet a ?

Question 2
Même question si f est le sommet de départ.

Question 3
Donner la longueur des chemins maximaux reliant le sommet b aux autres sommets du graphe.

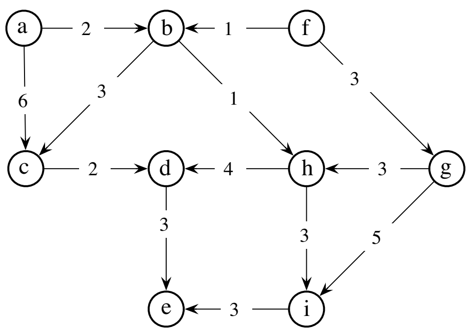
Problèmes de cheminement

Exercice n° 1 : Recherche de chemins optimaux

Considérons le graphe G décrit par la table des antécédents de chaque sommet :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		a 2 f 1	b 3 a 6	c 2 h 4	d 3 i 3		f 3	g 3 b 1	h 3 g 5

Dessin du graphe



Problèmes de cheminement

Exercice n° 1 : Recherche de chemins optimaux

Question 1

Longueur des chemins minimaux reliant le sommet a aux autres sommets du graphe.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		a 2 f 1	b 3 a 6	c 2 h 4	d 3 i 3		f 3	g 3 b 1	h 3 g 5
P_0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
P_1	0	2	5	7	10	∞	∞	3	6
P_2	0	2	5	7	9	∞	∞	3	6
P_3	0	2	5	7	9	∞	∞	3	6

Les sommets f et g ne sont pas reliés à a.

Problèmes de cheminement

Exercice n° 1 : Recherche de chemins optimaux

Question 2

Longueur des chemins minimaux reliant le sommet f aux autres sommets du graphe.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		a 2 f 1	b 3 a 6	c 2 h 4	d 3 i 3		f 3	g 3 b 1	h 3 g 5
P_0	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞
P_1	∞	1	4	6	9	0	3	2	5
P_2	∞	1	4	6	8	0	3	2	5
P_3	∞	1	4	6	8	0	3	2	5

Seul le sommet a n'est pas relié à f.

Problèmes de cheminement

Exercice n° 1 : Recherche de chemins optimaux

Question 3

Longueur des chemins maximaux reliant le sommet b aux autres sommets du graphe.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		a 2 f 1	b 3 a 6	c 2 h 4	d 3 i 3		f 3	g 3 b 1	h 3 g 5
P_0	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
P_1	$-\infty$	0	3	5	8	$-\infty$	$-\infty$	1	4
P_2	$-\infty$	0	3	5	8	$-\infty$	$-\infty$	1	4

Problèmes de cheminement

Exercice n° 2 : Détermination des niveaux d'un graphe

Considérons le graphe G décrit par la table des antécédents suivante :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		c 2 d 4 f 5	e 3 h 5	e 2 f 1	g 5 h 3	h 4 g 3	i 1	i 2 a 1	

Question 1
Donner la longueur des chemins minimaux reliant le sommet a aux autres sommets du graphe.

Question 2
Déterminer les niveaux de ce graphe. On rappelle que les sommets sans prédécesseurs sont situés au niveau 0 (racines) et que le niveau des autres sommets est défini par la longueur du chemin maximum, compté en nombre d'arcs, entre une racine et ces sommets. On proposera une initialisation permettant de répondre à la question posée.

Question 3
Reprendre la question n° 1 en examinant maintenant les sommets non pas par ordre alphabétique, mais selon l'ordre défini par leur niveau. Que constate-t-on ?

Problèmes de cheminement

Exercice n° 2 : Détermination des niveaux d'un graphe

Question 1
Longueur des chemins minimaux reliant le sommet a aux autres sommets du graphe.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		c 2 d 4 f 5	e 3 h 5	e 2 f 1	g 5 h 3	h 4 g 3	i 1	i 2 a 1	
P_0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
P_1	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1	∞
P_2	0	∞	6	∞	4	5	∞	1	∞
P_3	0	8	6	6	4	5	∞	1	∞
P_4	0	8	6	6	4	5	∞	1	∞

Problèmes de cheminement

Exercice n° 2 : Détermination des niveaux d'un graphe

Question 2
Pour déterminer les niveaux du graphe, on calcule les chemins maximaux avec toutes les longueurs fixées à 1 et en posant $P_0(a) = P_0(i) = 0$ (sommets sans prédécesseurs).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Γ^{-1}		c 1 d 1 f 1	e 1 h 1	e 1 f 1	g 1 h 1	h 1 g 1	i 1	i 1 a 1	
P_0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
P_1	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	1	1	0
P_2	0	$-\infty$	2	$-\infty$	2	2	1	1	0
P_3	0	3	3	3	2	2	1	1	0
P_4	0	4	3	3	2	2	1	1	0
P_5	0	4	3	3	2	2	1	1	0

Problèmes de cheminement

Exercice n° 2 : Détermination des niveaux d'un graphe

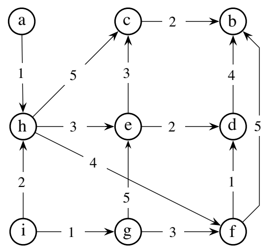
Question 3

	a	i	g	h	e	f	c	d	b
Γ^{-1}			i 1	i 2 a 1	g 5 h 3	h 4 g 3	e 3 h 5	e 2 f 1	c 2 d 4 f 5
P_0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
P_1	0	∞	∞	1	4	5	6	6	8
P_2	0	∞	∞	1	4	5	6	6	8

Problèmes de cheminement

Exercice n° 2 : Détermination des niveaux d'un graphe

Dessin du graphe



Visualisation des niveaux