Stability and stabilisability of continuous Takagi-Sugeno systems

Sur la stabilité et la stabilisation des modèles de Takagi-Sugeno continus

Mohammed CHADLI, Didier MAQUIN, José RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CNRS , UPRESA 7039

2, Avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre les Nancy – France.

☎: (33) 3 83 59 59 59, Fax: (33) 3 83 59 56 44

Email : {Mohamed.Chadli, Didier.Maquin, José.Ragot}@ensem.inpl-nancy.fr

Abstract

This paper discusses conditions on stability and stabilization of continuous T-S fuzzy systems. Stability analysis is derived via non-quadratic Lyapunov function technique and LMIs (Linear Matrix Inequalities) formulation to obtain an efficient solution. The non-quadratic Lyapunov function is built by inference of quadratic Lyapunov function of each local model. We show that stability condition of the open-loop T-S systems is assured under certain restrictions on the rate of change of state variables. Following a similar approach, stabilisation of the closed-loop continuous T-S fuzzy systems using the well-known PDC (Parallel Distributed Compensation) technique is investigated. The design methodology is illustrated by numerical examples.

Résumé

Dans ce papier, on traite de la stabilité et la stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno (T-S) continus. L'analyse de la stabilité est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique et la résolution d'un ensemble convexe d'inégalités matricielles linéaires (LMIs : Linear Matrix inequalies). La fonction de Lyapunov non quadratique est construite par agrégation de fonctions de Lyapunov quadratiques relatives à chaque modèle local. Le but est de montrer que la stabilité d'un modèle T-S continu peut être assurée sous certaines restrictions sur la variation de l'état. Suivant la même démarche, la stabilisation basée sur l'utilisation de la technique PDC (Parallel Distributed Compensation) est étudiée. Deux exemples illustrent la méthode.

Thème-clé principal : Systèmes non linéaires.

Mots clés : Stabilité, stabilisation, modèles de T-S (Takagi-Sugeno), LMIs (Linear Matrix inequalies).

1 Introduction

Depuis plusieurs années de nombreux travaux se sont intéressés à la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires décrits par une structure multi-modèle. Cette approche utilise, dans la plupart des cas, le modèle flou T-S [5], considéré comme un approximateur universel [8]. Les modèles flous T-S sont décrits par un ensemble de règles 'Si…Alors' dont la partie conséquence est un système dynamique LTI. Le comportement non linéaire est obtenu par agrégation des modèles locaux linéaires.

L'analyse de la stabilité des modèles flous T-S est souvent étudiée par la technique de Lyapunov quadratique qui demande des hypothèses réstrictives et produit des conditions de stabilité suffisantes [6]. La stabilité dépend de l'existence d'une matrice définie positive commune à tous les modèles locaux. L'obtention d'une telle solution est facilitée par la formulation convexe du problème sous forme de LMIs [10]. Récemment la technique LMI a été également exploitée pour l'analyse et la synthèse multi-critère [2][9]. Cependant le problème élevé de contraintes à satisfaire vis à vis de la même matrice définie positive limite le nombre de solutions. Ainsi certains systèmes stables n'acceptent pas de fonction de Lyapunov commune.

Pour vaincre ces limitations, des travaux ont été développés en vus d'établir de nouvelles conditions de stabilité moins conservatives. Une de ces approches est l'utilisation des fonctions de Lyapunov continues par morceaux formulées sous forme de LMIs [15]. Les auteurs en [13] ont montré que la stabilité d'une boucle de régulation comprenant un régulateur flou de type PI peut être assurée sous une certaine restriction sur le signal de commande et la variation du signal de sortie. Une autre alternative est l'utilisation des fonctions de Lyapunov non quadratique construites par agrégation de fonctions de Lyapunov quadratique relative à chaque modèle local. Cette dernière méthode impose une contrainte sur la vitesse de variation de l'état du système [1]. En [3] une méthode systématique a été proposée.

La première partie de cette publication traite de l'analyse de stabilité non quadratique d'un système T-S continu et propose une méthode systématique déterminant une borne sur la variation de l'état du système. La seconde partie concerne la stabilisation via la technique PDC et établi des conditions moins conservatives quand la stabilité quadratique est impossible à obtenir.

2 Modèles de Takagi-Sugeno continus

Les modèles T-S représentent les systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI valide autour d'un point de fonctionnement. De façon pratique, ces modèles sont obtenus par identification ou par linéarisation. Dans la première situation, à partir de données sur les entrées et les sorties autour d'un point de fonctionnement, on peut identifier les paramètres du modèle local correspondant à ce point de fonctionnement. Dans la deuxième situation, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire du système que l'on linéarise autour de différents points de fonctionnement.

Le modèle est décrit par un ensemble de règles :

Règle i :

$SI\ x_1(t)\ est\ F_1^i\ et \ldots et\ x_n(t)\ est\ F_n^i$

$ALORS\ \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \qquad \forall i: 1, \ldots, n$

avec
n : nombre de modèles locaux, $x \in \Re^p$: vecteur d'état, $y \in \Re^{p'}$: vecteur de sortie, $u \in \Re^m$: vecteur d'entrée, $A_i \in \Re^{p.p}$: matrice d'état, $B_i \in \Re^{p.m}$: matrice d'entrée, $C_i \in \Re^{p'.p}$: matrice de sortie.

Le modèle global est obtenu par agrégation des n modèles locaux. On suppose que les fonctions d'activation dépendent uniquement des variables d'état mesurables du système.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x(t))} \tag{1}$$

où $\omega_i(x(t)) = \prod_{j=1}^{n} f_j^i(x_j(t))$ et $f_j^i(x_j(t))$ est le degré d'appartenance de $x_j(t)$ à $\mathrm{F}_\mathrm{j}^\mathrm{i}$.

On pose :

$$\mu_i(x(t)) = \frac{\omega_i(x(t))}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x(t))} \tag{2}$$

où $\mu_i(x(t))$ est la fonction d'activation du i$^{\text{ème}}$ modèle local satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t)) = 1 \\ 0 \le \mu_i(x(t)) \le 1 \quad \forall\ i{:}1,..,n \end{cases} \tag{3}$$

L'équation (1) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{4}$$

Dans la suite on fera l'hypothèse qu'à un instant donné, un certain nombre r de fonctions d'activation sont réellement actives, les $n-r$ fonctions restantes étant nulles, cela est simple à réaliser si les fonctions choisies sont, par exemple, de forme triangulaire ou trapézoïdale.

On définit :
$\lambda_m(.)$: valeurs propres minimales de (.)
$\lambda_M(.)$: valeurs propres maximales de (.)
$\langle\ ,\ \rangle$: produit scalaire

$$\sum_{i \ne j}^{n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i<j}^{n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} x_i x_j$$

3 Stabilité quadratique

Le modèle T-S en boucle ouverte est :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t)) A_i x(t) \tag{5}$$

Dans cette section, nous présentons les conditions suffisantes de stabilité quadratique utilisant l'approche de Lyapunov dans le cas des systèmes T-S continus.

Il est simple de montrer que la condition suffisante de stabilité asymptotique du point d'équilibre $(x(t) = 0)$ pour le système (5) est l'existence d'une matrice symétrique définie positive P qui vérifie le théorème suivant.

Théorème [6] : Le système non linéaire décrit par (5) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall\ i{:}1,..,n \tag{6}$$

■

On montre aussi que dans le cas particulier où les matrices A_i sont Hurwitz et commutatives par paire, il est possible de construire, par une méthode systématique, une fonction de Lyapunov commune aux n modèles locaux. Les auteurs de [12] proposent une méthode analytique pour trouver de telle fonction.

Théorème [12] : Soient Q, P_1,…, P_n des matrices symétriques définies positives telles que :

$$\begin{aligned} &A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q \\ &A_i^T P_i + P_i A_i = P_{i-1} \qquad \forall\ i{:}2,..,n \end{aligned} \tag{7}$$

Si l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$A_i A_j = A_j A_i \quad \forall\ i,\ j{:}1,..,n \tag{8}$$

alors le système (5) est globalement asymptotiquement stable et il accepte comme fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P_n x$

Preuve : voir [12] ■

Il est donc nécessaire que chaque matrice A_i soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire que les valeurs propres de chaque matrice A_i doivent appartenir au demi-plan gauche du plan complexe. Une autre condition nécessaire sur l'existence d'une fonction de Lyapunov commune aux n modèles locaux est telle que [11] :

$$A_i + A_j < 0 \quad \forall\ i, j{:}1,..,n \tag{9}$$

La preuve peut être obtenue en sommant les LMIs (6).

Ce résultat montre que la condition nécessaire pour l'existence d'une fonction de Lyapunov est que toutes les matrices A_i et $(A_i + A_j)$ doivent être stables.

Ces conditions montrent le conservatisme de la méthode quadratique, une approche dont le défaut majeur réside dans l'obligation à satisfaire n LMIs vis à vis de la même matrice P. Ces conditions deviennent encore plus contraignantes si l'on ajoute des contraintes sur le placement de pôles.

4 Stabilité non quadratique

Les conditions nécessaires (6) et (9) sur l'existence d'une matrice symétrique définie positive P commune aux n modèles locaux montrent clairement le conservatisme de la méthode. C'est la raison pour laquelle certains systèmes sont stables alors qu'il n'existe pas de matrice symétrique définie positive commune.
Utilisant la technique de Lyapunov et l'outil numérique LMI, nous proposons l'étude de la stabilité d'un système T-S continu par l'approche non quadratique où la fonction de Lyapunov du modèle global , construite par agrégation de fonctions de Lyapunov quadratiques relatives à chaque modèle local, est dépendante de l'état.
Cette fonction de Lyapunov non quadratique est construite selon le même schéma que le modèle lui-même :

Règle i :

$SI\ x_1(t)\ est\ F_1^i\ et \ldots et\ x_n(t)\ est\ F_n^i$
$ALORS\ V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t) \qquad \forall i{:}1,..,n$

Ainsi nous obtenons la fonction de Lyapunov non quadratique $V(x(t))$:

$$V(x(t)) = x(t)^T P(x(t))x(t) \tag{10}$$

avec la matrice symétrique définie positive

$$P(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))P_i \ ; \ P_i = P_i^T > 0 \tag{11}$$

et $\mu_i(x(t))$ a les mêmes propriétés (3).

Compte tenu des définitions des fonctions d'activation (3) et des matrices P_i il est simple de vérifier que la fonction $V(x(t)) = x(t)^T P(x(t))x(t)$ est une fonction de Lyapunov du modèle T-S continu (5).

L'étude de cette fonction va nous permettre de montrer qu'il est possible de déterminer une condition sur la variation de l'état garantissant la stabilité exponentielle du système T-S continu (5).
Pour cela considérons la dérivée, par rapport au temps, de la fonction de Lyapunov (10) :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P(x(t))x(t) + x(t)^T P(x(t))\dot{x}(t) + x(t)^T \dot{P}(x(t))x(t) \tag{12}$$

Considérons l'ensemble $\Omega = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n\}$ des sommets du polytope $P(x(t))$, et le même ensemble $\overline{\Omega} = \{\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \ldots,\ \overline{P}_n\}$ dont les éléments sont classés par ordre croissant tels que : $\overline{P}_1 \geq \overline{P}_2 \geq \ldots \geq \overline{P}_r \geq \ldots \geq \overline{P}_n$

Proposition 1

$$x(t)^T \dot{P}(x(t))x(t) \leq \gamma \|\dot{x}(t)\| \|x(t)\|^2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_M(\overline{P}_i)$$

où $\gamma = \underset{i=1}{\overset{n}{Max}} \left(\left\| \dfrac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)} \right\| \right)$, r est le nombre de modèles locaux activés simultanément avec $2 \leq r \leq n$ et les valeurs propres sont ordonnées telles que :

$$\lambda_M(\overline{P}_1) \geq \ldots \geq \lambda_M(\overline{P}_r) \geq \ldots \geq \lambda_M(\overline{P}_n)$$

Preuve
On peut écrire $\dot{P}(x(t))$ sous la forme :

$$\dot{P}(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial \mu_i(x(t))}{\partial x(t)}, \frac{\partial x(t)}{\partial t} \right\rangle P_i$$

Comme à chaque instant, il n'y a que r fonctions d'activations non nulles, on peut écrire :

$$x(t)^T \dot{P}(x(t))x(t) \leq \gamma \|\dot{x}(t)\| \sum_{i=1}^{r} x(t)^T \overline{P}_i x(t)$$

Or : $x(t)^T \overline{P}_i(x(t))x(t) \leq \|x(t)\|^2 \lambda_M(\overline{P}_i)$

D'où la proposition 1 ■

Théorème 1
Supposons qu'il existe Q et $P_i\ i{:}1,..,n$ des matrices symétriques définies positives qui vérifient les LMIs suivantes :

$$\forall\ i{:}1,..,n \quad A_i^T P_i + P_i A_i < -Q \tag{13a}$$

$$\forall\ i < j{:}\ 1,..,n \quad \frac{A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j}{2} < -Q \tag{13b}$$

tel que $\mu_i(x(t))\mu_j(x(t)) \neq 0$.

Alors le modèle global en boucle ouverte (5) est exponentiellement stable si la contrainte suivante sur la variation de l'état est respectée :

$$\|\dot{x}(t)\| < \frac{\lambda_M(Q)}{\gamma \sum_{i=1}^{r} \lambda_M(\overline{P}_i)} \tag{14}$$

Preuve
La preuve est obtenue en considérant la dérivée de la fonction de Lyapunov (12) le long de la trajectoire du système T-S (5) et en tenant compte de la proposition 1. La stabilité exponentielle est démontrée en considérant les propriétés des valeurs propres minimales et maximales des matrices symétriques définies positives [14]. ■

Exemple 1

Pour juger de l'efficacité de la méthode proposée prenons le même exemple que Jadbabaie [1], le système non linéaire en boucle ouverte décrit par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} -5 + |x_1(t)| & -4 \\ \hline -1 + 7|x_1(t)| & -2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{15}$$

représenté par les deux modèles locaux stables suivants :

Règle 1 : $SI\ x_1(t)\ est\ F_1^1\ ALORS\ \dot{x}(t) = A_1 x(t)$
Règle 2 : $SI\ x_1(t)\ est\ F_1^2\ ALORS\ \dot{x}(t) = A_2 x(t)$

Les matrices d'états des modèles locaux sont définies par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}$$

et les fonctions d'appartenance sont des fonctions triangulaires définies par

$$\mu_1(x(t)) = 1 - \frac{|x_1(t)|}{3} \quad , \ \mu_2(x(t)) = \frac{|x_1(t)|}{3}$$

Le modèle global T-S est donné par :

$$\dot{x}(t) = (\mu_1(x(t))A_1 + \mu_2(x(t))A_2)x(t) \tag{16}$$

La simulation du modèle global montre que le système est stable, Cependant il n'est pas possible de trouver une fonction de Lyapunov commune aux deux modèles locaux.

Les conditions de stabilité à respecter sont celles du théorème 1. En effet les LMIs à satisfaire sont :

$$\begin{aligned} &A_1^T P_1 + P_1 A_1 < -Q \\ &A_2^T P_2 + P_2 A_2 < -Q \\ &\frac{A_1^T P_2 + P_2 A_1 + A_2^T P_1 + P_1 A_2}{2} < -Q \end{aligned} \tag{17}$$

dont les variables à déterminer sont : Q, P_1, P_2

La résolution de ces 3 LMIs donne :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.77 & 0.20 \\ 0.20 & 0.51 \end{bmatrix}, \ P_2 = \begin{bmatrix} 2.86 & 0.10 \\ 0.10 & 0.44 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 5.56 & 3.08 \\ 3.08 & 1.77 \end{bmatrix}$$

La relation (14) permet de déduire la contrainte sur la variation de l'état garantissant la stabilité exponentielle du modèle global (16) :

$$\|\dot{x}\| \le 7.64 \tag{18}$$

La simulation du modèle global (16) en respectant la contrainte (18) à partir des conditions initiales $[-2.5 \ 2]$, montre que toutes les trajectoires du système convergent vers zéro.

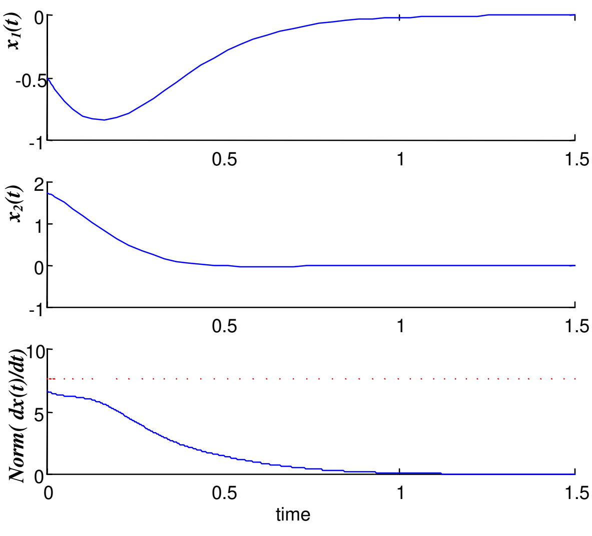

Figure 1. Simulation du modèle global T-S

5 Stabilisation non quadratique

5.1 Technique PDC

Dans cette section, la technique PDC [7][2][4] est utilisée pour déterminer une loi de commande pour les modèles T-S. L'idée est de construire un régulateur par retour d'état relatif à chaque modèle local LTI. De façon similaire à la technique utilisée pour agréger les modèles locaux, la loi de commande globale est obtenue par agrégation des lois de commande linéaires locales :

Définition : si les paires $(A_i, B_i) \ \forall i{:}1,..,n$ sont commandables, alors le système (1) est dit localement commandable.

Pour la construction du régulateur PDC il est supposé que le système (1) est localement commandable.

Régulateur i :

$$\begin{aligned} &SI\ x_1(t)\ est\ F_1^i\ et \ldots et\ x_n(t)\ est\ F_n^i \\ &ALORS\ u(t) = -K_i x(t) \qquad K_i \in \mathbb{R},\ \forall i{:}1,..,n \end{aligned}$$

La loi de commande globale est

$$u(x) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))K_i x(t) = -K(x(t))x(t) \tag{19}$$

En combinant (4) et (19), la représentation du modèle global en boucle fermée est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x(t))\mu_j(x(t))\tilde{A}_{ij}x(t) \tag{20}$$

avec $\tilde{A}_{ij} = A_i - B_i K_j$ (21)

ce qui présente un très fort couplage des différents modèles locaux. L'objectif du paragraphe suivant est d'étudier la stabilité du modèle global décrit par (20).

5.2 Analyse de la stabilité

Nous allons établir des conditions suffisantes sur la variation de l'état garantissant la stabilité du système T-S (20).

Proposition 2

$$\sum_{i \ne j}^{n} \mu_i(x(t))\mu_j(x(t)) \le 1 - \frac{1}{r} \qquad \forall 2 \le r \le n$$

où $\mu_i(x(t))$ sont les fonctions d'activation décrites en (3) et r le nombre de règles simultanément activées.

Preuve
La preuve provient des propriétés des fonctions d'appartenance normalisées (3) et du corollaire 4 en [2].■

Proposition 3

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^3(x(t)) \ge \frac{1}{r} - \sum_{i \ne j}^{n} \mu_i(x(t))\mu_j^2(x(t)) \quad \forall 2 \le r \le n$$

Preuve
La preuve provient des propriétés des fonctions d'appartenance normalisées (3) et de la proposition 2.■

Pour la suite, on suppose que seulement deux règles sont activées à chaque instant, une hypothèse facile à réaliser dans le cas de fonction d'appartenance triangulaire ou trapézoïdale.

Définissons la matrice suivante :

$$H_{ijk} = \tilde{A}_{ij}^T P_k + P_k \tilde{A}_{ij} \quad (22)$$

Théorème 2
Supposons qu'il existe Q et P_i $i:1,..,n$ des matrices symétriques définies positives qui vérifient les BMIs (Bilinear Matrix Inequalities) suivantes :

$$\forall\, i:1,..,n \quad H_{iii} < -Q \quad (23a)$$
$$\forall\, i \neq j:1,..,n \quad H_{iji} + H_{jii} + H_{iij} < -Q \quad (23b)$$

tel que $\mu_i(x(t))\mu_j(x(t)) \neq 0$.

Alors le modèle global (20) est exponentiellement stable si la contrainte suivante sur la variation d'état est respectée :

$$\|\dot{x}(t)\| < \frac{\lambda_M(Q)}{r\gamma \sum_{i=1}^{r} \lambda_M(\overline{P}_i)} \quad (24)$$

Preuve
La preuve est obtenue en considérant la dérivée de la fonction de Lyapunov (12) le long de la trajectoire du système T-S (20) et en tenant compte des propositions 1 et 3. La stabilité exponentielle est démontrée en considérant les propriétés des valeurs propres minimales et maximales des matrices symétriques définies positives [14]. ■

Les BMIs (23), après linéarisation, permettent d'obtenir simultanément, lorsqu'une solution existe, les gains K_i, les matrices Q et P_i et, par la suite, calculer la contrainte (24) assurant la stabilité exponentielle.

Exemple 2

Considérons le modèle T-S continu suivant représenté par deux modèles locaux.

Règle 1 :
SI $x_1(t)$ *est* F_1^1 *ALORS* $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$

Règle 2 :
SI $x_1(t)$ *est* F_1^2 *ALORS* $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$

Le modèle T-S global est

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (25)$$

où les fonctions d'appartenance sont triangulaires définies par :

$$\mu_1(x(t)) = \frac{1 + x_1(t)}{2}, \ \mu_2(x(t)) = \frac{1 - x_1(t)}{2}$$

Les matrices d'état et de commande de chacun des modèles locaux sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.31 & -71.83 & 227.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.604 & -107 & 180 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

L'utilisation de l'outil LMI montre qu'il n'est pas possible de trouver une fonction de Lyapunov commune qui permet de stabiliser quadratiquement le modèle global en boucle fermée (25) avec une loi de commande PDC.

A partir des conditions (23) du théorème 2, nous obtenons le problème BMI en Q, P_1 et P_2 suivant

$$\begin{cases} \tilde{A}_{11}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{11} < -Q \\ \tilde{A}_{22}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{22} < -Q \\ \tilde{A}_{11}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{21}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{21} < -Q \\ \tilde{A}_{22}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{21}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{A}_{12}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{12} < -Q \end{cases} \quad (26)$$

où $\tilde{A}_{ij}$ est définie en (21).

Il est connu que la formulation BMI ne conduit pas à un problème d'optimisation convexe mais à des solutions locales multiples. Pour linéariser et résoudre ce problème BMI, nous proposons de reformuler (26) :

$$\begin{cases} \tilde{A}_{ii}^T P_i + P_i \tilde{A}_{ii} < -Q \quad \forall\, i:1,2 \\ \tilde{A}_{ii}^T P_j + P_j \tilde{A}_{ii} < 0 \quad \forall i \neq j:1,2 \\ \tilde{A}_{12}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{21}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{21} < -Q \\ \tilde{A}_{21}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{A}_{12}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{12} < -Q \end{cases} \quad (27)$$

La formulation convexe de ce problème et l'obtention d'une solution optimale est réalisée à travers les changements de variables suivants :

$$P_i^{-1} = X_i, \ Y_{ij} = K_i X_j, \ S_i = X_i Q X_i \quad (28)$$

où: $X_i = X_i^T > 0 \quad \forall\, i, j:1,2$

En effet en multipliant à droite et à gauche chacune des contraintes (27) par sa variable correspondante X_i, elles deviennent équivalentes aux six LMIs suivantes dont les variables sont X_i, Y_{ij}, S_i

$$\begin{cases} X_i A_i^T + A_i X_i - Y_{ii}^T B_i^T - B_i Y_{ii} < -S_i \quad i:1,2 \\ X_i A_j^T + A_j X_i - Y_{ji}^T B_j^T - B_j Y_{ji} < 0 \quad i \neq j:1,2 \\ X_i (A_i^T + A_j^T) + (A_j + A_i) X_i - Y_{ii}^T B_j^T - B_j Y_{ii} \\ -Y_{ji}^T B_i^T - B_i Y_{ji} < -S_i \quad i \neq j:1,2 \end{cases} \quad (29)$$

Le système peut être résolu et les gains K_1 et K_2 ainsi que les matrices Q, P_1 et P_2 peuvent être déduits à partir de (28).

Pour l'exemple considéré, la résolution du système (29) donne :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.1 & 7.6 & 33.8 \\ 7.6 & 142.1 & 146.8 \\ 33.8 & 146.8 & 1136.8 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 3.3 & 9.8 & 68.8 \\ 9.8 & 155.5 & 201.7 \\ 68.8 & 201.7 & 2320.6 \end{bmatrix}$$

$$Q = 10^3 \begin{bmatrix} 0.33 & 1.5 & 11.10 \\ 1.5 & 7.08 & 50.63 \\ 11.10 & 50.63 & 375.82 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [7.39 \;\; 36.07 \;\; 258.38],\; K_2 = [-8.34 \;\; -24.36 \;\; -279.52]$$

L'inégalité (24) permet de déduire la contrainte sur la variation de l'état qui garantit la stabilité exponentielle du système T-S (25) :

$$\|\dot{x}\| \le 109.4 \qquad (30)$$

La simulation du modèle T-S global (25) en respectant la contrainte (30) à partir des conditions initiales $[1 \; -1 \; 0.1]$, montre que toutes les trajectoires du système global convergent vers zéro.

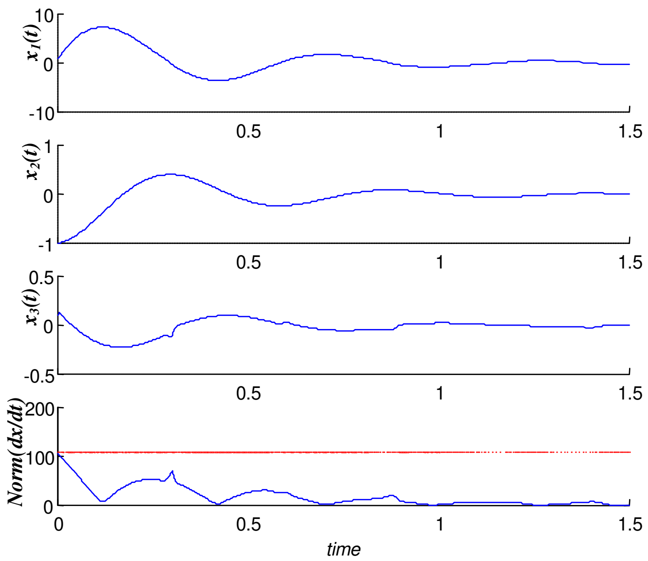

Figure 2. Simulation du modèle T-S (25)

6 Conclusion

La stabilité des modèles T-S est souvent étudiée à partir de fonctions de Lyapunov quadratiques en recherchant une matrice unique stabilisant simultanément chacun des modèles locaux, ce qui est souvent très conservatif.

Dans ce papier, nous avons montré que l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique construite sur la base de règles définissant le modèle permet d'établir la stabilité de tels systèmes. La condition de stabilité est lié à la vitesse de variation de l'état.

Références

[1] A. Jadbabaie "A reduction in conservatism in stability and L2 Gain analysis of T-S fuzzy systems via Linear matrix inequalities " IFAC 1999, 14th triennial World congress, Beijing, P.R. China. pp. 285-289.

[2] T. Takagi, T. Ikeda, H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based design" IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 6, no. 2, pp. 250-256, 1998.

[3] M Chadli, D Maquin, J Ragot. "Relaxed stability conditions for the T-S fuzzy systems", IEEE Conference on Systems Man and Cybernetics, Nashville, USA, pp. 3514-3519, Oct. 8-11 2000.

[4] K. Tanaka, T. Ikeda, H. O. Wang, "Robust stabilisation of uncertain non-linear systems via fuzzy control: quadratic stability, H control theory, and LMIs" IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 4, no. 1. pp 1-12, 1996.

[5] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control" IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics, vol. 15, no.1, pp. 116-132,1985.

[6] K. Tanaka, M. Sugeno, "Stability and design of fuzzy control systems" Fuzzy Set and Systems, vol. 45, no. 2, pp 135-156. 1992.

[7] H. O. Wang, K. Tanaka, M. F. Griffin "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design: issues" IEEE. Trans. on Fuzzy Systems, vol. 4, no.1, 1996.

[8] J. Castro "Fuzzy logic controllers are universal approximator" IEEE Trans. on Systems, Man, Cybernetics, vol. 25, pp. 629-635, April 1995.

[9] K. Tanaka, M. Nishimuna, H.O. Wang, "Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs" American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvanie, pp. 3450-3454, June 1998.

[10] S. Boyd et al. "Linear matrix inequalities in systems and control theory" Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[11] M. C. M. Teixeira, S. H. Zak, "Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models" IEEE. Trans. on Fuzzy Systems, vol.7, no.2, pp. 133-140, 1999.

[12] K. S. Narendra, J. Balakrishnan, "A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices"IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 39, no. 12, pp. 2469-2471, 1994.

[13] J.-S. Chai, S. Tan, Q. Chan, C.-C. Hang, "A general fuzzy control scheme for nonlinear processes with stability analysis" Fuzzy Sets and Systems 100, pp. 179-195, 1998.

[14] A. Weinmann, Uncertain models and robust control, Springer-Verlag, Wien, 1991.

[15] M. Johansson, A. Rantzer, K. Arzén "Piecewise quadratic stability for affine Sugeno systems", FUZZ. IEEE'98, Anchorage, Alaska, 1998.