

Validation de données des systèmes dynamiques incertains

Moustapha ALHAJ DIBO, Didier MAQUIN, José RAGOT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CNRS UMR 7039
Institut National Polytechnique de Lorraine
2, Avenue de la forêt de Haye
54516 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, FRANCE

{malhajdi, dmaquin, jragot}@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé— Les méthodes de validation de données développées ces dernières années font largement appel à la redondance issue de modèles. Le cas des modèles dits exacts (statiques et/ou dynamiques) est maintenant bien analysé et a reçu de nombreuses solutions. Il y a par contre relativement peu de travaux concernant la validation en présence d'incertitude de modèle. L'objectif de cette communication est de présenter une nouvelle méthode de validation de données, permettant la prise en compte de paramètres incertains définis sous forme de variables bornées encore appelées intervalles. Cette approche ensembliste permet d'utiliser des opérations élémentaires portant sur les intervalles pour proposer une estimation de l'état du système sans connaissance a priori sur les lois de distribution statistique des mesures. Le résultat de l'estimation est également fourni sous une forme intervalle. L'analyse de cette estimation permet de détecter les défauts qui affectent le système, localiser les données qui sont affectées par ces défauts et proposer une correction pour rendre ces données cohérentes avec le modèle du système utilisé.

Mots-clés— Analyse par intervalle, modèle incertain, approche bornante, estimation d'état, détection et localisation de défauts, correction de données.

I. INTRODUCTION

Une des tâches les plus importantes en conduite des procédés est l'extraction de l'information à partir des données acquises sur le processus, dans le but d'évaluer ses performances et, le cas échéant, d'élaborer une stratégie de conduite optimale. Si cette information est erronée, toute décision prise conduit à établir une commande inadaptée. La validation de données est une phase qui se situe entre la phase d'acquisition de ces données et celle de prise de décision. C'est en fait l'action de générer une information représentant une grandeur physique (estimation) qui sera considérée comme crédible par les traitements ultérieurs. Cette estimation d'une grandeur physique est réalisée à partir de différents signaux issus, soit de capteurs mesurant cette grandeur, soit de modèles générant une estimée de celle-ci. Selon la procédure de traitement, la validation de données peut être réalisée "en ligne" ou "hors ligne". Dans une procédure hors ligne, les données du procédé sont validées globalement sur un horizon temporel. Les résultats de validation offrent alors un jeu de données fiables pour les études de simulation ou d'optimisation. Dans le cas de l'approche en ligne, les données du procédé sont validées à chaque instant d'échantillonnage et permettent un suivi "instantané" de fonctionnement.

La plupart des méthodes développées dans ce domaine utilisent des techniques basées sur des considérations probabilistes, où le bruit (ou les perturbations) affectant le système ou les mesures est souvent caractérisé par une loi de distribution dont les paramètres sont connus a priori. Les résultats issus de ces méthodes sont donc valides si la nature du bruit et le modèle du système sont parfaitement connus. Dans certaines situations, ces connaissances peuvent être très difficiles à obtenir ou ne sont pas entièrement disponibles. Dans cette situation, l'utilisation de modèle incertain peut constituer une approche appropriée.

Les incertitudes qui affectent un système peuvent être structurelles ou paramétriques. Dans le premier cas, une façon de les prendre en compte consiste à utiliser une représentation multi-modèles obtenue par interpolation de plusieurs modèles locaux associés à des zones de comportements différents. Dans le deuxième cas, pour prendre en compte les incertitudes paramétriques, on peut utiliser des modèles constitués de relations comportementales imprécises. Notons que les incertitudes peuvent affecter le système lui-même et/ou le système de mesure. Dans cet article, on s'intéresse au cas où les incertitudes affectent le système et les mesures ou, éventuellement, les deux simultanément.

La prise en compte de modèles incertains a déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux aussi bien pour les problèmes de validation de données que, par exemple, pour ceux concernant l'élaboration d'un observateur d'état [10] pour ne citer que ces deux domaines. Souvent, ces incertitudes sont modélisées en utilisant des variables stochastiques. Une autre approche, appelée approche bornante, consiste à représenter ces incertitudes par un ensemble de valeurs possibles dont on ne connaît que les bornes [1, 5, 8].

L'analyse ensembliste (par intervalles) fut initialement développée pour tenir compte des imprécisions sur la valeur des nombres. Ces imprécisions peuvent provenir des données issues de la chaîne d'instrumentation ou de l'outil informatique. Les premiers travaux dans le cadre du diag-

nostic sont imputables à [4]. Plus tard [11] propose une technique ensembliste en vue d'effectuer la détection et la localisation de défauts de capteurs dans le cas d'un modèle statique linéaire tandis que [3] traite le cas de modèle dynamique. Johansson [6] propose une méthode pour la détection de défauts de capteurs pour un turboréacteur. Maquin [7] traite le cas de la validation de données issues de systèmes à modèle certain avec des mesures incertaines. Nous avons antérieurement développé, dans le cadre de l'approche ensembliste, une méthode de validation de données de systèmes dynamiques incertains dans le cas où toutes les variables d'état du système sont mesurées [2]. La méthode que nous proposons ici traite le cas où les variables d'état sont partiellement mesurées. La section 2 est consacrée à la présentation du modèle des systèmes étudiés. La section 3 traite de l'estimation d'état. La section 4 montre comment on peut détecter, localiser et corriger les données affectées par des défauts. Un exemple académique, illustrant la méthode proposée, est présenté dans la section 5.

II. MODÈLE DU SYSTÈME

Nous considérons la classe des systèmes dynamiques représentés par des équations discrètes linéaires d'état. Les incertitudes sont décrites par des variables bornées et normalisées, qui modifient les valeurs des coefficients des matrices A , B et C du modèle utilisé. Les systèmes peuvent être décrits par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\eta_A(k))x(k) + B(\eta_B(k))u(k) \\ y(k) &= C(\eta_C(k))x(k) \end{aligned} \quad (1)$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in R^q$ est le vecteur des entrées et $y \in R^m$ est le vecteur des sorties. $\eta_A(k)$, $\eta_B(k)$ et $\eta_C(k)$ sont des variables bornées et normalisées.

La matrice de transition d'état représentative du comportement dynamique du système $A(\eta_A(k)) \in \mathbb{R}^{n,n}$, la matrice de commande $B(\eta_B(k)) \in \mathbb{R}^{n,q}$ et la matrice de mesure $C(\eta_C(k)) \in \mathbb{R}^{m,n}$ sont considérées de la forme :

$$A(\eta_A(k)) = A_c + \Delta A \eta_A(k) \in [\underline{A}, \overline{A}], \quad |\eta_A(k)| \leq 1$$

$$B(\eta_B(k)) = B_c + \Delta B \eta_B(k) \in [\underline{B}, \overline{B}], \quad |\eta_B(k)| \leq 1$$

$$C(\eta_C(k)) = C_c + \Delta C \eta_C(k) \in [\underline{C}, \overline{C}], \quad |\eta_C(k)| \leq 1$$

$A_c \in R^{n,n}$, $B_c \in R^{n,q}$ et $C_c \in R^{m,n}$ sont respectivement les matrices centre (le centre d'un intervalle $\varphi = [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}]$ est défini par $\varphi_c = \frac{\overline{\varphi} + \underline{\varphi}}{2}$) des matrices intervalle $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}]$ et $[\underline{C}, \overline{C}]$. Les matrices $\Delta A \in R^{n,n}$, $\Delta B \in R^{n,q}$ et $\Delta C \in R^{m,n}$ traduisent l'amplitude des incertitudes des matrices $[\underline{A}, \overline{A}]$, $[\underline{B}, \overline{B}]$ et $[\underline{C}, \overline{C}]$. Nous supposons que le système est observable ($\text{rang}(O) = n$) et que le rang de la matrice d'observabilité (2) est invariant sur le domaine de variation de $A(\eta_A(k))$ et $C(\eta_C(k))$.

$$O(k) = \begin{pmatrix} C(\eta_C(k)) \\ C(\eta_C(k))A(\eta_A(k)) \\ \vdots \\ C(\eta_C(k))A^{n-1}(\eta_A(k)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Le modèle dynamique peut toujours être écrit sous une forme statique [1]. En effet, l'équation dynamique du modèle (1) peut être ré-écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A(\eta_A(k+j-1)) & -I_n \\ -B(\eta_B(k+j-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+j-1) \\ x(k+j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ u(k+j-1) \end{bmatrix}, \quad j \in N^* \quad (3)$$

À partir de cette relation, l'empilement des vecteurs d'état et de commande sur un horizon $[k, k+s]$, conduit à l'expression matricielle :

$$\tilde{A}(\eta_A(k, s)) x(k, s) = \tilde{B}(\eta_B(k, s-1)) u(k, s-1) \quad (4)$$

avec

$$\tilde{A}(\eta_A(k, s-1)) = \begin{pmatrix} A(\eta_A(k)) & -I_n & \cdots \\ 0 & A(\eta_A(k+1)) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ A(\eta_A(k+s-1)) & -I_n & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}(\eta_B(k, s-1)) = \begin{pmatrix} -B(\eta_B(k)) & 0 \\ 0 & -B(\eta_B(k+1)) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \\ & \vdots \\ \cdots & -B(\eta_B(k+s-1)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(k, s) &= [x(k)^T \cdots x(k+s)^T]^T, \quad x(k, s) \in \mathbb{R}^{sn} \\ \tilde{A}(\eta_A(k, s-1)) &\in \mathbb{R}^{s \cdot n, s \cdot n}, \quad \tilde{B}(\eta_B(k, s-1)) \in \mathbb{R}^{s \cdot n, s \cdot q}, \\ s_n &= (s+1)n \end{aligned}$$

Le vecteur de mesure $y(k)$ peut également être écrit, sur l'horizon $[k, k+s]$, en fonction de $x(k, s)$:

$$y(k, s) = \tilde{C}(\eta_C(k, s))x(k, s) \quad (5)$$

avec $y(k, s) = [y(k)^T \cdots y(k+s)^T]^T$, $y(k, s) \in R^{st}$, $\tilde{C}(\eta_C(k, s)) \in \mathbb{R}^{st, sn}$, $st = (s+1)m$

$$\tilde{C}(\eta_C(k, s)) = \begin{pmatrix} C(\eta_C(k)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C(\eta_C(k+s)) \end{pmatrix}$$

L'agrégation des relations (4) et (5) permet de représenter le modèle dynamique (1) sous la forme statique suivante :

$$M(\eta_A(k, s-1), \eta_C(k, s))x(k, s) = H(\eta_B(k, s-1)) \quad (6)$$

avec

$$M(\eta_A(k, s-1), \eta_C(k, s)) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\eta_A(k, s-1)) \\ \tilde{C}(\eta_C(k, s)) \end{bmatrix}$$

$$H(\eta_B(k, s-1)) = \begin{bmatrix} \tilde{B}(\eta_B(k, s-1)) & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{s_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k, s-1) \\ y(k, s) \end{bmatrix}$$

$$M(\eta_A(k, s-1), \eta_C(k, s)) \in \mathbb{R}^{(s \cdot n + s_t), s_n},$$

$$H(\eta_B(k, s-1)) \in \mathbb{R}^{s \cdot n + s_t}$$

Comme les matrices $A(\eta_A(k))$, $B(\eta_B(k))$ et $C(\eta_C(k))$ sont incertaines mais bornées, on peut les remplacer par leurs bornes, ce qui permet d'écrire l'équation (6) sous la forme intervalle suivante :

$$[M]x(k, s) = [H] \quad (7)$$

On remarquera, à partir de l'équation (7), la nature de la transformation dynamique-statique qui a été choisie. Dans (7), $x(k, s)$ est le vecteur de tous les états sur la fenêtre d'observation. Cette forme diffère de la forme "classique" où seul l'état initial $x(k)$ de la fenêtre d'observation subsiste. La forme choisie évite la présence de puissances de matrices (termes de type $A^k(\eta_A(k))$ par exemple) rendant difficile l'utilisation d'une analyse par intervalles (aspect non linéaire par rapport aux incertitudes).

Notons que le modèle considéré (1) peut contenir un bruit additif $\omega(k)$ sur les mesures et/ou une perturbation additive $\nu(k)$ sur l'état. En considérant que le bruit et la perturbation sont bornés, l'équation (7) reste valable si la matrice $[H]$ prend en compte les bornes de ce bruit et de cette perturbation.

III. ESTIMATION D'ÉTAT

Il existe plusieurs méthodes pour calculer, à partir de l'équation (7), une estimée de $x(k, s)$ [9] et [5]. Malheureusement aucune méthode ne peut être considérée meilleure par rapport aux autres de façon générale. En fait, la meilleure méthode est celle conduisant à l'estimation intervalle de plus petit rayon (minimisation de l'étendue de l'intervalle). Parmi les méthodes qui peuvent être utilisées, on peut citer celles utilisant la propagation de contraintes, la programmation linéaire et la linéarisation parallèle [5].

Dans cet article, nous avons choisi de nous appuyer sur les méthodes permettant de calculer une estimée de $x(k, s)$ si la matrice $[M]$ est carrée. Dans notre cas, cette matrice n'est pas carrée et la procédure est adaptée grâce à un algorithme séquentiel. Trois méthodes ont été retenues : l'élimination de Gauss, l'itération de Gauss-Seidel et l'itération de Krawczyk [9]. Ces trois méthodes, brièvement expliquées dans l'annexe de ce document, donnent de bons résultats si la matrice M est préconditionnée (une matrice intervalle préconditionnée est une matrice régulière ne comportant pas d'éléments nuls sur sa diagonale). L'algorithme séquentiel permettant de calculer une estimée de $x(k, s)$ à partir de l'équation (7) et en utilisant ces trois méthodes est décrit ci-dessous.

L'estimation d'état s'effectue sur une fenêtre d'observation $[k, k+s]$, l'indice k variant ensuite d'un instant initial k_0 à un instant courant. Pour une fenêtre d'observation courante, les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

Etape 1

Nous considérons la première matrice carrée $[M^1] = [M(i, j)]$ où $i = 1 \dots s_n$, $j = 1 \dots s_n$ ainsi que le vec-

teur second membre correspondant $[H^1] = [H(i)]$ où $i = 1 \dots s_n$. Une estimée de $x(k, s)$ est calculée en résolvant l'équation $[M^1]x(k, s) = [H^1]$ par les trois méthodes mentionnées précédemment (après avoir effectué un préconditionnement). On note respectivement $[\hat{x}_G^1(k, s)]$, $[\hat{x}_{GS}^1(k, s)]$ et $[\hat{x}_K^1(k, s)]$ les estimées calculées par l'élimination de Gauss, l'itération de Gauss-Seidel et la méthode de Krawczyk. Pour affiner l'estimation, l'intersection des trois estimées précédentes est ensuite calculée :

$$[\hat{x}^1(k, s)] = [\hat{x}_G^1(k, s)] \cap [\hat{x}_{GS}^1(k, s)] \cap [\hat{x}_K^1(k, s)]$$

Etape i , $i = 2, \dots, s_t - n + 1$

À l'étape i , une matrice carrée $[M^i]$ et le vecteur correspondant $[H^i]$ sont construits en remplaçant la ligne s_n dans la matrice $[M^1]$ et le vecteur $[H^1]$ par la ligne $s_n + i$ de la matrice $[M]$ et du vecteur $[H]$. Ensuite, la $i^{\text{ème}}$ estimée intervalle $[\hat{x}^i(k, s)]$ de $x(k, s)$ est calculée en résolvant l'équation $[M^i]x(k, s) = [H^i]$ comme cela a été fait à l'étape 1.

L'estimée finale de $x(k, s)$ est calculée en effectuant l'intersection entre les différentes estimées possibles :

$$[\hat{x}(k, s)] = \bigcap_{i=1}^{s_t - n + 1} [\hat{x}^i(k, s)] \quad (8)$$

$$[\hat{x}^i(k, s)] = [\hat{x}_G^i(k, s)] \cap [\hat{x}_{GS}^i(k, s)] \cap [\hat{x}_K^i(k, s)]$$

Si l'intersection obtenue $[\hat{x}^i(k, s)]$ est non vide, on décrète que le système est en fonctionnement normal (les données sont cohérentes avec le modèle).

Si l'intersection $[\hat{x}^i(k, s)]$ est vide, le système est en fonctionnement anormal (présence d'un ou de plusieurs défauts). Pour fournir une estimation d'état cohérente avec le modèle du système (1), on doit donc détecter, localiser ces défauts et corriger ensuite les données qui en sont affectées. Les défauts peuvent affecter le vecteur de mesures et/ou le système lui-même. Dans ce qui suit, on s'intéresse uniquement aux défauts de mesures.

IV. DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS SUR LES MESURES

Pour détecter une anomalie dans un ensemble de données, un indicateur doit permettre de prendre une décision sur la présence de cette anomalie. Pour cela, à chaque étape du calcul de l'estimation d'état $x(k, s)$ dans la fenêtre d'observation, la cohérence entre l'estimation issue de cette étape et les estimations issues des étapes précédentes est testée.

Par hypothèse, il n'y a pas de défaut dans l'intervalle temporel $[k, k+s-1]$. En effet, nous formulons l'hypothèse qu'il n'y a pas de défaut dans l'intervalle temporel $[k_0, k_0+s-1]$ où k_0 est l'instant initial. Lorsque la fenêtre temporelle d'observation est décalée d'un pas d'échantillonnage, cette hypothèse reste valable $\forall k$. En effet, si l'on détecte un défaut portant sur la dernière observation prise en compte dans la fenêtre d'observation courante, celui-ci est corrigé par la procédure proposée. L'absence de défaut dans $[M^1]$ et $[H^1]$ permet donc de considérer l'estimée issue de la première estimation $[\hat{x}^1(k, s)]$ comme référence pour comparer les estimations à venir dans les

étapes suivantes.

En se fondant ensuite sur la référence considérée $[\hat{x}^1(k, s)]$, nous définissons l'intervalle suivant :

$$[\tau] = [\hat{x}^1(k, s)] \cap [\hat{x}^j(k, s)] \quad (9)$$

Notons que l'intersection entre $[\hat{x}^1(k, s)]$ et $[\hat{x}^j(k, s)]$ est vide si au moins une des intersections entre deux composantes de même indice de ces vecteurs est vide.

Puis, un indicateur τ de défaut est construit selon l'analyse de l'intervalle $[\tau]$ calculé précédemment, comme suit :

1. Si $[\tau] \neq \emptyset$, les estimations $[\hat{x}^1(k, s)]$ et $[\hat{x}^j(k, s)]$ sont cohérentes. Les valeurs des variables d'état appartiennent à la fois à $[\hat{x}^1(k, s)]$ et $[\hat{x}^j(k, s)]$. Les données intervenant dans l'équation $[M^j]x(k, s) = [H^j]$ sont déclarées valides et on pose $\tau = 0$.

2. Si $[\tau] = \emptyset$, les estimations $[\hat{x}^1(k, s)]$ et $[\hat{x}^j(k, s)]$ sont incohérentes. Dans ce cas, les valeurs des variables d'état n'appartiennent qu'à $[\hat{x}^1(k, s)]$, car $[\hat{x}^j(k, s)]$ est influencée par un défaut. Les données qui interviennent dans l'équation $[M^j]x(k, s) = [H^j]$ et pas dans l'équation $([M^1]x(k, s) = [H^1])$ sont invalides et on pose $\tau = 1$.

Dans le second cas, il est nécessaire d'éliminer l'effet des mesures déclarées invalides, puisqu'elles seront utilisées pour tester la cohérence des nouvelles mesures dans les fenêtres d'observation à venir. On corrige ces données à chaque instant. Lorsqu'on localise une mesure aberrante $y_i(k + s)$ (affectée par un défaut), on la corrige a posteriori en utilisant le modèle du système (1) et l'estimation de référence $[\hat{x}^1(k, s)]$. La mesure corrigée a posteriori $y_{i,cor}(k + s)$ doit appartenir à l'estimation intervalle $[\hat{y}_i(k + s)]$ calculée comme suit :

$$[\hat{y}_i(k + s)] = [\underline{C}_i, \overline{C}_i] [\hat{x}^1(k + s)] \quad (10)$$

où $[\underline{C}_i, \overline{C}_i]$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $[\underline{C}, \overline{C}]$, $[\hat{y}_i(k + s)]$ est l'estimation intervalle de la mesure. Toute les valeurs appartenant à l'intervalle défini par (10) sont satisfaisantes, toutefois le choix le plus simple consiste à retenir le centre de l'intervalle considéré.

Lorsque la stratégie décrite ci-dessus a été appliquée à l'ensemble des données d'une fenêtre d'observation courante, on glisse cette fenêtre d'un pas d'échantillonnage et on calcule la forme statique (7) relative à la nouvelle fenêtre d'observation. Comme on a remplacé les données déclarées invalides par leurs valeurs corrigées dans la fenêtre d'observation courante, on est sûr que la nouvelle fenêtre d'observation ne peut contenir de défauts que sur les données obtenues au nouvel instant, ce qui permet de répéter la stratégie proposée. La procédure est donc appliquée sur l'ensemble de l'intervalle temporel à tester.

Remarque : pour être mise en œuvre, la méthode proposée impose des contraintes de dimension sur la matrice $[M]$, semblables à celles que l'on rencontre dans la méthode classique de l'espace de parité. L'horizon d'observation s doit être choisi de façon à observer une redondance d'in-

formations. Cette contrainte se traduit par l'inégalité suivante :

$$s_t + s.n \geq s_n + m \Rightarrow s \geq \frac{n}{m}, s \in N^* \quad (11)$$

V. EXEMPLE

On considère un système décrit par le modèle (1) où :

$$A(\eta_A(k)) \in [\underline{A}, \overline{A}] =$$

$$\begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 & [0.19, 0.21] \\ [-0.084, -0.076] & 0.6 & -0.08 \\ 0.01 & [0.114, 0.126] & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$B(\eta_B(k)) \in [\underline{B}, \overline{B}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ [0.949, 1.051] \end{pmatrix}$$

$$C(\eta_C(k)) \in [\underline{C}, \overline{C}] =$$

$$\begin{pmatrix} -5.25 & [-1.575, -1.425] & 10 \\ [0.949, 1.051] & 0.2 & -5 \end{pmatrix}$$

La commande $u(k)$ est représentée sur la figure 1. Dans les intervalles temporels $[20, 30]$, $[50, 60]$, interviennent des défauts f_1 sur y_1 , f_2 sur y_2 ; les sorties affectées par les défauts sont représentées sur la figure 2. Selon l'équation

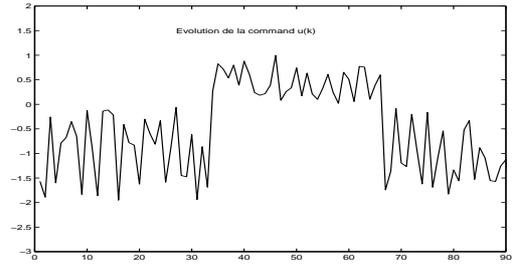


Fig. 1. Commande du système

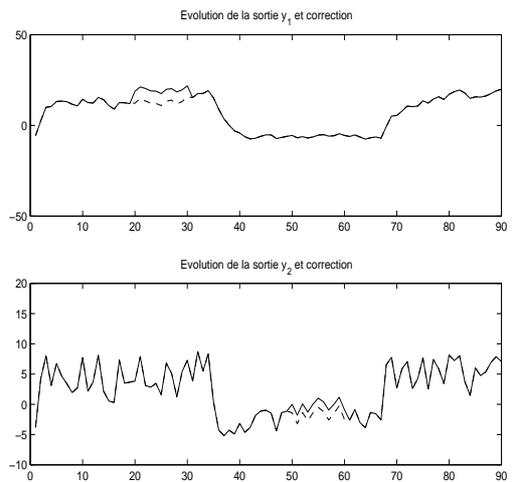


Fig. 2. Les sorties mesurées et corrigées

(11), ($s \geq \frac{n}{m} = 1.5$), on choisit la fenêtre d'observation $s = 2$. En empilant le vecteur d'état, de commande et de mesure sur l'horizon $[k, k + 2]$, on obtient la forme statique (6) équivalente au modèle dynamique où :

$$[M] = \begin{pmatrix} [\underline{A}, \overline{A}] & -I & 0 \\ 0 & [\underline{A}, \overline{A}] & -I \\ [\underline{C}, \overline{C}] & 0 & 0 \\ 0 & [\underline{C}, \overline{C}] & 0 \\ 0 & 0 & [\underline{C}, \overline{C}] \end{pmatrix},$$

$$[H] = \begin{pmatrix} -[\underline{B}, \overline{B}]u(k) \\ -[\underline{B}, \overline{B}]u(k+1) \\ y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \end{pmatrix} \text{ et } x(k, 2) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ x(k+2) \end{bmatrix}$$

En faisant varier k sur l'intervalle temporel à tester, les équations (7, 8, 9 et 10) permettent de détecter et localiser les mesures affectées par les défauts. La figure 3 montre les indicateurs de défauts relatifs aux mesures y_1 et y_2 . Il est clair que les défauts sont détectés et localisés.

Les mesures corrigées (selon l'équation 10) sont représentées sur la figure 2 en traits discontinus.

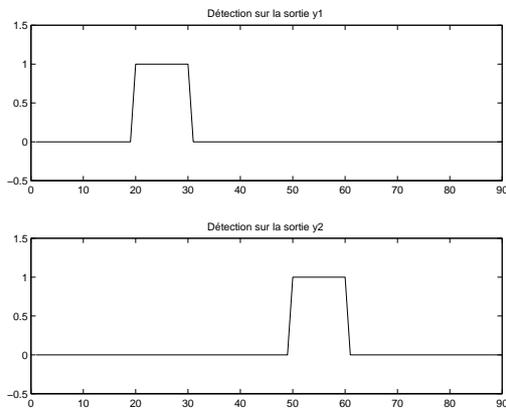


Fig. 3. Indicateurs de défauts

L'estimation d'état sous forme intervalle, cohérente avec le modèle du système, est représentée sur la figure 4. L'état réel (trait discontinus) est bien sûr inclus à l'intérieur de l'enveloppe estimée.

VI. CONCLUSION

La plupart des systèmes réels présente un ou plusieurs paramètres incertains dont les bornes sont supposées connues en général. La validation de données issues de tels systèmes est délicate à réaliser. L'incertitude sur les paramètres du système rend encore plus compliquée la validation de données en présence de défauts.

La méthode proposée présente une approche nouvelle pour effectuer la détection et la localisation de défauts sur les mesures ainsi que la correction a posteriori des mesures sujettes aux défauts. La validation de données est ainsi réalisée, dans le cadre d'un système à paramètres incertains, en présence de défaut sur les mesures, les bornes des incertitudes étant connues. La méthode ne fait usage d'aucune connaissance a priori sur les lois de distribution statistique des erreurs affectant les mesures. La méthode proposée est facile à mettre en œuvre, n'utilise que des opérations sur des intervalles, s'applique à tous les systèmes linéaires incertains et devrait pouvoir s'étendre à certaines classes de systèmes non linéaires. Dans la suite, il pourrait être important de s'intéresser à la caractérisation des incertitudes, c'est-à-dire à leur identification.

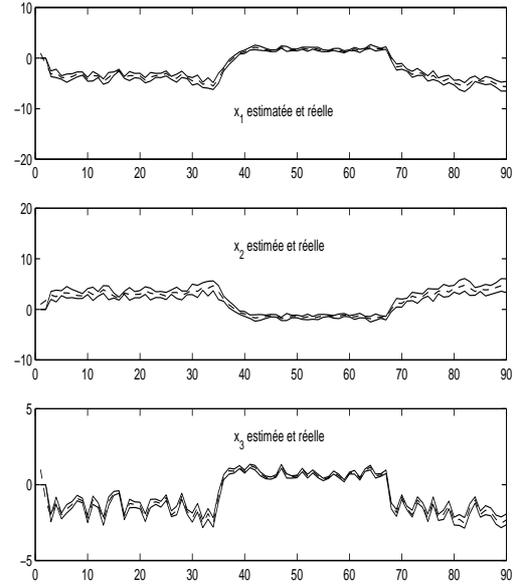


Fig. 4. Estimation d'état

ANNEXE

L'élimination de Gauss

Soit un modèle linéaire intervalle $[A]x = [b]$ où $[A] \in \mathbb{R}^{n,n}$ est une matrice régulière, la résolution par l'élimination de Gauss se fait à l'aide d'une factorisation LU. Il s'agit d'une transformation de la matrice $[A]$ en deux matrices triangulaires, inférieure $[L]$ et supérieure $[U]$ avec $[A] \subseteq [L][U]$. Comme dans le cas certain, la solution est obtenue en résolvant les deux sous-systèmes suivants :

$$\begin{aligned} [L]y &\supseteq [b] \\ [U]x &\supseteq [y] \end{aligned}$$

Les éléments de L et U sont calculés de manière itérative comme suit :

$$[l_{i,j}] = \frac{([a_{i,j}] - \sum_{k=1}^{j-1} [l_{i,k}][u_{k,j}])}{[u_{j,j}]}, \quad 0 \notin [u_{j,j}], \quad j = 1 \dots i-1$$

et

$$[u_{i,j}] = [a_{i,j}] - \sum_{k=1}^{i-1} [l_{i,k}][u_{k,j}] \quad j = 1 \dots n$$

A partir de la connaissance des matrices $[L]$ et $[U]$, la solution du premier système triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ [l_{2,1}] & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [l_{n,1}] & [l_{n,2}] & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} [b_1] \\ [b_2] \\ \vdots \\ [b_n] \end{pmatrix}$$

est obtenue selon la relation :

$$[y_i] \supseteq [b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [l_{i,j}][y_j] \quad i = 1 \dots n$$

La solution $[x]$ du deuxième système triangulaire

$$\begin{pmatrix} [u_{1,1}] & 0 & \cdots & [u_{1,n}] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & [u_{n-1,n-1}] & [u_{n-1,n}] \\ 0 & 0 & \cdots & [u_{n,n}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} [y_1] \\ [y_2] \\ \vdots \\ [y_n] \end{pmatrix}$$

est obtenue en utilisant la relation :

$$[x_i] \supseteq \frac{[y_i] - \sum_{j=i+1}^n [u_{i,j}][x_j]}{[u_{i,i}]} \quad i = n \dots 1$$

L'itération de Gauss-Seidel

Le principe de cette méthode consiste à développer, ligne par ligne, le modèle linéaire intervalle décrit dans la méthode précédente :

$$[a_{i,1}]x_1 + [a_{i,2}]x_2 + \dots + [a_{i,n}]x_n = [b_i] \quad i = 1 \dots n$$

En résolvant l'équation de rang i par rapport à x_i , on obtient :

$$[x_i] = \frac{[b_i] - [v]}{[a_{i,i}]}$$

où :

$$[v] = [a_{i,1}]x_1 + \dots + [a_{i,i-1}]x_{i-1} + [a_{i,i+1}]x_{i+1} \dots + [a_{i,n}]x_n$$

En supposant que x appartient à un pavé $[X]$, autrement dit que tout x_j appartient à un intervalle $[X_j]$, on peut alors écrire l'expression précédente sous la forme :

$$x_i \in [y_i] = \frac{[b_i] - [w]}{[a_{i,i}]}$$

où :

$$[w] = [a_{i,1}][X_1] + \dots + [a_{i,i-1}][X_{i-1}] + [a_{i,i+1}][X_{i+1}] \dots + \dots + [a_{i,n}][X_n]$$

Pour assurer que chaque composante appartient à l'intervalle de recherche, la contrainte suivante est ajoutée :

$$x_i \in [x_i] = [y_i] \cap [X_i]$$

La résolution proposée peut être améliorée en utilisant, après chaque étape, les solutions partielles obtenues aux étapes précédentes. Ainsi, en résolvant la $i^{\text{ème}}$ équation, on obtient la solution intervalle $[x_i]$ qui, en général, est plus petite que $[X_j]$, on peut donc reporter les nouveaux intervalles $[x_j]$ dans l'expression de $[y_i]$:

$$[y_i] = \frac{1}{[a_{i,i}]} \left([b_i] - \sum_{j=1}^{i-1} [a_{i,j}][x_j] - \sum_{j=i+1}^n [a_{i,j}][X_j] \right)$$

$$[x_i] = [y_i] \cap [X_i]$$

Le calcul se poursuit tant que les intervalles $[x_i]$ peuvent être réduits à l'aide de la procédure précédente.

Méthode de Krawczyk

C'est une méthode itérative et similaire à celle de Gauss-Seidel. L'arrêt du calcul itératif obéit aux mêmes règles que précédemment. La mise à jour des estimations s'effectue comme suit :

$$x^{j+1} = (A_c^{-1}[b] + (I - A_c^{-1}[A])x^j) \cap x^j$$

Pour plus de détails sur ces méthodes, le lecteur est invité à consulter [9] et [5].

- [1] Adrot O., *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante*, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Spécialité automatique, 4 décembre 2000.
- [2] Alhaj Dibo M., Maquin D., Ragot J., « Validation de données par approche bornante, » *Journées Doctorales d'Automatique*, Valenciennes, France, pp. 347-352, 2003.
- [3] Armengol J., Vehi J., Angel Sainz M., Herrero P., « Fault detection in a pilot plant using interval models and multiple sliding time windows, » *Safeprocess*, Washington, USA, pp. 729-734, 2003.
- [4] Chang I.C., Yu C.C., Liou C.T., « Model-based approach for fault diagnosis, » Part 2. Extension to interval systems *Industrial Engineering Chemical Research*, vol 34, pp. 828-844, 1995.
- [5] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O. and Walter E., *Applied Interval Analysis*, Springer, 2001.
- [6] Johansson A., Norlander T., « Parametric uncertainty in sensor fault detection for a Turbofan jet engine », *42nd IEEE, Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, pp. 1950-1955, 2003.
- [7] Maquin D., Ragot J., « Validation de données issues de systèmes de mesure incertains », *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, RS-série JESA, **37**, n° 9, numéro spécial « Applications des outils de calculs ensemblistes », 2003.
- [8] Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., *Bounding approaches to system identification*, Plenum Press, New York and London, 1996.
- [9] Neumaier A., *Interval methods for systems of equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge, 1990.
- [10] Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N., *Fault diagnosis in dynamic systems : theory and application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, International Series in Systems and Control Engineering, New Jersey, 1989.
- [11] Ragot J., Boukhris A., Mandel D., « A propos de l'algèbre des intervalles. Application à la validation de données », *Rencontres Francophones sur la Logique Floue*, Cepaduès Editions, LFA'97, Lyon (France), pp. 341-348, 1997.