

ESTIMATION D'ETAT ET D'ENTREE INCONNUE D'UN SYSTEME REPRESENTE PAR UN MULTIMODELE DISCRET

AKHENAK Abdelkader – RAGOT José – MAQUIN Didier

Institut National Polytechnique de Lorraine
Centre de Recherche en Automatique de Nancy - UMR CNRS 7039
2, avenue de la forêt de Haye
54516 Vandoeuvre cedex – FRANCE
Téléphone : +33 (0)3 83 59 56 83 – Fax : +33 (0)3 83 59 56 44
{Abdelkader.Akhenak, Jose.Ragot, Didier.Maquin}@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé : Cette communication présente une méthode d'estimation d'état d'un système non linéaire discret représenté par un multimodèle soumis à l'influence d'entrées inconnues. L'objectif est d'estimer simultanément l'état et les entrées inconnues. Pour cela, on propose la synthèse d'un multiobservateur basée sur l'élimination de ces entrées inconnues et l'on montre comment déterminer les gains du multiobservateur, qui sont solutions d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMI). Une méthode d'estimation des entrées inconnues est ensuite proposée. Un exemple académique concernant le décryptage illustre les performances du multiobservateur proposé.

Abstract: This paper presents a state estimation method for a nonlinear discrete system described by a multiple model with unknown inputs. The main goal concerns the simultaneous state and unknown inputs estimation. This is done through the synthesis of a multiple observer based on unknown inputs elimination. It is shown that the observer gains are solutions of a set of linear matrix inequalities. Next, an unknown input estimation method is proposed. An academic example dealing with message decoding illustrates the performances of the proposed multiple observer.

Mots clés : Système non linéaire, entrée inconnue, multimodèle discret, multiobservateur, stabilité asymptotique, inégalités linéaires matricielles, cryptage.

Key words: Nonlinear systems, unknown inputs, discrete multiple model, multiple observer, asymptotic stability, linear matrix inequality, message coding.

1 – Introduction

La surveillance des processus constitue actuellement un moyen privilégié pour améliorer la sûreté de leur fonctionnement. Plusieurs aspects complémentaires constituent cette approche et en particulier : la définition des sources d'information pour la surveillance, l'élaboration de modèles décrivant le processus en fonctionnement normal voire en fonctionnement anormal, la conception d'indicateurs de dysfonctionnements à partir des modèles précédents, la restauration de grandeurs non mesurées mais témoins du fonctionnement du procédé. Toutes ces techniques font l'objet d'études théoriques [Blanke] et certaines d'entre elles s'appliquent à des situations concrètes [Maquin]. Dans cette présentation nous nous attachons plus particulièrement à l'estimation de variables non mesurées. Cette démarche entre dans le cadre général de la reconstruction d'état par observateur plus particulièrement dédiée ici à la reconstruction de l'entrée d'un système. Celle-ci s'apparente aussi à une procédure d'inversion de modèle en ce sens qu'à partir de la sortie d'un système on cherche à reconstruire son entrée. Nous nous intéresserons à une classe particulière de systèmes représentée sous forme de multimodèles [Murray]. De telles structures ont l'avantage de prendre en compte la présence de plusieurs régimes de fonctionnement du système considéré. Il est en effet fréquent qu'un système physique présente des comportements

différents selon son point de fonctionnement ; typiquement, le comportement dynamique d'un avion varie considérablement selon que l'on considère la phase de décollage, la phase de vol, ou la phase d'atterrissage. Pour résumer, la présentation se focalisera sur l'estimation de l'état d'un système représenté par un multimodèle en prenant en compte la présence d'entrées non connues a priori. Une application particulière, mais importante dans le domaine du cryptage ou des communications sécurisées, sera présentée. Il s'agit en fait de transmettre un message en le « dissimulant » dans un signal transmis par un canal de communication publique et de concevoir un observateur ou système de décryptage capable de retrouver ce message.

2 – Estimation d'état et des entrées inconnues d'un multimodèle

La formalisation du problème d'estimation de l'état est faite ici à partir d'une représentation multimodèle. Le système considéré comporte des entrées connues et des entrées inconnues. Le principe adopté est celui de la conception d'un observateur dit à entrées inconnues largement répandu pour l'estimation d'état des systèmes et que nous avons appliqué au cas des multimodèles.

2.1 – Structure générale d'un multimodèle

Le modèle du système, supposé connu, est pris sous la forme :

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ est le vecteur des entrées, $\bar{u}(t) \in \mathbf{R}^q$, $q < n$, est le vecteur des entrées inconnues et $y(t) \in \mathbf{R}^p$ représente le vecteur des sorties mesurées. Pour le $i^{\text{ème}}$ « modèle local », $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $R_i \in \mathbf{R}^{n \times q}$ est la matrice d'influence des entrées inconnues et $D_i \in \mathbf{R}^n$ représente un vecteur dépendant du point de fonctionnement; $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ et $F \in \mathbf{R}^{p \times q}$ avec $\text{rang}(F) = q$. Enfin, $\xi(t)$ représente le vecteur de décision dépendant de l'entrée connue et/ou des variables d'état mesurables. A chaque instant, $\mu_i(\xi(t))$ indique la contribution relative de chaque modèle local à la construction du modèle global. Le choix du nombre M de modèles locaux de ce multimodèle peut s'effectuer de façon intuitive en fonction du nombre de régimes de fonctionnement observés, la détermination des matrices A_i , B_i , R_i et D_i nécessitant par contre des techniques adaptées d'estimation paramétrique [Gasso]. D'un point de vue pratique, les matrices A_i , B_i , R_i et D_i représentent, d'une certaine façon, le comportement local du système autour du $i^{\text{ème}}$ point de fonctionnement. Ceci est effectivement le cas si, autour du $i^{\text{ème}}$ point de fonctionnement, on a $\mu_i(\xi(t)) = 1$ et $\mu_j(\xi(t)) = 0$, $j \neq i$. En réalité, les fonctions μ sont amenées à prendre des valeurs sur $[0,1]$ et, à la notion de modèle local, il est préférable de substituer la notion de modèle barycentrique ; à un instant particulier t le modèle actif résulte d'une pondération entre les différents modèles locaux.

Le problème considéré ici est celui de la reconstruction des variables d'état x et des entrées inconnues \bar{u} en utilisant seulement l'information des entrées connues u et des sorties mesurées y .

2.2 – Structure générale d'un multiobservateur

Ce paragraphe explicite la construction de l'observateur. Ce dernier revêt une forme analytique issue de l'agrégation d'observateurs locaux [Chadli] et celle-ci se prête bien à une étude de stabilité et de convergence de l'erreur d'estimation. Les aspects numériques de détermination des gains de l'observateur

seront également abordés. La forme du multiobservateur capable d'estimer le vecteur d'état et celui des entrées inconnues du multimodèle discret (1), s'explique :

$$\begin{cases} z(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(N_i z(t) + G_{i1} u(t) + G_{i2} + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - E y(t) \end{cases} \quad (2)$$

où $N_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $G_{i1} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $L_i \in \mathbf{R}^{n \times p}$ est le gain du $i^{\text{ème}}$ observateur local, $G_{i2} \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur constant et E est une matrice de transformation. Bien évidemment, l'observateur n'utilise que les variables connues u et y , \bar{u} étant non mesuré. L'ensemble de ces matrices doit être déterminé d'un point de vue numérique afin de garantir la convergence de l'état estimé par l'observateur vers l'état réel. Pour cela, définissons l'erreur d'estimation d'état :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3)$$

A partir de cette définition et en utilisant l'expression de $\hat{x}(t)$ donnée par (2), l'expression de l'erreur devient :

$$e(t) = P x(t) - z(t) + E F \bar{u}(t) \quad (4)$$

avec :

$$P = I + E C \quad (5)$$

Par la suite, on cherche à expliciter l'évolution temporelle de l'erreur afin d'en maîtriser la convergence vers 0. Pour cela évaluons son expression à l'instant $t+1$:

$$e(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(P(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) - N_i z(t) - G_{i1} u(t) - G_{i2} - L_i y(t)) \quad (6)$$

En remplaçant $y(t)$ et $z(t)$ par leurs expressions données par (1) et (2), l'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned} e(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(N_i e(t) + (P A_i - N_i P - L_i C)x(t) + (P B_i - G_{i1})u(t) + (P D_i - G_{i2}) \\ + (P R_i - K_i F)\bar{u}(t) + E F \bar{u}(t+1)) \end{aligned} \quad (7)$$

avec $K_i = N_i E + L_i$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} P = I + E C \\ N_i P = P A_i - L_i C \\ K_i = N_i E + L_i \\ P R_i = K_i F \\ G_{i1} = P B_i \\ G_{i2} = P D_i \\ E F = 0 \end{cases} \quad (8)$$

l'équation (7) se réduit à :

$$e(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i e(t) \quad (9)$$

La décroissance asymptotique de l'erreur d'estimation d'état est alors dépendante de la nature de la matrice $N = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i$ et il est important de noter que la stabilité des matrices N_i , $\forall i \in \{1, \dots, M\}$ ne garantit pas forcément la stabilité de cette dernière. Ce point est traité au paragraphe suivant. Ainsi, les contraintes (8) définissent l'observateur capable d'estimer l'état du système à entrées inconnues. Il reste cependant à

montrer comment estimer les entrées inconnues \bar{u} du système et cela est proposé au paragraphe 2.4. Enfin, la stabilité de la matrice N doit être garantie en respectant l'ensemble des contraintes matricielles (8), ce point technique concernant la méthode de résolution fait l'objet du paragraphe 2.5.

2.3 – Convergence globale du multiobservateur

Dans cette partie, les conditions suffisantes de convergence asymptotique globale de l'erreur d'estimation d'état sont précisées. Comme l'indique l'équation d'évolution de l'erreur d'estimation (9), la convergence est étroitement liée à la nature de la matrice $N = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))N_i$.

Théorème [Akhenak] : *l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle discret à entrées inconnues (1) et le multiobservateur (2) converge asymptotiquement vers zéro, si toutes les paires (A_i, C) sont observables, la matrice F est de plein rang colonne et si les conditions suivantes sont vérifiées $\forall (i, j) \in \{1, \dots, M\}$:*

$$N_i^T X N_j - X < 0 \quad (10a)$$

$$N_i = P A_i - K_i C \quad (10b)$$

$$P = I + E C \quad (10c)$$

$$P R_i = K_i F \quad (10d)$$

$$E F = 0 \quad (10e)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (10f)$$

$$G_{i1} = P B_i \quad (10g)$$

$$G_{i2} = P D_i \quad (10h)$$

où $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive.

La démonstration de ce théorème est développée dans [Akhenak]. Indiquons simplement que la condition de stabilité de N est traduite par les inégalités matricielles (10a). Les conditions (10b) à (10h) ne sont qu'une ré-écriture des contraintes (8). Le système d'équations (10) comporte des inégalités matricielles bilinéaires (10a), qui doivent être résolues en tenant compte des différentes contraintes égalité. Notons que les équations (10f), (10g) et (10h) servent uniquement au calcul des gains L_i , G_{i1} et G_{i2} une fois les matrices X , N_i , P , K_i et E déterminées.

2.4 – Estimation des entrées inconnues

Nous avons vu précédemment que la convergence du multiobservateur (2) est garantie si les conditions (10) sont vérifiées et les paires (A_i, C) sont observables. En régime permanent, l'erreur d'estimation d'état tend vers zéro ; en remplaçant x par \hat{x} dans l'équation (1), l'entrée \bar{u} étant remplacée par son estimation $\hat{\bar{u}}$ nous obtenons :

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t) + D_i) \\ y(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{\bar{u}}(t) \end{cases} \quad (11)$$

Nous proposons alors d'estimer l'entrée inconnue \bar{u} en utilisant l'ensemble des équations (11) :

$$\hat{\bar{u}}(t) = (W^T W)^{-1} W^T \begin{pmatrix} \hat{x}(t+1) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y(t) - C \hat{x}(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

sous réserve que la matrice :

$$W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \\ F \end{pmatrix} \quad (13)$$

soit de plein rang colonne. Pour conclure cette procédure d'estimation, deux étapes sont mises en œuvre : la première est dédiée à l'estimation de l'état du système au moyen de l'observateur (2), la seconde estime l'entrée inconnue à partir de l'état estimé (12). Les conditions d'estimabilité, liées au rang de la matrice W , peuvent sembler contraignantes. Pour l'application (section 3), cette contrainte peut facilement être respectée car on cherche à concevoir un système de communication de messages ; on dispose donc de degrés de liberté pour le choix des matrices R_i et F .

2.5 – Détermination des matrices de l'observateur

L'examen des différentes contraintes montre que (10e) détermine complètement la matrice E de l'observateur. En notant $F^{(-)}$ une inverse généralisée de F , on a :

$$E = I - FF^{(-)} \quad (14)$$

On en déduit ensuite la valeur de la matrice P à l'aide de (10c). Les inégalités matricielles (10a) dans lesquelles on a remplacé les matrices N_i par leurs valeurs issues de (10b) s'écrivent :

$$N_i^T X N_j - X = (PA_i - K_i C)^T X (PA_j - K_j C) - X < 0 \quad (15)$$

L'utilisation du complément de Schur permet d'exprimer ces contraintes sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{pmatrix} X & (PA_i - K_i C)^T X \\ X(PA_j - K_j C) & X \end{pmatrix} > 0 \quad (16)$$

Si l'on procède au changement de variable suivant :

$$W_i = X K_i \quad (17)$$

la contrainte égalité (10d) peut alors être réécrite sous la forme :

$$X P R_i = X K_i F = W_i F \quad (18)$$

Il suffit ensuite de résoudre les inégalités matricielles (16) sous la contrainte égalité (18).

$$\begin{pmatrix} X & A_i^T P X - C^T W_i^T \\ X P A_j - W_j C & X \end{pmatrix} > 0 \quad (19a)$$

$$X P R_i = W_i F \quad (19b)$$

Ce système étant linéaire par rapport aux inconnues X et W_i , des outils classiques LMI (LMI MATLAB TOOLBOX par exemple) peuvent être utilisés pour cette résolution. Les autres matrices définissant l'observateur sont ensuite déduites de la connaissance de E , P , X et W_i :

$$G_{i1} = P B_i \quad (20a)$$

$$G_{i2} = P D_i \quad (20b)$$

$$K_i = X^{-1} W_i \quad (20c)$$

$$N_i = P A_i - K_i C \quad (20d)$$

$$L_i = K_i - N_i E \quad (20e)$$

L'ensemble des matrices décrivant l'observateur peut ainsi être déterminé en utilisant des outils numériques largement répandus.

3 – Application au décryptage et exemple

Considérons un multimodèle discret mono-entrée et mono-sortie composé de deux modèles locaux décrits chacun par deux variables d'état.

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases} \quad (21)$$

Le système (21) présente la particularité d'être excité uniquement par l'entrée \bar{u} , il fournit la sortie $y(t)$ qui constituera l'unique entrée de l'observateur et qui est également le seul signal transmis à cet observateur. Les fonctions d'activation sont exprimées à partir de fonctions exponentielles et dépendent uniquement de la sortie du multimodèle :

$$\begin{cases} \xi(t) = y(t) \\ \mu_1(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(\xi(t))) \\ \mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t)) \end{cases} \quad (22)$$

Les valeurs numériques des matrices sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 1 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad C = (0.5 \quad 0.5), \quad F = 5$$

on en déduit immédiatement la valeur des matrices E et P :

$$EF = 0 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow P = I$$

Pour cet exemple très particulier, le système de cryptage (modèle initial) est conçu en même temps que le système de décryptage (observateur) ; le choix des matrices d'influence R_i de l'entrée inconnue est donc libre. C'est la raison pour laquelle les inégalités matricielles (19a) sont résolues sans tenir compte de la contrainte (19b). Les matrices X , W_1 et W_2 obtenues sont les suivantes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1.672 & -2.056 \\ -2.056 & 7.717 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} -3.916 \\ 9.036 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} -2.361 \\ 13.581 \end{pmatrix}$$

Les gains K_1 et K_2 de l'observateur se déduisent à partir de (20c) : $K_i = X^{-1}W_i$. On obtient :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1.22 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1.11 \\ 2.02 \end{pmatrix}$$

Les contraintes (19b) (ou (10d)) sont ensuite satisfaites en déduisant la valeur des matrices R_i de celles des gains K_i à l'aide de l'équation $R_i = K_i F$, ce qui conduit à :

$$R_1 = \begin{pmatrix} -6.709 \\ 4.067 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 5.596 \\ 10.291 \end{pmatrix}$$

Les matrices N_i et L_i définissant l'observateur sont ensuite respectivement déduites à l'aide des équations (20d) et (20e) :

$$N_1 = \begin{pmatrix} -0.429 & -0.107 \\ -1.171 & 0.293 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0.240 & 60.029 \\ -0.660 & 0.071 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} -1.342 \\ 0.813 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1.119 \\ 2.058 \end{pmatrix}$$

La figure 1 visualise le signal y transmis à l'observateur, ainsi que le message contenu dans y . La figure 2 compare les états réels et estimés et visualise aussi le message reconstruit. Ce dernier, excepté au voisinage de l'origine, correspond parfaitement au message transmis et dissimulé dans le signal transmis.

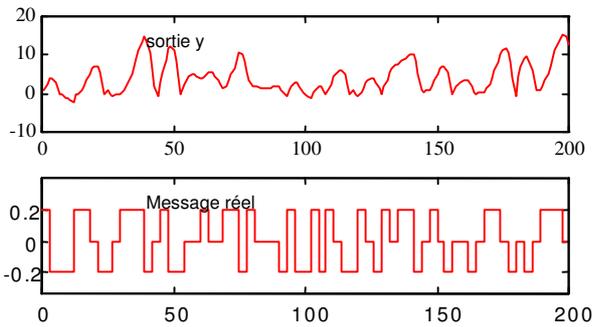


Figure 1 : Sortie $y(t)$ et message $\bar{u}(t)$

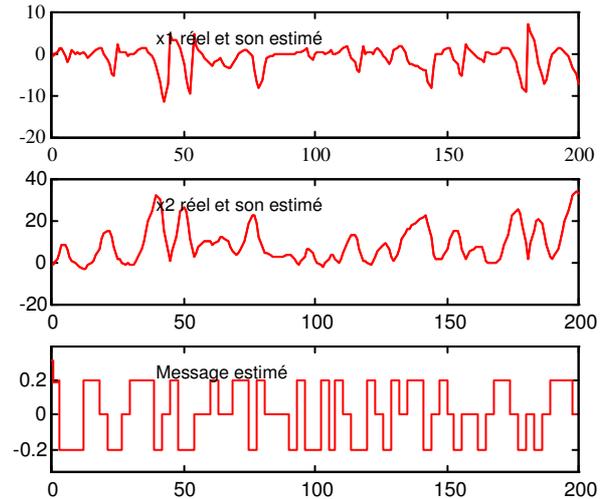


Figure 2 : Etats réels et estimés et message estimé

La figure 3 visualise l'évolution de la fonction d'activation $\mu_1(\xi(t))$. S'agissant de transmettre un message sur un canal de communication dit public, on peut s'interroger sur la possibilité de directement détecter et reconnaître le message dans le signal transmis. Dans [Alvarez] quelques éléments de réponse sont donnés et on se contente ici d'une simple « appréciation visuelle ». La figure 4 présente simultanément le message et le signal ; aucune corrélation simple n'apparaît. La figure 5, tracée dans le plan de phase du système, ne montre pas de comportement particulier de type périodique ou à commutation. Ces deux remarques ne peuvent constituer des preuves d'inviolabilité du signal transmis par rapport au message à transmettre, mais simplement une première indication sur le masquage du message à transmettre.

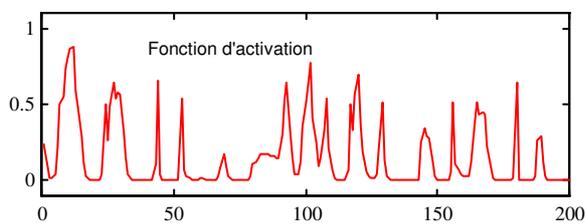


Figure 3 : Fonction d'activation $\mu_1(\xi(t))$

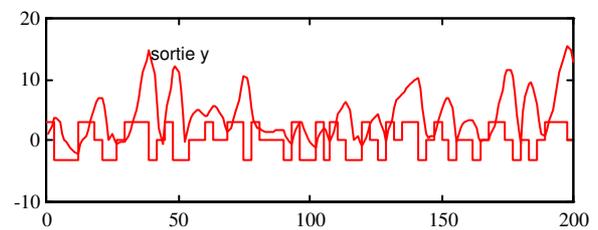


Figure 4 : Sortie $y(t)$ et message estimé

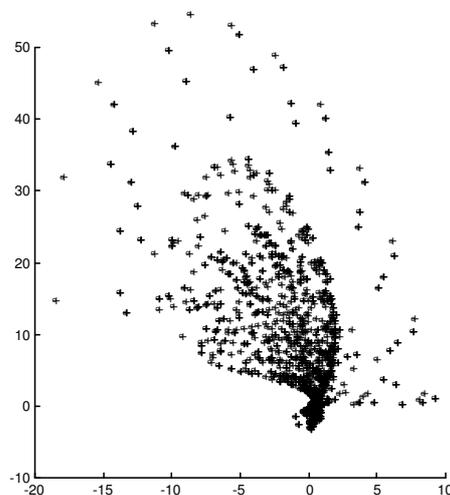


Figure 5 : Plan de phase du système

3 – Conclusion

Cet article a proposé une méthode d'estimation d'état d'un système non linéaire discret représenté par un multimodèle soumis à l'influence d'entrée inconnues. La première étape consiste à concevoir un multiobservateur dont la structure est calquée sur celle du multimodèle et qui s'affranchit de la présence des entrées inconnues. Celles-ci sont ensuite déduites de cette estimation d'état.

Une application de la méthode proposée dans le cadre spécifique du cryptage de communication a été présentée; il s'agit de distinguer, dans un signal, un message « dissimulé ». Les performances obtenues, même si elle restent à évaluer de manière rigoureuse, semblent prometteuses. Dans une perspective proche, nous envisageons de préciser la construction des modèles locaux de façon à leur assurer un comportement chaotique propice à mieux masquer le message à transmettre.

Références :

[Akhenak] Akhenak A., Chadli M., Ragot J., Maquin D. *Conception d'un observateur flou à entrées inconnues*. 12ème Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA'04, Nantes, France, 18-19 novembre 2004.

[Alvarez] Alvarez G., Montoya F., Romera M., Pastor G. *Breaking parameter modulated chaotic secure communication system*. Chaos, Solitons & Fractals, in print, 2004.

[Blanke] Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer, 2003.

[Chadli] Chadli M., Maquin D., Ragot J. *Multiple observers for discrete-time multiple models*. 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess'2003, Washington, D.C., USA, June 9-11, 2003.

[Gasso] Gasso K., Mourot G., Ragot J. *Structure identification of multiple models with output error local models*. 15th IFAC World Congress on Automatic Control, Barcelona, Spain, July 21-26, 2002.

[Inoue] Inoue E., Ushio T. *Chaos communication using unknown input observers*. Electronics and Communications in Japan, 84(12), pp. 21-27, 2001.

[Maquin] Maquin D., Ragot J. *Surveillance des réseaux de distribution d'eau potable*. In *Automatique et statistiques pour le diagnostic*, coordinateur : Bernard Dubuisson, chapitre 5, Traité Information, Commande, Communication, IC2, Hermès Science Publications, Paris, 2001.

[Murray] Murray-Smith R., Johansen T.A. *Multiple model approach in modelling and control*. Taylor and Francis, 1997.

[Strikholm] Strikholm B., Teräsvirta T. *Determining the number of regimes in threshold autoregressive model using smooth transition autoregression*. 13th model selection and evaluation. 13th (EC)² Conference on Model Selection and Evaluation, Bologna, Italy, December 13-14, 2002.