

Multiobservateur à modes glissants

A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy - CNRS UMR 7039
Institut National Polytechnique de Lorraine

2, avenue de la forêt de Haye - 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex
{aakhenak, mchadli, jragot, dmaquin}@ensem.inpl-nancy.fr

Abstract : This paper deals with the design of a sliding mode multiple observer (an observer based on a multiple model) allowing to estimate the state vector of a non linear dynamical system influenced by unknown inputs which act on it through a known transmission matrix. This state estimation can therefore be classically used for detecting and isolating faults.

Résumé : Cette communication est relative à la conception d'un multiobservateur (observateur basé sur un multimodèle) à modes glissants permettant d'effectuer l'estimation d'état d'un système dynamique non linéaire soumis à l'influence d'entrées inconnues agissant sur celui-ci par l'intermédiaire d'une matrice d'action connue. Cette estimation d'état peut ensuite être utilisée de manière classique pour détecter et isoler des défauts.

Mots clés : multiobservateur, mode glissant, estimation d'état, entrées inconnues.

1. Introduction

Parmi les méthodes de détection et localisation de défauts pour les systèmes représentés à l'aide d'un modèle dynamique, celles qui s'appuient sur la génération d'indicateurs de défaut (souvent appelés résidus) calculés comme la différence entre des mesures prélevées sur le système réel et des estimations calculées par un modèle sont désormais classiques. De très nombreux résultats s'appuyant, en particulier, sur des modèles linéaires ont été publiés dans diverses situations (système régulier ou singulier, cadre stochastique ou déterministe, présence d'entrées inconnues, etc.). Lorsqu'on souhaite représenter le comportement d'un système à l'aide d'un modèle non linéaire, la conception d'observateurs est en général plus délicate, notamment si l'on souhaite prendre en compte des entrées inconnues (Patton, 1997) [7]. Le système peut alors être décrit à l'aide d'un multimodèle. Lorsque les entrées inconnues agissent de la même manière sur chacun des modèles locaux, Akhenak et al [3] ont proposé la conception d'un multiobservateur. Dans cette communication, nous reprenons cette idée en proposant une méthode de conception d'un multiobservateur pour un multimodèle où les matrices de transmission des entrées inconnues sont différentes pour chaque modèle local.

2. Observateur par modes glissants

Le concept de mode glissant a émergé en Union

Soviétique vers la fin des années 60, où des lois de commande discontinues pour les systèmes dynamiques ont été analysées. En utilisant une loi de commande commutée judicieuse, on a constaté que les états du système pouvaient être forcés pour atteindre et rester ultérieurement sur une surface prédéfinie dans l'espace d'état. Contraint sur cette surface, le mouvement résultant, appelé mouvement glissant, s'est avéré peu sensible à toutes les incertitudes ou signaux externes de perturbation.

Cette propriété inhérente de robustesse a eu comme conséquence le développement de recherches dans le domaine de la commande par modes glissants. Ces idées ont été ultérieurement utilisées dans d'autres situations comprenant le problème d'estimation d'état par l'intermédiaire d'un observateur. Les premiers travaux ont été réalisés par Utkin en utilisant une structure discontinue dans un observateur (Utkin, 1992) [5]. Walcott et Zak ont employé une approche basée sur la méthode de Lyapunov consistant à synthétiser un observateur qui, avec des hypothèses appropriées, assure la décroissance asymptotique de l'erreur d'estimation d'état même en présence de non linéarités et d'incertitudes sur l'entrée du système (Walcott et Zak, 1988) [4]. Edwards et Spurgeon (1994 et 2000) [1] et [2] ont proposé une stratégie de conception d'observateur, semblable du point de vue structure de modèle à celle de Walcott et de Zak, en offrant de plus un algorithme explicite de conception. Dans le cadre de l'approche multimodèle, la synthèse de régulateur par modes glissants a été également considérée [10].

L'étude proposée concerne la conception d'un multiobservateur à modes glissants, capable de reconstruire le vecteur d'état et le vecteur de la sortie en présence d'entrées inconnues, tel que chaque observateur local est modélisé de la même façon que celle de l'observateur de Walcott et Zak (1988).

2.1 La représentation multimodèle

Considérons un système non linéaire, représenté sous forme multimodèle et dépendant d'entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées, $\bar{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{R}^q$, $q < n$ le vecteur des entrées inconnues et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sorties mesurables.

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état du $i^{\text{ème}}$ modèle local, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $R_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ est la matrice d'influence des entrées inconnues et $D_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est une matrice dépendante du point de fonctionnement ; $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie. Enfin, $\xi(t)$ représente le vecteur de décision dépendant de l'entrée connue et/ou des variables d'état mesurables.

La procédure permettant d'obtenir cette structure et d'estimer ses paramètres n'est pas développée ici ; indiquons simplement que l'on peut utiliser des techniques d'estimation paramétrique (Gasso, 2001) [8] ou des techniques de linéarisation (Jonhanson, 2000) [9].

Le problème considéré ici est celui de la reconstruction des variables d'état en utilisant seulement l'information des entrées et des sorties mesurées.

2.2 Structure générale du multiobservateur

Nous proposons une démarche originale de conception d'un multiobservateur à entrées inconnues basé sur une somme pondérée d'observateurs de types Walcott et Žak.

Dans cette partie, nous considérons que les entrées inconnues $\bar{\mathbf{u}}(t)$ sont non nulles mais bornées, telle que, $\|\bar{\mathbf{u}}(t)\| \leq \rho$, où ρ est un scalaire et $\|\cdot\|$ représente une norme euclidienne.

S'il existe des matrices de gain $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ telles que $A_{0i} = A_i - G_i C$ sont stables, des paires de matrices de Lyapunov (P, Q_i) et des matrices $F_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$ respectant les contraintes structurelles suivantes :

$$A_{0i}^T P + P A_{0i} = -Q_i \quad (2-a)$$

$$C^T F_i^T = P R_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2-b)$$

alors, pour le multiobservateur de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{\mathbf{x}}(t) + B_i \mathbf{u}(t) - G_i (C \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)) + K_i v_i(t) \right) \\ \mathbf{y}(t) = C \hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (3)$$

on peut déterminer des matrices G_i, K_i et des commandes $v_i(t)$, avec $v_i(t) \in \mathbb{R}^q$ qui garantissent la convergence exponentielle de $\hat{\mathbf{x}}(t)$ vers $\mathbf{x}(t)$.

Notons que l'équation (2-b) permet le découplage des entrées inconnues.

Avant de passer à l'estimation du vecteur d'état du système (1), nous allons procéder à deux changements de coordonnées du vecteur d'état.

2.3 Simplification de l'équation de sortie

Supposons que le système décrit ci-dessus soit observable, au sens particulier où toutes les paires (A_i, C) sont observables. Comme les observateurs utilisent les entrées et les sorties mesurables pour reconstruire les états, il est naturel d'effectuer un changement de coordonnées ou de base pour que les sorties du système apparaissent directement comme des composantes du vecteur d'état. Sans perte de généralité, la matrice de sortie peut être écrite comme suit [4] :

$$C = [C_1 \quad C_2] \quad (4)$$

où $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $\det(C_2) \neq 0$. Nous effectuons alors le changement de coordonnées : $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{T} \mathbf{x}(t)$, où \tilde{T} est la matrice non singulière définie par :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, on peut facilement vérifier que la nouvelle matrice de sortie s'écrit :

$$\tilde{C} = C \tilde{T}^{-1} \quad (6)$$

et les autres matrices sont écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i = \tilde{T} A_i \tilde{T}^{-1} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11i} & \tilde{A}_{12i} \\ \tilde{A}_{21i} & \tilde{A}_{22i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \tilde{T} B_i = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{1i} \\ \tilde{B}_{2i} \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_i = \tilde{T} D_i &= \begin{bmatrix} \tilde{D}_{1i} \\ \tilde{D}_{2i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{R}_i = \tilde{T} R_i = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{1i} \\ \tilde{R}_{2i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Les matrices de Lyapunov (P, Q_i) et les contraintes (2) subissent alors les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{P} = (\tilde{T}^{-1})^T P \tilde{T}^{-1} \\ \tilde{Q}_i = (\tilde{T}^{-1})^T Q_i \tilde{T}^{-1} \\ \tilde{C}^T F_i^T = \tilde{P} \tilde{R}_i \end{cases} \quad (8)$$

Le système (1) peut alors être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (\tilde{A}_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{B}_i \mathbf{u}(t) + \tilde{R}_i \bar{\mathbf{u}}(t) + \tilde{D}_i) \\ \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{où } \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{T} \mathbf{x}(t) \quad (10)$$

Le changement de coordonnées permet donc d'exprimer directement le vecteur de sortie en fonction d'une partie du vecteur d'état.

2.4 Découplage des entrées inconnues

Nous pouvons maintenant utiliser un résultat établi par Walcott et Žak concernant la conception d'un observateur robuste à la présence d'entrées inconnues. Ce résultat est étendu à la conception d'un multiobservateur.

Soient les modèles locaux $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{R}_i, \tilde{C})$ définis dans l'équation (8) avec \tilde{A}_i stables $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, et soient $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{R}_i, \bar{C})$ liés à $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{R}_i, \tilde{C})$ par le

changement de coordonnées $\bar{x}(t) = \bar{T}\tilde{x}(t)$. Alors, le système décrit par (8) s'écrit dans la nouvelle base comme suit [4] :

$$\begin{cases} \bar{A}_i = \bar{T}\tilde{A}_i\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11i} & \bar{A}_{12i} \\ \bar{A}_{21i} & \bar{A}_{22i} \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_i = \bar{T}\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1i} \\ \bar{B}_{2i} \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_i = \bar{T}\tilde{D}_i = \begin{bmatrix} \bar{D}_{1i} \\ \bar{D}_{2i} \end{bmatrix} \\ \bar{R}_i = \bar{T}\tilde{R}_i = \begin{bmatrix} \bar{R}_{1i} \\ \bar{R}_{2i} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{C} = \tilde{C}\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \end{cases}$$

Proposition 1 : Soient $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{R}_i, \tilde{C})$ des modèles locaux pour lesquels il existe des paires (\tilde{P}, F_i) définies par les contraintes (2), alors il existe une transformation non singulière \bar{T} telle que les nouvelles coordonnées des quadruplets $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{R}_i, \bar{C})$ ont les propriétés suivantes :

1. $\bar{A}_{0i} = \bar{A}_i - \bar{G}_i\bar{C}$, avec $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11i} & \bar{A}_{12i} \\ \bar{A}_{21i} & \bar{A}_{22i} \end{bmatrix}$
où, $\bar{A}_{11i} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ sont stables.
2. $\bar{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & P_{22}^* F_i^T \end{bmatrix}^T$ où $P_{22}^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$ avec
 $P_{22}^* = (F_{22}^*)^T > 0$
3. $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$
4. $\bar{P} = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{P} \bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}$
où $\bar{P}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ et $\bar{P}_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

Démonstration : Soient les paires (\tilde{P}, F_i) associées au modèle local $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{R}_i, \tilde{C})$ et soit la matrice de Lyapunov \tilde{P} écrite sous la forme suivante :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} \text{ où } \begin{cases} \tilde{P}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)} \text{ est régulière} \\ \tilde{P}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p} \text{ et } \tilde{P}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p} \end{cases}$$

Le changement de coordonnées utilise la matrice de transformation \bar{T} suivante :

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (11-a)$$

qui est non singulière. La matrice P_{11} étant une matrice symétrique définie positive $P_{11} = P_{11}^T > 0$. Dans les nouvelles coordonnées, on obtient :

$\bar{C} = \tilde{C}\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$. Ainsi, la propriété (3) est satisfaite. ♦

A partir de l'équation (8) on obtient $\tilde{R}_i = \tilde{P}^{-1}\tilde{C}^T F_i^T$.

Si l'on note $\tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{R}_i &= \bar{T}\tilde{R}_i = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} F_i^T \\ \bar{R}_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ P_{22}^* F_i^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{R}_{2i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11-b)$$

Ainsi, la deuxième propriété explicitant le découplage des entrées inconnues est prouvée. ♦

S'il existe une matrice de Lyapunov \tilde{P} qui satisfait les contraintes (2), alors la matrice $\bar{P} = (\bar{T}^{-1})^T \tilde{P} \bar{T}^{-1}$ représente la matrice de Lyapunov pour les matrices \bar{A}_i et satisfait les contraintes $\bar{C}^T F_i^T = \bar{P} \bar{R}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$. Par un calcul direct, on peut aisément trouver :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & 0 \\ -\tilde{P}_{12}^T \tilde{P}_{11}^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & -\tilde{P}_{11}^{-1} \tilde{P}_{12} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix}$$

où $\bar{P}_2 = \tilde{P}_{22} - \tilde{P}_{12}^T \tilde{P}_{11}^{-1} \tilde{P}_{12}$

Ainsi la matrice \bar{P} a une structure bloc diagonale indiquée à la propriété 4. ♦

Enfin, comme la matrice de Lyapunov pour \bar{A}_{0i} est une matrice bloc diagonale, alors les matrices \bar{A}_{011i} et \bar{A}_{022i} sont stables :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{A}_{011i} & \bar{A}_{012i} \\ \bar{A}_{021i} & \bar{A}_{022i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{011i} & \bar{A}_{012i} \\ \bar{A}_{021i} & \bar{A}_{022i} \end{bmatrix} < 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \bar{A}_{011i}^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 \bar{A}_{011i} < 0 \\ \bar{A}_{022i}^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 \bar{A}_{022i} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\bar{A}_{011i} = \bar{A}_{11i} - (\bar{G}_i \bar{C})_{11} = \bar{A}_{11i}$, telle que $(\bar{G}_i \bar{C})_{11} = 0$
 $\forall \bar{G}_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ parce que $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$ et par conséquent les matrices \bar{A}_{11i} sont stables.

Ainsi la propriété (1) est prouvée. ■

2.5 Synthèse d'un multiobservateur

Soit un modèle local décrit par $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{R}_i, \tilde{C})$ pour lequel il existe une paire de matrices de Lyapunov (\tilde{P}, \tilde{Q}_i) vérifiant la contrainte (2). Alors, il existe une transformation non singulière \bar{T} de telle sorte que le modèle local avec entrées inconnues défini par $(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{R}_i, \bar{C})$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{R}_i \bar{u}(t) + \bar{D}_i) \\ y(t) = \bar{x}_2(t) \end{cases} \quad (13)$$

ou encore sous la forme développée :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{A}_{11i} \bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12i} \bar{x}_2(t) + \bar{B}_{1i} u(t) + \bar{D}_{1i} \right) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{A}_{21i} \bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22i} \bar{x}_2(t) + \bar{B}_{2i} u(t) + \bar{R}_{2i} \bar{u}(t) + \bar{D}_{2i} \right) \\ y(t) &= \bar{x}_2(t) \end{aligned}$$

où l'on constate que $\bar{x}_1(t)$ ne dépend pas explicitement des entrées inconnues.

Le multiobservateur proposé a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{D}}_i - \right. \\ \left. \hat{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(t) \right) \end{cases} \quad (14)$$

avec $\bar{\mathbf{G}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12i} \\ \bar{\mathbf{A}}_{22i} - \bar{\mathbf{A}}_{22}^s \end{bmatrix}$ et $\bar{\mathbf{K}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_2^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{2i} \end{bmatrix}$

où $\hat{\mathbf{x}}(t)$ représente le vecteur d'état estimé. $\bar{\mathbf{A}}_{22}^s$ est une matrice stable et les fonctions vectorielles discontinues $v_i(t)$ sont définies comme suit :

$$v_i(t) = \begin{cases} -\rho \mathbf{E}_i^T (\mathbf{E}_i \mathbf{E}_i^T)^{-1} \left\| \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \right\| & \text{si } e_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (15)$$

avec : $e_y = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$, $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_y^T(t) \bar{\mathbf{R}}_{2i}$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ et $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ matrice symétrique définie positive, solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{22}^s + (\bar{\mathbf{A}}_{22}^s)^T \mathbf{P}_2 = -\mathbf{Q}_2 \quad (16)$$

Notons que les erreurs d'estimation d'état et de sortie sont définies par $e_1(t) = \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \bar{\mathbf{x}}_1(t)$ et $e_2(t) = e_y(t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$. Leurs dynamiques vérifient respectivement :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \bar{\mathbf{A}}_{11i} e_1(t) \\ \dot{e}_2(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1(t) + \bar{\mathbf{A}}_{22}^s e_2(t) + \right. \\ \left. \mathbf{P}_2^{-1} \bar{\mathbf{R}}_{2i} v_i(t) - \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}}(t) \right) \end{cases} \quad (17)$$

Equation de Lyapunov et sa dynamique

Afin de démontrer la convergence exponentielle de cet observateur, considérons la fonction de Lyapunov suivante : $V(e_1, e_2) = e_1^T \mathbf{P}_1 e_1 + e_2^T \mathbf{P}_2 e_2$.

Sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire du système en utilisant les équations (2) et (16) s'écrit :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \left(\begin{aligned} & e_1^T (\bar{\mathbf{A}}_{11i}^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11i}) e_1 + \\ & e_2^T \left((\bar{\mathbf{A}}_{22i}^s)^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{22}^s \right) e_2 + \\ & e_1^T \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 e_2 + e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1 + \\ & 2e_2^T \bar{\mathbf{R}}_{2i} v_i - 2e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \right) \quad (18)$$

Proposition 2 : il existe une matrice symétrique définie positive \mathbf{P}_2 vérifiant (16), telle que les erreurs (17) tendent asymptotiquement vers zéro.

Démonstration : considérons $\mathbf{Q}_{1i} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ et $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ des matrices définies positives ainsi que les matrices $\hat{\mathbf{Q}}_i \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ symétriques définies positives vérifiant :

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} + \mathbf{Q}_{1i} \quad (19)$$

Soit $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ une matrice définie symétrique et positive, choisie comme unique solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$\bar{\mathbf{A}}_{11i}^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{A}}_{11i} = -\hat{\mathbf{Q}}_i \quad (20)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov tenant compte de (20) s'écrit alors :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \left(\begin{aligned} & -e_1^T \hat{\mathbf{Q}}_i e_1 - e_2^T \mathbf{Q}_2 e_2 + e_1^T \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 e_2 + \\ & e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1 + 2e_2^T \bar{\mathbf{R}}_{2i} v_i - 2e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \right)$$

On peut vérifier aisément que :

$$\begin{aligned} & (e_2 - \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1)^T \mathbf{Q}_2 (e_2 - \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1) = \\ & \left(e_2^T \mathbf{Q}_2 e_2 - e_1^T \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 e_2 - e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1 + \right. \\ & \left. e_1^T \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

En tenant compte de (21), l'expression de \dot{V} devient :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \left(\begin{aligned} & -e_1^T \hat{\mathbf{Q}}_i e_1 + e_1^T \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1 - \\ & \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i} + 2e_2^T \bar{\mathbf{R}}_{2i} v_i - 2e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \right)$$

avec $\tilde{e}_{2i} = e_2 - \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i} e_1$.

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \left(\begin{aligned} & -e_1^T (\hat{\mathbf{Q}}_i - \bar{\mathbf{A}}_{21i}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}}_{21i}) e_1 - \\ & \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i} + 2e_2^T \bar{\mathbf{R}}_{2i} v_i - 2e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \right)$$

En utilisant l'équation (19), la dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \left(\begin{aligned} & -e_1^T \mathbf{Q}_{1i} e_1 - \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i} + \\ & 2e_2^T \bar{\mathbf{R}}_{2i} v_i - 2e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \right)$$

1. Supposons que l'erreur de sortie soit non nulle. En utilisant l'expression de v_i (15), la dérivée de la fonction V devient :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\begin{aligned} & -e_1^T \mathbf{Q}_{1i} e_1 - \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i} - \\ & 2\rho \left\| e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \right\| - 2e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \right)$$

En utilisant le fait que les entrées inconnues sont bornées, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\begin{aligned} & -e_1^T \mathbf{Q}_{1i} e_1 - \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i} - \\ & 2\rho \left\| e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \right\| + 2\rho \left\| e_2^T \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \right\| \end{aligned} \right) \\ & = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (-e_1^T \mathbf{Q}_{1i} e_1 - \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i}) < 0 \end{aligned}$$

pour $(e_1, \tilde{e}_{2i}) \neq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$

2. Supposons maintenant que l'erreur de sortie soit nulle, la fonction \dot{V} s'écrit alors :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (-e_1^T \mathbf{Q}_{1i} e_1 - \tilde{e}_{2i}^T \mathbf{Q}_2 \tilde{e}_{2i}) < 0$$

On a donc démontré que les erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$ tendent vers zéro de façon exponentielle.

En conclusion, le multiobservateur du système (1) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left(\begin{aligned} & \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_i - \\ & \mathbf{G}_i (\bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)) + \mathbf{K}_i v_i(t) \end{aligned} \right) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \mathbf{G}_i = (\bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{T}})^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12i} \\ \bar{\mathbf{A}}_{22i} - \bar{\mathbf{A}}_{22}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_i = (\bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{T}})^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} (\bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{T}}) \mathbf{R}_i \\ v_i(t) = \begin{cases} -\rho \mathbf{E}_i^T (\mathbf{E}_i \mathbf{E}_i^T)^{-1} \left\| \mathbf{e}_y^T(t) \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{R}}_{2i} \right\| & \text{si } e_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{cases}$$

où, $e_y(t) = C\hat{x}(t) - y(t)$ et $E_i = e_y^T(t)\bar{R}_{2i}, \forall i \in \{1, \dots, r\}$

3. Exemple de simulation (système 3-cuves)

Le système non linéaire choisi est représenté par le schéma 1. Il est issu d'un benchmark classique et schématise un processus hydraulique composé de trois réservoirs [6]. Ces trois réservoirs T_1, T_2 et T_3 de sections identiques A sont reliés entre eux par des conduites cylindriques de sections identiques S_n . La valve de sortie située à l'extrémité du réservoir T_2 , assure l'écoulement des pompes 1 et 2 de débits respectifs $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$. Les conduites de communication entre les réservoirs sont équipées de valves à billes manuellement réglables, qui permettent à la pompe correspondante d'être fermée ou non. Les trois niveaux x_1, x_2 et x_3 sont régis pour $x_1 > x_3 > x_2$, par l'équation (23) [6].

A partir des lois fondamentales de conservation de la matière, on peut expliciter le fonctionnement de chaque réservoir ; on obtient alors un modèle non linéaire traduit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} A \frac{dx_1(t)}{dt} = Q_1(t) - \alpha_1 S_n (2g(x_1(t) - x_3(t)))^{1/2} + Qf_1(t)\bar{u}(t) \\ A \frac{dx_2(t)}{dt} = Q_2(t) + \alpha_3 S_n (2g(x_3(t) - x_2(t)))^{1/2} - \\ \quad \alpha_2 S_n (2g(x_2(t)))^{1/2} + Qf_2(t)\bar{u}(t) \\ A \frac{dx_3(t)}{dt} = \alpha_1 S_n (2g(x_1(t) - x_3(t)))^{1/2} - \\ \quad \alpha_3 S_n (2g(x_3(t) - x_2(t)))^{1/2} + Qf_3(t)\bar{u}(t) \end{cases} \quad (23)$$

α_1, α_2 et α_3 sont des constantes. $\bar{u}(t)$ est considérée comme une entrée inconnue, $Qf_i(t), i \in \{1, \dots, 3\}$ désignent les écoulements supplémentaires dans les réservoirs provoqués par des fuites, g est la constante de gravitation.

Les valeurs numériques des constantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Qf_i &= 10^{-4}, \forall i \in \{1, \dots, 4\} \\ \alpha_1 &= 0.78, \alpha_2 = 0.78 \text{ et } \alpha_3 = 0.75 \\ g &= 9.8, S_n = 5 \times 10^{-5} \text{ et } A = 0.0154 \end{aligned}$$

Le système non linéaire (23) est représenté sous forme multimodèle comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + D_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Les matrices A_i, B_i, R_i, C et D_i sont calculées en linéarisant le système initial (23) autour de quatre points choisis dans le domaine de fonctionnement. Le nombre de modèles locaux égal à 4 a été choisi de façon heuristique, cette valeur garantissant, dans le domaine de fonctionnement considéré, une bonne approximation de l'état du système réel par celui du multimodèle.

Les résultats de simulation sont représentés sur les figures suivantes, où on observe la bonne convergence du vecteur d'état du multiobservateur vers celui du multimodèle.

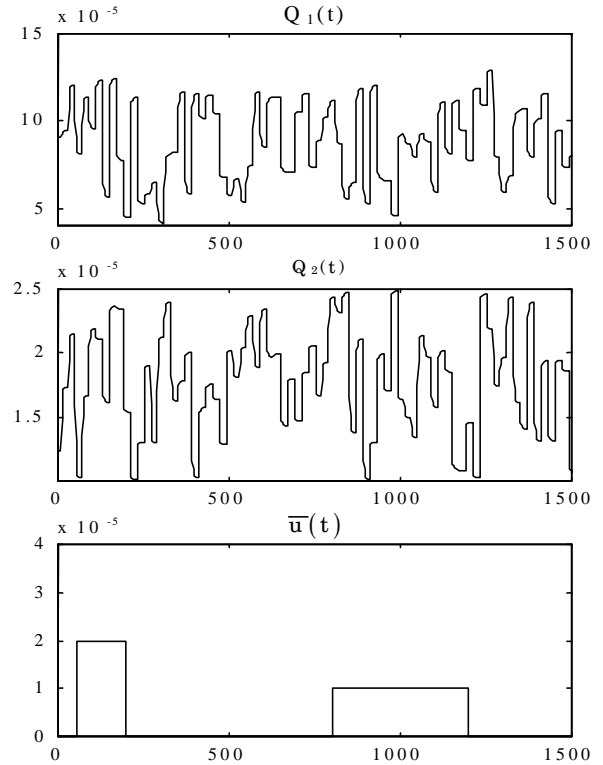


Figure 1 : les entrées du multimodèle

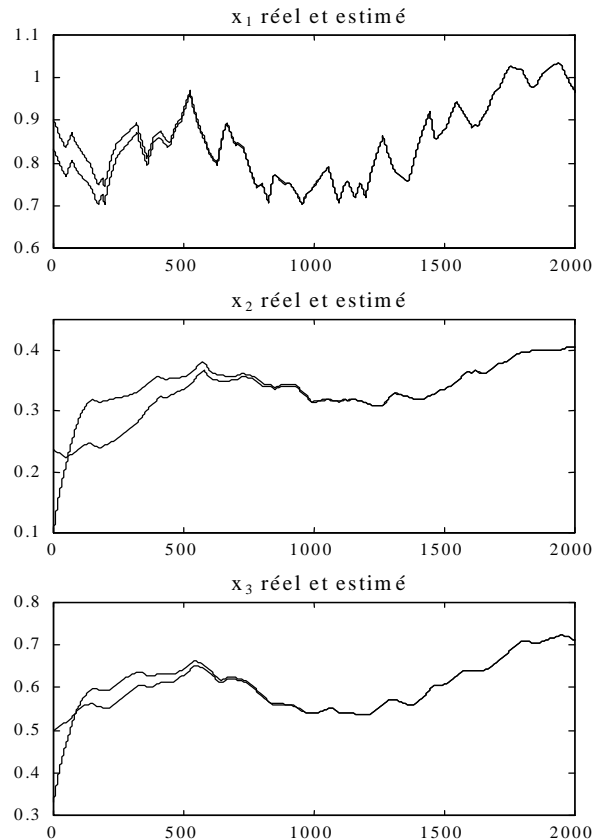


Figure 2 : estimation du vecteur d'état du multimodèle par le multiobservateur.

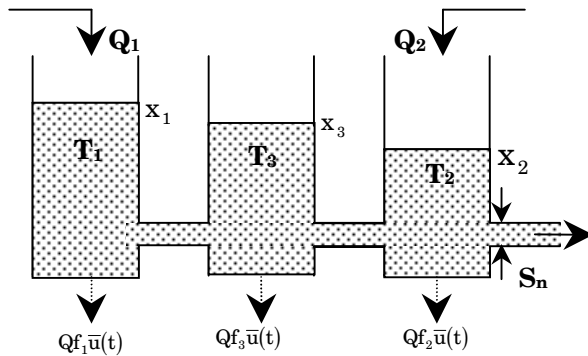


Schéma 1 : système à trois réservoirs

4. Conclusion

Dans ce papier, nous avons considéré un système non linéaire, soumis à des entrées inconnues, représenté sous forme multimodèle. Sous réserve d'existence de matrices appropriées, nous avons montré que la reconstruction du vecteur d'état et de sortie du multimodèle est possible. La méthode est basée sur l'existence de deux transformations non singulières T et T_1 , telle que la première permette de représenter le vecteur de sortie directement comme des composantes du vecteur d'état et la deuxième permettant d'isoler les entrées inconnues dans une partie du vecteur d'état.

Les résultats obtenus sont très satisfaisants. La méthode proposée est valable sous réserve que les entrées soient à énergie finie.

Un travail ultérieur consisterait à estimer l'amplitude des entrées inconnues.

5. Références bibliographique

1. C. Edwards and S. K. Spurgeon. On the development of discontinuous observers. *Int. J. Control*, 59 (5), pp. 1211-1229, 1994.
2. C. Edwards and S. K. Spurgeon. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36 (4), pp. 541-553, 2000.
3. A. Akhenak, M. Chadli, D. Maquin, J. Ragot. Multiple observer with unknown inputs. Application to a three tank system. IAR Annual Meeting. ICD, 2002.
4. B. L. Walcott and S. H. Zak. Observation of dynamical systems in the presence of bounded nonlinearities/uncertainties. 25th CDC, pp. 961-966, 1988.
5. V. I. Utkin. Principles of identification using sliding regimes. *Soviet Physic : Doklady, Sliding mode in control optimisation* (Berlin : Springer-Verlag) 26, 271-272, 1992.
6. A. Zolghadri, D. Henry, M. Monsion. Design of nonlinear observers for fault diagnosis: a case study. *Control Engineering Practice*, 4 (11), pp. 1535-1544, 1996.
7. R. J. Patton and J. Chen. Observer-based fault detection and isolation robustness and applications. *Control Engineering Practice*. 5 (5), pp. 671-682. 1997.
8. K. Gasso. Identification in multiple model representation : elimination and merging of local models. Conference on Decision and Control, CDC'2001, Orlando, USA, December 2001.
9. T. A. Johansen, R. Shorten, R. Murray-Smith. On the interpretation and identification dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models., *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 8 (3), pp. 297-313, 2000.
10. Y. Blanco, F. Gouaisbaut, W. Perruquetti, P. Borne. Sliding mode controller design using polytopic formulation. Conference on Decision and Control, CDC'2001, Orlando USA, December 2001.