Résonances du Laplacien sur les fibrés vectoriels homogènes

Simon Roby
Institut Elie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

Résumé

Les résonances sont des objets fondamentaux dans la théorie de la diffusion (scattering), la géométrie spectrale, la mécanique quantique et la dynamique. Le but de cette thèse est de calculer la généralisation des résonances du Laplacien.

Pourquoi le Laplacien ? C'est la généralisation de la dérivée seconde (quand on dérive 2 fois consécutivement) en dimension supérieur à 1. Il décrit la diffusion quantique (voir Relation avec la physique) sur les espaces hyperboliques.

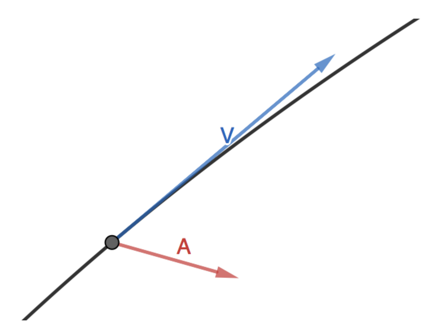

Figure 1: Dérivé (V) et dérivée seconde (A) d'une trajectoire

Pourquoi les fibrés vectoriels ?

Fibré vectoriel : Collection d'espaces vectoriels qui sont liés de manières lisse les un aux autres. Exemple du fibré tangeant pour la sphère :

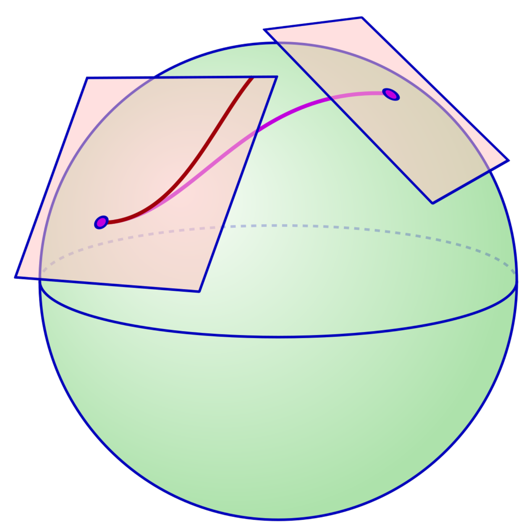

Figure 2: Fibré tangeant sur la sphère

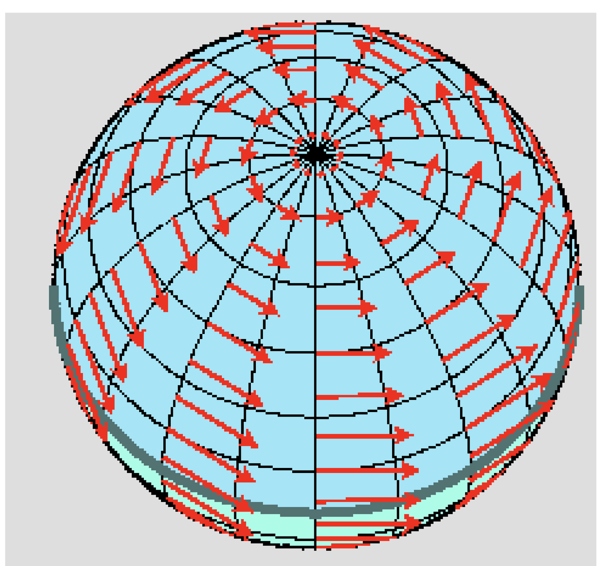

Figure 3: Champ de vecteur sur la sphère

Les sections de ces espaces sont les fonctions qui vont de l'espace de base (ci-dessus la sphère) dans l'espace vectoriel considéré (ci dessus les espaces tangeants). Dans notre cas, ce sont les champs de vecteurs, représentés par les flèches rouges sur la figure 3. Les fibrés vectoriels homogènes, eux, sont définis à partir des groupes de Lie. Par exemple, un fibré sur l'espace hyperbolique réel (ci-contre) en est un.

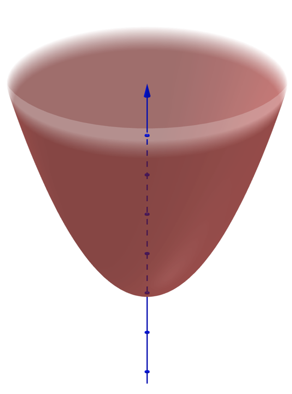

Figure 4: Espace hyperbolique en dimension 2

Le but de cette thèse est alors d'étudier l'action du Laplacien sur ces sections pour un fibré un peu particulier, pas sur une sphère, mais sur un groupe de Lie.

Relations avec la physique

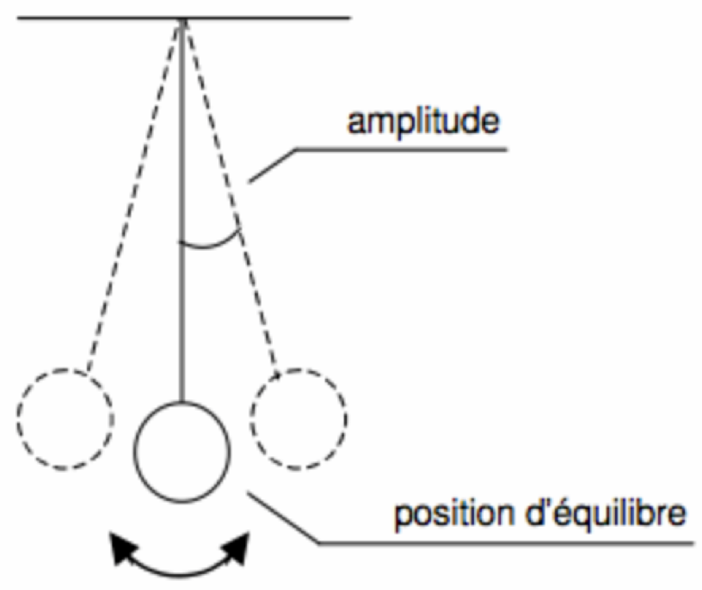

Figure 5: Balancoire

Les résonances sont connues du grand public en mécanique classique par exemple, pour les fréquences de résonnance d'un pont ou d'un immeuble (voir l'effondrement du pont du detroit de Tacoma en 1940). Les seuls système qui peuvent entrer en résonance sont des oscillateurs, comme les pendules. En effet, ceux ci peuvent emmagasiner de l'énérgie. Si on pousse le pendule toujours au bon moment, son énergie totale augmente.

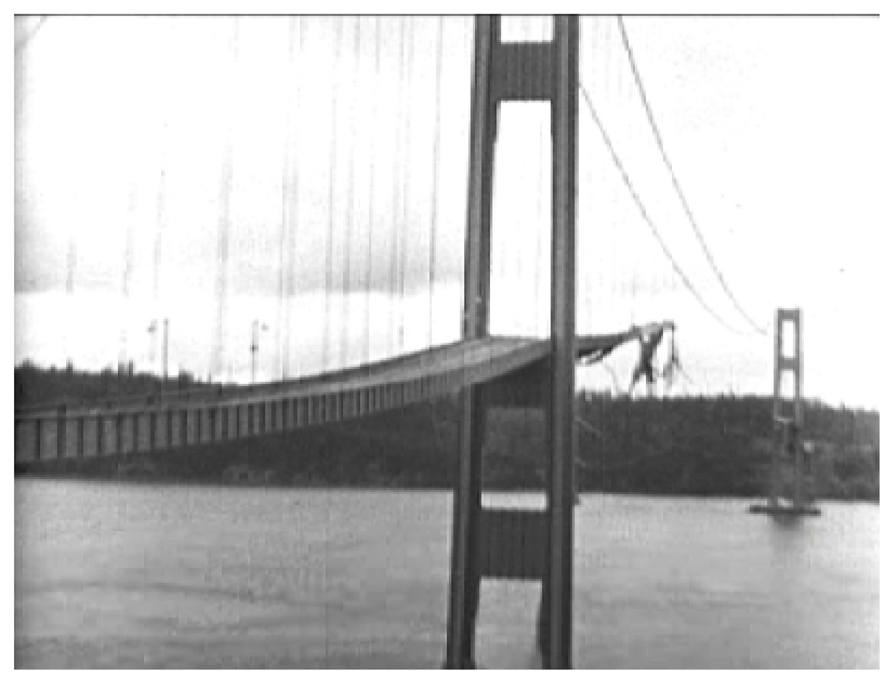

Figure 6: Pont du détroit de Tacoma écroulé en 1940 à cause d'un phénomène de résonnance

En mécanique quantique, le phénomène de résonances est apparu tard. En fait, on cherche à analyser la diffusion de particules venant de l'infini et repartant vers l'infini après avoir été déviées par un objet (atome, particule, molécule). En faisant varier l'énergie des particules incidentes, on remarque que la diffusion est plus marquée autour de certaines valeurs d'énergie. On dit que le système diffusant « résonne » à ces énergies. Ces valeurs sont appelées les résonances.

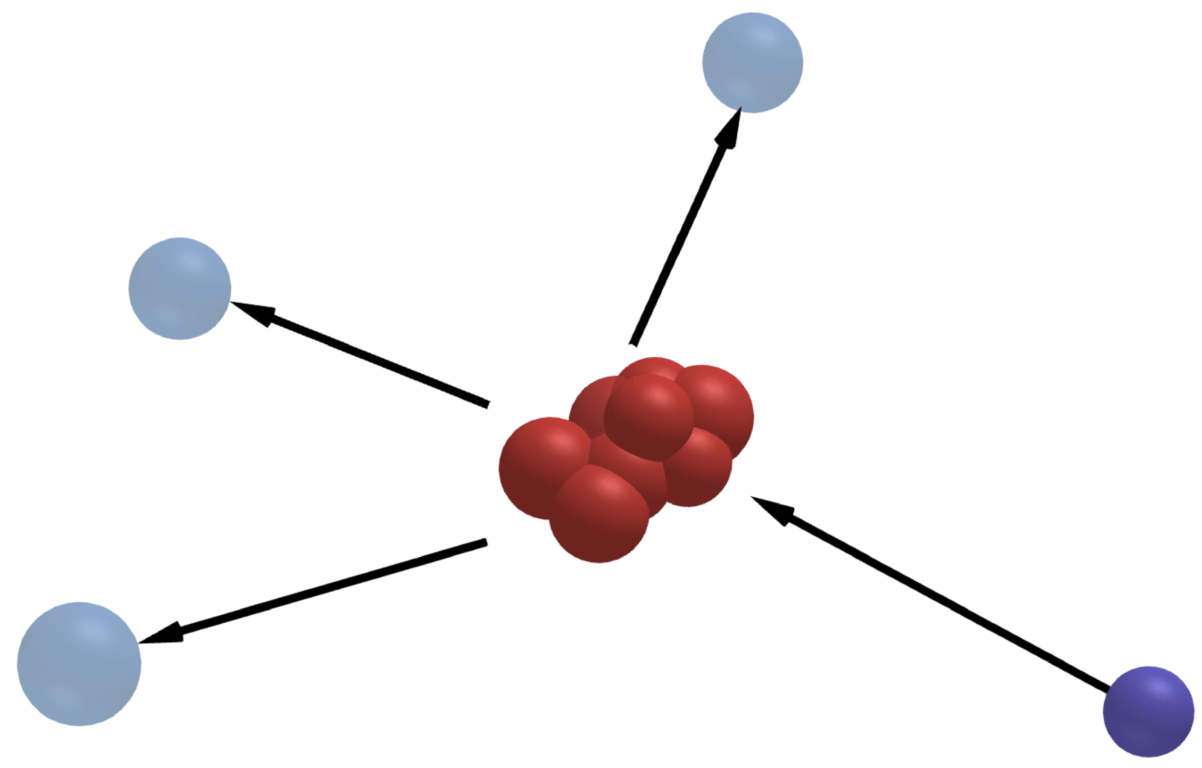

Figure 7: diffusion de particules

On fait des maths ?

Et alors en maths, c'est quoi une résonance ?
Des mathématiciens ont montré que les résonances physiques coincidaient explicitement avec les pôles de la continuation analytique de l'amplitude de diffusion. Plus explicitement, ce sont les lieux d'explosion de la continuation de la fonction d'amplitude : Les endroits où l'amplitude explose.

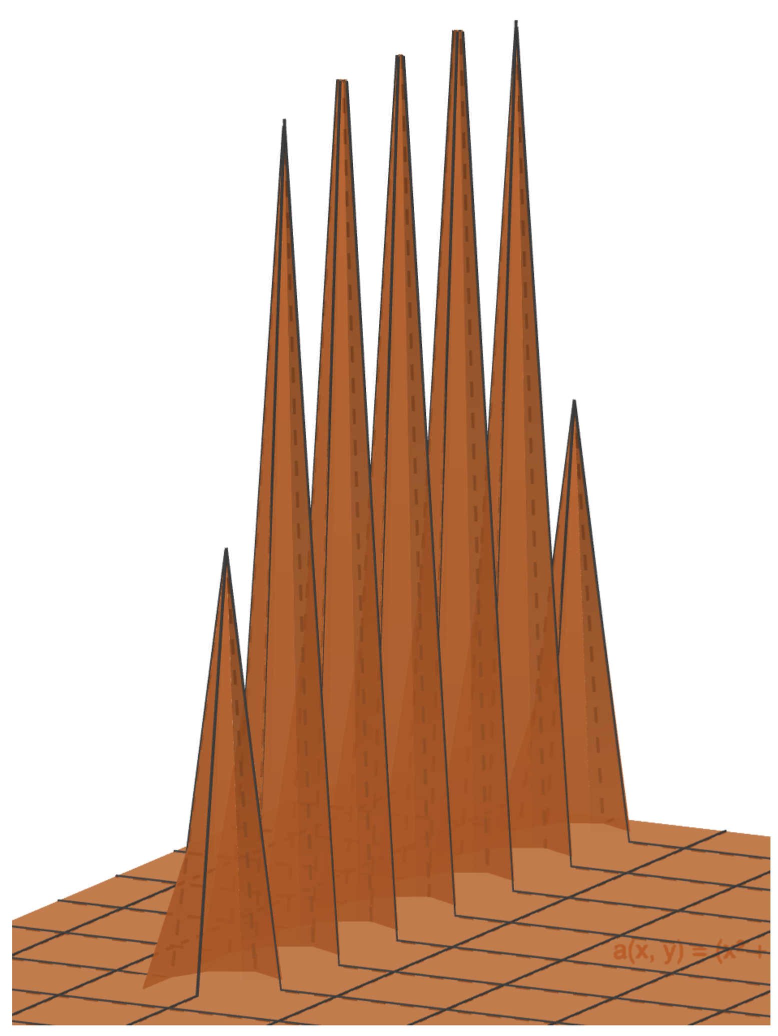

Figure 8: Graphe de l'amplitude de diffusion

Mathématiquement, ces résonances se matérialisent par l'existence de valeurs propres généralisées que l'on peut obtenir en prolongeant analytiquement la résolvante de l'opérateur de Laplace.

Un groupe de Lie ?

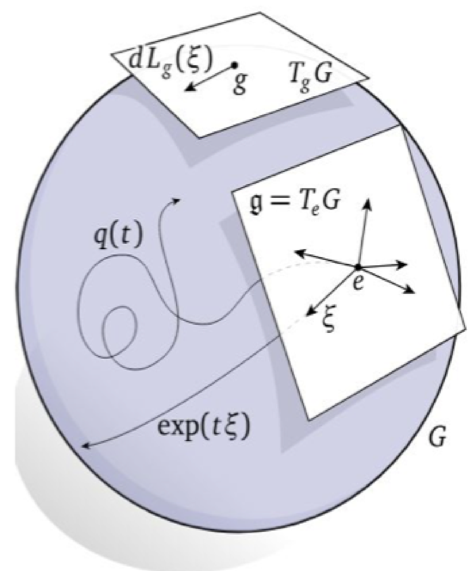

Figure 9: Groupe de Lie

Les groupes de Lie (du nom du Mathématicien Sophus Lie) sont des ensembles très riches, dans le sens où ils ont 2 structures compatibles. Les exemples les plus simple sont le groupe des réels $\mathbb{R}$ et le cercle $\mathbb{S}^1$. D'autres exemples très connus sont les ensembles de symétries. Les premiers travaux de Lie et Klein sur le sujet concernaient des groupes de transformations du plan comme les symétries et les rotations. Par exemple, l'ensemble des rotations de l'espace est un groupe de Lie.

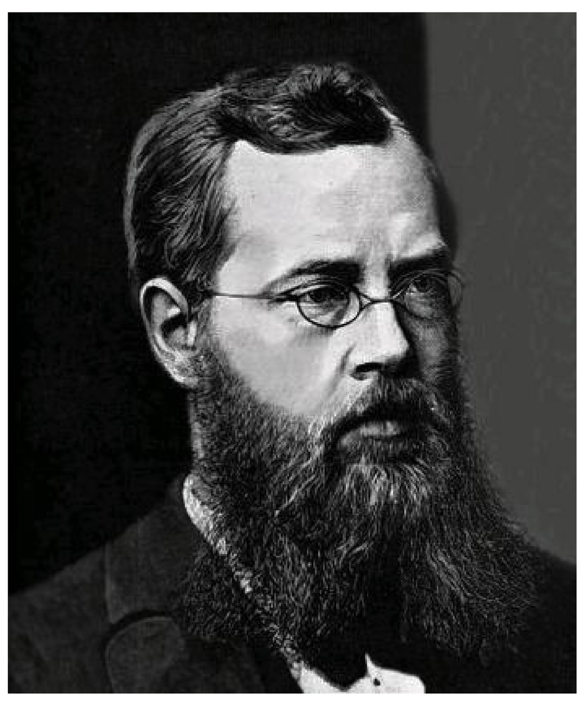

Figure 10:
Sophus Lie (1842 - 1899)