Fibres de Springer, variétés de Schubert et désingularisations

Simon JACQUES (simon.jacques.w@gmail.com)
Directeurs de thèse : Pierre-Emmanuel CHAPUT, Lucas FRESSE (I.E.C.L.)

Introduction

Ici, nous nous intéressons aux résolutions de singularités des composantes irréductibles X d'une variété $\mathcal{B}^N$ appelée fibre de Springer, qui font intervenir les propriétés combinatoires et géométriques des variétés de Schubert $Sch(w)$.

Position générale du problème

Soit G un groupe semisimple. Par choix, on fixe N dans $\mathcal{N}(G)$ le cône nilpotent de G, B un sous-groupe de Borel adapté à N et W un groupe de Weyl de G. On définit alors:

1. $\mathcal{B} := \{ss\text{-}grpes\ de\ Borel\ de\ G\} \simeq G/B$.
2. $\mathcal{B}^N$ fibre de la projection $G \times^B \mathcal{N}(B) \to \mathcal{N}(B)$ au dessus de N, où $G \times^B \mathcal{N}(B)$ est le fibré de base $\mathcal{B}$, de fibre $\mathcal{N}(B)$.
3. pour $w \in W$, $Sch(w) := \overline{B.wB} = \bigsqcup_{v \leq w} B.vB$ adhérence d'une B-orbite dans $\mathcal{B}$.

Cas linéaire

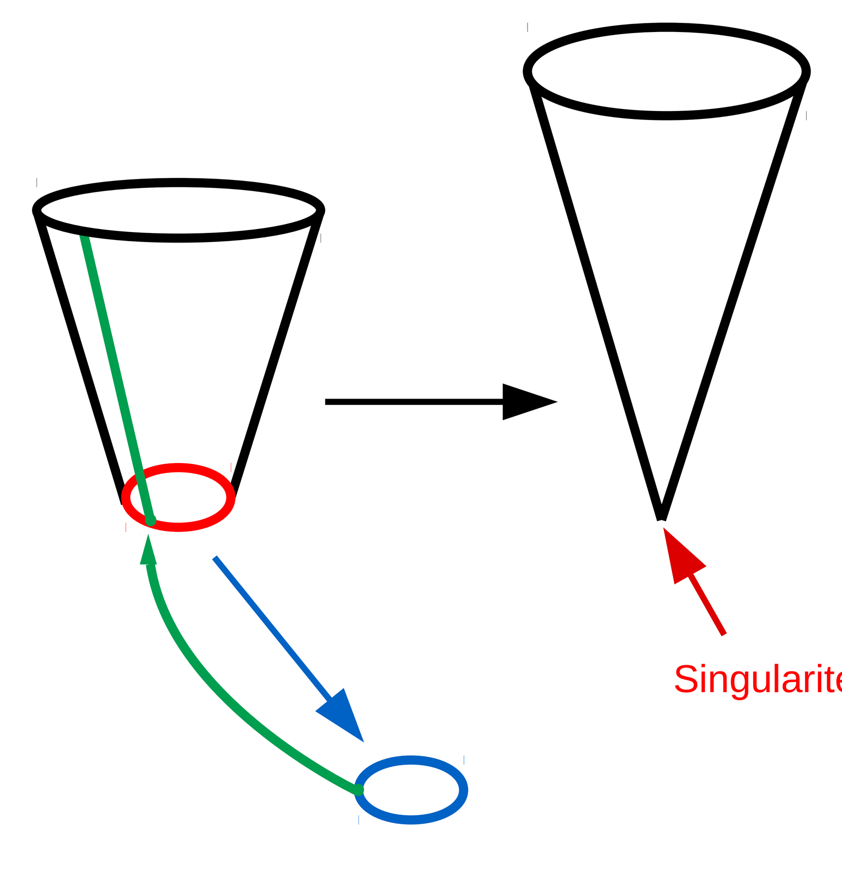
Pour $G = Gl(E)$, $n = dim\ E$, on peut identifier $B \simeq \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & * & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, $W \simeq \mathfrak{S}_n$, $N \in Nil(E)$ et :

1. $\mathcal{B} = \{V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n\}$ variété des drapeaux de E.
2. $\mathcal{B}^N$ sous-variété des drapeaux stables par N.
3. pour $w \in W$, $Sch(w) = \{V \in \mathcal{B} \mid dim\ \hat{F}_i \cap V_j \geq d^w_{ij},\ i,j \in [1,n]\}$ avec $\hat{F} \in \mathcal{B}$ tel que $Stab_G(\hat{F}) = B$ et $d^\sigma_{ij} := \#\{1,...,i\} \cap \{w(1),...,w(j)\}$.

Résolution de singularités

Une résolution de singularité cherche à rendre plus régulière une variété possédant certains points appelés singuliers; ce sont ceux en lesquels l'approximation de la variété par un espace affine n'est pas adéquate.

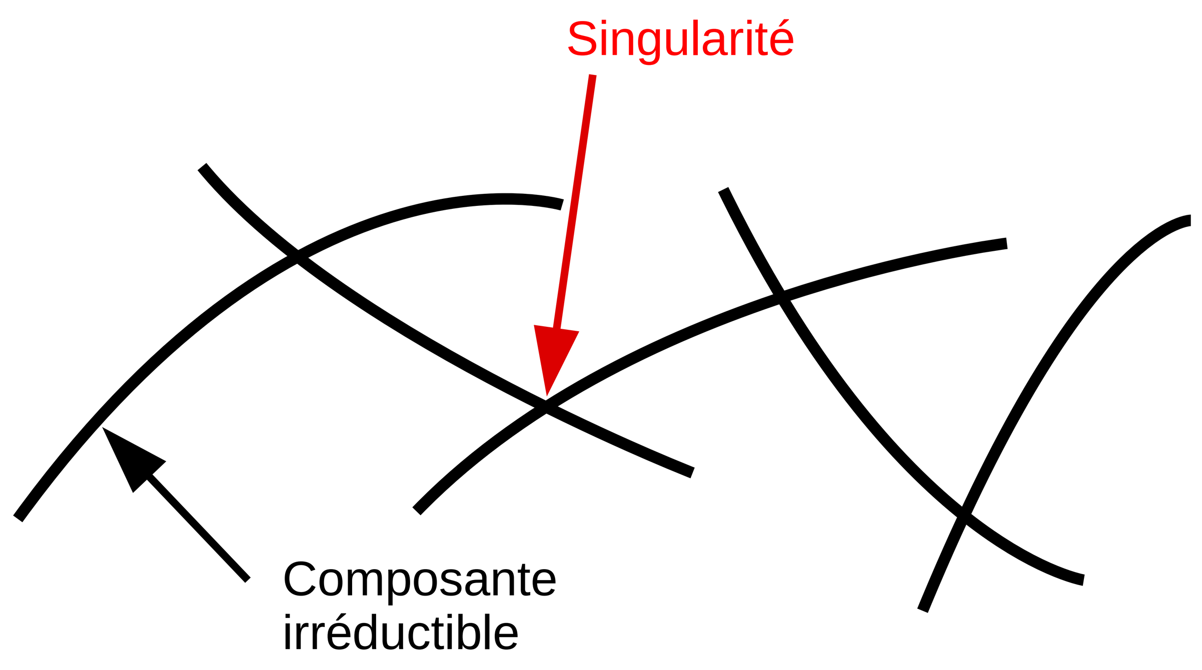
Formellement, désingulariser V, c'est trouver un morphisme birationnel $p : \tilde{V} \to V$ où $\tilde{V}$ est lisse. Par exemple, la projection $G \times^B \mathfrak{n} \to \mathcal{N}(G)$ est une désingularisation de $\mathcal{N}(G)$ (cf. [1]). Si $G = Sl_2$, $\mathcal{B} \simeq G/B$ est un cercle et on peut représenter :



Fibres de Springer $\mathcal{B}^N$

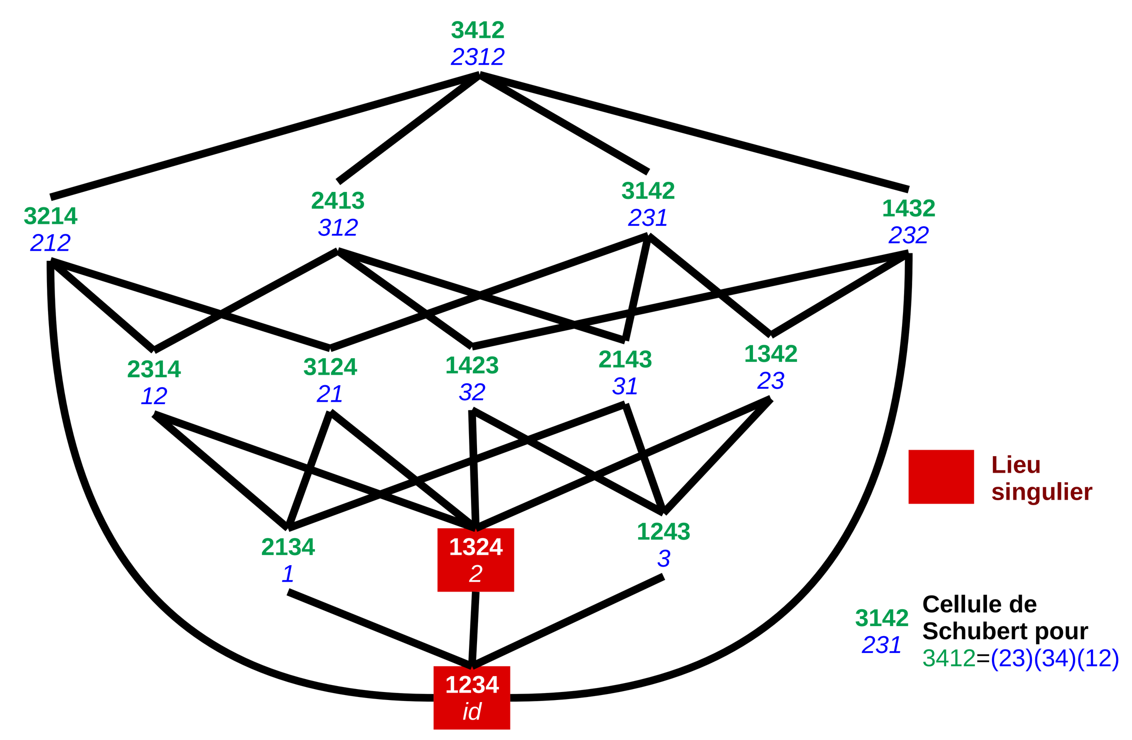
$\mathcal{B}^N$ est équidimensionelle de dimension $(dim\ Z_G(N) - rang\ G)/2$ (cf. [2]).

Pour $N \sim \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \cdot & \cdot & \cdots & \ \\ \hline \cdot \\ \cline{1-1} \end{array}$, $dim\ \mathcal{B}^N = 1$ et on peut représenter:



Variété de Schubert $Sch(w)$

Les variétés de Schubert forment l'une des classes de variétés singulières les plus importantes et les plus connues. On dispose d'une construction générale de résolutions de leurs singularités, dûe à Bott-Samelson (cf. [3]) : $\tilde{Sch}(w) \overset{p_w}{\dashrightarrow} Sch(w)$. On a en outre la propriété : $Sch(w)$ est singulière $\iff$ w contient les motifs 3412 ou 4231 (cf. [4]). Le graphe de Bruhat de w donne alors le lieu singulier. Avec $w = 3412$ on a :



Solution dans le cas linéaire

Dans le cas linéaire, pour $N^2 = 0$, j'ai construit une résolution de chaque composante X de la variété $\mathcal{B}^N$: j'ai montré qu'il existe une permutation $w \in \mathfrak{S}_n$ explicite telle qu'on ait, avec $G_N := Gl(ImN)$, $B_N := Stab_{G_N}(\hat{F}_0 \subset \cdots \subset \hat{F}_{rang\ N})$:

$$\begin{tikzcd}
& G_N \times^{B_N} \tilde{Sch}(w) \arrow[dl] \arrow[dd, "G_N \times^{B_N} p_w"] \arrow[rr, dotted, "resolution"] & & X \\
G_N/B_N & & & \\
& G_N \times^{B_N} Sch(w) \arrow[ul] \arrow[uurr, "bir."', "pr_2"] & &
\end{tikzcd}$$

$$G_N \times^{B_N} Sch(w) \simeq \Big\{(F,V) |\ dim\ F_i \cap V_j \geq d^w_{ij},\ dim\ N^{-1}(F_i) \cap V_j \geq d^w_{n-r+i,j},\ (i,j) \in [1,r] \times [1,n]\Big\}.$$

Ce résultat étend et précise celui de [5]

Bibliographie

[1] Robert Steinberg. *Conjugacy classes in algebraic groups.* Number 366 in Lecture notes in mathematics. Springer, Berlin, 1974. OCLC: 963180.

[2] Nicolas Spaltenstein. *Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1982.

[3] Jens Carsten Jantzen and Karl-Hermann Neeb. *Lie Theory: Lie Algebras and Representations.* Birkhäuser Boston, Boston, 2004. OCLC: 958521146.

[4] Sara Billey and Venkatraman Lakshmibai. *Singular loci of Schubert varieties.* Number v. 182 in Progress in mathematics. Birkhäuser, Boston, 2000.

[5] Nicolas Perrin and Evgeny Smirnov. Springer fiber components in the two columns case for types A and D are normal. *arXiv e-prints*, page arXiv:0907.0607, Jul 2009.