Lois gaussiennes inverses (généralisées), lois de Kummer et méthode de Stein

Doctorant: Essomanda KONZOU

Directeur de thèse: Efoévi KOUDOU, MC, HDR

co-Directeur de thèse: Prof. Kossi Essona GNEYOU

Université de Lorraine / Université de Lomé

Institut Élie Cartan de Lorraine

Résumé

Nous apportons une contribution à l'étude des propriétés des lois gaussiennes inverses généralisées (GIG) et de Kummer ainsi qu'à l'étude de la vitesse de convergence dans des théorèmes limites impliquant ces lois par la méthode de Stein. Il s'agit de :

– contribuer à la mise en place des outils mathématiques nécessaires à l'application de la méthode de Stein au cas où la loi cible est l'une des deux lois précitées,

– appliquer la méthode de Stein pour estimer une vitesse de convergence de ces deux lois vers la loi gamma.

Introduction

La méthode de Stein a été initialement introduite dans [4] pour estimer une vitesse de convergence dans le théorème central limite. C'est une technique utilisée en probabilités et en statistique pour :

1. caractériser la loi de probabilité d'une variable aléatoire,
2. borner l'erreur dans l'approximation de la loi d'une variable aléatoire par une loi cible.

Cette technique est basée essentiellement sur la détermination d'un opérateur dit de Stein, la résolution de l'équation différentielle correspondante et la majoration de la norme de la solution obtenue ainsi que celle de ses dérivées successives.

Stein [4] a établi qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$) si et seulement si pour toute fonction absolument continue f telle que $\mathbb{E}\left|f'(Z)\right| < \infty$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = 0.$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}h(Z). \tag{1}$$

Par conséquent pour toute fonction bornée h et toute variable aléatoire X,

$$|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)| \leq \left|\mathbb{E}\left[f_h'(X) - Xf_h(X)\right]\right|$$

avec f_h la solution de l'équation (1).

Principaux objectifs

1. Mise en place des outils mathématiques indispensables à l'application de la méthode de Stein dans le cas où la loi cible est une GIG ou Kummer.
2. Sous certaines hypothèses sur leurs paramètres, les lois GIG et Kummer convergent vers la loi gamma. Nous avons utilisé la méthode de Stein pour estimer une vitesse de convergence de la loi GIG (resp. la loi de Kummer) vers la loi limite gamma.

Principales étapes de la méthode de Stein

Caractérisation $\longrightarrow$ Équation différentielle $\longrightarrow$ Solution f de l'équation différentielle $\longrightarrow$ bornes de f, $f^{(n)}$

$\downarrow$

Majoration d'une distance probabiliste

Résultats sur la mise en place des outils nécessaires à l'application de la méthode de Stein aux lois GIG et Kummer (voir [1])

h est une fonction continue et bornée.

► Cas de la loi GIG (p, a, b) de paramètres $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ de densité $g_{p,a,b}$. $W \sim$ GIG(p, a, b).

Caractérisation	$\mathbb{E}\left[X^2 f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2}X^2\right) f(X)\right] = 0$
Équation différentielle	$x^2 f'(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2\right) f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W)$
Solution	$f(x) = \frac{1}{x^2 g_{p,a,b}(x)} \int_0^x g_{p,a,b}(t)\,[h(t) - \mathbb{E}h(W)]\,dt = \frac{-1}{x^2 g_{p,a,b}(x)} \int_x^{+\infty} g_{p,a,b}(t)\,[h(t) - \mathbb{E}h(W)]\,dt$
Borne de la solution et celle de sa dérivée première et seconde	$\lVert f\rVert \leq M$; $\lVert f'\rVert \leq M'$; $\lVert f''\rVert \leq M''$ M, M' et M'' sont des constantes (voir [1])
$\lvert\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(W)\rvert \leq \left\lvert\mathbb{E}\left[X^2 f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2}X^2\right) f(X)\right]\right\rvert$	

► Cas de la loi de Kummer K(a, b, c) de paramètres $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$ de densité $k_{a,b,c}$. $W \sim$ K(a, b, c).

Caractérisation	$\mathbb{E}\left[X(X+1)(f'(X) + ((1-b)X - cX(1+X) + a)\,f(X)\right] = 0$
Équation différentielle	$x(x+1)f'(x) + [(1-b)x - cx(1+x) + a]\,f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W)$
Solution	$f(x) = \frac{1}{x(1+x)k_{a,b,c}(x)} \int_0^x k_{a,b,c}(t)\,[h(t) - \mathbb{E}h(W)]\,dt = \frac{-1}{x(1+x)k_{a,b,c}(x)} \int_x^{+\infty} k_{a,b,c}(t)\,[h(t) - \mathbb{E}h(W)]\,dt$
Borne de la solution et celle de sa dérivée première et seconde	$\lVert f\rVert \leq K$; $\lVert f'\rVert \leq K'$; $\lVert f''\rVert \leq K''$ K, K' et K'' sont des constantes (voir [1])
$\lvert\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(W)\rvert \leq \left\lvert\mathbb{E}\left[X(X+1)(f'(X) + ((1-b)X - cX(1+X) + a)\,f(X)\right]\right\rvert$	

Résultats sur la vitesse de convergence des lois GIG et Kummer vers la loi gamma (voir [2])

Dans le cas où la loi limite est la loi gamma $\gamma(\theta, \lambda)$, pour h continue et bornée,

$$|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \left|\mathbb{E}\left[Xf'(X) + (\theta - \lambda X)\,f(X)\right]\right|$$

avec f la solution de l'équation différentielle de Stein de la loi gamma et $\Lambda \sim \gamma(\theta, \lambda)$, voir [3].

► Convergence de la GIG vers la loi gamma

Pour $p > 0$ $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(W_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $W_n \sim GIG\left(p, a, \frac{1}{n}\right)$ pour chaque $n \geq 1$. Alors la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Λ telle que $\Lambda \sim \gamma\left(p, \frac{a}{2}\right)$. Notons C_b^3 la classe des fonctions bornées h: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles les dérivées h', h'', $h^{(3)}$ existent et sont bornées. On a

$$|\mathbb{E}h(W_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \begin{cases} \frac{1}{n^p} \times C_1 & \text{si} \quad 0 < p < 1 \\ \frac{\ln n}{n} \times C_2 & \text{si} \quad p = 1 \\ \frac{1}{n} \times C_3 & \text{si} \quad p > 1 \end{cases}$$

C_1, C_2 et C_3 sont des constantes.

Nous obtenons alors une vitesse de convergence de l'ordre n^{-1} pour tout $p > 1$; de l'ordre $\frac{\ln n}{n}$ pour $p = 1$ et de l'ordre n^{-p} pour $0 < p < 1$.

► Convergence de la loi de Kummer vers la loi gamma

Pour $a > 0$, $c > 0$, soit (V_n) une suite de variables aléatoires telle que $V_n \sim K\left(a, -a + \frac{1}{n}, c\right)$ pour chaque entier naturel $n \geq 1$. Lorsque $n \to \infty$, la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Λ de loi $\gamma(a, c)$. De plus, pour $h \in C_b^3$,

$$|\mathbb{E}h(V_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \frac{1}{cn}||h'|| + \frac{F}{c} \times \frac{1}{n} \frac{\psi(a, a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)} + \frac{H}{c^2} \times \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\psi(a, -1 + a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)}$$

avec F et H des constantes, ψ est la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce.

ψ étant continue, nous obtenons une vitesse de convergence de l'ordre de n^{-1}.

Conclusion

Il est maintenant possible d'approcher la loi d'une variable aléatoire X par la loi GIG ou la loi de Kummer par la méthode de Stein en déterminant un majorant adéquat de :

⋆ $\left|\mathbb{E}\left[X^2 f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2}X^2\right) f(X)\right]\right|$ pour la loi GIG,

⋆ $\left|\mathbb{E}\left[X(X+1)(f'(X) + ((1-b)X - cX(1+X) + a)\,f(X)\right]\right|$ pour la loi de Kummer.

Cette approche fait appel aux bornes de la solution de l'équation différentielle de Stein correspondante et (éventuellement) celles de ses dérivées successives. Ces bornes n'étaient pas établies explicitement avant nos travaux.

Une estimation de la vitesse de convergence des lois GIG et Kummer vers la loi gamma a été obtenue par la méthode de Stein.

Travaux en cours

• La loi gaussienne inverse réciproque (loi GIG(1/2, a, b)) est la loi limite de la résistance équivalente d'un réseau arborescent;

• la loi GIG et la loi de Kummer sont des lois limites de fractions continues.

Tous les outils nécessaires à l'application de la méthode de Stein à ces deux dernières lois étant mis en place, nous nous proposons d'estimer la vitesse de convergence dans ces résultats limites via la méthode de Stein.

References

[1] Konzou, E. and Koudou A. E.. About the Stein equation for the generalized inverse gaussian and Kummer distribution. *ESAIM: Probability and Statistics*. Soumis.

[2] Konzou, E., Koudou, E. and Gneyou, K. E.. Rate of convergence of Generalized Inverse Gaussian and Kummer distributions to gamma distribution via Stein approach. *Statist. Prob. Lett.* Soumis.

[3] Luk, H.-M. (1994). Stein's method for the gamma distribution and related statistical applications. Ph.D. thesis. University of Southern California. Los Angeles, USA.

[4] Stein, C. (1972). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Vol 2, pp. 586-602). Berkeley: University of California Press.