Construction d'ensembles sans progression arithmétique de longueur 3

Robin Riblet

Sous la direction d'**Alain Plagne** et d'**Anne De Roton**.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Institut ÉLIE CARTAN

1 Progression arithmétique

1.1 Qu'est ce qu'une progression arithmétique ?

Une progression arithmétique est un ensemble de nombres (entiers) qui respectent une certaine structure : il faut que l'écart entre deux éléments consécutifs soit toujours le même. On appelle cet écart le pas de la progression arithmétique.

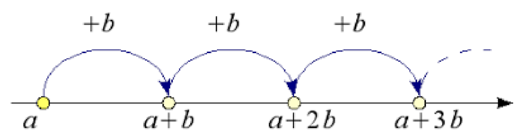

Figure 1: Exemple d'une progression arithmétique de pas b.

Lorsque la progression arithmétique est finie (qu'elle comporte un nombre fini d'éléments) on peut alors parler de sa longueur : c'est le nombre d'éléments qui la compose.

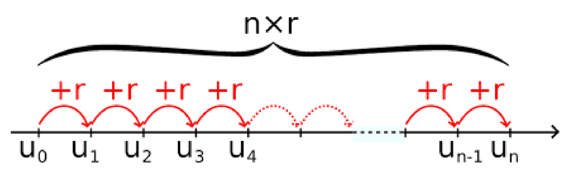

Figure 2: Exemple d'une progression arithmétique de pas r et de longueur n+1.

Définition 1.1. *On dit que $P \subset \mathbb{N}$ est une progression arithmétique de longueur n si il existe un élément (de départ) $a \in \mathbb{N}$ et un pas b tels que :*

$$P = \{a + ib \ / \ i = 0, ..., n-1\}\,.$$

1.2 Progression arithmétique de longueur 3

Parmis les progressions arithmétiques, certaines sont un peu particulières : il s'agit des progressions arithmétiques de longueur 3. Elles ne comportent que 3 éléments et sont donc de la forme $\{a, a+b, a+2b\}$. Elles sont très intéressantes car on peut remarquer que $a+b$ est le milieu de a et $a+2b$, il y a donc un réel intérêt géométrique et cette notion apparait naturellement dans beaucoup de problèmes mathématiques.

1.3 Ensemble sans progression arithmétique

Notre intérêt est porté sur les ensembles de nombres ne contenant pas de progression arithmétique de longueur 3, donc ne contenant aucun milieu : si a et b sont dans notre ensemble, $c := \frac{a+b}{2}$ le milieu de $[a, b]$ ne peut pas y être. De même $d := a+2b$ et $e := a-b$ ne peuvent pas être sélectionnés non plus car b est le milieu de $[a, d]$ et a est le milieu de $[c, b]$. Plus rigoureusement, un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ ne contient pas de progression arithmétique de longueur 3 s'il n'admet pas de solution à l'équation $a + b = 2c$, c'est à dire si on ne peut pas trouver 3 nombres a, b et c dans A tels que $a + b = 2c$. La grande question est : Quelle est la "taille" maximale que peuvent atteindre de tels ensembles ?

2 Problématique

On se demande donc à quel point peuvent être "gros" des ensembles sans milieu. Plus précisément, dans les N premiers entiers, combien puis-je en sélectionner pour créer un ensemble A ne contenant aucune progression arithmétique de longueur 3 ?

2.1 Énoncé précis de la question

Définition 2.1. *Soit $A \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini d'entiers, on note $\|A\|$ la taille du plus gros sous-ensemble de A ne contenant pas de progression arithmétique de longueur 3 (PA3). C'est à dire :*

$$\|A\| := \max\{\#B \ / \ B \subset A \ \text{ ne contenant pas de PA3 }\}\ .$$

Il s'agit de trouver un ordre de grandeur de $\|\{1, ..., N\}\|$ lorsque N grandit. Il y a deux aspects pour avancer sur le problème :

2.2 Majoration

Il s'agit de prouver que si A est trop gros, alors nécessairement il contient une PA3. C'est à dire trouver un seuil $f(N)$ tel que si $\#A > f(N)$ alors A contient une PA3. Ainsi

$$\|\{1, ..., N\}\| < f(N)\ .$$

Les premiers résultats sont apparus en 1953 avec les travaux de Roth et ont été améliorés jusqu'au record actuel :

Théorème 2.1 (Bloom (2014))**.**

$$\|\{1, ..., N\}\| \ll \frac{N(\log\log N)^4}{\log N}\ .$$

2.3 Minoration

Il s'agit de construire des ensembles sans PA3 dans les N premiers entiers. Si on parvient à construire un ensemble $A \subset \{1, ..., N\}$ sans PA3, alors nécessairement :

$$\|\{1, ..., N\}\| > \#A\ .$$

En 1946, Behrend prouve qu'il existe un ensemble A sans PA3 dans les N premiers entiers tel que :

$$\#A > N^{1-(2\sqrt{2\log 2}+\epsilon)/\sqrt{\log N}}\ .$$

Depuis ses travaux ont été repris et améliorés jusqu'au record actuel :

Théorème 2.2 (Elkin (2008))**.**

$$\|\{1, ..., N\}\| \gg \frac{\log^{1/4} N}{2^{2\sqrt{2\log\log N}}}N\ .$$

2.4 Synthèse

Actuellement nous ne savons toujours pas quelle est la taille maximale que peuvent atteindre des ensembles sans progressions arithmétiques dans les N premiers entiers. Nous savons seulement que cette taille maximale est "coincée" entre deux valeurs :

$$\frac{\log^{1/4} N}{2^{2\sqrt{2\log\log N}}}N \ll \|\{1, ..., N\}\| \ll \frac{N(\log\log N)^4}{\log N}\ .$$

Le but est d'augmenter la borne inférieure en construisant de gros ensembles sans progression arithmétique de longueur 3 et/ou de baisser la borne supérieure afin d'obtenir l'asymptotique la plus précise possible pour $\|\{1, ..., N\}\|$.

3 Autres questions ouvertes

Nous ne sommes pas forcés de travailler que dans les entiers. Pour que le problème soit bien posé, il faut définir une "addition" mais la question reste valide et intéressante dans n'importe quel groupe ambiant.

3.1 Résultats dans $\mathbb{F}_q^n$

Rappelons que $\mathbb{F}_q$ est le corps fini à q éléments et $\mathbb{F}_q^n$ l'espace vectoriel de dimension n sur ce corps. Ici on regarde le problème en dimension de plus en plus grande : c'est n qui amené à grandir. Grâce aux travaux d'Edel (2004) pour la minoration et de Ellenberg et Gijswijt (2016) pour la majoration, le record actuel pour $\mathbb{F}_3^n$ est :

$$2.21^n \leqslant \|\mathbb{F}_3^n\| \leqslant 2.756^n\ .$$

En fait Ellenberg et Gijswijt ont prouvé la majoration dans tous les $\mathbb{F}_q^n$:

Théorème 3.1. *Il existe $c < q$ tel que :*

$$\|\mathbb{F}_q^n\| \leqslant c^n\ .$$

3.2 Autres structures

Il est également intéressant de changer la "structure interdite" et de se poser les mêmes questions. Jusqu'ici nous cherchions des ensembles sans PA3, mais qu'en est-il des ensembles sans progression arithmétiques de longueur k ? En fait n'importe quelle équation conduit à des réponses différentes. Une des plus répandue est l'équation $a + b = c + d$. Un ensemble ne contenant pas de solution (non triviale) à cette équation est appelé ensemble de Sidon. La question de la taille maximale que peuvent atteindre des ensembles de Sidon infinis est un problème très célèbre et encore ouvert à ce jour.