# L'ÉTUDE DU PROBLÈME DES TRANSMISSIONS DANS UN CADRE GÉNÉRAL

H. MOHSEN , S. LABRUNIE et V. NISTOR

Institue Elie Cartan (IECL), Université de Lorraine, Nancy-Metz

## Motivation Physique

Étudier la propagation d'ondes électromagnétiques en présence des matériaux supraconducteurs.

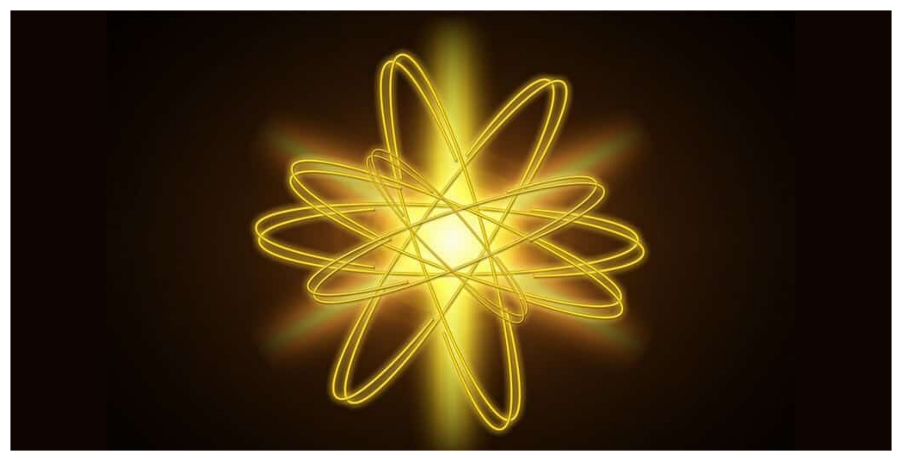

Fig. 1: Phénomène de la supraconductivité[1].

Les supraconducteurs sont des matériaux capables de conduire un courant électrique sans aucune résistance.

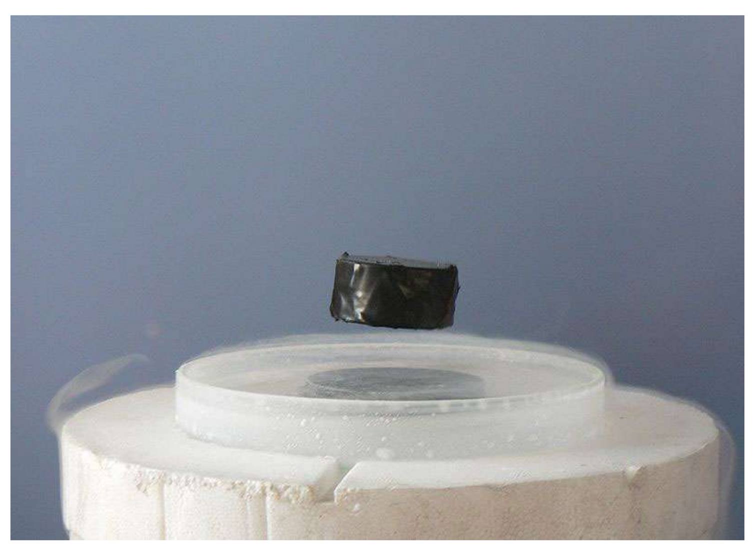

Fig. 2: Un aimant flotte au-dessus d'un cuprate en phase supraconductrice baignant dans de l'azote liquide [2].

À La base du phénomène de la supraconductivité il y a la formation de paires d'électrons, et celle-ci serait plus facile si la permittivité diélectrique devenait négative.

## Méthode de Travail

Généraliser les résultats de [4, 6] sur un domaine $\Omega = \cup_{i=1}^{n}\Omega_i$ en utilisant la théorie de triplet du bord [5] .

Mettre au point des tests numériques pour décrire le spectre de l'opérateur $P$ .

Montrer un résultat de régularité avec une estimation polynomiale qui dépend des paramètres (1) .

Combiner les deux résultats .

## Définitions

**Définition 1.** *On définit l'espace de sobolev $\mathcal{H}^k(\Omega)$ par:*

$$\mathcal{H}^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in \mathcal{H}^k(\Omega)\ \forall|\alpha| \le k\}$$

.

**Définition 2.** *On dit qu'un opérateur $A : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ linéaire et continue est inversible s'il est bijectif est:*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall f \in F,\ \|A^{-1}f\|_E \le C\|f\|_F$$

.

## Modèle

Soient $\Omega = \cup_{i=1}^{n}\Omega_i$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_{i+1} = \Gamma_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, $\Gamma_n \equiv \Gamma_0$ et $\partial\Omega = \Sigma$. Introduisons l'opérateur $P$ défini par:

$$P := -div(\sigma\nabla), \quad D(P) = \left\{u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) : div(\sigma\nabla u) \in \mathcal{L}^2(\Omega)\right\}$$

.

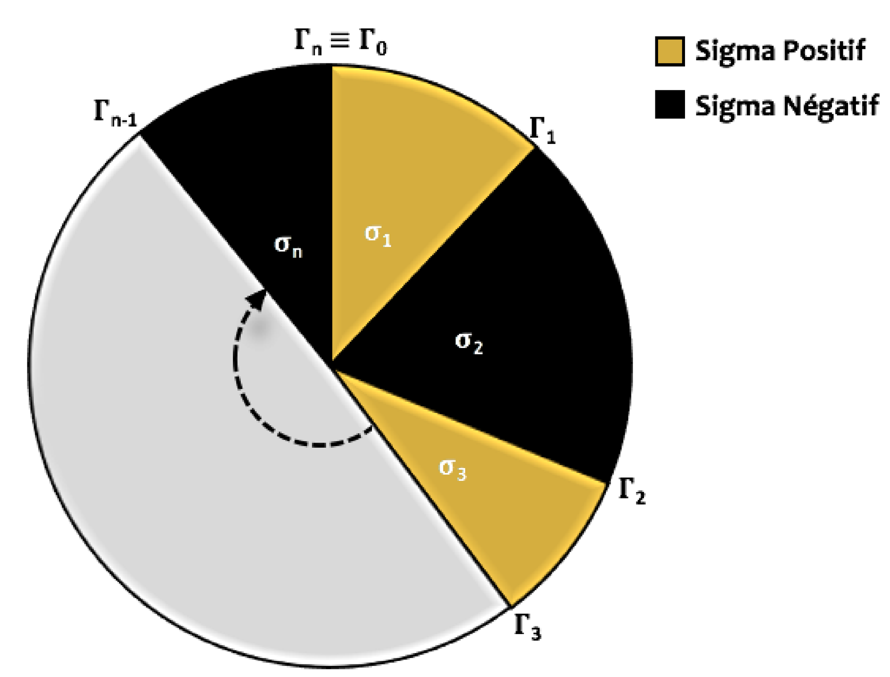


Fig. 3: Dessin explicatif du domaine.

Soient $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie signe$(\sigma_i) = -$signe$(\sigma_{i+1})$, et $u_i \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$ tel que: $\begin{cases} \sigma_{i+1}\partial_n u_{i+1} - \sigma_i\partial_n u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i \\ u_{i+1} - u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i \end{cases}$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Étant donné $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, notre objectif est de résoudre le problème suivant:

$$(S_n) \quad \text{Trouver } u \in D(P) \text{ solution de } \ -div(\sigma\nabla u) = f \text{ dans } \Omega ,$$

avec $\sigma(x) = \sigma_i$, $u(x) = u_i(x)$, pour $x \in \Omega_i$ et $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Théorème 1.** *Sur $\mathbb{R}$, l'opérateur $P$ est auto-adjoint, de plus son spectre $Spct(P)$ est discret.*

## Quantification de l'incertitude

Soient $\Omega$ un domaine dans $\mathbb{R}^m$ et $A$ l'opérateur défini par :

$$Au = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\partial_j(a_{ij}\partial_i u)$$

L'objectif est de montrer un résultat de régularité avec une estimation polynomiale qui dépend des paramètres $a_{i,j}$.

On Commence par le cas $\Omega = \mathbb{R}^m$:

**Théorème 2** (Mohsen, Labrunie, Nistor)**.** *On suppose que $A : \mathcal{H}^{k+1}(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{H}^{k-1}(\mathbb{R}^m)$ est inversible alors en utilisant [3] on peut montrer que: $f \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^m) \Rightarrow A^{-1}f \in \mathcal{H}^{k+2}(\mathbb{R}^m)$ avec:*

$$|A^{-1}f|_{\mathcal{H}^{k+2}(\mathbb{R}^m)} \lesssim \sum_{l=0}^{k+1}\|A^{-1}\|_{op}^{l+1}\|f\|_{\mathcal{H}^{k-l}(\mathbb{R}^m)}\|coeff(A)\|_{W^{k+1,+\infty}(\mathbb{R}^m)}^{l} \quad (1)$$

## Remarques

Si les $\sigma_i$ sont positives sauf pour un $k \in \{1, .., , n\}$ donné on a $\sigma_k$ négative, l'étude du problème $S_n$ n'est pas plus singulier que l'étude dans [4], ce qui justifie ce choix pour les $\sigma_i$ .

On est en train de montrer (1) sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ .

## Références

[1] https://technologiemedia.net/2019/10/02/un-supraconducteur-impossible-a-ete-cree/.

[2] https://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/physique-supraconducteurs-haute-temperature-metamateriaux-50772/.

[3] Constantin Bacuta, Hengguang Li, and Victor Nistor. "Differential operators on domains with conical points: precise uniform regularity estimates". In: *arXiv preprint arXiv:1605.07907* (2016).

[4] Anne-Sophie Bonnet-Bendhia, Monique Dauge, and Karim Ramdani. "Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif". In: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 328.8 (1999), pp. 717–720.

[5] JOCHEN BR, VLADIMIR GEYLER, and KONSTANTIN PANKRASHKIN. "Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrodinger operators". In: *arXiv preprint math-ph/0611088* ().

[6] Monique Dauge and Benjamin Texier. "Non-coercive transmission problems in polygonal domains.–Probl\emes de transmission non coercifs dans des polygones". In: *arXiv preprint arXiv:1102.1409* (2011).