Géométrie multisymplectique : formes normales des sous-variétés Lagrangiennes

Gabriel Sevestre
sous la direction de Tilmann Wurzbacher

Cas symplectique : le théorème de Weinstein [Wein71]

Soit (M, ω) une variété symplectique, et L une sous variété Lagrangienne de M. Alors il existe U, V voisinages ouverts de L dans M respectivement T^*L et un difféomorphisme $\phi : U \to V$ tels que :

$$\phi|_L = id_L \text{ et } \phi^*(\omega^{T^*L}) = \omega$$

Le formalisme multisymplectique

Soit M une variété et ω une forme de degré k+1. On dit que (M, ω) est une variété k-plectique si l'application :

$$\omega_q^\sharp : T_qM \to \Lambda^k(T_q^*M);\ v_q \mapsto \iota_{v_q}\omega_q$$

est injective pour tout $q \in M$.

Une sous variété $L \subset M$ est dite j-Lagrangienne si pour tout $q \in M$ on a $T_qL = T_qL^{\perp,j}$ où :

$$T_qL^{\perp,j} := \{u \in T_qM \mid \iota_{u\wedge v_1\wedge\ldots\wedge v_j}\omega = 0 \ \ \forall v_1, \ldots, v_j \in T_qL\}$$

Exemple

Pour M une variété orientable de dimension m, une forme volume $\vartheta \in \Omega^m(M)$ est une forme $(m-1)$-plectique.

Condition : M est standard

On dit qu'une variété k-plectique (M, ω) est standard si il existe une distribution $W \subset TM$ telle que pour tout $q \in M$:

- $\forall u, v \in W_q\ \iota_{u\wedge v}\omega = 0$
- $dim(W_q) = dim(\Lambda^k(T_qM/W_q)^*)$
- $codim(W_q) > k$

Exemples (suite)

Exemple 1. Soit Q une variété et soit $M = \Lambda^kT^*Q$. Soit $\theta \in \Omega^k(M)$ définie par :

$$\theta_{\alpha_q}(v_1, \ldots, v_k) := \alpha_q(\pi_{*\alpha_q}(v_1), \ldots, \pi_{*\alpha_q}(v_k)),$$

où $\alpha_q \in M$, $v_j \in T_{\alpha_q}(M)$, and $\pi : M \to Q$ est la projection naturelle. Alors $\omega := -d\theta$ est une forme k-plectique sur M. La section 0 de Λ^kT^*M est une sous variété k-Lagrangienne est les fibre de π sont 1-Lagrangienne.

Exemple 2. Soit G un groupe de Lie réel, semi-simple et compact. La forme de Cartan $\omega \in \Omega^3(G)$, qui est la forme bi-invariante définie en l'élément neutre e par :

$$\omega_e(\xi, \eta, \zeta) := \langle[\xi, \eta], \zeta\rangle\,,$$

où $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$ (avec $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G), et $< .,. >$ est la forme de Killing, fait de (G, ω) une variété 2-plectique. Si $T \subset G$ est un tore maximal, alors T est 1-Lagrangien.

Cas multisymplectique [Mar88]-[GSTW18]

Soit (M, ω) une variété k-plectique standard, et W la distribution associée. Soit $L \subset M$ une sous variété k-Lagrangienne complémentaire à W. Si W est intégrable, alors il existe U, V voisinages ouverts de L dans M respectivement Λ^kT^*L et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que :

$$\varphi_L = id_L \text{ et } \varphi^*(\omega^{\Lambda^kT^*L}) = \omega$$

Preuve : théorèmes utiles

Théorème (Voisinage tubulaire feuilleté). *Soit M une variété, $W \subset TM$ une distribution intégrable et $N \subset M$ une sous-variété complémentaire à W dans le sens où $W|_N \oplus TN = TM|_N$. Alors il existe U un voisinage ouvert de N dans M et un difféomorphisme ϕ de U sur un ouvert de $W|_N$ contenant la section 0, tel que $\phi|_N = id_N$, la différentielle de ϕ en tout point de N est l'identité, et ϕ envoie, pour tout $q \in N$, la feuille définie par W passant par q sur la fibre $\phi(U) \cap (W|_q)$ du fibré $W|_N \to N$.*

Théorème (Lemme de Poincaré feuilleté). *Soit M une variété et $N \subset M$ une sous-variété. Soit $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$, nulle sur N. Alors il existe U un voisinage ouvert de N dans M et $\mu \in \Omega^k(U)$ telle que $d\mu = \omega|_U$ et $\mu|_N = 0$. Si il existe de plus une distribution $W \subset TM$, intégrable et complémentaire à N, et telle que $\iota_{u\wedge v}\omega = 0$ pour tout $u, v \in W_x$ avec $X \in M$, alors on peut choisir μ telle que $\iota_X\mu = 0$ pour tout champs de vecteur X qui prend ses valeurs dans W et défini sur U.*

Preuve : astuce de Moser

L'astuce de Moser vise à trouver, étant données deux formes $\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega^k(M)$, un difféorphisme ϕ tel que :

$$\phi^*\alpha_1 = \alpha_0.$$

Ceci est vérifié si l'on arrive à trouver un champs de vecteurs dépendant du temps X_t tel que son flot ϕ_t vérifie pour tout t :

$$\phi_t^*\alpha_t = \alpha_0 \text{ et } \frac{d}{dt}(\phi_t^*\alpha_t) = 0.$$

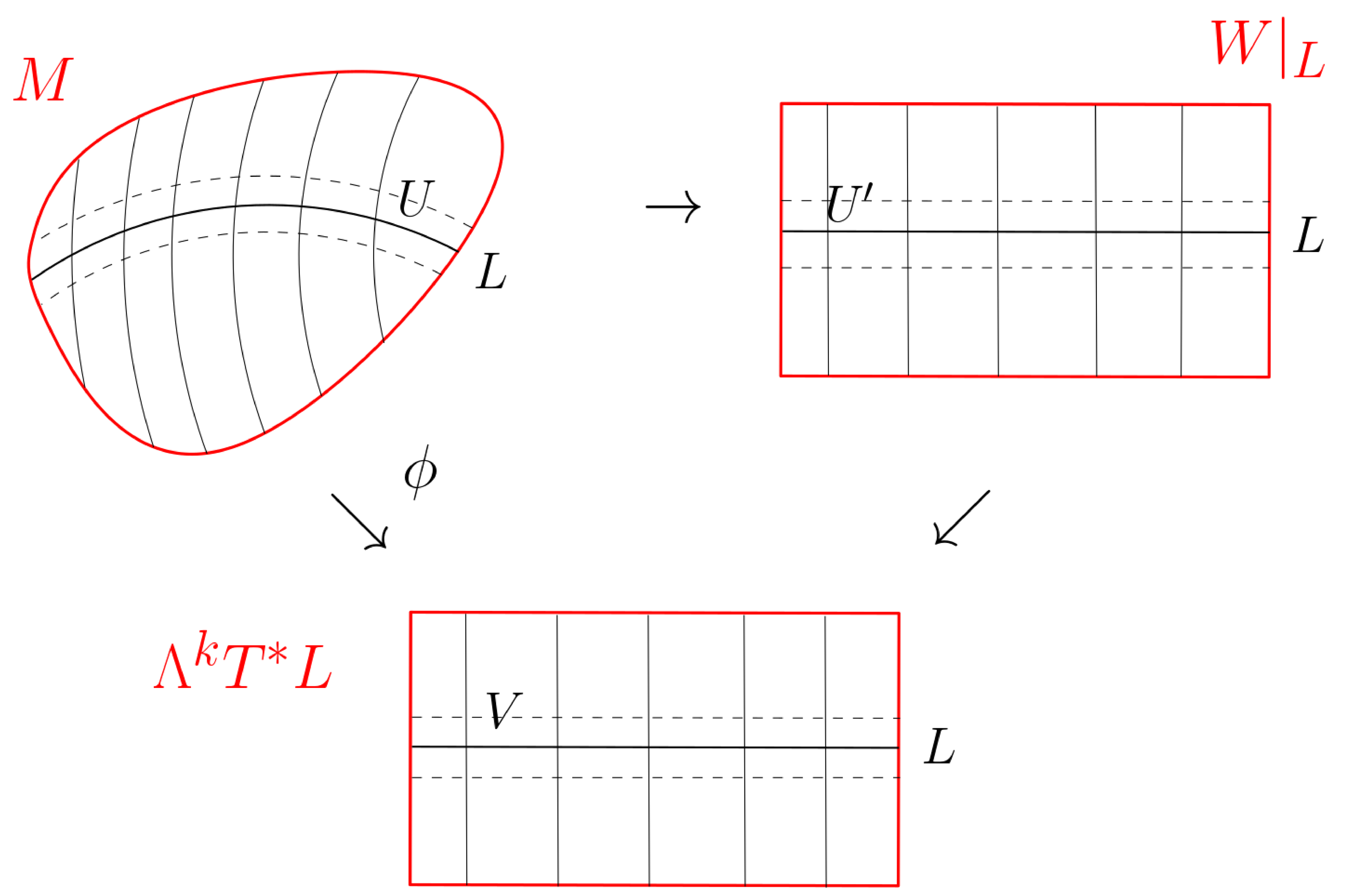
Alors, en posant $\alpha_t = \alpha_0 + t(\alpha_1 - \alpha_0)$, et en considérant l'équation :

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\alpha_t) = \phi_t^*(\frac{d}{dt}\alpha_t + \mathbf{L}_{X_t}\alpha_t),$$

prouver le résultat initial revient à trouver un champs de vecteur X_t tel que :

$$\frac{d}{dt}\alpha_t + \mathbf{L}_{X_t}\alpha_t = 0$$

Preuve : visualisation graphique



Références

[Wein71] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Adv. in Math.* **6** (1971), 329–346.
[Mos65] J. Moser, On the volume elements on a manifold, *Trans. of the AMS.* **120** (1965), 286–294.
[GSTW18] G. Sevestre et T. Wurzbacher, Lagrangian submanifolds of stadard multisymplectic manifolds : *Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous spaces and Applications*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics
[Mar88] G. Martin, A Darboux theorem for multi-symplectic manifolds, *Letters in Mathematical Physics* **16(2)** (1988, 133–138.