Théorème d'Erdős-Wintner effectif

Johann Verwee

Introduction

Le théorème d'Erdős–Wintner fournit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une loi de répartition limite dans le cas d'une fonction additive.

Hormis les circonstances particulières où un renforcement des hypothèses permet une approche directe, il n'existe pas actuellement de théorème général fournissant une estimation de la qualité de l'approximation par la loi limite : un tel résultat est appelé **version effective**.

Nous présentons ici de telles majorations selon la nature de la loi limite de f.

Définitions

1) Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ est dite **additive (réelle)**, si elle vérifie la propriété

$$f(mn) = f(m) + f(n)$$

pour tout entier m, n tels que $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$.

2) On désigne par **fonction de répartition** une fonction croissante $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, continue à droite et satisfaisant $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

3) On dit que f possède une **loi limite** s'il existe une fonction de répartition F telle que

$$F_x(z) := \frac{1}{x}\,\#\{n \leqslant x \,:\, f(n) \leqslant z\} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} F(z)$$

pour tout nombre réel z appartenant à l'ensemble des points de continuité de F.

Théorème d'Erdős-Wintner (1939)

Une fonction additive réelle f possède une loi limite si, et seulement si, les trois séries suivantes convergent

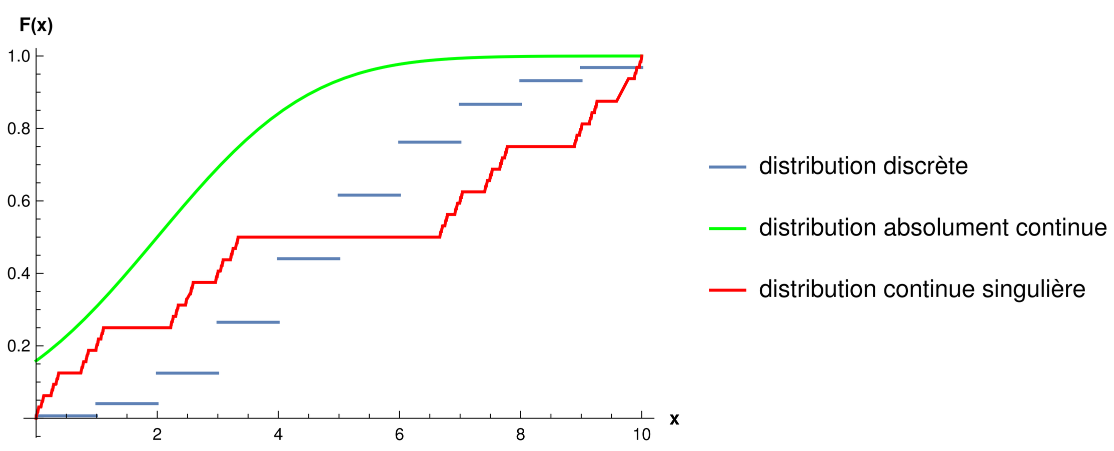
$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f(p)^2}{p}.$$

Résultats sur la loi limite

Un résultat dû à Jessen et Wintner (1935) nous permet d'affirmer que la fonction de répartition F de la loi limite associée à f est

1) soit **discrète** i.e. que F est constante en dehors de ses points de discontinuité,

2) soit **continue** i.e. que F est une fonction continue (en pratique, on distingue encore ce second cas entre loi limite **absolument continue** et loi limite **continue singulière**, suivant si elle possède une densité ou non).



Exemples de fonctions de répartition limites

De plus, un résultat dû à Lévy (1933) nous dit que F est continue si, et seulement si,

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p} = \infty.$$

Majoration effective dans le cas d'une loi limite discrète

Définissons $S(t) := \sum_{p>t,\, f(p)\neq 0} \frac{1}{p}$ et $\psi(y) := \frac{1}{\ln y}\int_1^y \frac{S(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Théorème (Tenenbaum & V.) : Nous avons, uniformément pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $x \geqslant 1$, l'estimation

$$\boxed{|F_x(z) - F(z)| \ll_f S\left(x^{1/\ln(\ln x)}\right) + \psi(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}},}$$

où la notation $g \ll h$ signifie que $|g| \leqslant C|h|$ pour une constante $C > 0$ absolue ou dépendant de paramètres indiqués en indice. Ici, la constante peut donc dépendre au plus de la fonction f.

Majoration effective dans le cas d'une loi limite continue

Posons $B_f(x)^2 := 2 + \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}$ et $Q_F(h) := \sup_{z\in\mathbb{R}} \{F(z+h) - F(z)\}$ $(h > 0)$.

Théorème (Tenenbaum & V.) : Nous avons, pour tous nombres réels $R \geqslant 3$ et $T \geqslant 1$ vérifiant

$$2\ln(\ln R) + \frac{1}{2}T^2\,\eta(R) + c \leqslant \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_x}\right) \quad \text{et} \quad T^2\,\eta\left(x^{\varepsilon_x}\right) \ll \varepsilon_x^{1/3},$$

où

- c est une constante absolue,
- η est une fonction majorant les restes des trois séries du théorème d'Erdős-Wintner,
- ε est une fonction vérifiant $1/\sqrt{\ln x} \leqslant \varepsilon_x = o(1)$ telle que $\varepsilon_x^{1/3}\,\eta\left(x^{\varepsilon_x}\right)^{-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$\boxed{\|F_x - F\|_\infty \ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right) + \varepsilon_x^{1/6}\,\ln\left(\frac{T\,B_f(R)}{\varepsilon_x}\right) + \eta(R).}$$

Conclusion

Ces majorations dans le cas "classique" ont été obtenues sous la direction du Professeur Gérald Tenenbaum (IECL) dans le cadre de ma thèse actuelle. Des résultats de même type ont été prouvés sous la direction du Professeur Michael Drmota (TU Wien, Autriche), relatifs aux fonctions q-additives (resp. Z-additives) liées à la représentation des nombres entiers en base q (resp. de Zeckendorf, induite par les nombres de Fibonacci).