Thèse de doctorat (2016-2019)

Algorithmes d'inversion haute résolution régularisée par la parcimonie

1 Contexte

Cette thèse concerne l'utilisation de la parcimonie pour régulariser des problèmes inverses mal posés. Depuis une dizaine d'années, la communauté du traitement du signal et des images manifeste un immense intérêt pour le concept de représentation parcimonieuse, et de nombreux algorithmes ont été proposés. Cependant, la plupart trouvent leurs limites lorsqu'on souhaite reconstruire des signaux hautement résolus, car cela conduit à définir un dictionnaire fortement redondant. Dans ce cas, des algorithmes plus sophistiqués doivent être proposés.

L'application visée dans le projet ANR BECOSE est la PIV tomographique (*Particle Image Velocimetry*), une modalité récente d'imagerie de fluides en mouvement donnant lieu à un problème de reconstruction d'image 3D positive. Pour cette application, un défi majeur est de pouvoir reconstruire des images hautement résolues pour des niveaux de parcimonie variables.

2 Objectifs

La régularisation parcimonieuse consiste à représenter le signal ou l'image à reconstruire en utilisant un nombre restreint d'éléments d'un dictionnaire sur-dimensionné $\boldsymbol{A}$. La reconstruction parcimonieuse s'écrit comme un problème d'optimisation du type :

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2+\lambda\|\boldsymbol{x}\|_0\}, \tag{1}$$

où la "norme" ℓ_0 ($\|\boldsymbol{x}\|_0$) compte le nombre d'éléments non nuls du vecteur $\boldsymbol{x}$. Ce problème est de nature combinatoire, car la difficulté principale est de trouver le support de $\boldsymbol{x}$. De plus, il est connu pour être NP-complet. On peut distinguer deux classes d'algorithmes sous-optimaux :

1. Les algorithmes gloutons ℓ_0 (*e.g.,* OMP, OLS et leurs extensions "*forward-backward*") consistent à traiter directement le problème (1) en sélectionnant ou dé-sélectionnant un atome à chaque itération. Ces algorithmes sont généralement bien adaptés aux problèmes très parcimonieux ($\|\boldsymbol{x}\|_0$ est faible, λ est grand).
2. Les approches qui utilisent une formulation approchée du problème (1), où $\|\boldsymbol{x}\|_0$ est remplacé par une mesure de parcimonie $\sum_i \varphi(x_i)$ *continue* et non-différentiable en 0. Cette stratégie est généralement mieux adaptée aux problèmes moins parcimonieux.

Plusieurs auteurs ont récemment démontré l'équivalence entre ces deux formulations pour certaines classes de fonctions φ non-convexes. Ces résultats apportent de nouvelles perspectives algorithmiques pour traiter le problème exact de minimisation ℓ_0 en appliquant des algorithmes efficaces d'optimisation continue non-convexe.

Trois objectifs complémentaires pourront être poursuivis dans cette thèse.

2.1 Continuation

Le premier concerne le concept de continuation : il s'agit de résoudre (1) pour un continuum de valeurs de λ. Nous avons récemment proposé des algorithmes gloutons de type *forward-backward*

(CSBR, ℓ_0-Path Descent) et montré l'intérêt de l'approche par continuation pour l'estimation non-supervisée du degré de parcimonie $\|\boldsymbol{x}\|_0$. L'objectif sera de proposer des solutions adaptées aux régularisations moins parcimonieuses, *via* des relaxations continues de la norme ℓ_0.

2.2 Parcimonie et positivité

Un deuxième objectif concerne la prise en compte de la contrainte de positivité en plus de celle de parcimonie. Cela ne pose pas de difficulté algorithmique lorsque la mesure de parcimonie est continue. En revanche, la conception d'algorithmes gloutons positifs (extensions d'OMP et OLS) est plus ardue, et plusieurs auteurs s'y sont récemment intéressés. Notre objectif est de proposer des implémentations rapides de versions positives d'algorithmes gloutons de type *forward-backward* qui puissent être compatibles avec une stratégie de continuation.

2.3 Dictionnaires discrets *vs* continus

Le dictionnaire $\boldsymbol{A}$ est généralement induit par la discrétisation d'atomes sur une grille de taille finie. Par exemple, une grille 3D est considérée pour le problème de reconstruction volumique en tomographie PIV. Le choix de la grille est un facteur critique, car le problème inverse est d'autant plus délicat à résoudre (augmentation du nombre d'inconnues, mauvais conditionnement du dictionnaire) que la grille est finement résolue. La littérature récente a vu l'émergence d'approches continues (*i.e.,* le dictionnaire se présente comme un continuum d'atomes) dans le but d'éviter les problèmes numériques liés à la discrétisation. Des extensions continues d'algorithmes discrets ont été proposées pour traiter des problèmes de déconvolution impulsionnelle et de synthèse de Fourier. Le troisième objectif de la thèse est de comprendre dans quelle mesure l'approche par dictionnaires continus peut permettre un gain d'efficacité par rapport aux algorithmes discrets que nous avons déjà proposés, et de proposer d'autres algorithmes continus.

3 Profil du candidat recherché

Le candidat, titulaire d'un Master 2 ou d'un diplôme d'ingénieur, devra avoir des connaissances solides en mathématiques et en traitement du signal et des images, bien maîtriser les outils de programmation scientifique (Matlab, C/C++, *etc.*) et posséder un bon niveau d'anglais.

Encadrement

La thèse sera co-encadrée par Charles Soussen (CRAN, directeur de thèse), El-Hadi Djermoune (CRAN) et Jérôme Idier (IRCCyN). Elle se déroulera principalement au CRAN (Nancy), avec plusieurs séjours prévus à l'IRCCyN (Nantes).

Financement

Cette thèse est financée par le projet ANR BECOSE (2016-2019) : « BEyond COmpressive SEnsing : Sparse approximation algorithms for ill-conditioned inverse problems ». Elle débutera le 1er octobre 2016.

Candidature

Contacter Charles Soussen (`charles.soussen@univ-lorraine.fr`) en adressant votre CV, une lettre de motivation, une lettre de recommandation (au minimum) et vos résultats universitaires des dernières années, avec classements.