Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

...

TD4 de Traitement du Signal

...

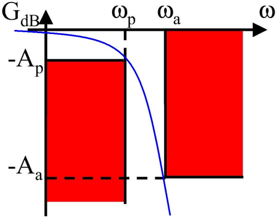
Filtrage de signaux à temps continu et discret

Benoît Marx

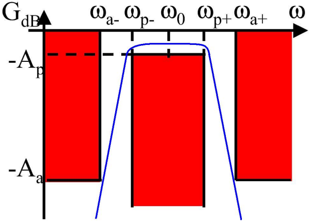
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)

Rappels > filtres réels

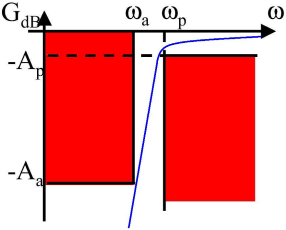
- **Filtre passe bas**



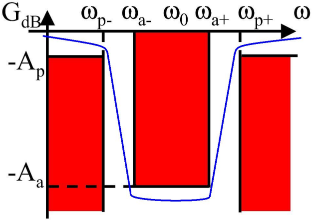
- **Filtre passe bande**



- **Filtre passe haut**



- **Filtre coupe bande**



(1) Facteur de forme ε du filtre passe-bas normalisé équivalent (FPBNE)

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

(2) Sélectivité k

filtre	P-bas	P-haut	P-bande	Coupe-bande
sélectivité k	$\frac{\omega_p}{\omega_a}$	$\frac{\omega_a}{\omega_p}$	$\frac{\omega_{p+}-\omega_{p-}}{\omega_{a+}-\omega_{a-}}$	$\frac{\omega_{a+}-\omega_{a-}}{\omega_{p+}-\omega_{p-}}$

(3) Ordre n du filtre PBNE :

Butterworth	Chebychef
$n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)}$	$cosh^2\left(narccosh\left(\frac{1}{k}\right)\right) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}}-1}{\varepsilon^2}$

(4) Filtre PBNE $H_n(p_n) = 1/\mathcal{B}_{\varepsilon,n}(p_n)$ ou $H_n(p_n) = 1/\mathcal{C}_{\varepsilon,n}(p_n)$.

(5) Dénormalisation : $H(p) = H_n(p_n)$

filtre	P-bas	P-haut	P-bande	Coupe-bande
p_n	$\frac{p}{\omega_p}$	$\frac{\omega_p}{p}$	$\frac{\omega_0}{\omega_{p+}-\omega_{p-}}\left(\frac{\omega_0}{p}+\frac{p}{\omega_0}\right)$	$\frac{\omega_{p+}-\omega_{p-}}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{p}+\frac{p}{\omega_0}\right)^{-1}$

où $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p+}\omega_{p-}} = \sqrt{\omega_{a+}\omega_{a-}}$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

Données : spécifications fréquentielles

- $G_{dB}(f) \geq -3\ dB$ pour $f \geq 100\ Hz$
- $G_{dB}(f) \leq -20\ dB$ pour $f \leq 40\ Hz$

À faire : synthèse du filtre de Butterworth

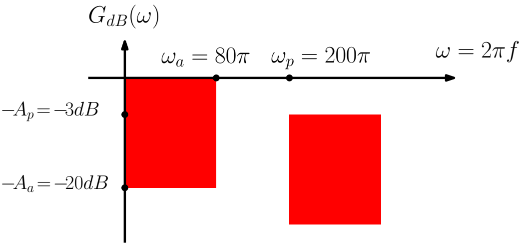
- Tracer le gabarit du filtre souhaité
- Déterminer les paramètres ε, k, n et le polynôme de Butterworth.
- Déterminer la fonction de transfert du FPBNE
- Déterminer la fonction de transfert du filtre souhaité
- Tracer son diagramme de Bode et le comparer au gabarit
- Simuler la réponse du filtre à $x(t) = sin(100t) + sin(650t)$ et la comparer à l'entrée.

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Gabarit**

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**

- **Gabarit**

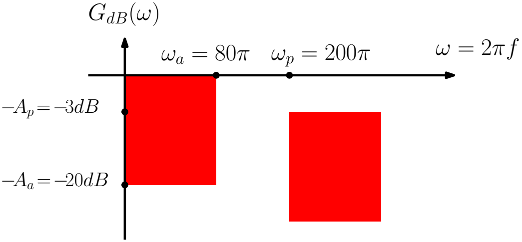


filtre passe-haut

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Gabarit**

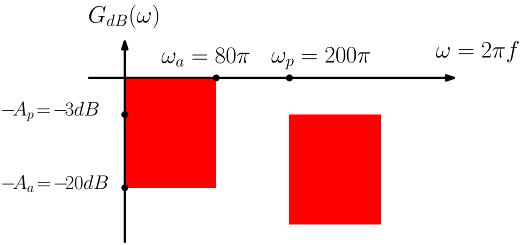


filtre passe-haut

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**
  - facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ $\quad \Rightarrow \varepsilon = 1$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Gabarit**

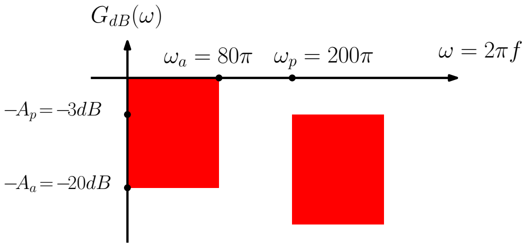


filtre passe-haut

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**
  - facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ $\Rightarrow \varepsilon = 1$
  - sélectivité : $k = \frac{\omega_a}{\omega_p}$ $\Rightarrow k = 0.4$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Gabarit**

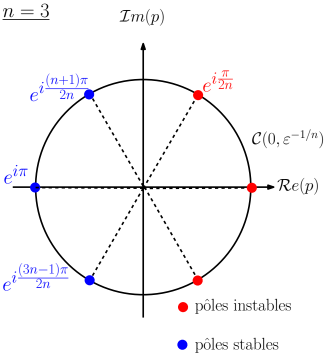


filtre passe-haut

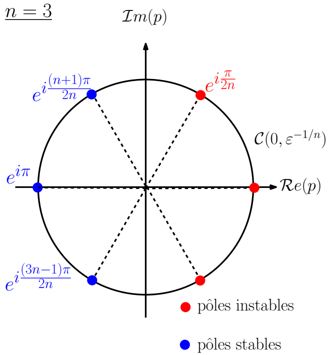
- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**
  - facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ $\Rightarrow \varepsilon = 1$
  - sélectivité : $k = \frac{\omega_a}{\omega_p}$ $\Rightarrow k = 0.4$
  - ordre : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log(1/k)}$ $\Rightarrow n = 3$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Polynôme de Butterworth**
  - Les pôles sont les racines à $IRe(p) < 0$ de :
    $$1 + (-1)^n \varepsilon^2 p^{2n} = 0$$
  - Pour n impair :
    $$z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}},\ k = \frac{n+1}{2}, \dots, \frac{3n-1}{2}$$

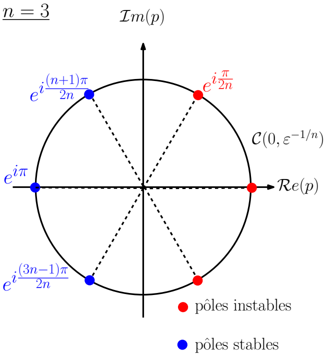


- **Polynôme de Butterworth**
  - Les pôles sont les racines à $IRe(p) < 0$ de :
    $$1 + (-1)^n \varepsilon^2 p^{2n} = 0$$
  - Pour n impair :
    $$z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}, \ k = \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{3n-1}{2}$$
  - Pour $n = 3$ et $\varepsilon = 1$
    - $\rightarrow$ $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $\rightarrow$ $z_2 = e^{i\pi} = -1$
    - $\rightarrow$ $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

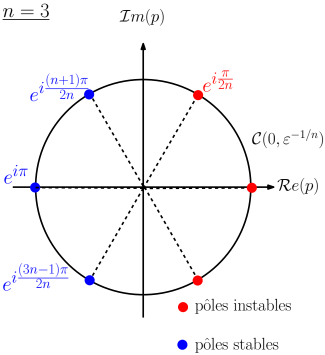
- **Polynôme de Butterworth**
  - Les pôles sont les racines à $IRe(p) < 0$ de :
    $$1 + (-1)^n \varepsilon^2 p^{2n} = 0$$
  - Pour n impair :
    $$z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}, \ k = \frac{n+1}{2}, \dots, \frac{3n-1}{2}$$
  - Pour $n = 3$ et $\varepsilon = 1$
    - $\rightarrow$ $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $\rightarrow$ $z_2 = e^{i\pi} = -1$
    - $\rightarrow$ $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



- **Fonction de transfert du FPBNE**

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Polynôme de Butterworth**
  - Les pôles sont les racines à $\mathit{IRe}(p) < 0$ de :
    $$1 + (-1)^n \varepsilon^2 p^{2n} = 0$$
  - Pour n impair :
    $$z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}, \; k = \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{3n-1}{2}$$
  - Pour $n = 3$ et $\varepsilon = 1$
    - $\rightarrow \; z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $\rightarrow \; z_2 = e^{i\pi} = -1$
    - $\rightarrow \; z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

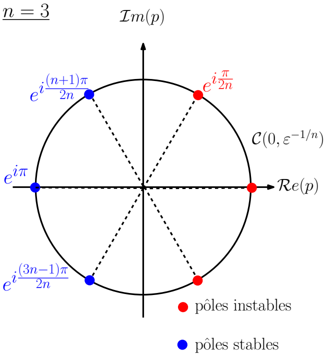


- **Fonction de transfert du FPBNE**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{(p_n - z_1)(p_n - z_2)(p_n - z_3)}$$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Polynôme de Butterworth**
  - Les pôles sont les racines à $IRe(p) < 0$ de :
    $$1 + (-1)^n \varepsilon^2 p^{2n} = 0$$
  - Pour n impair :
    $$z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}, \; k = \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{3n-1}{2}$$
  - Pour $n = 3$ et $\varepsilon = 1$
    $\rightarrow$ $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    $\rightarrow$ $z_2 = e^{i\pi} = -1$
    $\rightarrow$ $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



- **Fonction de transfert du FPBNE**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**
  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et $p_n = \frac{\omega_p}{p}$

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right) + 1}$$

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**
  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et $p_n = \frac{\omega_p}{p}$

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right) + 1}$$

$$H(p) = \frac{p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**
  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et $p_n = \frac{\omega_p}{p}$

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right) + 1}$$

$$H(p) = \frac{p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

- **Diagramme de Bode**
  Utiliser les fonctions `tf([...],[...])` et `bode(...)`

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**
  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et $p_n = \frac{\omega_p}{p}$

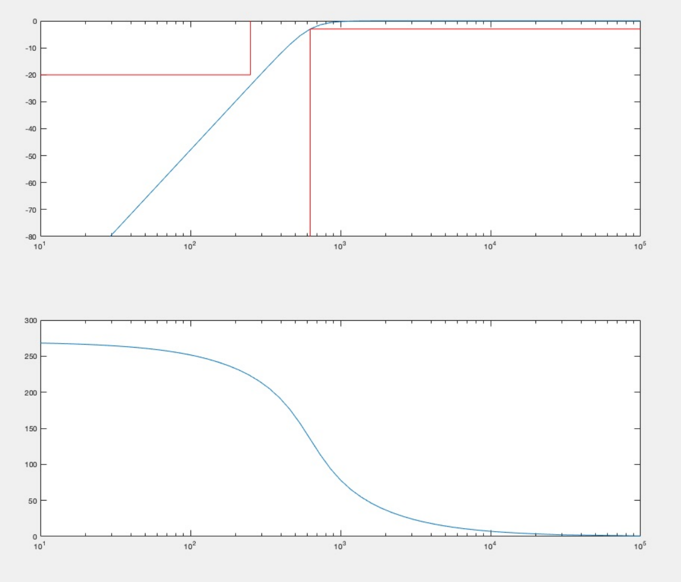
$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^3 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega_p}{p}\right) + 1}$$

$$H(p) = \frac{p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

- **Diagramme de Bode**
  Utiliser les fonctions `tf([...],[...])` et `bode(...)`

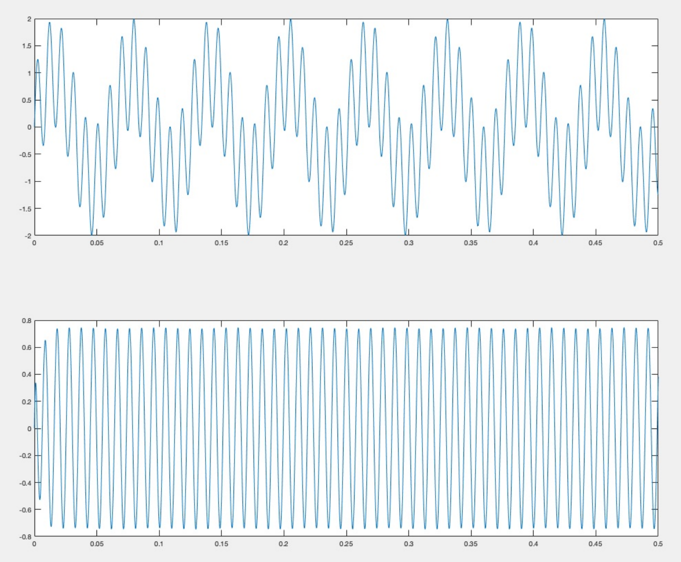
- **Filtrage de** $x(t) = sin(100t) + sin(650t)$
  Définir les vecteurs `t` et `x` et utiliser `lsim(H,x,t)` pour comparer $x(t)$ et $x(t)$ filtré.

Diagramme de Bode du filtre passe-haut



Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (1/2)

Résultat du filtrage passe-haut



Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

Données : spécifications fréquentielles

- $G_{dB}(f) \geq -3\ dB$ pour $40\ Hz \leq f \leq 80\ Hz$
- $G_{dB}(f) \leq -23\ dB$ pour $f \leq 25\ Hz$ ou $f \geq 128\ Hz$

À faire : synthèse du filtre de Butterworth

- Tracer le gabarit du filtre souhaité
- Déterminer les paramètres ε, k, n et le polynôme de Butterworth.
- Déterminer la fonction de transfert du FPBNE.
- Déterminer la fonction de transfert du filtre souhaité.
- Tracer son diagramme de Bode et le comparer au gabarit.
- Simuler la réponse du filtre à $x(t) = sin(100t) + sin(300t) + sin(900t)$ et la comparer à l'entrée.

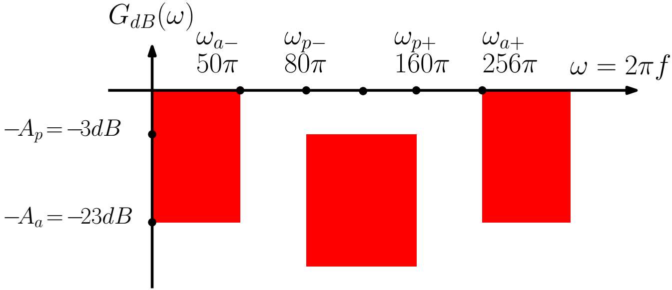
Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Gabarit**

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Gabarit**

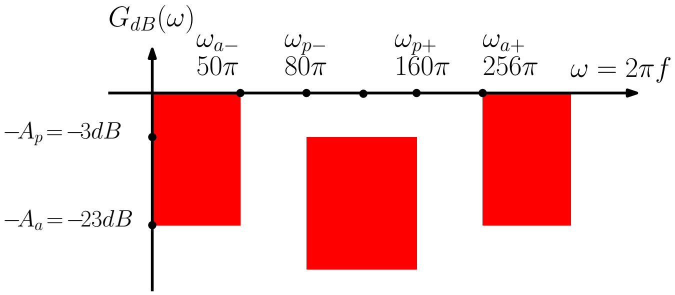


filtre passe-bande

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Gabarit**

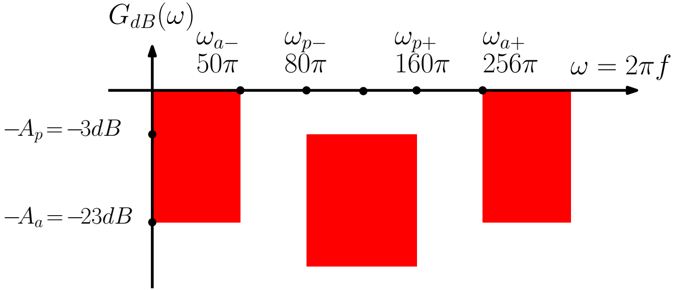


filtre passe-bande

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**
  - facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ $\Rightarrow \varepsilon = 1$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Gabarit**

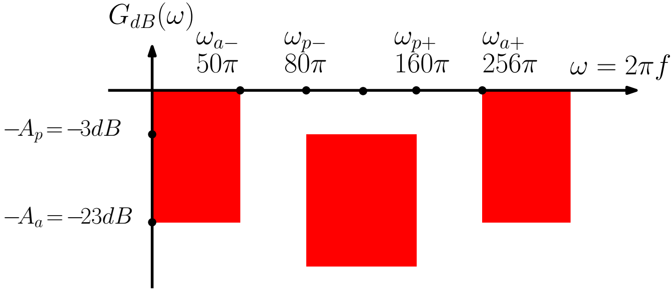


filtre passe-bande

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**
  - facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ $\Rightarrow \varepsilon = 1$
  - sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = \frac{80\pi}{206\pi}$ $\Rightarrow k = 0.38$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Gabarit**



filtre passe-bande

- **Calcul du facteur de forme, de la sélectivité et de l'ordre**
  - facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$ $\Rightarrow \varepsilon = 1$
  - sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = \frac{80\pi}{206\pi}$ $\Rightarrow k = 0.38$
  - ordre : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log(1/k)} = 2,4$ $\Rightarrow n = 3$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Polynôme de Butterworth**
  Mêmes $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, donc même polynôme de Butterworth :

$$B_{3,1}(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1$$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Polynôme de Butterworth**
  Mêmes $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, donc même polynôme de Butterworth :
  $$B_{3,1}(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1$$
- **Fonction de transfert du FPBNE**
  idem
  $$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**

  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et

$$p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}\left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right), \ avec\ \omega_0 = \sqrt{\omega_{p+}\omega_{p-}}$$

$$p_n = \left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right), \ avec\ b = (\omega_{p+} - \omega_{p-})\ et\ a = \frac{\omega_{p+} * \omega_{p-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}$$

  Ce qui donne

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**

  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et

$$p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0} \right), \ avec \ \omega_0 = \sqrt{\omega_{p+}\omega_{p-}}$$

$$p_n = \left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b} \right), \ avec \ b = (\omega_{p+} - \omega_{p-}) \ et \ a = \frac{\omega_{p+} * \omega_{p-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}$$

  Ce qui donne

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right) + 1}$$

Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

- **Fonction de transfert du FPBNE :**

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- **Fonction de transfert du filtre**

  On obtient $H(p)$ par dénormalisation avec : $H(p) = H_n(p_n)$ et

$$p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0} \right), \; avec \; \omega_0 = \sqrt{\omega_{p+}\omega_{p-}}$$

$$p_n = \left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b} \right), \; avec \; b = (\omega_{p+} - \omega_{p-}) \; et \; a = \frac{\omega_{p+} * \omega_{p-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}$$

  Ce qui donne

$$H(p) = \frac{1}{\left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right)^3 + 2\left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{p} + \frac{p}{b}\right) + 1}$$

$$H(p) = \frac{p^3}{\left(\frac{1}{b^3}\right) p^6 + \left(\frac{2}{b^2}\right) p^5 + \left(\frac{3a}{b^2} + \frac{2}{b}\right) p^4 + \left(\frac{4a}{b} + 1\right) p^3 + \left(\frac{3a^2}{b} + 2a\right) p^2 + 2a^2 p + a^3}$$

Fonction de transfert du filtre cherché :

$$H(p) = \frac{p^3}{\left(\frac{1}{b^3}\right)p^6 + \left(\frac{2}{b^2}\right)p^5 + \left(\frac{3a}{b^2} + \frac{2}{b}\right)p^4 + \left(\frac{4a}{b} + 1\right)p^3 + \left(\frac{3a^2}{b} + 2a\right)p^2 + 2a^2 p + a^3}$$

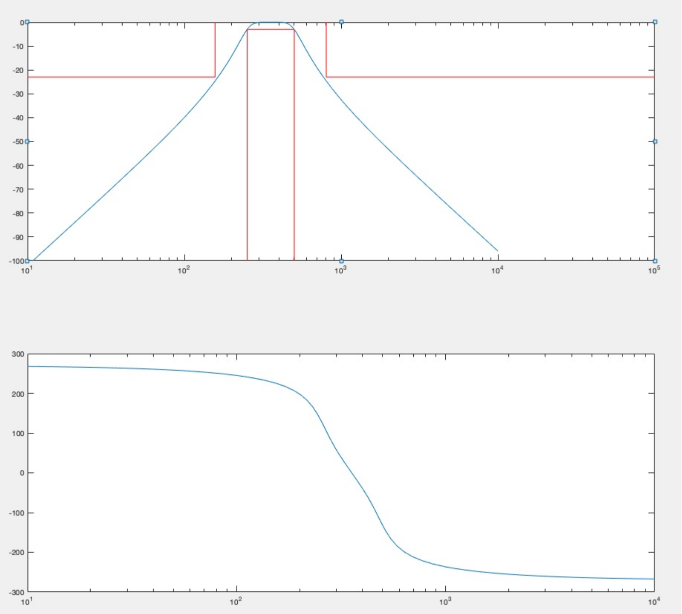
avec $b = (\omega_{p+} - \omega_{p-})$ et $a = (\omega_{p+} * \omega_{p-})/b$.

- **Diagramme de Bode**
  Utiliser les fonctions `tf([...],[...])` et `bode(...)`

- **Filtrage de** $x(t) = sin(100t) + sin(300t) + sin(900t)$
  Définir les vecteurs `t` et `x` et utiliser `lsim(H,x,t)` pour comparer $x(t)$ et $x(t)$ filtré.

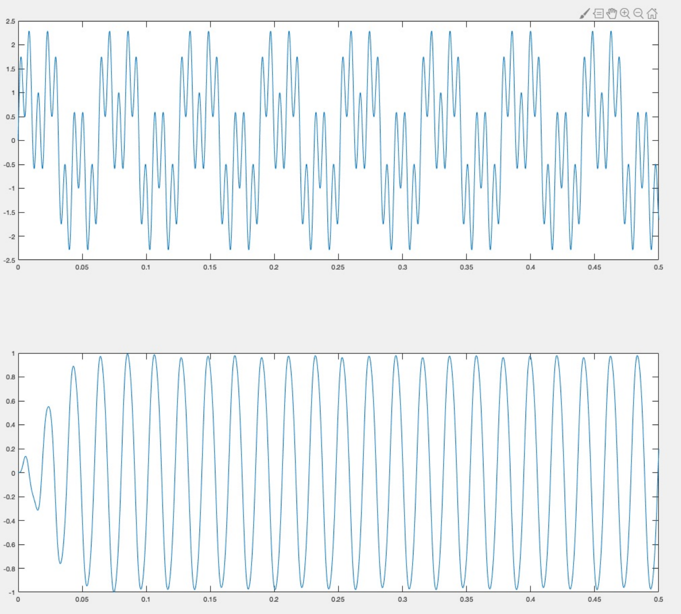
Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

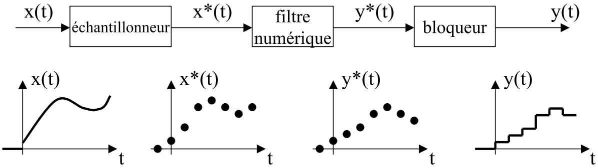
Diagramme de Bode du filtre passe-bande



Mise en œuvre du filtrage de signaux continus (2/2)

Résultat du filtrage passe-bande





	temps continu	**temps discret**
temps	$t \in \mathbb{R}$	$t = kT, \; k \in \mathbb{N}$
signal	fonction $x(t)$	suite $\{x(kT)\}_{k \in \mathbb{N}}$
entrée/sortie	éq. différentielle	récurrence
transformation	Laplace linéaire $\frac{d}{dt} \simeq p$	en Z linéaire $retard\ de\ nT \simeq z^{-n}$
f° de transfert	$Y(p) = H(p)X(p)$	$Y(z) = H(z)X(z)$

- **Équation de récurrence**

$$y(kT) + 3y((k-1)T) = x(kT) + 2x((k-1)T) - 5x((k-3)T))$$

- **Équation de récurrence**

$$y(kT) + 3y((k-1)T) = x(kT) + 2x((k-1)T) - 5x((k-3)T))$$

- Par linéarité de la transformée en z

$$\mathcal{Z}(y(kT)) + 3\mathcal{Z}(y((k-1)T)) = \mathcal{Z}(x(kT)) + 2\mathcal{Z}(x((k-1)T)) - 5\mathcal{Z}(x((k-3)T)))$$

- **Équation de récurrence**

$$y(kT) + 3y((k-1)T) = x(kT) + 2x((k-1)T) - 5x((k-3)T))$$

- Par linéarité de la transformée en z

$$\mathcal{Z}(y(kT)) + 3\mathcal{Z}(y((k-1)T)) = \mathcal{Z}(x(kT)) + 2\mathcal{Z}(x((k-1)T)) - 5\mathcal{Z}(x((k-3)T)))$$

- En utilisant $\mathcal{Z}(f(kT - nT)) = z^{-n}\mathcal{Z}(f(kT))$

$$\mathcal{Z}(y(kT)) + 3z^{-1}\mathcal{Z}(y(kT)) = \mathcal{Z}(x(kT)) + 2z^{-1}\mathcal{Z}(x(kT)) - 5z^{-3}\mathcal{Z}(x(kT))$$

- **Équation de récurrence**

$$y(kT) + 3y((k-1)T) = x(kT) + 2x((k-1)T) - 5x((k-3)T))$$

- Par linéarité de la transformée en z

$$\mathcal{Z}(y(kT)) + 3\mathcal{Z}(y((k-1)T)) = \mathcal{Z}(x(kT)) + 2\mathcal{Z}(x((k-1)T)) - 5\mathcal{Z}(x((k-3)T)))$$

- En utilisant $\mathcal{Z}(f(kT - nT)) = z^{-n}\mathcal{Z}(f(kT))$

$$\mathcal{Z}(y(kT)) + 3z^{-1}\mathcal{Z}(y(kT)) = \mathcal{Z}(x(kT)) + 2z^{-1}\mathcal{Z}(x(kT)) - 5z^{-3}\mathcal{Z}(x(kT))$$

- En factorisant en $X(z)$ et $Y(z)$, on a une **fonction de transfert**

$$Y(z) = \underbrace{\left(\frac{1 + 2z^{-1} - 5z^{-3}}{1 + 3z^{-1}}\right)}_{=H(z)} X(z)$$

- **Changement de variable pour faire le passage** $H(p) \rightarrow H(z)$
  - Discrétisation arrière
    $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(p) = pX(p)$

$$y(t) = \frac{x(t) - x(t-T)}{T} \Rightarrow \boxed{p \sim \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- **Changement de variable pour faire le passage** $H(p) \rightarrow H(z)$
  - Discrétisation arrière
    $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(p) = pX(p)$
    $$y(t) = \frac{x(t) - x(t-T)}{T} \Rightarrow \boxed{p \sim \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$
  - Discrétisation avant
    $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(p) = pX(p)$
    $$y(t) = \frac{x(t+T) - x(t)}{T} \Rightarrow \boxed{p \sim \frac{z - 1}{T}}$$

- **Changement de variable pour faire le passage** $H(p) \to H(z)$
  - Discrétisation arrière
    $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(p) = pX(p)$

$$y(t) = \frac{x(t) - x(t-T)}{T} \Rightarrow \boxed{p \sim \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

  - Discrétisation avant
    $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(p) = pX(p)$

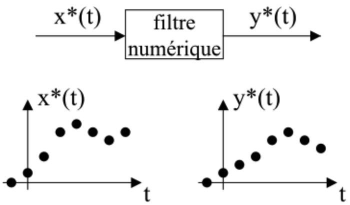
$$y(t) = \frac{x(t+T) - x(t)}{T} \Rightarrow \boxed{p \sim \frac{z-1}{T}}$$

  - Discrétisation de Tustin (**la plus efficace**)
    $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau \Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t) = y(t-T) + \frac{x(t) + x(t-T)}{2}T \Rightarrow \boxed{\boxed{p \sim \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}}}$$

- Données : Signal et spécifications fréquentielles (p.ex. ω_a, ω_p, A_a, A_p)
- Synthèse du filtre en temps continu : Gabarit $\Rightarrow H_n(p_n) \Rightarrow H(p)$
- Discrétisation (p.ex. de Tustin) : $H(p) \Rightarrow H(z)$
- Équivalence $H(z) \sim$ récurrence
- Filtrage numérique par une simple récurrence :

$$y(kT) = \frac{1}{a_0}(b_0x(kT)+b_1x((k-1)T)+\ldots-a_1y((k-1)T)-a_2y((k-2)T)-\ldots)$$



Mise en œuvre du filtrage numérique

Fichiers à récupérer sur Arche/Teams et enregistrer dans votre `cd`

- Le programme `trace_spec.m` permettant de tracer la transformée de Fourier d'un signal.
- Les données `dataTD4.mat` contenant `muz` : le signal audio à débruiter et `Fe` : la fréquence d'échantillonnage.

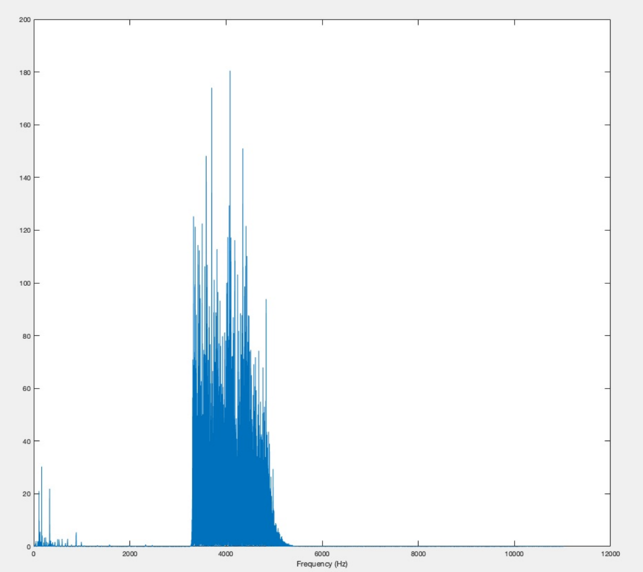
À faire : filtrage d'un signal discret

- Tracer le spectre de `muz` (commande : `trace_spec(muz,Fe)`).
- (Écouter muz (commande : `sound(muz,Fe)`))
- Déterminer le filtre de Butterworth.
  On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, reste à choisir ω_p.
- Discrétiser $H(p)$ pour obtenir $H(z)$.
- Déterminer la relation de récurrence équivalente à $H(z)$.
- Filtrer `muz` et tracer le spectre du signal filtré.
- Comment améliorer le filtrage ?

Mise en œuvre du filtrage numérique

Tracer le spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal bruité

```
>> trace_spec(muz,Fe)
```



Déterminer un filtre de Butterworth

- On veut supprimer le bruit en H.F. $\Rightarrow$ on utilise un **passe-bas**
- On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, **reste à choisir** ω_p

Mise en œuvre du filtrage numérique

Déterminer un filtre de Butterworth

- On veut supprimer le bruit en H.F. $\Rightarrow$ on utilise un **passe-bas**
- On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, **reste à choisir** ω_p
- FPBNE (vu en $1^{ère}$ partie) :

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

Déterminer un filtre de Butterworth

- On veut supprimer le bruit en H.F. $\Rightarrow$ on utilise un **passe-bas**
- On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, **reste à choisir** ω_p
- FPBNE (vu en 1ère partie) :

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- $H(p)$ obtenu par dénormalisation avec $p_n = \frac{p}{\omega_p}$

$$H(p) = \frac{\omega_p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

Déterminer un filtre de Butterworth

- On veut supprimer le bruit en H.F. $\Rightarrow$ on utilise un **passe-bas**
- On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, **reste à choisir** ω_p
- FPBNE (vu en $1^{ère}$ partie) :

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- $H(p)$ obtenu par dénormalisation avec $p_n = \frac{p}{\omega_p}$

$$H(p) = \frac{\omega_p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

Déterminer un filtre de Butterworth

- On veut supprimer le bruit en H.F. $\Rightarrow$ on utilise un **passe-bas**
- On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, **reste à choisir** ω_p
- FPBNE (vu en 1$^{\text{ère}}$ partie) :

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- $H(p)$ obtenu par dénormalisation avec $p_n = \frac{p}{\omega_p}$

$$H(p) = \frac{\omega_p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

$$H(z) = \frac{\omega_p^3}{\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)^3 + 2\omega_p\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)^2 + 2\omega_p^2\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right) + \omega_p^3}$$

Déterminer un filtre de Butterworth

- On veut supprimer le bruit en H.F. $\Rightarrow$ on utilise un **passe-bas**
- On fixe $\varepsilon = 1$ et $n = 3$, **reste à choisir** ω_p
- FPBNE (vu en 1ère partie) :

$$H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^3 + 2p_n^2 + 2p_n + 1}$$

- $H(p)$ obtenu par dénormalisation avec $p_n = \frac{p}{\omega_p}$

$$H(p) = \frac{\omega_p^3}{p^3 + 2\omega_p p^2 + 2\omega_p^2 p + \omega_p^3}$$

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\omega_p^3}{\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)^3 + 2\omega_p\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)^2 + 2\omega_p^2\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right) + \omega_p^3} \\ &= \frac{\omega_p^3 T^3 (1+z^{-1})^3}{8(1-z^{-1})^3 + 8\omega_p (1-z^{-1})^2 (1+z^{-1}) + 4\omega_p^2 T^2 (1-z^{-1})(1+z^{-1})^2 + \omega_p^3 T^3 (1+z^{-1})^3} \end{aligned}$$

Mise en œuvre du filtrage numérique

Filtrage en temps discret par une relation de récurrence

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}$$

Mise en œuvre du filtrage numérique

Filtrage en temps discret par une relation de récurrence

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}$$

- Relation entrée sortie du filtre :

$$Muz_f(z) = \left(\frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}\right) Muz(z)$$

Filtrage en temps discret par une relation de récurrence

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}$$

- Relation entrée sortie du filtre :

$$Muz_f(z) = \left(\frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}\right) Muz(z)$$

- Relation de récurrence à utiliser pour avoir $muz_f(kT)$ à partir de $muz(kT)$:

Mise en œuvre du filtrage numérique

Filtrage en temps discret par une relation de récurrence

- $H(z)$ obtenu par discrétisation des trapèzes, avec $p = \left(\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}\right)$:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}$$

- Relation entrée sortie du filtre :

$$Muz_f(z) = \left(\frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1} + a_3}\right) Muz(z)$$

- Relation de récurrence à utiliser pour avoir $muz_f(kT)$ à partir de $muz(kT)$:

$$muz_f(kT) = \frac{1}{a_3}\left(b_3 muz(kT) + b_2 muz((k-1)T) + b_1 muz((k-2)T) + b_0 muz((k-3)T)\right.$$
$$\left. - a_2 muz_f((k-1)T - a_1 muz_f((k-2)T) - a_0 muz_f((k-3)T)\right)$$

Mise en œuvre du filtrage numérique

Application avec Matlab

- Relation de récurrence entre $muz_f(kT)$ et $muz(kT)$:

$$muz_f(kT) = \frac{1}{a_3}\left(b_3 muz(kT) + b_2 muz((k-1)T) + b_1 muz((k-2)T) + b_0 muz((k-3)T)\right.$$
$$\left. - a_2 muz_f((k-1)T - a_1 muz_f((k-2)T) - a_0 muz_f((k-3)T)\right)$$

Application avec Matlab

- Relation de récurrence entre $muz_f(kT)$ et $muz(kT)$:

$$muz_f(kT) = \frac{1}{a_3}\left(b_3 muz(kT) + b_2 muz((k-1)T) + b_1 muz((k-2)T) + b_0 muz((k-3)T)\right.$$
$$\left. - a_2 muz_f((k-1)T - a_1 muz_f((k-2)T) - a_0 muz_f((k-3)T)\right)$$

- Une simple boucle `for` :

Mise en œuvre du filtrage numérique

Application avec Matlab

- Relation de récurrence entre $muz_f(kT)$ et $muz(kT)$:

$$
\begin{aligned}
muz_f(kT) = \frac{1}{a_3}\,(&b_3\,muz(kT) + b_2\,muz((k-1)T) + b_1\,muz((k-2)T) + b_0\,muz((k-3)T) \\
&- a_2\,muz_f((k-1)T - a_1\,muz_f((k-2)T) - a_0\,muz_f((k-3)T))
\end{aligned}
$$

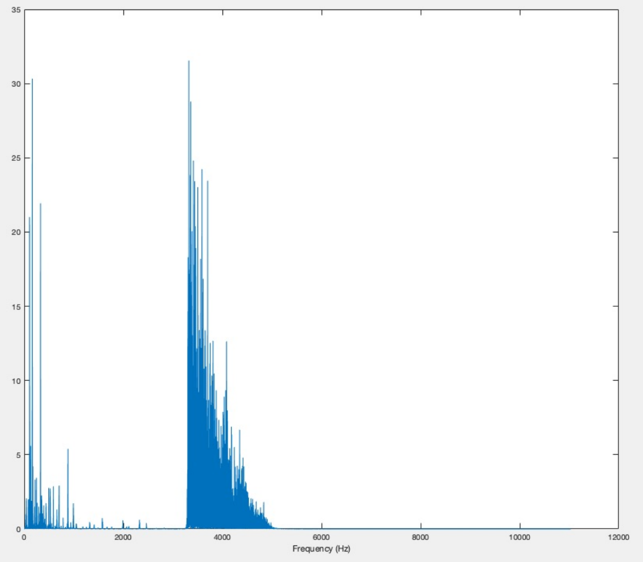
- Une simple boucle `for` :

```
T=1/Fe;
wp=2*pi*3000;
a0=...
⋮
b3=...
muzf=muz;
for k=4:length(muz)
   muzf(k)=(1/a3)*(b3*muz(k)+b2*muz(k-1)+b1*muz(k-2)+b0*muz(k-3)
                  -a2*muzf(k-1)-a1*muzf(k-2)-a0*muzf(k-3));
end
trace_spec(muzf,Fe);
```

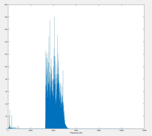
Mise en œuvre du filtrage numérique

Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité

```
>> trace_spec(muzf,Fe)
```

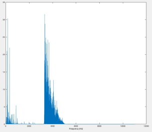


Mise en œuvre du filtrage numérique



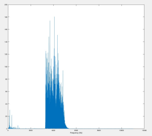
filtrage P.B.

$$- - - \boxed{H(z)} - - - >$$



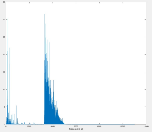
Comment améliorer le filtrage ?

Mise en œuvre du filtrage numérique



filtrage P.B.

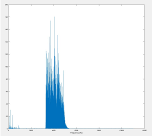
$$- - - \boxed{H(z)} - - - >$$



Comment améliorer le filtrage ?

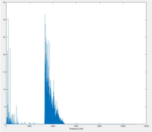
- On peut diminuer ω_p
  - $+$ atténuation du bruit
  - $-$ détérioration du signal

Mise en œuvre du filtrage numérique



filtrage P.B.

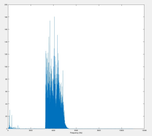
$$- - - \boxed{H(z)} - - - >$$



Comment améliorer le filtrage ?

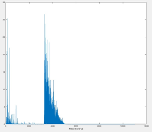
- On peut diminuer ω_p
  - \+ atténuation du bruit
  - − détérioration du signal
- Augmenter l'ordre du filtre
  - \+ meilleure sélectivité
  - − refaire tous les calculs

Mise en œuvre du filtrage numérique



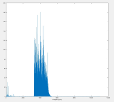
filtrage P.B.

$$- - - \boxed{H(z)} - - - >$$



Comment améliorer le filtrage ?

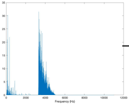
- On peut diminuer ω_p
  - $+$ atténuation du bruit
  - $-$ détérioration du signal
- Augmenter l'ordre du filtre
  - $+$ meilleure sélectivité
  - $-$ refaire tous les calculs
- Passer plusieurs fois dans le filtre d'ordre 3
  - $+$ meilleure sélectivité
  - $+$ copier/coller de la boucle `for`



P.B.

$$-\boxed{H(z)}->$$

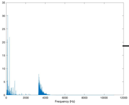
ordre 3



P.B.

$$-\boxed{H(z)}->$$

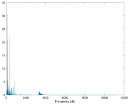
ordre 3



P.B.

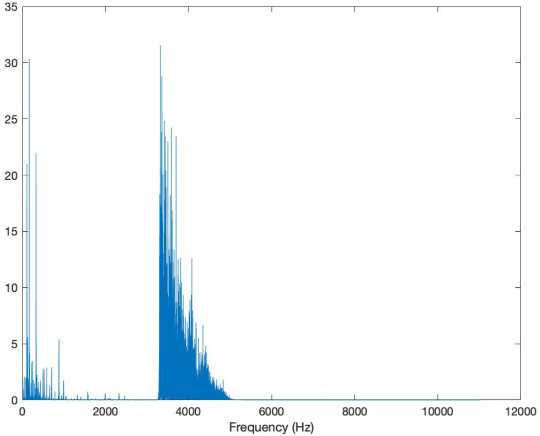
$$-\boxed{H(z)}->$$

ordre 3



Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité 1fois

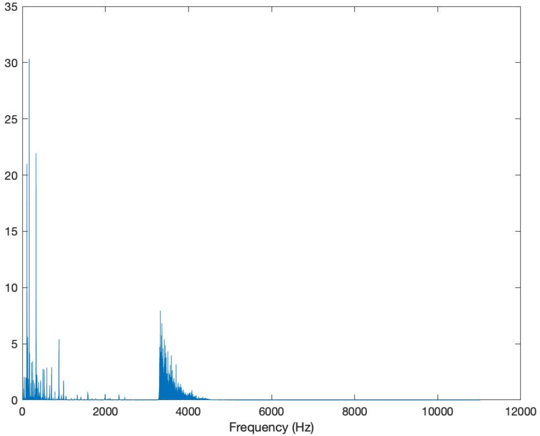
```
>> trace_spec(muz,Fe)
```



Mise en œuvre du filtrage numérique

Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité 2fois

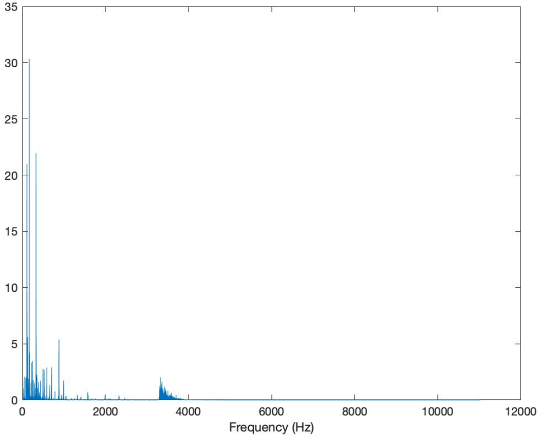
```
>> trace_spec(muzf2,Fe)
```



Mise en œuvre du filtrage numérique

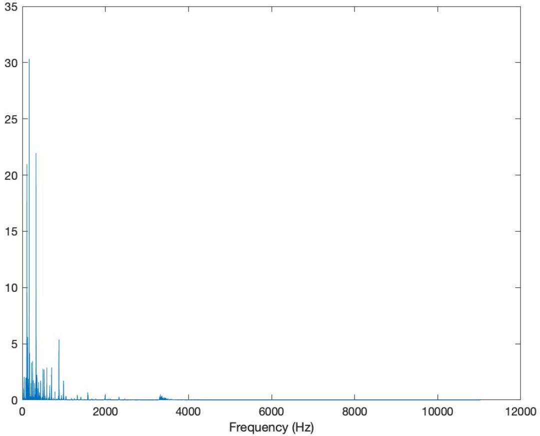
Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité 3fois

```
>> trace_spec(muzf3,Fe)
```



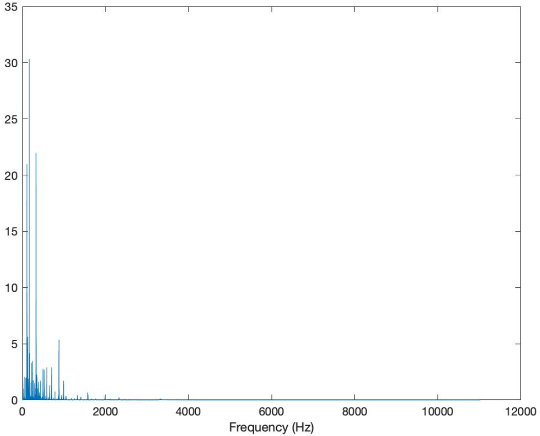
Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité 4fois

```
>> trace_spec(muzf4,Fe)
```



Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité 5fois

```
>> trace_spec(muzf5,Fe)
```



Spectre (i.e. la transformée de Fourier) du signal débruité 6fois

```
>> trace_spec(muzf6,Fe)
```