Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

...

Traitement du Signal

Benoît Marx

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)

disponible à l'adresse : `http://www.cran.univ-lorraine.fr/benoit.marx`

Plan du cours

Présentation du cours :

- 5 cours en amphi
- 4 TD (1 papier et 3 Matlab)
- évaluation : quizz et examen final

Supports :

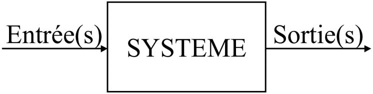
- polycopié
- présentations (Arche / site perso)

Objectifs de l'AF4 :

- approche système
- fonction de transfert
- filtrage analogique fréquentiel
- signaux et systèmes à temps discret

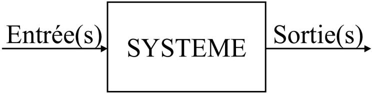
Plan du cours

Qu'est ce qu'un système (physique, chimique, . . .) ?



- un objet défini par une frontière, des variables d'entrée et de sortie
- un ensemble d'éléments reliés par des liens fonctionnels

Qu'est ce qu'un système (physique, chimique, . . .) ?



- un objet défini par une frontière, des variables d'entrée et de sortie
- un ensemble d'éléments reliés par des liens fonctionnels

On représente un système par un modèle

- un ensemble de relations mathématiques entre des grandeurs physiques,
- **approchant** le comportement réel du système,
- dont la complexité dépend de l'utilisation.

Signal

Grandeur physique mesurable porteuse d'une information

$\rightarrow$ position, vitesse, température, ...

Signal

Grandeur physique mesurable porteuse d'une information

→ position, vitesse, température, ...

Quelques caractéristiques de signaux :

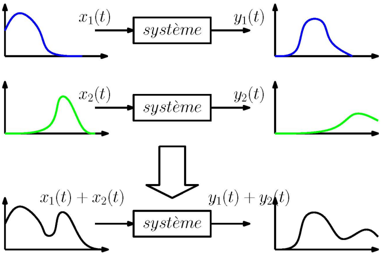
- monodimensionnel / vecteur
- entrée / sortie du système
- mesuré / non mesuré
- contrôlable / incontrôlable
- dépendant du temps, de l'espace, de la fréquence, ...
- temps continu ($t \in \mathbb{R}$) / temps discret ($t = kT, \ k \in \mathbb{N}$)

1.2 Systèmes linéaires (à une entrée)

Système linéaire

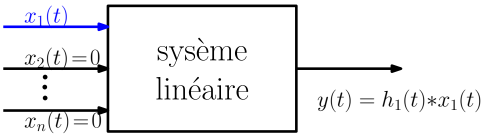
Le système Σ est linéaire si, pour toutes constantes α et β, et tous signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a la propriété suivante :

- si le signal $x_1(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y_1(t)$
- si le signal $x_2(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y_2(t)$
- alors le signal $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$



Principe de superposition

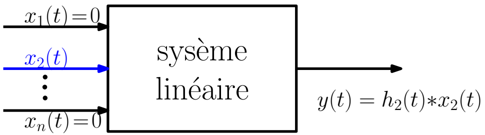
Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.



1.2 Systèmes linéaires (à plusieurs entrées)

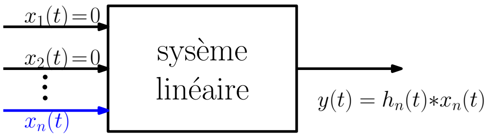
Principe de superposition

Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.



Principe de superposition

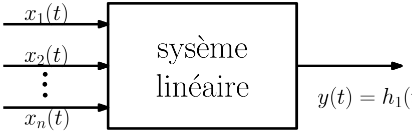
Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.



1.2 Systèmes linéaires (à plusieurs entrées)

Principe de superposition

Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.

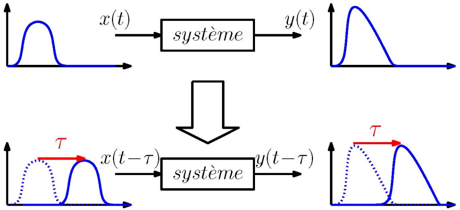


$$y(t) = h_1(t) * x_1(t) + h_2 * x_2(t) + \ldots + h_n(t) * x_n(t)$$

Système invariant dans le temps

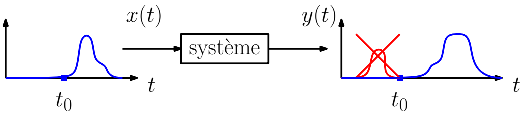
Le système Σ est invariant dans le temps si :

- le signal $x(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t)$
- le signal $x(t-\tau)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t-\tau)$, pour tout τ



Système causal

L'effet (variation de la sortie) suit la cause (variation de l'entrée) dans le temps



Globalement, l'entrée doit être dérivée moins de fois que la sortie car :

- $\int_0^t x(\tau)d\tau$ dépend du passé
- $\dot{x}(t)$ dépend de l'avenir

Eq. diff. linéaire à coeff. constants $\leftrightarrow$ syst. linéaire invariant

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec $n \geq m$:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

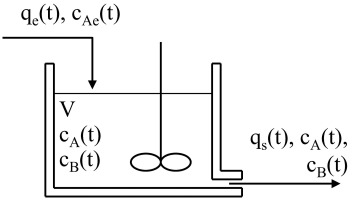
décrit un système :

- d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$
- **linéaire**
- **invariant dans le temps**
- **causal**

1.2 Exemple : un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \to B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant



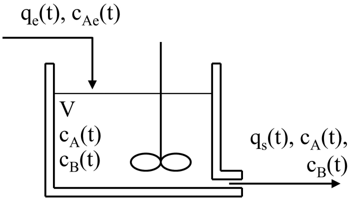
- Mettre en équation le système

- Quelle(s) hypothèse(s) faire pour avoir un modèle linéaire, invariant et causal ?

1.2 Exemple : un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant



- Mettre en équation le système

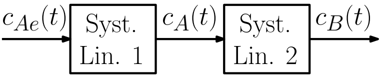
$$V\dot{c}_A(t) = q_e(t)c_{Ae}(t) - (q_s(t) + Vk)c_A(t)$$
$$V\dot{c}_B(t) = -q_s(t)c_B(t) + Vkc_A(t)$$

- Quelle(s) hypothèse(s) faire pour avoir un modèle linéaire, invariant et causal ?

1.2 Exemple : un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant



- Mettre en équation le système

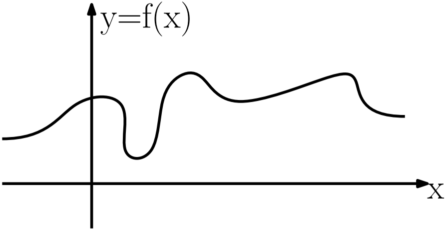
$$V\dot{c}_A(t) = q_e(t)c_{Ae}(t) - (q_s(t) + Vk)c_A(t)$$
$$V\dot{c}_B(t) = -q_s(t)c_B(t) + Vkc_A(t)$$

- Quelle(s) hypothèse(s) faire pour avoir un modèle linéaire, invariant et causal ?
  Pour V, q_e et q_s constants

$$V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) = q_e c_{Ae}(t)$$
$$V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) = Vkc_A(t)$$

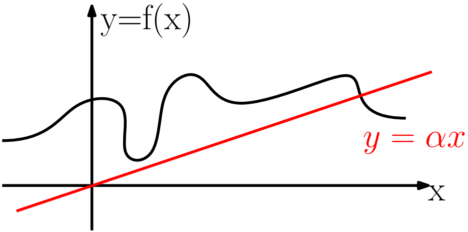
Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire

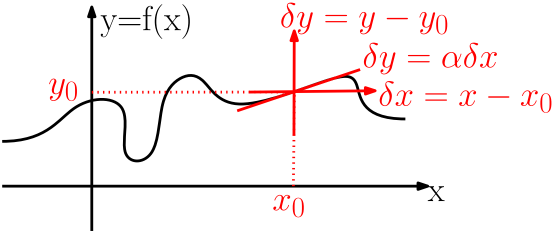


Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

- est globalement faux

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire

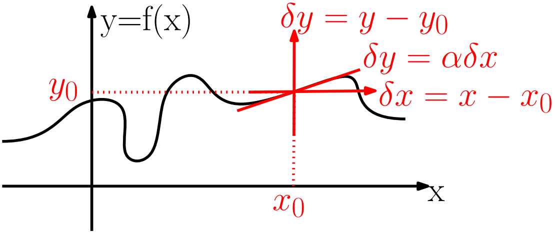


Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

- est globalement faux
- est une approximation valable localement autour d'un point de fonctionnement (x_0, y_0)

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



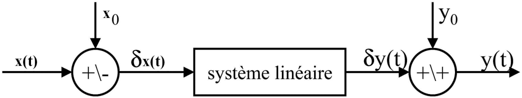
Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

- est globalement faux
- est une approximation valable localement autour d'un point de fonctionnement (x_0, y_0)
- peut se déduire par linéarisation (developpement de Taylor)

$$y(x) = y(x_0) + \frac{dy(x_0)}{dx}(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

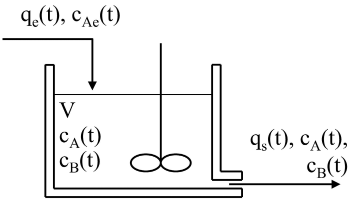
- est globalement faux
- est une approximation valable localement autour d'un point de fonctionnement (x_0, y_0)
- peut se déduire par linéarisation (developpement de Taylor)

$$\delta y \approx \left(\frac{df}{dx}(x) \right)_{x=x_0} \delta x$$

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$

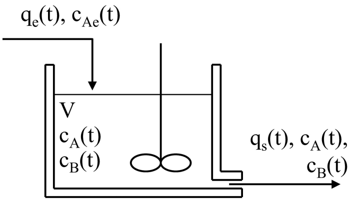


Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$



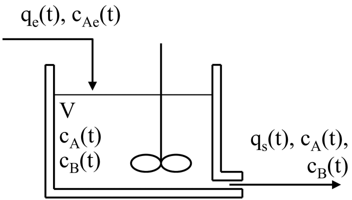
Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

- On suppose : $\begin{cases} q_e(t) \approx q_{e0} \\ c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_A(t) \approx \frac{q_{e0}}{q_{e0}+kV} c_{Ae0} \\ c_B(t) \approx \frac{kV}{q_{e0}+kV} c_{Ae0} \end{cases}$

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$



Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

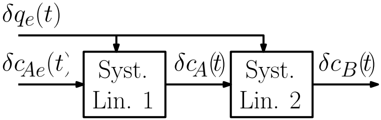
- On suppose : $\begin{cases} q_e(t) \approx q_{e0} \\ c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_A(t) \approx \frac{q_{e0}}{q_{e0}+kV} c_{Ae0} \\ c_B(t) \approx \frac{kV}{q_{e0}+kV} c_{Ae0} \end{cases}$
- Faire le développement de Taylor autour de $c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0}$, $q_e(t) \approx q_{e0}$, $c_A(t) \approx c_{A0}$ et $c_B(t) \approx c_{B0}$ de :

$$\begin{cases} \dot{c}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V}(c_{Ae}(t) - c_A(t)) - kc_A(t) \\ \dot{c}_B(t) = \frac{-q_e(t)c_B(t)}{V} + kc_A(t) \end{cases}$$

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$



Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

- On suppose : $\begin{cases} q_e(t) \approx q_{e0} \\ c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_A(t) \approx \frac{q_{e0}}{q_{e0}+kV} c_{Ae0} \\ c_B(t) \approx \frac{kV}{q_{e0}+kV} c_{Ae0} \end{cases}$
- Faire le développement de Taylor autour de $c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0}$, $q_e(t) \approx q_{e0}$, $c_A(t) \approx c_{A0}$ et $c_B(t) \approx c_{B0}$ de :

$$\begin{cases} \dot{c}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V}(c_{Ae}(t) - c_A(t)) - kc_A(t) \\ \dot{c}_B(t) = \frac{-q_e(t)c_B(t)}{V} + kc_A(t) \end{cases}$$

- Pour avoir :

$$\begin{cases} \dot{\delta c}_A(t) = \frac{c_{Ae0}-c_{A0}}{V}\delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V}\delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k\right)\delta c_A(t) \\ \dot{\delta c}_B(t) = \frac{-c_{B0}}{V}\delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V}\delta c_B(t) + k\delta c_A(t) \end{cases}$$

Définition et propriétés essentielles de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt, \ \ p \in \mathbb{C}$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$
- convolution : $\mathcal{L}(x(t) \star y(t)) = X(p)Y(p)$
- valeur initiale : $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{p\to\infty} pX(p)$
- valeur finale : $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$

Définition et propriétés essentielles de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt, \;\; p \in \mathbb{C}$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$
- convolution : $\mathcal{L}(x(t) \star y(t)) = X(p)Y(p)$
- valeur initiale : $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{p\to\infty} pX(p)$
- valeur finale : $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$

principal intérêt

La transformation de Laplace convertit une eq. diff. linéaire à coefficients constants en une équation polynômiale en p.

Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
- échelon : $\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$
- exponentielle : $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$
- puissance : $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
- exp $*$ puissance : $\mathcal{L}(t^n e^{-at}) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
- cosinus : $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$
- sinus : $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

1.3 Exemple : un réacteur chimique (suite)

Pour V et $q_e = q_s$ constants

- Equations différentielles

$$\begin{cases} V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) = q_e c_{Ae}(t) \\ V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) = Vkc_A(t) \end{cases}$$

1.3 Exemple : un réacteur chimique (suite)

Pour V et $q_e = q_s$ constants

- Equations différentielles

$$\begin{cases} V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) = q_e c_{Ae}(t) \\ V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) = Vkc_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} C_A(p) = \frac{q_e}{Vp+(q_e+kV)} C_{Ae}(p) + \frac{Vc_A(0)}{Vp+q_e+kV} \\ C_B(p) = \frac{kV}{Vp+q_s} C_A(p) + \frac{Vc_B(0)}{Vp+q_s} \end{cases}$$

1.3 Exemple : un réacteur chimique (suite)

Pour V et $q_e = q_s$ constants

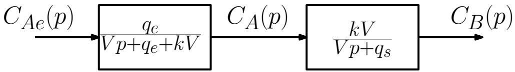
- Equations différentielles

$$\begin{cases} V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) = q_e c_{Ae}(t) \\ V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) = Vkc_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} C_A(p) = \frac{q_e}{Vp+(q_e+kV)} C_{Ae}(p) + \frac{Vc_A(0)}{Vp+q_e+kV} \\ C_B(p) = \frac{kV}{Vp+q_s} C_A(p) + \frac{Vc_B(0)}{Vp+q_s} \end{cases}$$

- Schéma bloc



1.3 Exemple : un réacteur chimique (suite)

Pour V constant et $q_e(t) = q_s(t)$

- Equations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\delta c}_A(t) = \frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{V}\delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V}\delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k\right)\delta c_A(t) \\ \dot{\delta c}_B(t) = \frac{-c_{B0}}{V}\delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V}\delta c_B(t) + k\delta c_A(t) \end{cases}$$

Pour V constant et $q_e(t) = q_s(t)$

- Equations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\delta c}_A(t) = \frac{c_{Ae0}-c_{A0}}{V}\delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V}\delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k\right)\delta c_A(t) \\ \dot{\delta c}_B(t) = \frac{-c_{B0}}{V}\delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V}\delta c_B(t) + k\delta c_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} \Delta C_A(p) = \left(\frac{c_{Ae0}-c_{A0}}{Vp+q_{e0}+kV}\right)\Delta Q_e(p) + \left(\frac{q_{e0}}{Vp+q_{e0}+kV}\right)\Delta C_{Ae}(p) \\ \Delta C_B(p) = \left(\frac{-c_{B0}}{Vp+q_{e0}}\right)\Delta Q_e(p) + \left(\frac{kV}{Vp+q_{e0}}\right)\Delta C_A(p) \end{cases}$$

1.3 Exemple : un réacteur chimique (suite)

Pour V constant et $q_e(t) = q_s(t)$

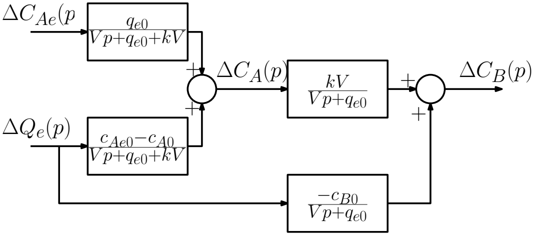
- Equations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\delta c_A}(t) = \frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{V} \delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V} \delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k \right) \delta c_A(t) \\ \dot{\delta c_B}(t) = \frac{-c_{B0}}{V} \delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V} \delta c_B(t) + k \delta c_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} \Delta C_A(p) = \left(\frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{Vp + q_{e0} + kV} \right) \Delta Q_e(p) + \left(\frac{q_{e0}}{Vp + q_{e0} + kV} \right) \Delta C_{Ae}(p) \\ \Delta C_B(p) = \left(\frac{-c_{B0}}{Vp + q_{e0}} \right) \Delta Q_e(p) + \left(\frac{kV}{Vp + q_{e0}} \right) \Delta C_A(p) \end{cases}$$

- Schéma bloc



1.4 Fonction de transfert

Dans l'exemple précédent :

$$C_A(p) = \underbrace{\left(\frac{q_e}{Vp + q_e + kV}\right) C_{Ae}(p)}_{entrée/sortie} + \underbrace{\left(\frac{Vc_A(0)}{Vp + q_e + kV}\right)}_{conditions\ \ initiales}$$

Plus généralement:

La fonction de transfert...

- est le lien entrée / sortie, sans les conditions initiales
- est une fraction rationnelle en p
- s'obtient à partir de l'équation différentielle
- est définie par la T.L. de la réponse impulsionnelle : quand $x(t) = \delta(t)$

1.4 Fonction de transfert

- La fonction de transfert s'obtient à partir de l'éq. diff. entrée/sortie :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- La fonction de transfert s'obtient à partir de l'éq. diff. entrée/sortie :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

- La fonction de transfert s'obtient à partir de l'éq. diff. entrée/sortie :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

- autrement dit :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}}_{H(p)} X(p) + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} - \frac{\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j-1} b_j p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}}_{C.I. \ sur \ y(t) \ et \ x(t)}$$

1.4 Fonction de transfert

- La fonction de transfert s'obtient à partir de l'éq. diff. entrée/sortie :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

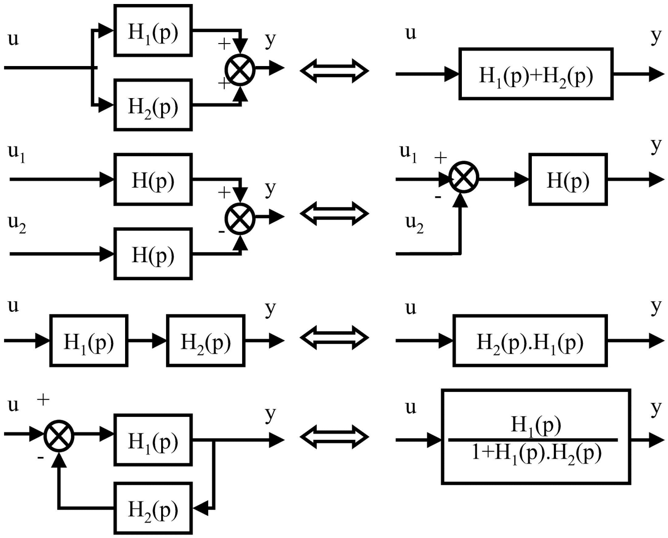
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^{m} b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

- autrement dit :

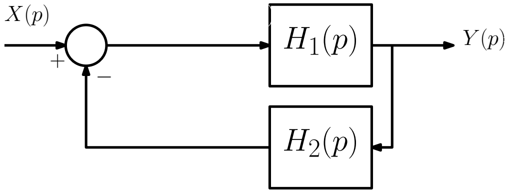
$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^{m} b_j p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}}_{H(p)} X(p) + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} - \frac{\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j-1} b_j p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}}_{C.I.\ sur\ y(t)\ et\ x(t)}$$

- pour des conditions initiales nulles, il vient :

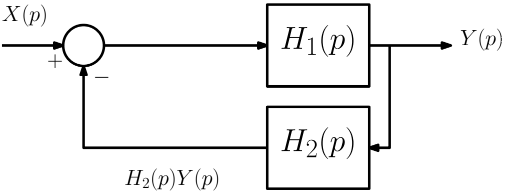
$$\boxed{Y(p) = H(p)X(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}}$$


u
H1(p)
H2(p)
+
+
y
u
H1(p)+H2(p)
y
u1
H(p)
u2
H(p)
+
-
y
u1
+
-
u2
H(p)
y
u
H1(p)
H2(p)
y
u
H2(p).H1(p)
y
u
+
-
H1(p)
H2(p)
y
u
H1(p)
1+H1(p).H2(p)
y

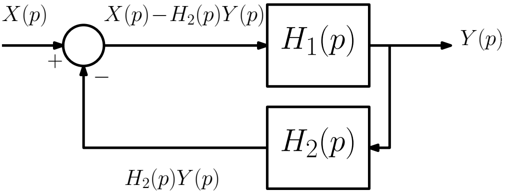
Fonction de transfert en boucle fermée :



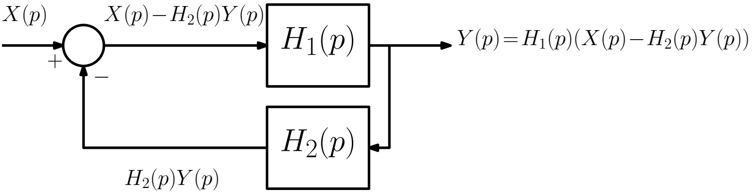
Fonction de transfert en boucle fermée :



Fonction de transfert en boucle fermée :

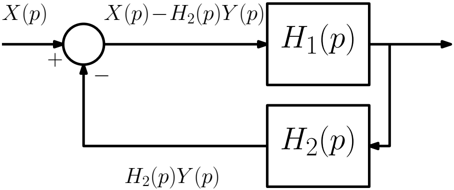


Fonction de transfert en boucle fermée :



1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

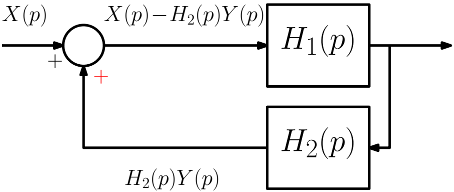
Fonction de transfert en boucle fermée :



$$Y(p)=H_1(p)(X(p)-H_2(p)Y(p))$$

$$\mathbf{Y(p)=\frac{H_1(p)}{1+H_1(p)H_2(p)}X(p)}$$

Fonction de transfert en boucle fermée :



$$Y(p) = H_1(p)(X(p) - H_2(p)Y(p))$$

$$\mathbf{Y(p)} = \frac{\mathbf{H_1(p)}}{\mathbf{1 - H_1(p)H_2(p)}}\mathbf{X(p)}$$

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = H(p)X(p) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Num_{k1}(p)}{Den(p)} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Num_{k2}(p)}{Den(p)} x^{(k)}(0)$$

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct : $Y(p) = \frac{1}{p-p_0} + \dots$
  - $\rightarrow$ réponse en exponentielle : $y(t) = e^{p_0 t} + \dots$
  - $\rightarrow$ convergeant si le pôle est négatif

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct : $Y(p) = \frac{1}{p-p_0} + \dots$
  - $\rightarrow$ réponse en exponentielle : $y(t) = e^{p_0 t} + \dots$
  - $\rightarrow$ convergeant si le pôle est négatif
- pôle réel multiple : $Y(p) = \frac{1}{(p-p_0)^k} + \dots$
  - $\rightarrow$ réponse en exponentielle $*$ puissance de t : $y(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_0 t} + \dots$
  - $\rightarrow$ convergeant si le pôle est négatif

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct : $Y(p) = \frac{1}{p-p_0} + \dots$
  - $\rightarrow$ réponse en exponentielle : $y(t) = e^{p_0 t} + \dots$
  - $\rightarrow$ convergeant si le pôle est négatif
- pôle réel multiple : $Y(p) = \frac{1}{(p-p_0)^k} + \dots$
  - $\rightarrow$ réponse en exponentielle $*$ puissance de t : $y(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_0 t} + \dots$
  - $\rightarrow$ convergeant si le pôle est négatif
- pôles complexes conjugués : $Y(p) = \frac{z}{p-p_0} + \frac{\overline{z}}{p-\overline{p_0}} + \dots$ (où $p_0 = \alpha + i\beta$)
  - $\rightarrow$ réponse sinusoïdale $*$ exponentielle : $y(t) = 2|z|e^{\alpha t} cos(arg(z) + \beta t) + \dots$
  - $\rightarrow$ convergeant si le pôle est à partie réelle négative

2.1 Définition et intérêt des syst. du 1^{er} ordre

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Vocabulaire :

- T est appelé *constante de temps* (unité : s)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Vocabulaire :

- T est appelé *constante de temps* (unité : s)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse, quantifié par T
- ... amplifie l'entrée en régime permanent ($K = y(\infty)/x(\infty)$)

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Vocabulaire :

- T est appelé *constante de temps* (unité : s)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse, quantifié par T
- ... amplifie l'entrée en régime permanent ($K = y(\infty)/x(\infty)$)

Exemple : réaction $A \rightarrow B$

2.2 Réponses temporelles

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? $(X(p) = 1)$ (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? $(X(p) = \frac{1}{p})$ (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? $(X(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2})$ (réponse fréquentielle)

2.2 Réponses temporelles

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? $(X(p) = 1)$ (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? $(X(p) = \frac{1}{p})$ (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? $(X(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2})$ (réponse fréquentielle)

Méthode :
Calculs de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{1+Tp}X(p)\right)$ pour les différentes entrées possibles.

2.2 Réponse impulsionnelle d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + Tp} 1 = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

2.2 Réponse impulsionnelle d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp}1 = \frac{K/T}{p+1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T}$$

2.2 Réponse impulsionnelle d'un syst. du 1er ordre

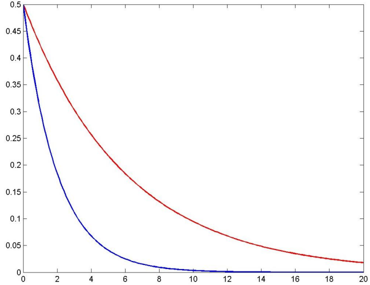
On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp}1 = \frac{K/T}{p+1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T}e^{-t/T}$$



en rouge : $K = 3,\ T = 6$
en bleu : $K = 1,\ T = 2$

2.2 Réponse impulsionnelle d'un syst. du 1^{er} ordre

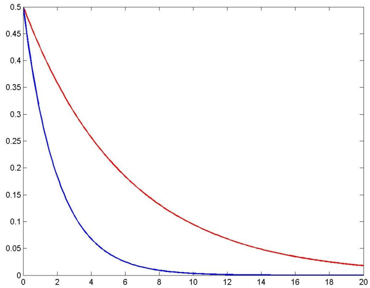
On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp} 1 = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$



en rouge : $K = 3,\ T = 6$
en bleu : $K = 1,\ T = 2$

À noter :

- discontinuité en $t = 0$ ($\lim_{t\to 0^-} = 0 \neq \lim_{t \to 0^+} = K/T$)
- T petit $\Rightarrow$ réponse rapide

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p} = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T}\right)$$

2.2 Réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{(1+Tp)p} = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/T}\right)$$

La réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p} = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T}\right)$$

La réponse indicielle d'un syst. du 1er ordre est :

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

- K donne le gain statique (rapport des signaux en régime permanent)

2.2 Réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

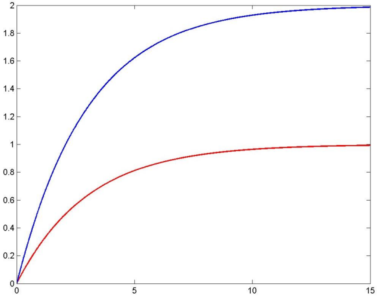
$$Y(p) = \frac{K}{(1+Tp)p} = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/T}\right)$$

La réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

- K donne le gain statique (rapport des signaux en régime permanent)
- T petit $\Rightarrow$ réponse rapide

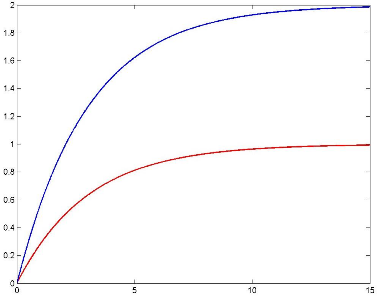
Influence du gain statique K



en rouge : $K = 1,\ T = 3$
en bleu : $K = 2,\ T = 3$

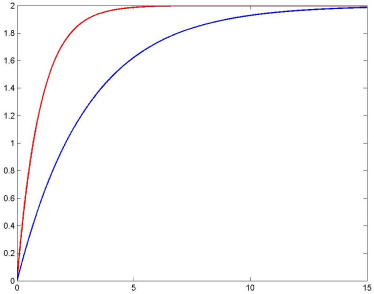
2.2 Réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre

Influence du gain statique K



en rouge : $K = 1, \ T = 3$
en bleu : $K = 2, \ T = 3$

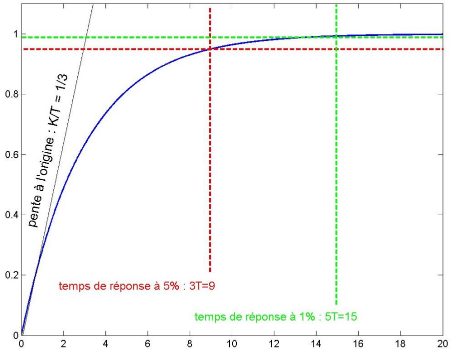
Influence du temps de réponse T



en rouge : $K = 2, \ T = 1$
en bleu : $K = 2, \ T = 3$

Quelques données à retenir :

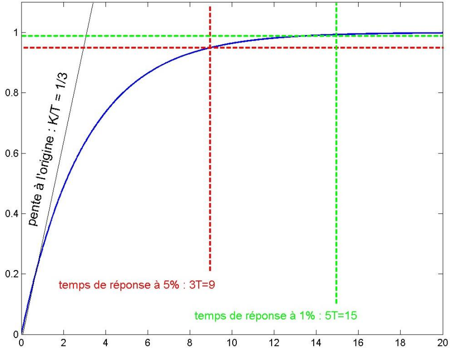
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$



exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

Quelques données à retenir :

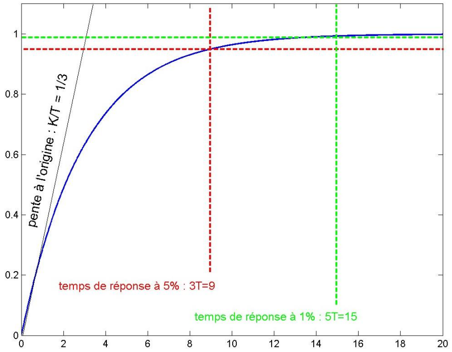
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$
- valeur initiale de la pente : $\dot{y}(0) = K/T$



exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

Quelques données à retenir :

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$
- valeur initiale de la pente : $\dot{y}(0) = K/T$



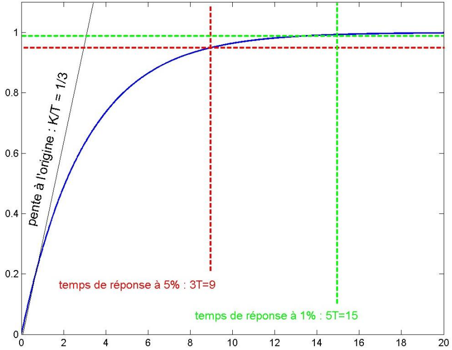
exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

Temps de réponse à $x\%$: instant $t_{x\%}$ tel que, pour tout $t \geq t_{x\%}$:

$$y(\infty)(1 - \tfrac{x}{100}) \leq y(t) \leq (\infty)(1 + \tfrac{x}{100})$$

Quelques données à retenir :

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$
- valeur initiale de la pente : $\dot{y}(0) = K/T$
- temps de réponse à 5% : $t_{5\%} \approx 3T$
- temps de réponse à 2% : $t_{2\%} \approx 4T$
- temps de réponse à 1% : $t_{1\%} \approx 4.6T$



exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

Temps de réponse à $x\%$: instant $t_{x\%}$ tel que, pour tout $t \geq t_{x\%}$:

$$y(\infty)(1 - \frac{x}{100}) \leq y(t) \leq (\infty)(1 + \frac{x}{100})$$

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K}{1 + Tp}\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right) \\ &= \frac{K}{1 + T^2\omega^2}\left(\frac{T\omega}{p + 1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{sinus} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{cosinus}\right) \end{aligned}$$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$
\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{K}{1+Tp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) \\
&= \frac{K}{1+T^2\omega^2}\left(\frac{T\omega}{p+1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}}_{sinus} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2+\omega^2}}_{cosinus}\right)
\end{aligned}
$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$
y(t) = \underbrace{\frac{\omega K T}{1+T^2\omega^2} e^{-t/T}}_{transitoire} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t - Atan(\omega T))}_{permanent}
$$

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$

$$= \frac{K}{1+T^2\omega^2}\left(\frac{T\omega}{p+1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}}_{sinus} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2+\omega^2}}_{cosinus}\right)$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^er ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1+T^2\omega^2}e^{-t/T}}_{transitoire} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t - Atan(\omega T))}_{permanent}$$

- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée

2.2 Réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$
$$= \frac{K}{1+T^2\omega^2}\left(\frac{T\omega}{p+1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}}_{sinus} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2+\omega^2}}_{cosinus}\right)$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega K T}{1+T^2\omega^2}e^{-t/T}}_{transitoire} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t - Atan(\omega T))}_{permanent}$$

- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée
- le signal d'entrée est amplifié de $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1+Tp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$$
$$= \frac{K}{1+T^2\omega^2}\left(\frac{T\omega}{p+1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2+\omega^2}}_{sinus} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2+\omega^2}}_{cosinus}\right)$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1+T^2\omega^2}e^{-t/T}}_{transitoire} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t - Atan(\omega T))}_{permanent}$$

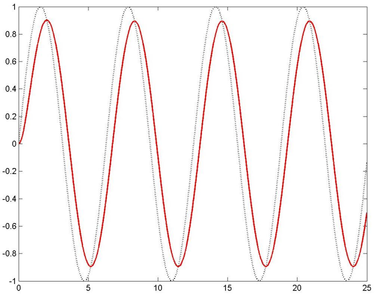
- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée
- le signal d'entrée est amplifié de $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$
- le signal d'entrée est déphasé de $Arg(H(j\omega)) = -Atan(\omega T)$

2.2 Exemples de réponses sinusoïdales d'un syst. du 1^{er} ordre

On considère une entrée de la forme : $u(t) = \sin(\omega t)$
Rappel :

$$y(t) = \frac{\omega K T}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T} + \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - Atan(\omega T))$$

Réponse pour $K = 1$**,** $T = 0.5$ **et** $\omega = 1$

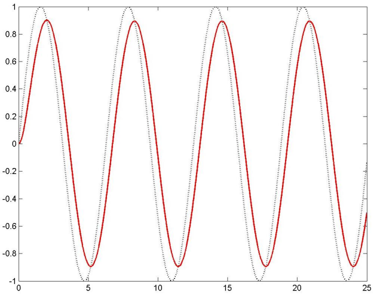


en noir : entrée
en rouge : sortie

On considère une entrée de la forme : $u(t) = \sin(\omega t)$
Rappel :

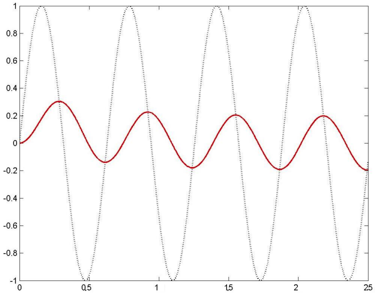
$$y(t) = \frac{\omega K T}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T} + \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - Atan(\omega T))$$

Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ **et** $\omega=1$



en noir : entrée
en rouge : sortie

Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ **et** $\omega=10$



en noir : entrée
en rouge : sortie

2.3 Réponse fréquentielle

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système à une sinusoïde en fonction de la *fréquence* du signal d'entrée.

Réponse fréquentielle d'un système linéaire à $x(t) = \sin(\omega t)$

$$y(t) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{gain\ :\ G(\omega)} \sin(\omega t \underbrace{+Arg(H(j\omega))}_{déphasage\ :\ \phi(\omega)})$$

2.3 Réponse fréquentielle

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système à une sinusoïde en fonction de la *fréquence* du signal d'entrée.

Réponse fréquentielle d'un système linéaire à $x(t) = \sin(\omega t)$

$$y(t) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{gain\ :\ G(\omega)} \sin(\omega t \underbrace{+Arg(H(j\omega))}_{déphasage\ :\ \phi(\omega)})$$

Justification :

- Tout signal peut se décomposer en somme pondérée de sinus (Fourier)
- Principe de superposition : $y(\sum_i u_i(t)) = \sum_i y(u_i(t))$

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système à une sinusoïde en fonction de la *fréquence* du signal d'entrée.

Réponse fréquentielle d'un système linéaire à $x(t) = \sin(\omega t)$

$$y(t) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{gain \ : \ G(\omega)} \sin(\omega t \underbrace{+Arg(H(j\omega))}_{déphasage \ : \ \phi(\omega)})$$

Justification :

- Tout signal peut se décomposer en somme pondérée de sinus (Fourier)
- Principe de superposition : $y(\sum_i u_i(t)) = \sum_i y(u_i(t))$

Dans le cas des systèmes du premier ordre :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$
$$\Phi(\omega) = -Atan(\omega T)$$

Hendrik Wade ... (1905 - 1982)

Construction d'un diagramme de Bode

- Tracé du gain en décibel en fonction de ω :

$$G_{dB}(\omega) = 20log(G(\omega)) = 20log\left(|H(j\omega)|\right)$$

- Tracé de la phase en fonction de ω :

$$\phi(\omega) = Arg\left(H(j\omega)\right)$$

- Échelle logarithmique en ω : 1 graduation $\sim 10 \times \omega$ (décade)

2.3 Diagramme de Bode

Construction d'un diagramme de Bode

- Tracé du gain en décibel en fonction de ω :

$$G_{dB}(\omega) = 20log(G(\omega)) = 20log\left(|H(j\omega)|\right)$$

- Tracé de la phase en fonction de ω :

$$\phi(\omega) = Arg\left(H(j\omega)\right)$$

- Échelle logarithmique en ω : 1 graduation $\sim 10 \times \omega$ (décade)

Intérêts du diagramme de Bode :

- synthétique (grande échelle de variation de ω)
- lorsque des systèmes sont mis en série :
  $\rightarrow$ les gains en décibels s'ajoutent
  $\rightarrow$ les déphasages s'ajoutent

2.3 Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

Diagramme de Bode

- Gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{j\omega}\right|\right) = 20log(K) - 20log(\omega)$
- Gain nul en dB pour : $\omega = K$
- Pente du gain : -20 dB/dec $\quad$ (car $G_{dB}(10\omega) = G_{dB}(\omega) - 20$)
- Déphasage constant : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

2.3 Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

Diagramme de Bode

- Gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{j\omega}\right|\right) = 20log(K) - 20log(\omega)$
- Gain nul en dB pour : $\omega = K$
- Pente du gain : -20 dB/dec (car $G_{dB}(10\omega) = G_{dB}(\omega) - 20)$)
- Déphasage constant : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Tracé asymptotique

- Pente du gain : -20 dB/dec
- Gain nul en dB pour : $\omega = 100$
- Déphasage constant : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$
- Exemple : $H(p) = \frac{100}{p}$

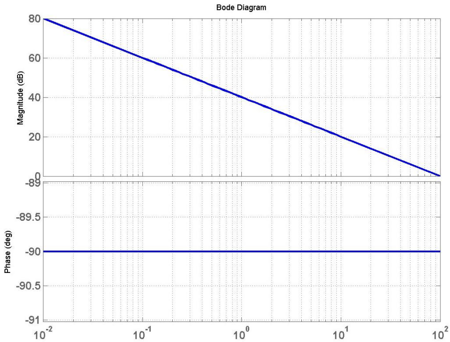


Diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{1+jT\omega}\right|\right) = 20log(K) - 10log(1+T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan(\omega T)$

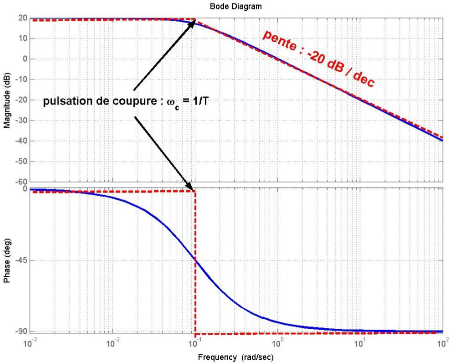
Diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{1+jT\omega}\right|\right) = 20log(K) - 10log(1+T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan(\omega T)$

Tracé asymptotique

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$



2.3 Diagramme de Bode d'un 1er ordre

Diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{1+jT\omega}\right|\right) = 20log(K) - 10log(1+T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan(\omega T)$

Tracé asymptotique

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK - 20log(\omega T) \\ \phi(\omega) \approx -90^o \end{cases}$$

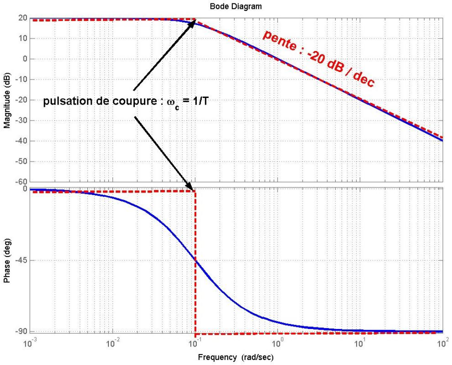


Diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{1+jT\omega}\right|\right) = 20log(K) - 10log(1+T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan(\omega T)$

Tracé asymptotique

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK - 20log(\omega T) \\ \phi(\omega) \approx -90^o \end{cases}$$

- Intersection en $\omega = 1/T$

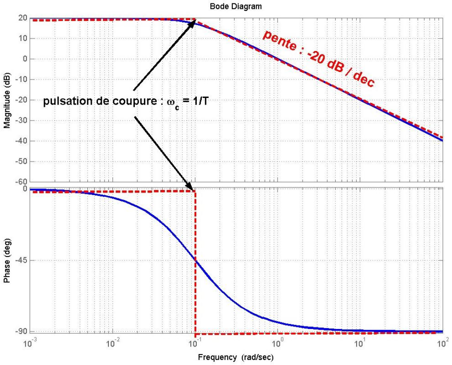


Diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{1+jT\omega}\right|\right) = 20log(K) - 10log(1+T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan(\omega T)$

Tracé asymptotique

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK - 20log(\omega T) \\ \phi(\omega) \approx -90^o \end{cases}$$

- Intersection en $\omega = 1/T$
- Bande passante à -3dB : $[0\ \frac{1}{T}]$

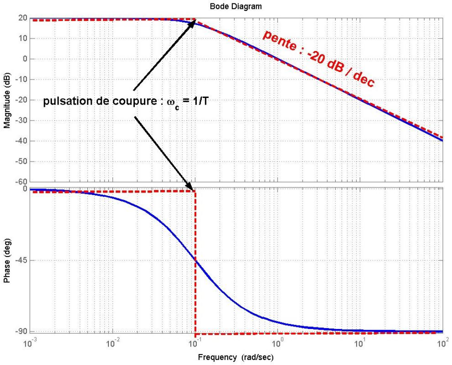


Diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log\left(\left|\frac{K}{1+jT\omega}\right|\right) = 20log(K) - 10log(1+T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan(\omega T)$

Tracé asymptotique

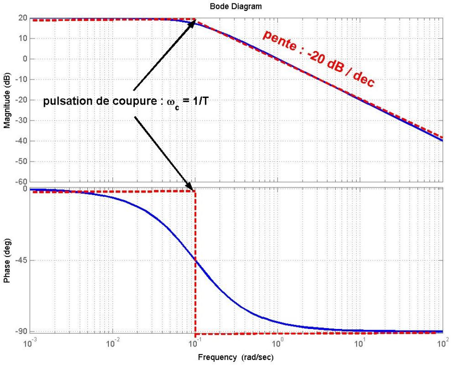
- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20logK - 20log(\omega T) \\ \phi(\omega) \approx -90^o \end{cases}$$

- Intersection en $\omega = 1/T$
- Bande passante à -3dB : $[0 \ \frac{1}{T}]$
- Exemple : $H(p) = \frac{10}{1+10p}$



2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posiez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- **deux systèmes du premier ordre sont en série ?**

2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posiez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- **deux systèmes du premier ordre sont en série ?**
  - fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{K_1 K_2}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$
  - gain global : $G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$
  - phase globale : $\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posiez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- **deux systèmes du premier ordre sont en série ?**
  - fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{K_1K_2}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$
  - gain global : $G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$
  - phase globale : $\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

- **un système du premier ordre est bouclé par un gain K_c ?**

2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posiez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- **deux systèmes du premier ordre sont en série ?**
  - fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{K_1K_2}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$
  - gain global : $G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$
  - phase globale : $\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

- **un système du premier ordre est bouclé par un gain K_c ?**
  - fonction de transfert globale du premier ordre: $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}p}$
  - gain statique du système en BF : $K_{BF} = \frac{KK_c}{1+KK_c}$
  - constante de temps du système en BF : $T_{BF} = \frac{T}{1+KK_c}$

2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posiez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- **deux systèmes du premier ordre sont en série ?**
  - fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{K_1 K_2}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$
  - gain global : $G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$
  - phase globale : $\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

- **un système du premier ordre est bouclé par un gain K_c ?**
  - fonction de transfert globale du premier ordre: $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}p}$
  - gain statique du système en BF : $K_{BF} = \frac{KK_c}{1+KK_c}$
  - constante de temps du système en BF : $T_{BF} = \frac{T}{1+KK_c}$

- **le système est de la forme :** $H(p) = K\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$

2.4 Quelques réponses aux questions que vous ne vous posiez pas.

Que se passe t-il lorsque ...

- **deux systèmes du premier ordre sont en série ?**
  - fonction de transfert globale : $H(p) = H_1(p)H_2(p) = \frac{K_1 K_2}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$
  - gain global : $G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$
  - phase globale : $\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$

- **un système du premier ordre est bouclé par un gain K_c ?**
  - fonction de transfert globale du premier ordre: $H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1+T_{BF}p}$
  - gain statique du système en BF : $K_{BF} = \frac{KK_c}{1+KK_c}$
  - constante de temps du système en BF : $T_{BF} = \frac{T}{1+KK_c}$

- **le système est de la forme : $H(p) = K\frac{1+T_2 p}{1+T_1 p}$**
  - pour $T_1 > T_2$: retard de phase sur $\left[T_1^{-1} \;\; T_2^{-1}\right]$
  - pour $T_2 > T_1$: avance de phase sur $\left[T_2^{-1} \;\; T_1^{-1}\right]$
  - dans les 2 cas : extremum de déphasage pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1}$

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1}$

Vocabulaire :

- ω_0 est appelé *pulsation propre* (unité : rad/s)
- z est appelé *coefficient d'amortissement* (sans unité)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1}$

Vocabulaire :

- ω_0 est appelé *pulsation propre* (unité : rad/s)
- z est appelé *coefficient d'amortissement* (sans unité)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse
- ... oscille éventuellement avant de se stabiliser ($\neq$ 1erordre)
- ... varie peu au début de la réponse ($\neq$ 1erordre)

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? (réponse fréquentielle)

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? (réponse fréquentielle)

Méthode :

Calculs de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1}X(p)\right)$ pour les différentes entrées possibles.

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \delta(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)$$

$\rightarrow$ le discriminant du dénominateur est : $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \delta(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)$$

$\rightarrow$ le discriminant du dénominateur est : $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :
  - $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t}\left(e^{\omega_0\sqrt{z^2-1}t} - e^{-\omega_0\sqrt{z^2-1}t}\right)}$$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \delta(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)$$

$\rightarrow$ le discriminant du dénominateur est : $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :
  - $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t}\left(e^{\omega_0\sqrt{z^2-1}t} - e^{-\omega_0\sqrt{z^2-1}t}\right)}$$

  - $z = 1 \Rightarrow$ exponentielle $\times$ t

$$\boxed{y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}}$$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \delta(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right)$$

$\rightarrow$ le discriminant du dénominateur est : $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :
  - $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t}\left(e^{\omega_0\sqrt{z^2-1}t} - e^{-\omega_0\sqrt{z^2-1}t}\right)}$$

  - $z = 1 \Rightarrow$ exponentielle $\times$ t

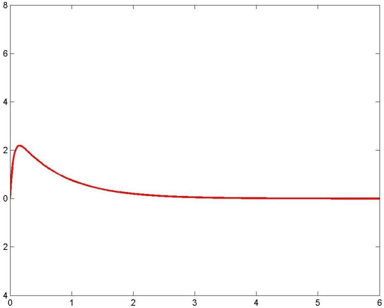
$$\boxed{y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}}$$

  - $z < 1 \Rightarrow$ oscillations amorties

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1 - z^2}t)}$$

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 :

- en rouge :
  $z = 2,\ K = 2$ et $\omega_0 = 5$

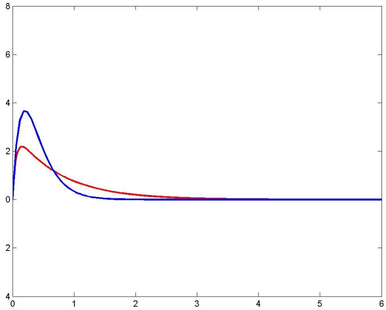


3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 :

- en rouge :
  $z = 2,\ K = 2$ et $\omega_0 = 5$

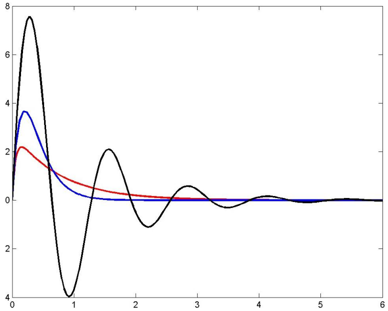
- en bleu :
  $z = 1,\ K = 2$ et $\omega_0 = 5$



3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 :

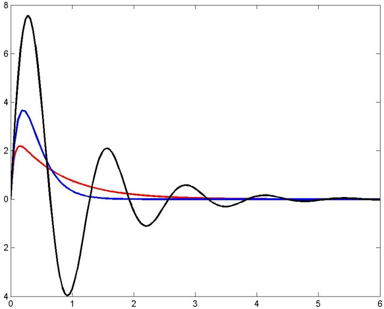
- en rouge :
  $z = 2,\ K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en bleu :
  $z = 1,\ K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en noir :
  $z = 0.2,\ K = 2$ et $\omega_0 = 5$



3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 **:**

- en rouge :
  $z = 2, \; K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en bleu :
  $z = 1, \; K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en noir :
  $z = 0.2, \; K = 2$ et $\omega_0 = 5$



À noter

z grand $\longrightarrow$ réponse amortie

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples**

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour** $z > 1 \Rightarrow$ **racines réelles simples**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2}\right)\right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2-1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2-1}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2}\right)\right)$$

  - La réponse temporelle est donc :

$$\boxed{y(t) = K\left(1 + \frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{z^2-1}}\left((-z - \sqrt{z^2-1})e^{\omega_0\sqrt{z^2-1}t} - (\sqrt{z^2-1} - z)e^{-\omega_0\sqrt{z^2-1}t}\right)\right)}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2-1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2-1}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2}\right)\right)$$

  - La réponse temporelle est donc :

$$\boxed{y(t)=K\left(1+\frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{z^2-1}}\left((-z-\sqrt{z^2-1})e^{\omega_0\sqrt{z^2-1}t}-(\sqrt{z^2-1}-z)e^{-\omega_0\sqrt{z^2-1}t}\right)\right)}$$

  - La valeur finale est K (le gain statique), atteinte par valeurs inférieures

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
  - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour** $z = 1 \Rightarrow$ **racine simple en** $p = 0$ **et double en** $p = -\omega_0$
  - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2}\right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
  - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_0} - \frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2}\right)$$

  - La réponse temporelle est donc :

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - (1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
  - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2}\right)$$

  - La réponse temporelle est donc :

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right)}$$

  - La valeur finale est K, atteinte par valeurs inférieures

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- **Pour** $z < 1 \Rightarrow$ **racines complexes conjuguées**

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2}\right)\right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2}\frac{1}{p}$$

- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2}\right)\right)$$

  - La réponse temporelle est donc :

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t + \phi)\right), \ pour\ \phi = Atan\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- La T.L. de la réponse à $x(t) = \Gamma(t)$ est :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
  - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

  - La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2}\right)\right)$$

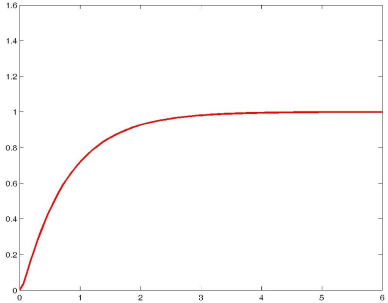
  - La réponse temporelle est donc :

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1 - z^2}}\sin(\omega_0\sqrt{1 - z^2}t + \phi)\right) , \ pour\ \phi = Atan\left(\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}\right)}$$

  - La valeur finale est K, atteinte après des oscillations amorties

Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

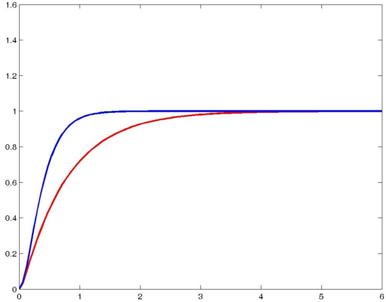
- en rouge :
  $z = 2$, $K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

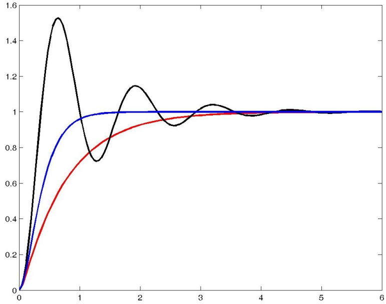
- en rouge :
  $z = 2,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

- en bleu :
  $z = 1,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



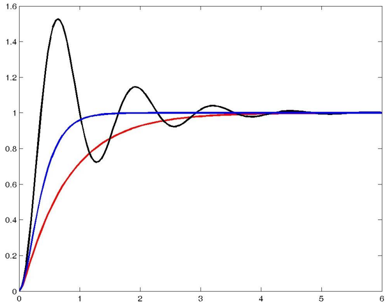
Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

- en rouge :
  $z = 2,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en bleu :
  $z = 1,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en noir :
  $z = 0.2,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

- en rouge :
  $z = 2,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en bleu :
  $z = 1,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en noir :
  $z = 0.2,\ K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

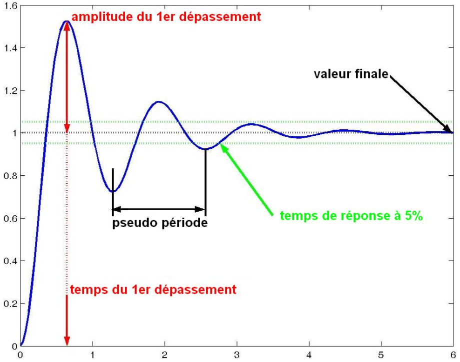


À noter

z grand $\longrightarrow$ réponse amortie

Quelques données à retenir pour $z < 1$:

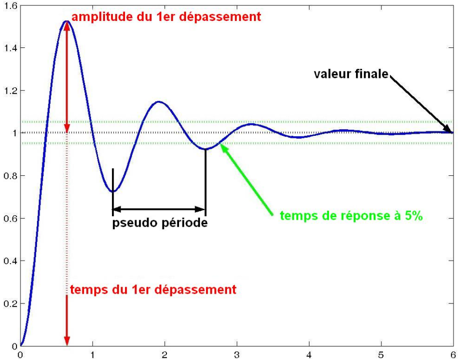
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
  $$\lim_{t \to \infty} y(t) = K$$



$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

Quelques données à retenir pour $z < 1$:

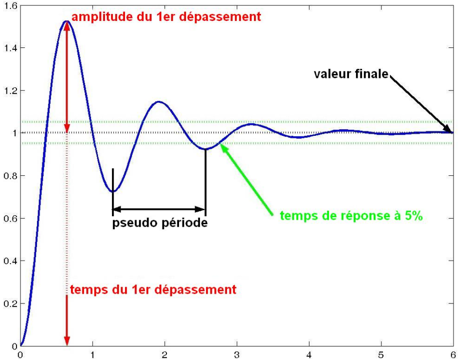
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K$$
- pseudo-période :
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$



$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

Quelques données à retenir pour $z < 1$:

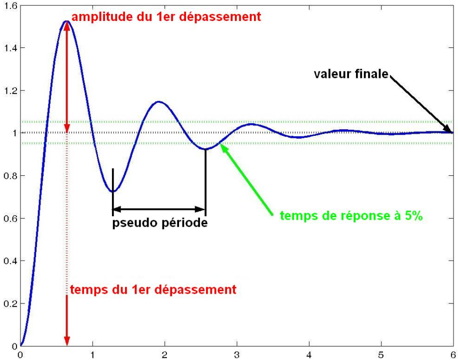
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
$$\lim_{t \to \infty} y(t) = K$$
- pseudo-période :
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$
- temps de réponse à $x\%$:
$$t_{x\%} = \frac{ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$$



$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

Quelques données à retenir pour $z < 1$:

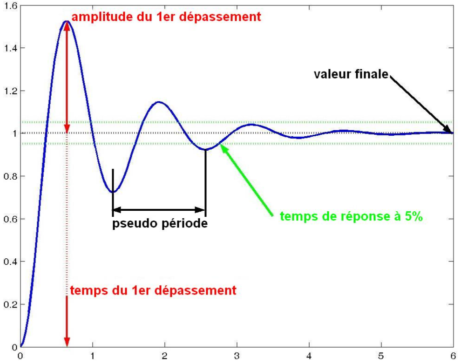
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K$$
- pseudo-période :
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$
- temps de réponse à $x\%$:
$$t_{x\%} = \frac{ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$$
- temps de réponse à 5% :
$$t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$$



$K = 1,\ z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

Quelques données à retenir pour $z < 1$:

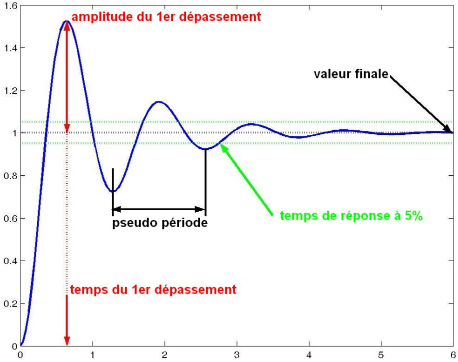
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
  $$\lim_{t\to\infty} y(t) = K$$
- pseudo-période :
  $$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$
- temps de réponse à $x\%$:
  $$t_{x\%} = \frac{ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$$
- temps de réponse à 5% :
  $$t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$$
- amplitude du 1^{er} dépassement :
  $$X_p = Ke^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$



$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

Quelques données à retenir pour $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = K$$
- pseudo-période :
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$
- temps de réponse à $x\%$:
$$t_{x\%} = \frac{ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$$
- temps de réponse à 5% :
$$t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$$
- amplitude du 1^{er} dépassement :
$$X_p = Ke^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$
- instant du 1^{er} dépassement :
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$



$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.3 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = sin(\omega t)$ il vient :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} \right) d\tau$$

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty h(\tau)\left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i}\right)d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i}\right)\left(\int_0^\infty h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right) - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\right)\left(\int_0^\infty h(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right) \end{aligned}$$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau)\left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i}\right)d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i}\right)\underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)}_{H(p=i\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\right)\underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right)}_{H(p=-i\omega)=\overline{H(p=i\omega)}} \end{aligned}$$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau)\left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i}\right)d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i}\right)\underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)}_{H(p=i\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\right)\underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right)}_{H(p=-i\omega)=\overline{H(p=i\omega)}} \end{aligned}$$

- En posant $|H(i\omega)| = G(\omega)$ et $Arg(H(i\omega)) = \phi(\omega)$, on a :

$$y(t) = \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i}\right)G(\omega)e^{i\phi(\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\right)G(\omega)e^{-i\phi(\omega)}$$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau)\left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i}\right)d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i}\right)\underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)}_{H(p=i\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\right)\underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right)}_{H(p=-i\omega)=\overline{H(p=i\omega)}} \end{aligned}$$

- En posant $|H(i\omega)| = G(\omega)$ et $Arg(H(i\omega)) = \phi(\omega)$, on a :

$$y(t) = \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i}\right)G(\omega)e^{i\phi(\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i}\right)G(\omega)e^{-i\phi(\omega)}$$

- Finalement, **sans hypothèse sur l'ordre de $H(p)$**, on a :

$$\boxed{y(t) = G(\omega)sin(\omega t + \phi(\omega))}$$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

La réponse d'un système linéaire à $x(t) = sin(\omega t)$ est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin\left(\omega t + Arg(H(j\omega))\right)$$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

La réponse d'un système linéaire à $x(t) = sin(\omega t)$ est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin\left(\omega t + Arg(H(j\omega))\right)$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

La réponse d'un système linéaire à $x(t) = sin(\omega t)$ est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin\left(\omega t + Arg(H(j\omega))\right)$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω
- le signal d'entrée est amplifié de $G(\omega) = |H(j\omega)|$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

La réponse d'un système linéaire à $x(t) = sin(\omega t)$ est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin\left(\omega t + Arg(H(j\omega))\right)$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω
- le signal d'entrée est amplifié de $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- le signal d'entrée est déphasé de $\phi(\omega) = Arg(H(j\omega))$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

La réponse d'un système linéaire à $x(t) = sin(\omega t)$ est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin\left(\omega t + Arg(H(j\omega))\right)$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω
- le signal d'entrée est amplifié de $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- le signal d'entrée est déphasé de $\phi(\omega) = Arg(H(j\omega))$

La réponse d'un système d'ordre 2 à $x(t) = sin(\omega t)$ est :

$$y(t) = G(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

avec : $G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

$$K = 1 \quad , \quad z = 0.3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

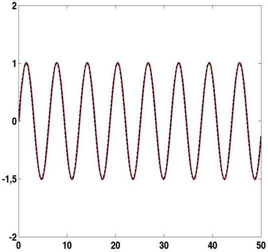
autrement dit :

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.06p + 1}$$

Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pour $\omega = 1$ rad/s

  - - x(t) et – y(t)



  – gain unitaire

  – pas de déphasage

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

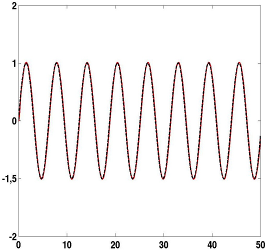
$$K = 1 \quad , \quad z = 0.3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

autrement dit :

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.06p + 1}$$

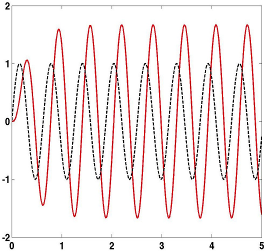
Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pour $\omega = 1$ rad/s
  - - x(t) et – y(t)



– gain unitaire
– pas de déphasage

- pour $\omega = 10$ rad/s
  - - x(t) et – y(t)



– amplification
– déphasage faible

3.3 Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

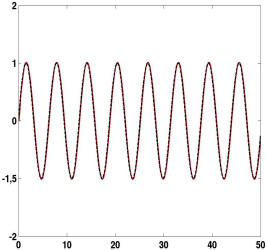
$$K = 1 \quad , \quad z = 0.3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

autrement dit :

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.06p + 1}$$

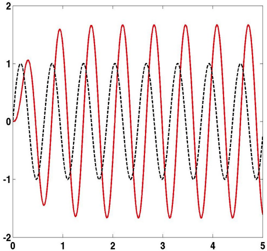
Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pour $\omega = 1$ rad/s
  - - x(t) et – y(t)



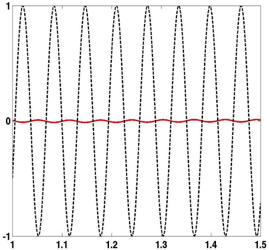
  – gain unitaire
  – pas de déphasage

- pour $\omega = 10$ rad/s
  - - x(t) et – y(t)



  – amplification
  – déphasage faible

- pour $\omega = 100$ rad/s
  - - x(t) et – y(t)



  – atténuation
  – déphasage fort

3.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log(K) - 10log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Tracé asymptotique

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log(K) - 10log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Tracé asymptotique

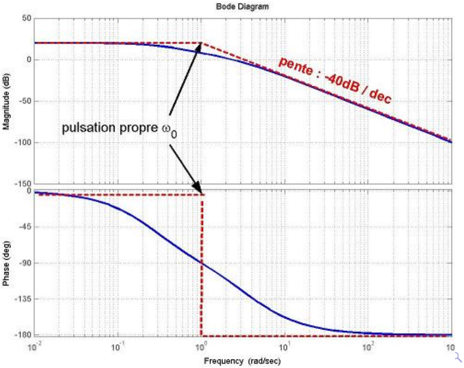


diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log(K) - 10log\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Tracé asymptotique

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

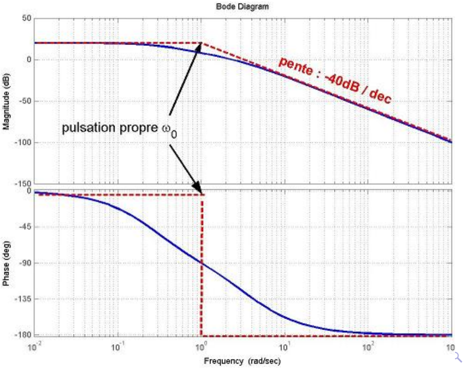


diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log(K) - 10log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

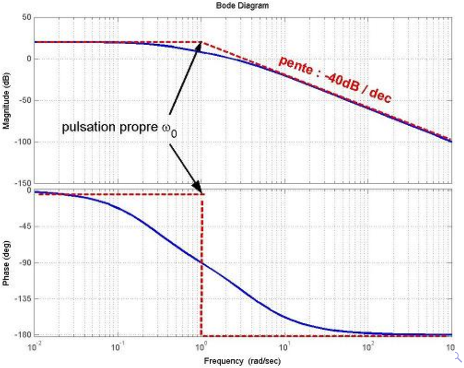
Tracé asymptotique

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K\omega_0^2}{-\omega^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K\omega_0^2) - 40log(\omega) \\ \phi(\omega) \approx -180^o \end{cases}$$



3.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log(K) - 10log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Tracé asymptotique

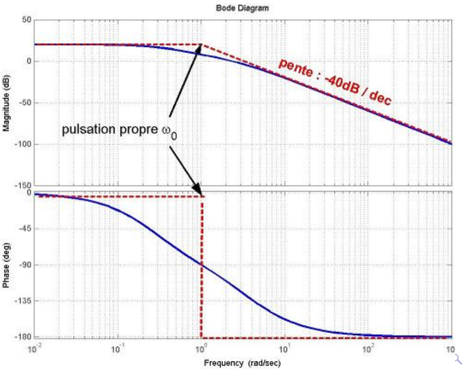
- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K\omega_0^2}{-\omega^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K\omega_0^2) - 40log(\omega) \\ \phi(\omega) \approx -180^o \end{cases}$$

- Intersection en $\omega = \omega_0$



3.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20log(K) - 10log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -Atan\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Tracé asymptotique

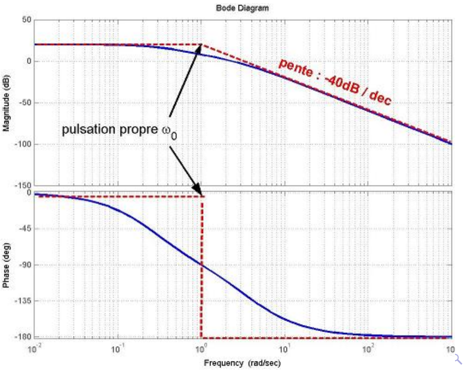
- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^o \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K\omega_0^2}{-\omega^2}$

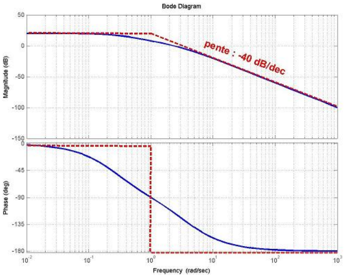
$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20log(K\omega_0^2) - 40log(\omega) \\ \phi(\omega) \approx -180^o \end{cases}$$

- Intersection en $\omega = \omega_0$
- Exemple : $H(p) = 10/(p^2 + 4p + 1)$



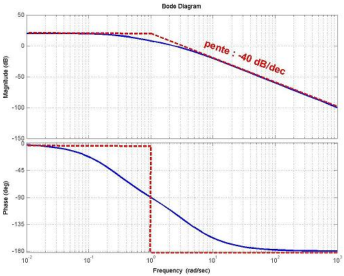
Phénomène de résonance

- **si** $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$
  - $\rightarrow$ le gain décroît pour tout ω
  - $\rightarrow$ exemple : $z = 2$, $K = 10$ et $\omega_0 = 1$ rad/s



Phénomène de résonance

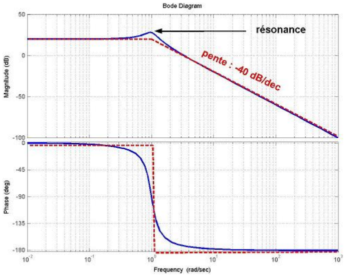
- **si** $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$
  - $\rightarrow$ le gain décroît pour tout ω
  - $\rightarrow$ exemple : $z = 2$, $K = 10$ et $\omega_0 = 1$ rad/s



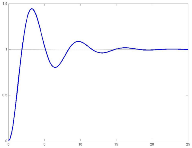
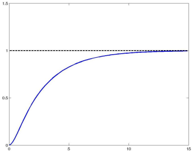
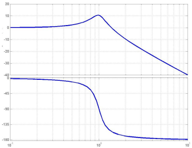
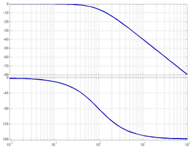
- **si** $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$
  - $\rightarrow$ le gain présente un maximum ou **résonance**
  - $\rightarrow$ le maximum est atteint en ω_r, la **pulsation de résonance**

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2}}$$

  - $\rightarrow$ exemple : $z = 0.2$, $K = 10$ et $\omega_0 = 1$ rad/s



3.4 Pour résumer ...

<table>
<tr><td>z</td><td>$z < 1/\sqrt{2}$</td><td>$1/\sqrt{2} < z < 1$</td><td>$z > 1$</td></tr>
<tr><td>temporel</td><td colspan="2">oscillant
</td><td>amorti
</td></tr>
<tr><td>fréquentiel</td><td>résonance
</td><td colspan="2">gain monotone décroissant
</td></tr>
</table>

4.1 Systèmes d'ordre supérieur à 2

On considère un système décrit par : $Y(p) = H(p)X(p)$ où :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}$$

ou :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

On considère un système décrit par : $Y(p) = H(p)X(p)$ où :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}$$

ou :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

Détermination de la réponse temporelle

- $\rightarrow$ résolution de l'équation différentielle
- $\rightarrow$ convolution : $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$
- $\rightarrow$ par transformée de Laplace et décomposition en éléments simples

4.1 Systèmes d'ordre supérieur à 2

On considère un système décrit par : $Y(p) = H(p)X(p)$ où :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}$$

ou :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

Détermination de la réponse temporelle

$\rightarrow$ résolution de l'équation différentielle

$\rightarrow$ convolution : $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$

$\rightarrow$ par transformée de Laplace et décomposition en éléments simples

Détermination du comportement fréquentiel

$\rightarrow$ tracé du diagramme de Bode

4.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk} p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk} p + 1)}$$

4.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = \mathbf{K_0} p^{\alpha} \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk} p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk} p + 1)}$$

Le terme K_0

- gain <u>constant</u> $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 log(K_0)$
- phase <u>constante</u> $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

4.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = K_0 \mathbf{p}^{\alpha} \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk} p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk} p + 1)}$$

Le terme K_0

- gain constant $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 log(K_0)$
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

Le terme p^{α}

- gain de pente constante $\rightarrow \frac{dG_{dB}(\omega)}{d\omega} = 20\alpha$ dB/dec
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 90\alpha^o$

4.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk} p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (\mathbf{T_{pk} p + 1})}$$

Le terme K_0

- gain <u>constant</u> $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 log(K_0)$
- phase <u>constante</u> $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

Le terme p^α

- gain de <u>pente constante</u> $\rightarrow \frac{dG_{dB}(\omega)}{d\omega} = 20\alpha$ dB/dec
- phase <u>constante</u> $\rightarrow \varphi(\omega) = 90\alpha^o$

Chaque terme $\frac{1}{T_{pk}p+1}$ provoque, en $\omega = 1/T_{pk}$:

- gain : une variation de la <u>pente</u> de -20 dB/dec
- phase : une variation de la <u>valeur</u> de -90^o

4.3 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (\mathbf{T_{zk} p + 1})}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk} p + 1)}$$

Le terme K_0

- gain <u>constant</u> $\longrightarrow G_{dB}(\omega) = 20 log(K_0)$
- phase <u>constante</u> $\longrightarrow \varphi(\omega) = 0$

Le terme p^α

- gain de <u>pente constante</u> $\longrightarrow \frac{dG_{dB}(\omega)}{d\omega} = 20\alpha$ dB/dec
- phase <u>constante</u> $\longrightarrow \varphi(\omega) = 90\alpha^o$

Chaque terme $\frac{1}{T_{pk} p + 1}$ provoque, en $\omega = 1/T_{pk}$:

- gain : une variation de la <u>pente</u> de -20 dB/dec
- phase : une variation de la <u>valeur</u> de -90^o

Chaque terme $T_{zk} p + 1$ provoque, en $\omega = 1/T_{zk}$:

- gain : une variation de la <u>pente</u> de $+20$ dB/dec
- phase : une variation de la <u>valeur</u> de $+90^o$

4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

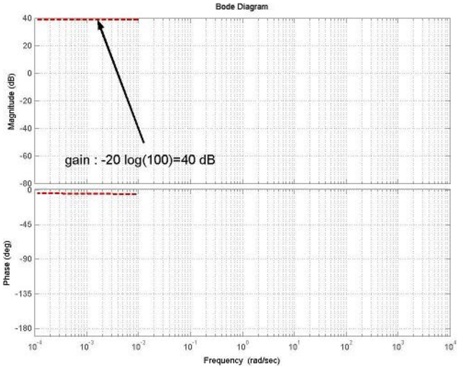
$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$

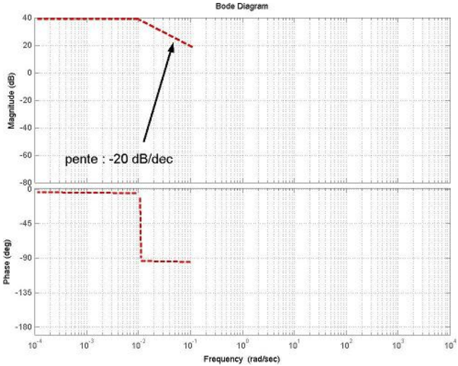


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.01$

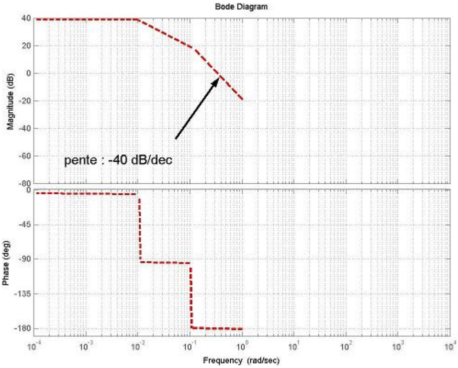


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.01$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.1$

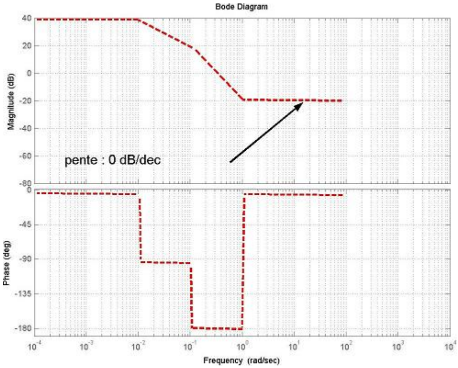


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.01$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.1$
- double rupture $\nearrow$ en $\omega = 1$

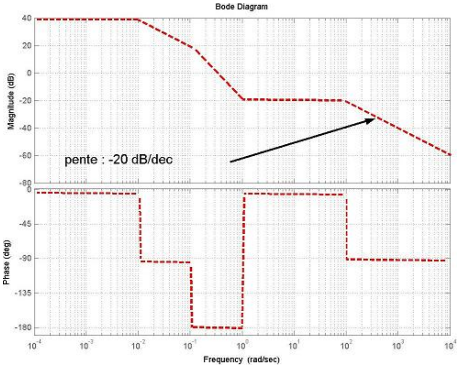


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.01$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.1$
- double rupture $\nearrow$ en $\omega = 1$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 100$

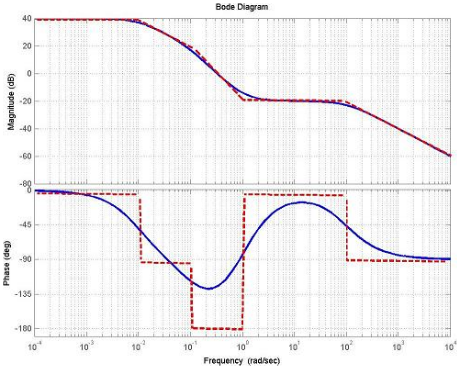


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.01$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 0.1$
- double rupture $\nearrow$ en $\omega = 1$
- rupture $\searrow$ en $\omega = 100$



4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

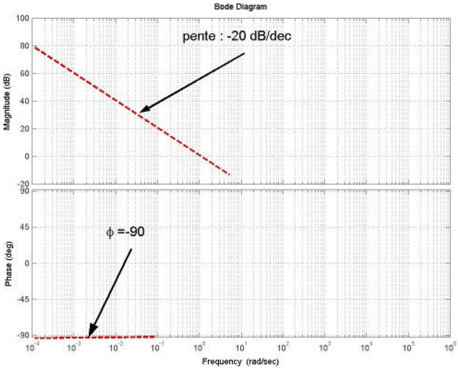
$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p+1)(0.1p+1)}{p(0.001p+1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$

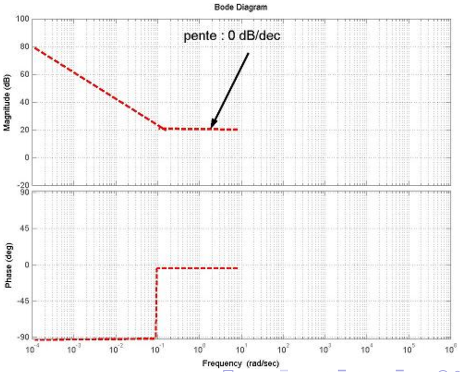


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p+1)(0.1p+1)}{p(0.001p+1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 0.1$

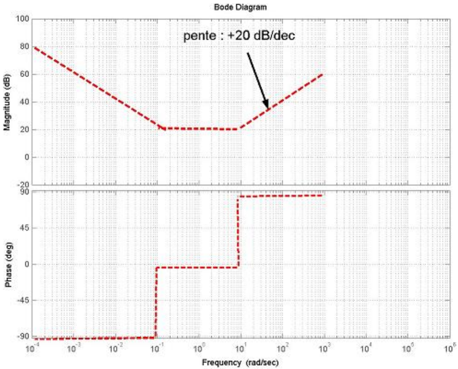


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p+1)(0.1p+1)}{p(0.001p+1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 0.1$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 10$

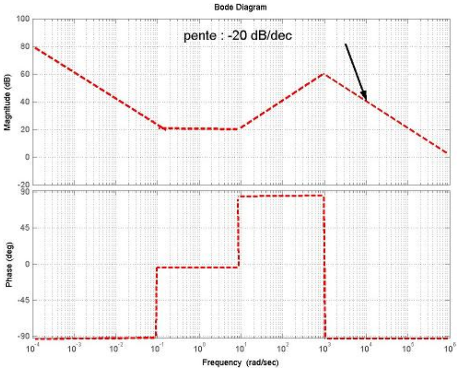


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p+1)(0.1p+1)}{p(0.001p+1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 0.1$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 10$
- double rupture $\searrow$ en $\omega = 1000$

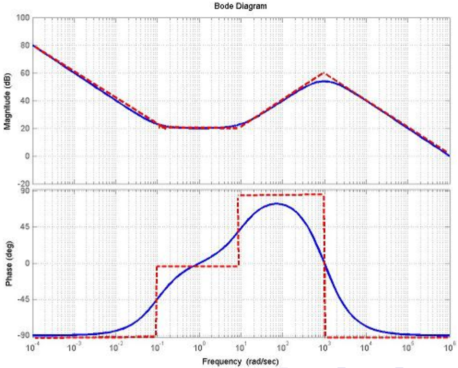


4.3 Exemple de diagramme de Bode d'un système d'ordre supérieur à 2

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p+1)(0.1p+1)}{p(0.001p+1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 0.1$
- rupture $\nearrow$ en $\omega = 10$
- double rupture $\searrow$ en $\omega = 1000$



5.1 Introduction

- **Analyse :** étant donné la fonction de transfert, quel est le comportement ?

5.1 Introduction

- **Analyse :** étant donné la fonction de transfert, quel est le comportement ?
- **Filtrage :** étant donné un comportement souhaité, quelle est la fonction de transfert ?

5.1 Introduction

- **Analyse :** étant donné la fonction de transfert, quel est le comportement ?
- **Filtrage :** étant donné un comportement souhaité, quelle est la fonction de transfert ?

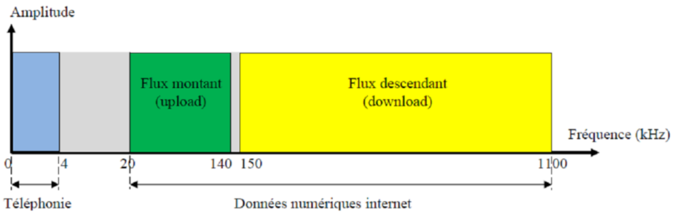
- **Principe :** trouver un filtre $H_f(p)$, qui transmet l'information pour un intervalle de fréquences et coupe le reste :

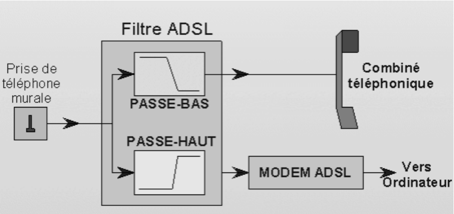
$$G_f(\omega) = |H_f(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \in [\omega_{min}\ \omega_{max}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_f(\omega) = Arg\left(H_f(j\omega)\right) = 0$$

$\rightarrow$ pour un passe-bas prendre $H_f(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_c}+1\right)^n}$

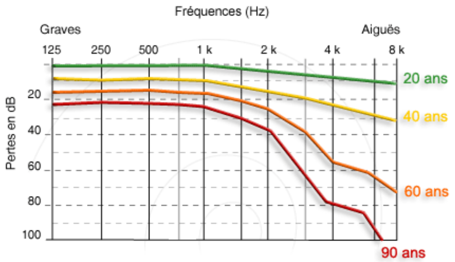
5.1 Quelques exemples : une *****box

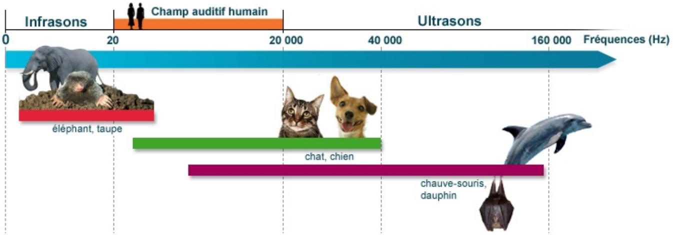




source : olivier.granier.free.fr

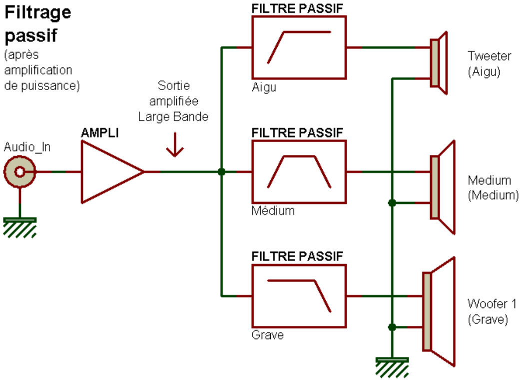
5.1 Quelques exemples : une oreille





sources : www.fkmed.com et www.cochlea.org

5.1 Quelques exemples : une enceinte



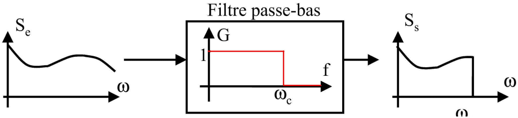
source : www.zpag.net

5.2 Filtres parfaits

Objectif : laisser passer une partie du contenu fréqentiel du signal d'entrée

Objectif : laisser passer une partie du contenu fréqentiel du signal d'entrée

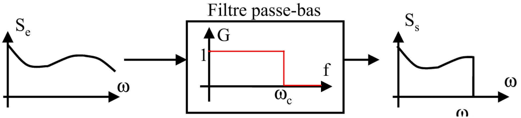
- **Passe-bas idéal :**
  - transmet l'information ($G(\omega) \approx 1$) pour $\omega < \omega_c$
  - coupe l'information ($G(\omega) \approx 0$) pour $\omega > \omega_c$



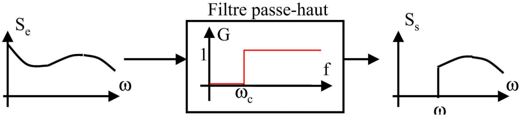
5.2 Filtres parfaits

Objectif : laisser passer une partie du contenu fréqentiel du signal d'entrée

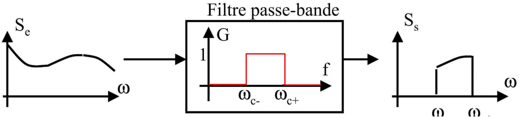
- **Passe-bas idéal :**
  - transmet l'information ($G(\omega) \approx 1$) pour $\omega < \omega_c$
  - coupe l'information ($G(\omega) \approx 0$) pour $\omega > \omega_c$



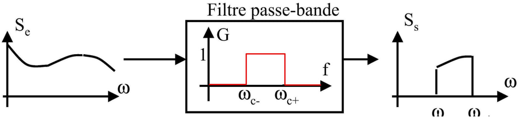
- **Passe-haut idéal :**
  - transmet l'information ($G(\omega) \approx 1$) pour $\omega > \omega_c$
  - coupe l'information ($G(\omega) \approx 0$) pour $\omega < \omega_c$



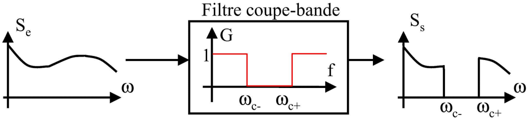
- **Passe-bande idéal :**
  - transmet l'information ($G(\omega) \approx 1$) pour $\omega_{c-} < \omega < \omega_{c+}$
  - coupe l'information ($G(\omega) \approx 0$) sinon



- **Passe-bande idéal :**
  - transmet l'information ($G(\omega) \approx 1$) pour $\omega_{c-} < \omega < \omega_{c+}$
  - coupe l'information ($G(\omega) \approx 0$) sinon



- **Coupe-bande idéal :**
  - coupe l'information ($G(\omega) \approx 0$) pour $\omega_{c-} < \omega < \omega_{c+}$
  - transmet l'information ($G(\omega) \approx 1$) sinon



5.3 Filtres réels

- **Un filtre idéal est non causal :**
  impossible de réaliser un gain discontinu, et de dérivées discontinues
  $\rightarrow$ par exemple : $\mathcal{L}^{-1}\left(H_{P-Bas}(p)\right) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$

- **Un filtre idéal est non causal :**
  impossible de réaliser un gain discontinu, et de dérivées discontinues
  $\rightarrow$ par exemple : $\mathcal{L}^{-1}\left(H_{P-Bas}(p)\right) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$

Phénomène de Gibbs

Un filtre idéal n'est pas réalisable

5.3 Filtres réels

- **Un filtre idéal est non causal :**
  impossible de réaliser un gain discontinu, et de dérivées discontinues
  $\rightarrow$ par exemple : $\mathcal{L}^{-1}\left(H_{P-Bas}(p)\right) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$

Phénomène de Gibbs

Un filtre idéal n'est pas réalisable

- on approche un filtre idéal par un filtre **réalisable** dont ...
  - le gain en bande passante n'est pas unitaire
  - le gain en bande coupée n'est pas nul
  - la transition entre bandes coupée et passante n'est pas discontinue
  - le déphasage n'est pas nul

- **Un filtre idéal est non causal :**
  impossible de réaliser un gain discontinu, et de dérivées discontinues
  $\rightarrow$ par exemple : $\mathcal{L}^{-1}\left(H_{P-Bas}(p)\right) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$

Phénomène de Gibbs

Un filtre idéal n'est pas réalisable

- on approche un filtre idéal par un filtre **réalisable** dont ...
  - le gain en bande passante n'est pas unitaire
  - le gain en bande coupée n'est pas nul
  - la transition entre bandes coupée et passante n'est pas discontinue
  - le déphasage n'est pas nul

$\rightarrow$ On définit alors des **gabarits**

5.3 Gabarits fréquentiels

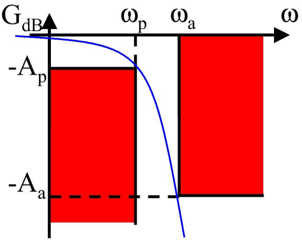
- **On définit des gabarits par :**
  - une amplification minimale en bande passante $-A_p$ en dB (avec $A_p > 0$)
  - une amplification maximale en bande coupée $-A_a$ en dB (avec $A_a > 0$)
  - un (ou deux) intervalle de ω dans lequel s'effectue la transition

5.3 Gabarits fréquentiels

- **On définit des gabarits par :**
  - une amplification minimale en bande passante $-A_p$ en dB (avec $A_p > 0$)
  - une amplification maximale en bande coupée $-A_a$ en dB (avec $A_a > 0$)
  - un (ou deux) intervalle de ω dans lequel s'effectue la transition

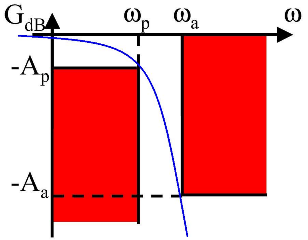
- Le but est alors de synthétiser un filtre ...
  - stable (réponse bornée à une entrée bornée)
  - causal (réalisable)
  - dont la fonction de transfert *rentre* dans le gabarit

- **Gabarit d'un passe-bas**
  - Bande passante : $\omega \leq \omega_p$
    $G_{dB}(\omega) \geq -A_p$
  - Bande atténuée : $\omega_a \leq \omega$
    $G_{dB}(\omega) \leq -A_a$

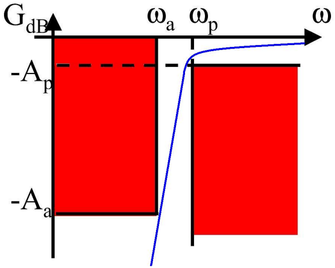


5.3 Gabarits fréquentiels

- **Gabarit d'un passe-bas**
  - Bande passante : $\omega \leq \omega_p$
    $G_{dB}(\omega) \geq -A_p$
  - Bande atténuée : $\omega_a \leq \omega$
    $G_{dB}(\omega) \leq -A_a$

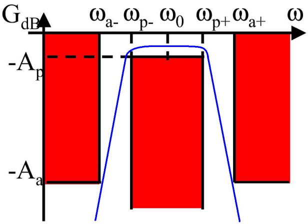


- **Gabarit d'un passe-haut**
  - Bande passante : $\omega_p \leq \omega$
    $G_{dB}(\omega) \geq -A_p$
  - Bande atténuée : $\omega \leq \omega_a$
    $G_{dB}(\omega) \leq -A_a$



- **Gabarit d'un passe-bande**

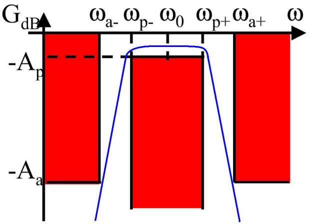
  - Bande passante : $\omega_{p-} \leq \omega \leq \omega_{p+}$
  $$G_{dB}(\omega) \geq -A_p$$
  - Bandes atténuées : $\omega \leq \omega_{a-}$ ou $\omega_{a+} \leq \omega$
  $$G_{dB}(\omega) \leq -A_a$$



5.3 Gabarits fréquentiels

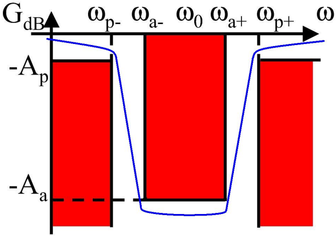
- **Gabarit d'un passe-bande**

  - Bande passante : $\omega_{p-} \leq \omega \leq \omega_{p+}$
  $$G_{dB}(\omega) \geq -A_p$$
  - Bandes atténuées : $\omega \leq \omega_{a-}$ ou $\omega_{a+} \leq \omega$
  $$G_{dB}(\omega) \leq -A_a$$

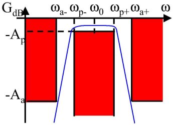


- **gabarit d'un coupe-bande**

  - Bandes passantes : $\omega \leq \omega_{p-}$ ou $\omega_{p+} \leq \omega$
  $$G_{dB}(\omega) \geq -A_p$$
  - Bande atténuée : $\omega_{a-} \leq \omega \leq \omega_{a+}$
  $$G_{dB}(\omega) \leq -A_a$$

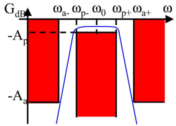


spécifications fréquentielles (gabarit)



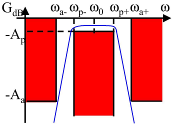
5.3 Résumé de la synthèse de filtres

spécifications fréquentielles (gabarit)



$+$

choix du filtre (Butterworth/Tchebychev/...)



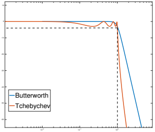
spécifications fréquentielles (gabarit)

$+$

choix du filtre (Butterworth/Tchebychev/...)

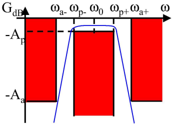
$\Downarrow$

filtre passe-bas NE (calculs de n, ε, polynôme)



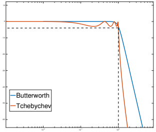
5.3 Résumé de la synthèse de filtres

spécifications fréquentielles (gabarit)



$+$

choix du filtre (Butterworth/Tchebychev/...)



$\Downarrow$

filtre passe-bas NE (calculs de n, ε, polynôme)

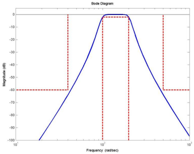
$\Downarrow$

dénormalisation (changement de variable)

FPBNE $\Rightarrow$ **filtre p-bas** ou **p-haut** ou **p-bande** ou **c-bande**

$\Downarrow$

fonction de transfert respectant le gabarit : $H(p)$



5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

Dans un premier temps on cherche un passe-bas

- On suppose que $\omega_p = 1$ (**normalisé**)
  $\rightarrow$ si ce n'est pas le cas : faire $\omega \leftarrow \omega/\omega_p$

5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

Dans un premier temps on cherche un passe-bas

- On suppose que $\omega_p = 1$ (**normalisé**)
  $\rightarrow$ si ce n'est pas le cas : faire $\omega \leftarrow \omega/\omega_p$
- On veut un filtre **stable**
  $\rightarrow$ les pôles doivent être à partie réelle négative

5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

Dans un premier temps on cherche un passe-bas

- On suppose que $\omega_p = 1$ (**normalisé**)
  $\rightarrow$ si ce n'est pas le cas : faire $\omega \leftarrow \omega/\omega_p$
- On veut un filtre **stable**
  $\rightarrow$ les pôles doivent être à partie réelle négative
- On veut un filtre **causal**
  $\rightarrow$ il faut : $deg(numerateur) \leq deg(denonimateur)$

Dans un premier temps on cherche un passe-bas

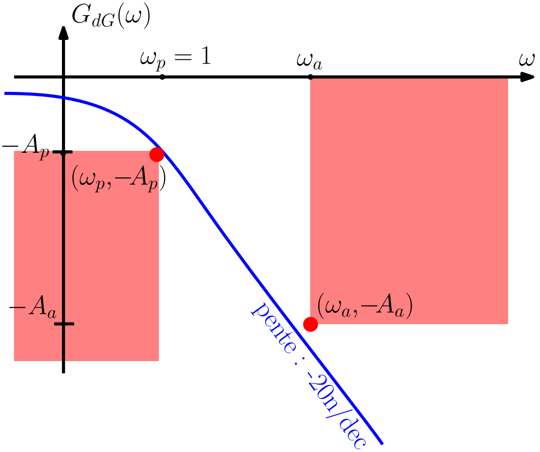
- On suppose que $\omega_p = 1$ (**normalisé**)
  $\rightarrow$ si ce n'est pas le cas : faire $\omega \leftarrow \omega/\omega_p$
- On veut un filtre **stable**
  $\rightarrow$ les pôles doivent être à partie réelle négative
- On veut un filtre **causal**
  $\rightarrow$ il faut : $deg(numerateur) \leq deg(denonimateur)$
- On cherche une F.T. qui respecte le gabarit, de la forme :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 K_n(\omega^2)}$$

avec $K_n(\omega^2)$ un polynôme d'ordre n t.q. :

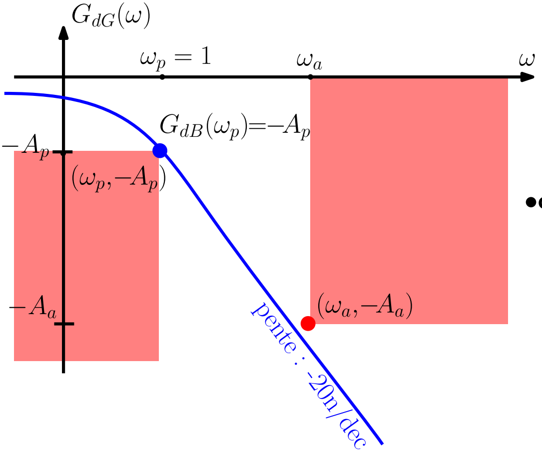
$$\begin{cases} K_n(0) = 0 \\ K_n(1) = 1 \end{cases}$$

Réglage des paramètres ε et n pour le respect du gabarit



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 K_n(\omega^2)}$$

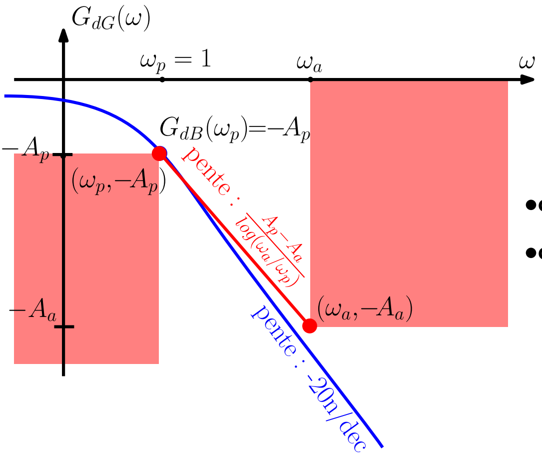
Réglage des paramètres ε et n pour le respect du gabarit



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 K_n(\omega^2)}$$

•**choix de** $\varepsilon \Rightarrow G_{dB}(\omega_p) = -A_p$

Réglage des paramètres ε et n pour le respect du gabarit



$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 K_n(\omega^2)}$$

- **choix de** $\varepsilon \Rightarrow G_{dB}(\omega_p) = -A_p$
- **choix de** $n \Rightarrow$ **pente suffisante**

5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

- **Le facteur de forme** ε permet de respecter le gabarit en B.F.
  En $\omega = \omega_p$, il faut $G_{db}(\omega_p) = -A_p$, donc :

$$20log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 K_n(1)}}\right) = -A_p$$

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

$\rightarrow$ exemple : pour $Ap = 3$ dB on a $\varepsilon \sim 1$

5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

- **Le facteur de forme** ε permet de respecter le gabarit en B.F.
  En $\omega = \omega_p$, il faut $G_{db}(\omega_p) = -A_p$, donc :

$$20log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 K_n(1)}}\right) = -A_p$$

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

  $\rightarrow$ exemple : pour $Ap = 3$ dB on a $\varepsilon \sim 1$

- **L'ordre du filtre** n permet de respecter le gabarit en H.F.

$$-20n \leq \frac{-A_a + A_p}{log(\omega_a) - log(\omega_p)}$$

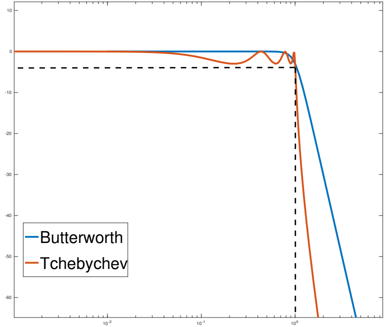
$$\boxed{n \geq \left(\frac{1}{20}\right)\frac{A_a - A_p}{log(\omega_a) - log(\omega_p)}}$$

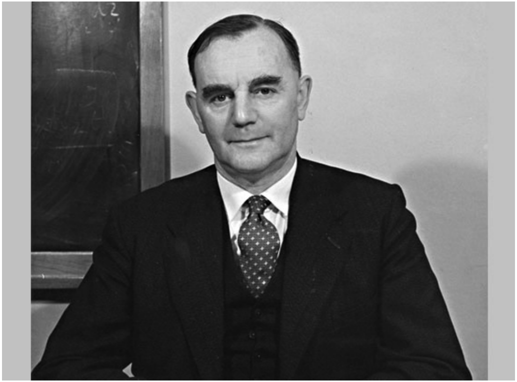
5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

- (ω_p, A_p) fixe ε
- (ω_p, A_p) et (ω_a, A_a) fixent n

5.4 Filtres passe-bas normalisés équivalent (FPBNE)

- (ω_p, A_p) fixe ε
- (ω_p, A_p) et (ω_a, A_a) fixent n
- Reste à déterminer le polynôme $K_n(\omega)$ pour satisfaire le gabarit
  - polynômes de **Butterworth** pour avoir un gain plat en B.F.
  - polynômes de **Tchebychev** pour limiter l'ordre du filtre
  - ...





Stephen ... (1885 - 1958)

- **Principe** :
  - $\rightarrow$ on cherche la F.T. la plus plate en B.F.
  - $\rightarrow$ donc il faut annuler les dérivées de $K_n(\omega^2)$ à l'origine
  - $\rightarrow$ donc : $K_n(\omega^2) = (\omega^2)^n = \omega^{2n}$

Filtres de Butterworth

Les filtres de Butterworth sont définis par :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}}}$$

Les pôles de $H(p)$ sont les racines à parties réelles négatives de :

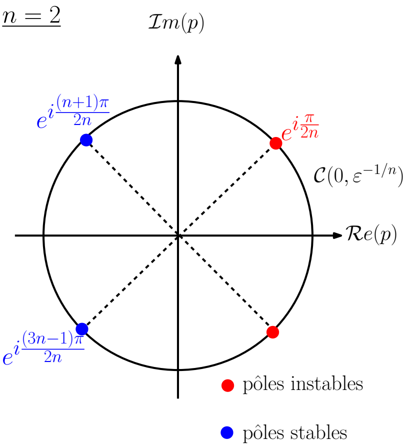
$$1 + (-1)^n \varepsilon^2 p^{2n} = 0$$

Pour un ordre n pair

- Les pôles sont donnés par :

$$z^{2n} = -\varepsilon^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{\pi(1+2k)}{2n}}}$$



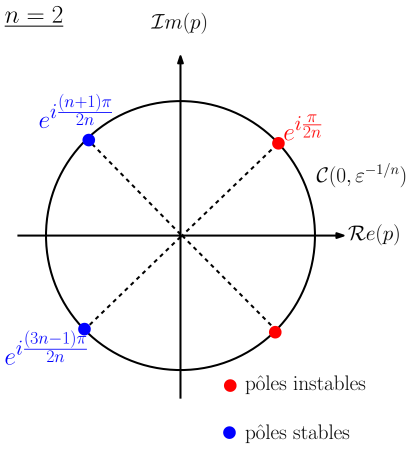
Pour un ordre n pair

- Les pôles sont donnés par :

$$z^{2n} = -\varepsilon^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{\pi(1+2k)}{2n}}}$$

- Stabilité $\rightarrow k = \frac{n}{2}, \dots, \frac{3n-2}{2}$



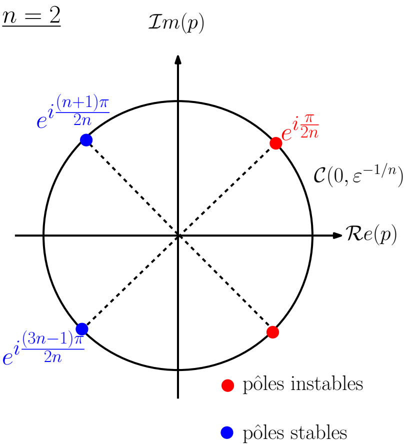
Pour un ordre n pair

- Les pôles sont donnés par :

$$z^{2n} = -\varepsilon^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{\pi(1+2k)}{2n}}}$$

- Stabilité $\rightarrow k = \frac{n}{2}, \ldots, \frac{3n-2}{2}$
- Exemple : pour $n = 2$ et $\varepsilon = 1$
  - $\rightarrow z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $\rightarrow z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $\rightarrow H(p) = \frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$

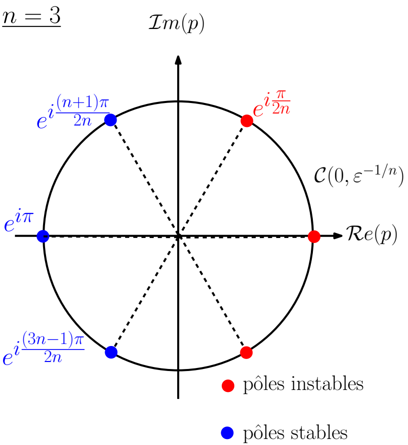


Pour un ordre *n* impair

- Les pôles sont donnés par :

$$z^{2n} = \varepsilon^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}}$$



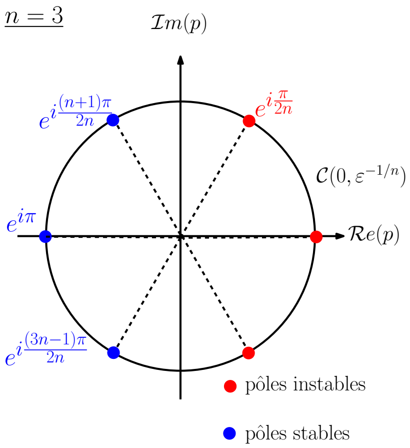
Pour un ordre n impair

- Les pôles sont donnés par :

$$z^{2n} = \varepsilon^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}}$$

- Stabilité $\rightarrow k = \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{3n-1}{2}$



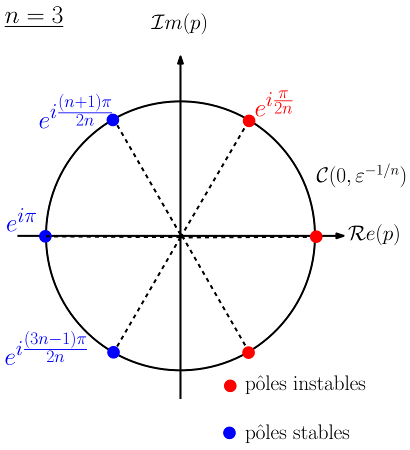
Pour un ordre n impair

- Les pôles sont donnés par :

$$z^{2n} = \varepsilon^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = \varepsilon^{-1/n} e^{i\frac{k\pi}{n}}}$$

- Stabilité $\rightarrow k = \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{3n-1}{2}$
- Exemple : pour $n = 3$ et $\varepsilon = 1$
  - $\rightarrow z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $\rightarrow z_2 = e^{i\pi} = -1$
  - $\rightarrow z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $\rightarrow H(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}$



Algorithme de synthèse d'un filtre de Butterworth

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donnent le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

Algorithme de synthèse d'un filtre de Butterworth

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donnent le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** A_p, A_a, ω_p et ω_a donnent l'ordre du filtre :

$$\boxed{n \geq \left(\frac{1}{20}\right) \frac{A_a - A_p}{log(\omega_a) - log(\omega_p)}}$$

Algorithme de synthèse d'un filtre de Butterworth

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donnent le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** A_p, A_a, ω_p et ω_a donnent l'ordre du filtre :

$$\boxed{n \geq \left(\frac{1}{20}\right) \frac{A_a - A_p}{log(\omega_a) - log(\omega_p)}}$$

- **étape 3.** ε et n déterminent les pôles z_k du polynôme de Butterworth

Algorithme de synthèse d'un filtre de Butterworth

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donnent le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** A_p, A_a, ω_p et ω_a donnent l'ordre du filtre :

$$\boxed{n \geq \left(\frac{1}{20}\right) \frac{A_a - A_p}{log(\omega_a) - log(\omega_p)}}$$

- **étape 3.** ε et n déterminent les pôles z_k du polynôme de Butterworth
- **étape 4.** en sélectionnant les n racines à partie réelle négative z_k on a la F.T. du filtre :

$$\boxed{H(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 - \frac{p}{z_k})}}$$

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s, $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_p = -1$ dB et $-A_a = -90$ dB

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications : $\omega_p = 1$ rad/s, $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_p = -1$ dB et $-A_a = -90$ dB
- le facteur de forme est :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.51$$

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications : $\omega_p = 1$ rad/s, $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_p = -1$ dB et $-A_a = -90$ dB

- le facteur de forme est :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.51$$

- l'ordre du filtre est :

$$n \geq \frac{90 - 1}{20(log(10) - log(1))} = 4.45$$

donc $n = 5$

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s, $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_p = -1$ dB et $-A_a = -90$ dB

- le facteur de forme est :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.51$$

- l'ordre du filtre est :

$$n \geq \frac{90 - 1}{20(log(10) - log(1))} = 4.45$$

  donc $n = 5$

- le filtre est donc donné par :

$$H(p) = \frac{1}{0.5088p^5 + 1.885p^4 + 3.491p^3 + 3.996p^2 + 2.827p + 1}$$

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s, $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_p = -1$ dB et $-A_a = -90$ dB

- le facteur de forme est :

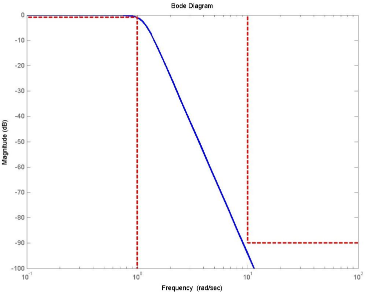
$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.51$$

- l'ordre du filtre est :

$$n \geq \frac{90 - 1}{20(log(10) - log(1))} = 4.45$$

  donc $n = 5$

- le filtre est donc donné par :



$$H(p) = \frac{1}{0.5088p^5 + 1.885p^4 + 3.491p^3 + 3.996p^2 + 2.827p + 1}$$

Pafnuty ... (1821 - 1894)

5.4 Polynômes approximateurs et filtres de Tchebychev

- Principe :

  $\longrightarrow$ répartir l'erreur d'approximation en bande passante

  $\longrightarrow$ obtenir une pente plus raide en début de bande coupée

- Principe :
  - $\rightarrow$ répartir l'erreur d'approximation en bande passante
  - $\rightarrow$ obtenir une pente plus raide en début de bande coupée

Filtres de Tchebychev

Les filtres de Tchebychev sont définis par :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)}}$$

Les pôles de $H(p)$ sont les n racines à partie réelle négative de $T_n^2(\omega)$, où :

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n\ arccos(\omega)), & \text{pour } \omega \leq 1 \\ \cosh(n\ arccosh(\omega)), & \text{pour } \omega \geq 1 \end{cases}$$

ou par récurrence :

$$T_0(\omega) = 1$$
$$T_1(\omega) = \omega$$
$$T_n(\omega) = 2\omega T_{n-1}(\omega) - T_{n-2}(\omega)$$

5.4 Polynômes approximateurs et filtres de Tchebychev

- Principe :
  - $\rightarrow$ répartir l'erreur d'approximation en bande passante
  - $\rightarrow$ obtenir une pente plus raide en début de bande coupée

Filtres de Tchebychev

Les filtres de Tchebychev sont définis par :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)}}$$

Les pôles de $H(p)$ sont les n racines à partie réelle négative de $T_n^2(\omega)$, où :

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n\ arccos(\omega)), & \text{pour } \omega \leq 1 \\ \cosh(n\ arccosh(\omega)), & \text{pour } \omega \geq 1 \end{cases}$$

ou par récurrence :

$$T_0(\omega) = 1$$
$$T_1(\omega) = \omega$$
$$T_n(\omega) = 2\omega T_{n-1}(\omega) - T_{n-2}(\omega)$$

$\rightarrow$ en pratique, une fois n et ε déterminés, on utilise un logiciel (Matlab, Scilab, Octave, ...) pour déterminer $H(p)$

Algorithme de synthèse d'un filtre de Tchebychev

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donne le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

Algorithme de synthèse d'un filtre de Tchebychev

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donne le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** A_p, A_a, ω_p et ω_a donnent l'ordre du filtre n par :

$$\boxed{cosh^2(n.arccosh(\omega_a)) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}}$$

5.4 Filtres de Tchebychev

Algorithme de synthèse d'un filtre de Tchebychev

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donne le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** A_p, A_a, ω_p et ω_a donnent l'ordre du filtre n par :

$$\boxed{cosh^2(n.arccosh(\omega_a)) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}}$$

- **étape 3.** ε et n déterminent les pôles z_k du polynôme de Tchebychev

Algorithme de synthèse d'un filtre de Tchebychev

- **étape 1.** $\omega_p = 1$ et A_p donne le facteur de forme :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** A_p, A_a, ω_p et ω_a donnent l'ordre du filtre n par :

$$\boxed{cosh^2(n.arccosh(\omega_a)) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}}$$

- **étape 3.** ε et n déterminent les pôles z_k du polynôme de Tchebychev
- **étape 4.** en sélectionnant les n racines à partie réelle négative z_k on a la F.T. du filtre :

$$\boxed{H(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 - \frac{p}{z_k})}}$$

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s
  $\omega_a = 1.5$ rad/s
  $-A_p = -2$ dB
  $-A_a = -100$ dB.

5.4 Exemple de synthèse

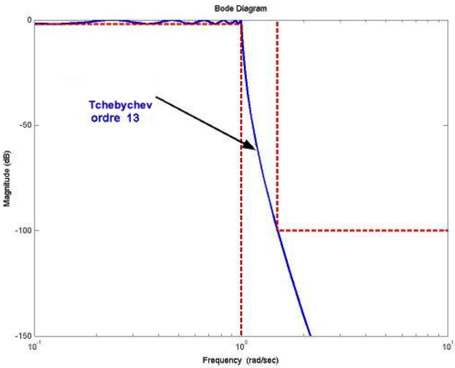
- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s
  $\omega_a = 1.5$ rad/s
  $-A_p = -2$ dB
  $-A_a = -100$ dB.
- le facteur de forme est :
  $\varepsilon = 0.76$

5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s
  $\omega_a = 1.5$ rad/s
  $-A_p = -2$ dB
  $-A_a = -100$ dB.
- le facteur de forme est :
  $\varepsilon = 0.76$
- l'ordre du filtre est $n = 13$

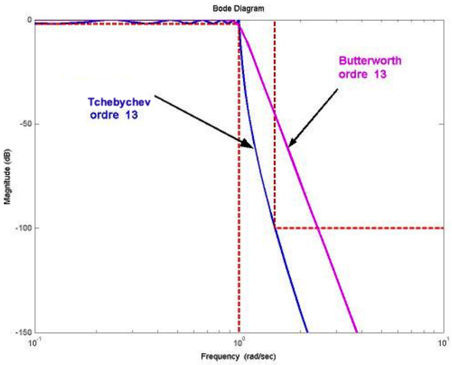
5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s
  $\omega_a = 1.5$ rad/s
  $-A_p = -2$ dB
  $-A_a = -100$ dB.
- le facteur de forme est :
  $\varepsilon = 0.76$
- l'ordre du filtre est $n = 13$
- la fonction de transfert est représentée en bleu



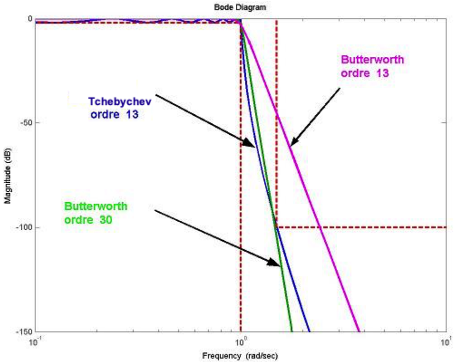
5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s
  $\omega_a = 1.5$ rad/s
  $-A_p = -2$ dB
  $-A_a = -100$ dB.
- le facteur de forme est :
  $\varepsilon = 0.76$
- l'ordre du filtre est $n = 13$
- la fonction de transfert est représentée en bleu
- pour comparaison, le filre de Butterworth d'ordre 13 en violet



5.4 Exemple de synthèse

- On veut construire un filtre respectant les spécifications :
  $\omega_p = 1$ rad/s
  $\omega_a = 1.5$ rad/s
  $-A_p = -2$ dB
  $-A_a = -100$ dB.
- le facteur de forme est : $\varepsilon = 0.76$
- l'ordre du filtre est $n = 13$
- la fonction de transfert est représentée en bleu
- pour comparaison, le filre de Butterworth d'ordre 13 en violet
- pour comparaison, le filre de Butterworth d'ordre 30 en vert



- **étape 1.** Déterminer le facteur de forme ε du FPBNE :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

5.5 Synthèses de filtres par transposition de fréquence

- **étape 1.** Déterminer le facteur de forme ε du FPBNE :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** Déterminer l'ordre n du filtre PBNE :

Butterworth	Tchebychev
$n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)}$	$cosh^2\left(n arccosh\left(\frac{1}{k}\right)\right) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}$

où la sélectivité k est donnée par :

filtre	P-bas	P-haut	P-bande	Coupe-bande
sélectivité k	$\frac{\omega_p}{\omega_a}$	$\frac{\omega_a}{\omega_p}$	$\frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}}$	$\frac{\omega_{a+} - \omega_{a-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}$

- **étape 1.** Déterminer le facteur de forme ε du FPBNE :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** Déterminer l'ordre n du filtre PBNE :

Butterworth	Tchebychev
$n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)}$	$cosh^2\left(narccosh\left(\frac{1}{k}\right)\right) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}$

où la sélectivité k est donnée par :

filtre	P-bas	P-haut	P-bande	Coupe-bande
sélectivité k	$\frac{\omega_p}{\omega_a}$	$\frac{\omega_a}{\omega_p}$	$\frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}}$	$\frac{\omega_{a+} - \omega_{a-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}$

- **étape 3.** Déterminer le filtre PBNE $H_n(p_n)$.

- **étape 1.** Déterminer le facteur de forme ε du FPBNE :

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}}$$

- **étape 2.** Déterminer l'ordre n du filtre PBNE :

Butterworth	Tchebychev
$n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)}$	$cosh^2\left(n arccosh\left(\frac{1}{k}\right)\right) \geq \frac{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}{\varepsilon^2}$

où la sélectivité k est donnée par :

filtre	P-bas	P-haut	P-bande	Coupe-bande
sélectivité k	$\frac{\omega_p}{\omega_a}$	$\frac{\omega_a}{\omega_p}$	$\frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}}$	$\frac{\omega_{a+} - \omega_{a-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}$

- **étape 3.** Déterminer le filtre PBNE $H_n(p_n)$.
- **étape 4.** Dénormaliser le PBNE avec $H(p) = H_n(p_n)$

filtre	P-bas	P-haut	P-bande	Coupe-bande
p_n	$\frac{p}{\omega_p}$	$\frac{\omega_p}{p}$	$\frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}\left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right)$	$\frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right)^{-1}$

où la pulsation centrale est définie par : $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p+}\omega_{p-}} = \sqrt{\omega_{a+}\omega_{a-}}$

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :
$\omega_p = 10$ rad/s, $\omega_a = 100$ rad/s, $-A_p = -3$ dB et $-A_a = -100$ dB

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bas

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_p = 10$ rad/s, $\omega_a = 100$ rad/s, $-A_p = -3$ dB et $-A_a = -100$ dB

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bas

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_p = 10$ rad/s, $\omega_a = 100$ rad/s, $-A_p = -3$ dB et $-A_a = -100$ dB

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)} = 4.85$

  $\rightarrow$ donc $n = 5$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bas

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_p = 10$ rad/s, $\omega_a = 100$ rad/s, $-A_p = -3$ dB et $-A_a = -100$ dB

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)} = 4.85$
  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n{}^5 + 3.236 p_n{}^4 + 5.236 p_n{}^3 + 5.236 p_n{}^2 + 3.236 p_n + 1}$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bas

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_p = 10$ rad/s, $\omega_a = 100$ rad/s, $-A_p = -3$ dB et $-A_a = -100$ dB

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20log\left(\frac{\omega_a}{\omega_p}\right)} = 4.85$
  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{{p_n}^5 + 3.236{p_n}^4 + 5.236{p_n}^3 + 5.236{p_n}^2 + 3.236p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_p}{\omega_a} = 0.1$
  $\rightarrow$ donc la dénormalisation est : $p_n = \frac{p}{10}$
  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{\frac{p^5}{10^5} + 3.236\frac{p^4}{10^4} + 5.236\frac{p^3}{10^3} + 5.236\frac{p^2}{10^2} + 3.236\frac{p}{10} + 1}$$

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-bas

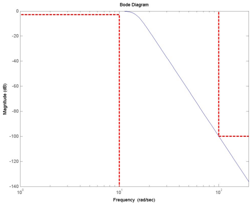
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-bas

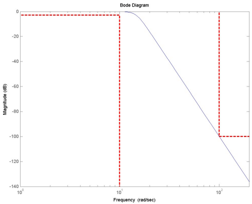
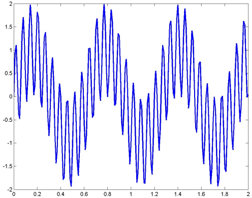
- 

Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 
signal d'entrée : $x(t) = \sin(10t) + \sin(100t)$

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-bas

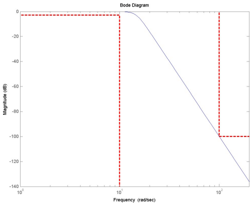
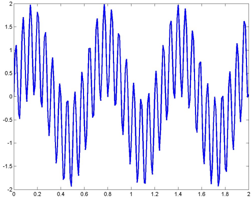
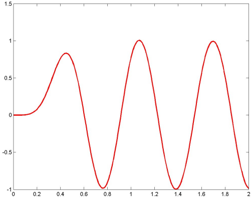
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(10t) + \sin(100t)$

- 

  signal de sortie
  - $\sin(10t)$ est transmise
  - $\sin(100t)$ est atténuée

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :
$\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.9$

  $\rightarrow$ donc $n = 3$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :
$\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.9$
  $\rightarrow$ donc $n = 3$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 3 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648 {p_n}^3 + 1.673 {p_n}^2 + 1.829 p_n + 1}$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.9$

  $\rightarrow$ donc $n = 3$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 3 donne le FPBNE $H_n(p_n)$

  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648 p_n{}^3 + 1.673 p_n{}^2 + 1.829 p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_a}{\omega_p} = 0.1$

  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_p}{p} = \frac{100}{p}$

  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert est :

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.9$
  $\rightarrow$ donc $n = 3$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 3 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648 p_n{}^3 + 1.673 p_n{}^2 + 1.829 p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_a}{\omega_p} = 0.1$
  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_p}{p} = \frac{100}{p}$
  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{0.7648\left(\frac{100}{p}\right)^3 + 1.673\left(\frac{100}{p}\right)^2 + 1.829\left(\frac{100}{p}\right) + 1}$$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications : $\omega_a = 10$ rad/s, $-A_a = -60$ dB, $\omega_p = 100$ rad/s, $-A_p = -2$ dB et

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20log\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.9$
  $\rightarrow$ donc $n = 3$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 3 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648{p_n}^3 + 1.673{p_n}^2 + 1.829p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_a}{\omega_p} = 0.1$
  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_p}{p} = \frac{100}{p}$
  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{p^3}{764783 + 1.6726p + 182.9p^2 + p^3}$$

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-haut

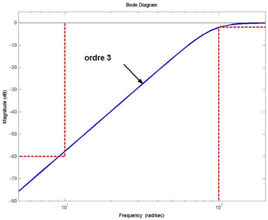
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-haut

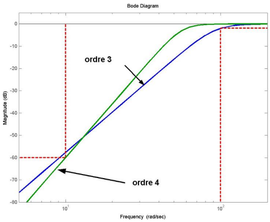
- 

Diagramme de Bode du filtre obtenu

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-haut

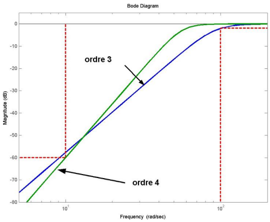
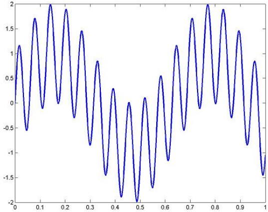
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(10t) + \sin(100t)$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-haut

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-haut

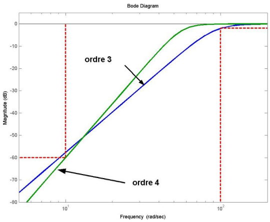
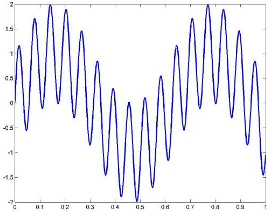
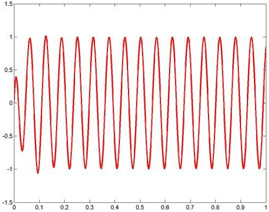
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(10t) + \sin(100t)$

- 

  signal de sortie
  - $\sin(10t)$ est atténuée
  - $\sin(100t)$ est transmise

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain supérieur à $-A_p = -2$ dB entre $\omega_{p-} = 100$ rad/s et $\omega_{p+} = 200$ rad/s
- un gain inférieur à $-A_a = -60$ dB en dessous de $\omega_{a-} = 40$ rad/s et au dessus de $\omega_{a+} = 500$ rad/s

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain supérieur à $-A_p = -2$ dB entre $\omega_{p-} = 100$ rad/s et $\omega_{p+} = 200$ rad/s
- un gain inférieur à $-A_a = -60$ dB en dessous de $\omega_{a-} = 40$ rad/s et au dessus de $\omega_{a+} = 500$ rad/s
- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain supérieur à $-A_p = -2$ dB entre $\omega_{p-} = 100$ rad/s et $\omega_{p+} = 200$ rad/s
- un gain inférieur à $-A_a = -60$ dB en dessous de $\omega_{a-} = 40$ rad/s et au dessus de $\omega_{a+} = 500$ rad/s
- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.34$
  $\rightarrow$ donc $n = 5$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain supérieur à $-A_p = -2$ dB entre $\omega_{p-} = 100$ rad/s et $\omega_{p+} = 200$ rad/s
- un gain inférieur à $-A_a = -60$ dB en dessous de $\omega_{a-} = 40$ rad/s et au dessus de $\omega_{a+} = 500$ rad/s

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.34$
  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648{p_n}^5 + 2.611{p_n}^4 + 4.458{p_n}^3 + 4.703{p_n}^2 + 3.067p_n + 1}$

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain supérieur à $-A_p = -2$ dB entre $\omega_{p-} = 100$ rad/s et $\omega_{p+} = 200$ rad/s
- un gain inférieur à $-A_a = -60$ dB en dessous de $\omega_{a-} = 40$ rad/s et au dessus de $\omega_{a+} = 500$ rad/s

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.34$
  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648 p_n{}^5 + 2.611 p_n{}^4 + 4.458 p_n{}^3 + 4.703 p_n{}^2 + 3.067 p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.21$
  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right)$
  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert $H(p)$ est donnée par :

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain supérieur à $-A_p = -2$ dB entre $\omega_{p-} = 100$ rad/s et $\omega_{p+} = 200$ rad/s
- un gain inférieur à $-A_a = -60$ dB en dessous de $\omega_{a-} = 40$ rad/s et au dessus de $\omega_{a+} = 500$ rad/s

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 0.7648$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.34$
  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$
  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.7648 p_n{}^5 + 2.611 p_n{}^4 + 4.458 p_n{}^3 + 4.703 p_n{}^2 + 3.067 p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.21$
  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0} \right)$
  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert $H(p)$ est donnée par :

$$\frac{p^5}{7.65\ 10^{-11} p^{10} + 2.61\ 10^{-8} p^9 + 1.21\ 10^{-5} p^8 + 0.00256 p^7 + 0.604 p^6 + 82.5 p^5 + 1.21\ 10^4 p^4 + 1.02\ 10^6 p^3 + 9.69\ 10^7 p^2 + 4.18\ 10^9 p + 2.45e011}$$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-bande

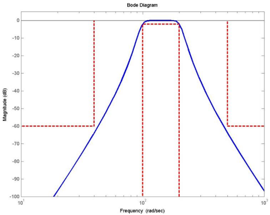
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-bande

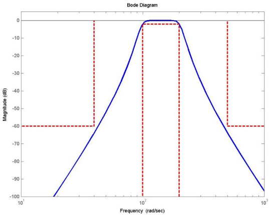
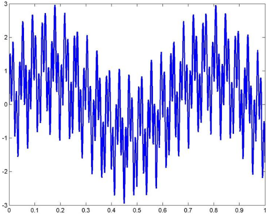
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(10t) + \sin(150t) + \sin(500t)$

5.5 Synthèse d'un filtre passe-bande

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre passe-bande

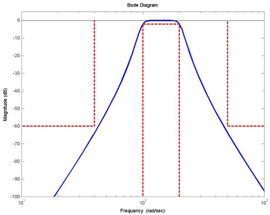
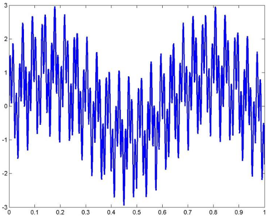
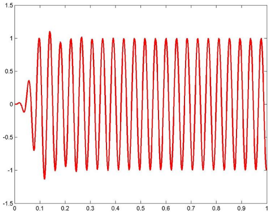
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(10t) + \sin(150t) + \sin(500t)$

- 

  signal de sortie

  - $\sin(10t)$ et $\sin(500t)$ sont atténuées
  - $\sin(150t)$ est transmise

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain inférieur à $-A_a = -75$ dB entre $\omega_{a-} = 5$ rad/s et $\omega_{a+} = 15$ rad/s
- un gain supérieur à $-A_p = -3$ dB en dessous de $\omega_{p-} = 1$ rad/s et au dessus de $\omega_{p+} = 75$ rad/s

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain inférieur à $-A_a = -75$ dB entre $\omega_{a-} = 5$ rad/s et $\omega_{a+} = 15$ rad/s
- un gain supérieur à $-A_p = -3$ dB en dessous de $\omega_{p-} = 1$ rad/s et au dessus de $\omega_{p+} = 75$ rad/s
- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$
  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain inférieur à $-A_a = -75$ dB entre $\omega_{a-} = 5$ rad/s et $\omega_{a+} = 15$ rad/s
- un gain supérieur à $-A_p = -3$ dB en dessous de $\omega_{p-} = 1$ rad/s et au dessus de $\omega_{p+} = 75$ rad/s
- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.14$

  $\rightarrow$ donc $n = 5$

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain inférieur à $-A_a = -75$ dB entre $\omega_{a-} = 5$ rad/s et $\omega_{a+} = 15$ rad/s
- un gain supérieur à $-A_p = -3$ dB en dessous de $\omega_{p-} = 1$ rad/s et au dessus de $\omega_{p+} = 75$ rad/s
- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.14$

  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$

  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.9976{p_n}^5 + 3.23{p_n}^4 + 5.229{p_n}^3 + 5.231{p_n}^2 + 3.235p_n + 1}$

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain inférieur à $-A_a = -75$ dB entre $\omega_{a-} = 5$ rad/s et $\omega_{a+} = 15$ rad/s
- un gain supérieur à $-A_p = -3$ dB en dessous de $\omega_{p-} = 1$ rad/s et au dessus de $\omega_{p+} = 75$ rad/s

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.14$

  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$

  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.9976 p_n{}^5 + 3.23 p_n{}^4 + 5.229 p_n{}^3 + 5.231 p_n{}^2 + 3.235 p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_{a+} - \omega_{a-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} = 0.14$

  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right)^{-1}$

  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert $H(p)$ est donnée par :

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

On veut synthétiser un filtre de Butterworth qui respecte les spécifications :

- un gain inférieur à $-A_a = -75$ dB entre $\omega_{a-} = 5$ rad/s et $\omega_{a+} = 15$ rad/s
- un gain supérieur à $-A_p = -3$ dB en dessous de $\omega_{p-} = 1$ rad/s et au dessus de $\omega_{p+} = 75$ rad/s

- Le facteur de forme est : $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$

  $\rightarrow$ donc $\varepsilon = 1$
- L'ordre doit vérifier : $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 4.14$

  $\rightarrow$ donc $n = 5$
- Le filtre de Butterworth d'ordre 5 donne le FPBNE $H_n(p_n)$

  $\rightarrow$ donc $H_n(p_n) = \frac{1}{0.9976 p_n{}^5 + 3.23 p_n{}^4 + 5.229 p_n{}^3 + 5.231 p_n{}^2 + 3.235 p_n + 1}$
- La sélectivité est $k = \frac{\omega_{a+} - \omega_{a-}}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} = 0.14$

  $\rightarrow$ la dénormalisation est : $p_n = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_0} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right)^{-1}$

  $\rightarrow$ donc la fonction de transfert $H(p)$ est donnée par :

$$\frac{p^{10} + 375 p^8 + 5.63\ 10^4 p^6 + 4.22\ 10^6 p^4 + 1.58\ 10^8 p^2 + 2.37\ 10^9}{p^{10} + 239 p^9 + 2.90\ 10^4 p^8 + 2.19\ 10^6 p^7 + 1.03\ 10^8 p^6 + 2.54\ 10^9 p^5 + 7.75\ 10^9 p^4 + 1.23\ 10^{10} p^3 + 1.22\ 10^{10} p^2 + 7.57\ 10^{10} p + 2.37\ 10^9}$$

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre coupe-bande

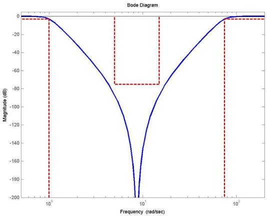
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre coupe-bande

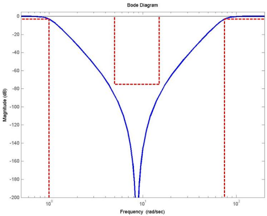
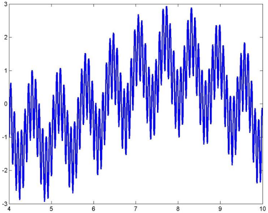
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(1t) + \sin(10t) + \sin(75t)$

5.5 Synthèse d'un filtre coupe-bande

Fonction de transfert et comportement entrée/sortie du filtre coupe-bande

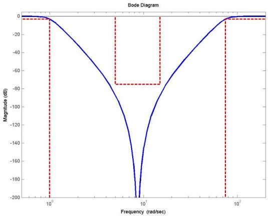
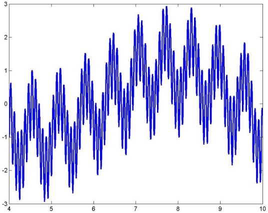
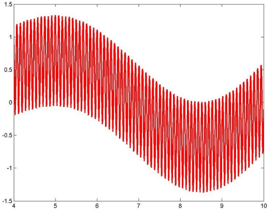
- 

  Diagramme de Bode du filtre obtenu

- 

  signal d'entrée : $x(t) = \sin(1t) + \sin(10t) + \sin(75t)$

- 

  signal de sortie
  - $\sin(1t)$ et $\sin(75t)$ sont transmises
  - $\sin(10t)$ est atténuée

6.1 Introduction

- On a supposé que les signaux sont ...
  - mesurés à tout instant
  - connus analytiquement
  - générés de manière continue

6.1 Introduction

- On a supposé que les signaux sont ...
  - mesurés à tout instant
  - connus analytiquement
  - générés de manière continue

- **mais** concrètement les signaux sont ...
  - mesurés à certains instants (carte d'acquisition, capteurs en réseau, ...)
  - traités numériquement (calculateurs embarqués, PC, ...)
  - générés à certains instants

  $\rightarrow$ on parle de signaux à temps **discret**

6.1 Introduction

- On a supposé que les signaux sont ...
  - mesurés à tout instant
  - connus analytiquement
  - générés de manière continue

- **mais** concrètement les signaux sont ...
  - mesurés à certains instants (carte d'acquisition, capteurs en réseau, ...)
  - traités numériquement (calculateurs embarqués, PC, ...)
  - générés à certains instants

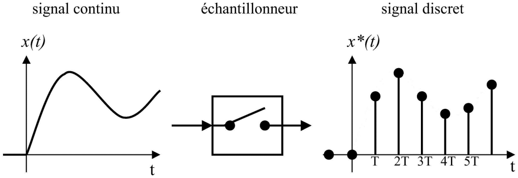
  $\rightarrow$ on parle de signaux à temps **discret**

- Il faut donc généraliser les techniques étudiées au cas discret :

	continu	**discret**
signal	fonction du temps	suite de valeurs
système	équation différentielle	relation de récurrence
outil	transformation de Laplace	...
filtre	fonction de transfert $H(p)$	...

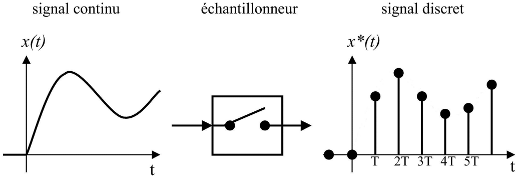
6.2 Signaux à temps discret

Un signal discret est obtenu par échantillonnage :



6.2 Signaux à temps discret

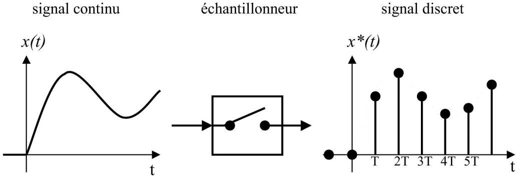
Un signal discret est obtenu par échantillonnage :



Hypothèse

Les mesures du signal $x(t)$ sont **régulièrement** espacées dans le temps. La période séparant deux mesures consécutives est notée T et appelé **période d'échantillonnage** (en s).

Un signal discret est obtenu par échantillonnage :



Hypothèse

Les mesures du signal $x(t)$ sont **régulièrement** espacées dans le temps. La période séparant deux mesures consécutives est notée T et appelé **période d'échantillonnage** (en s).

Signal à temps discret

Le signal $x(t)$, échantillonné à T est défini par la suite :

$$x^*(t) = \{x(0)\ x(T)\ x(2T)\ \ldots\ x(nT)\ \ldots\} = \{x(kT)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

ou par :

$$x^*(t) = x(t)\sum_{k=0}^{+\infty} \delta^*(t-kT)$$

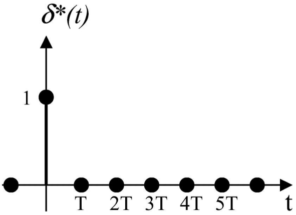
- **Impulsion unitaire**

  Signal défini par :

$$\delta^*(kT) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

  ou la suite :

$$\delta^*(t) = \{\underline{1}\ 0\ 0\ \ldots\}$$



6.2 Quelques exemples de signaux discrets

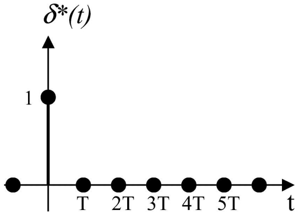
- **Impulsion unitaire**

Signal défini par :

$$\delta^*(kT) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

ou la suite :

$$\delta^*(t) = \{\underline{1}\ 0\ 0\ \ldots\}$$



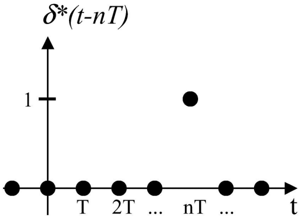
- **Impulsion unitaire retardée**

Signal défini par :

$$\delta^*(kT - nT) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = n \\ 0, & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

ou la suite :

$$\delta^*(t\text{–}nT) = \{\underline{0}\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ldots\}$$



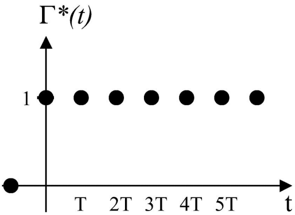
- **Echelon unitaire**

Signal défini par :

$$\Gamma^*(kT) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \geq 0 \\ 0, & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

ou par la suite :

$$\Gamma^*(t) = \{\underline{1}\ 1\ 1\ \ldots\}$$



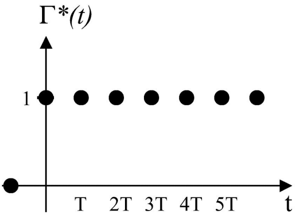
- **Echelon unitaire**

Signal défini par :

$$\Gamma^*(kT) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \geq 0 \\ 0, & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

ou par la suite :

$$\Gamma^*(t) = \{\underline{1}\ 1\ 1\ \ldots\}$$



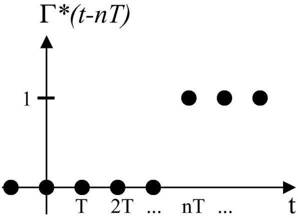
- **Echelon unitaire retardé**

Signal défini par :

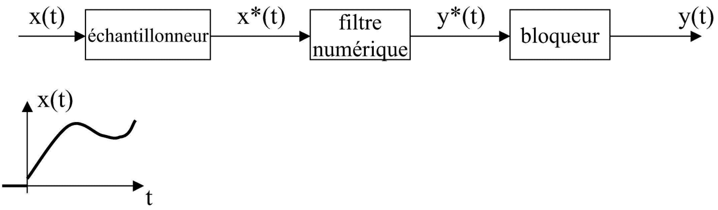
$$\Gamma^*(kT - nT) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \geq n \\ 0, & \text{si } k < n \end{cases}$$

ou par la suite :

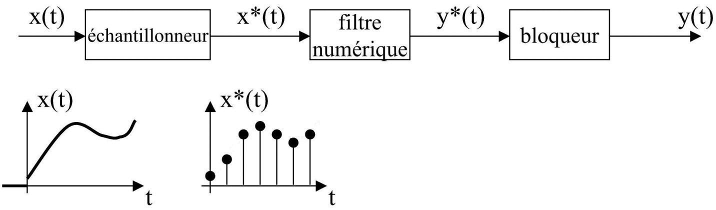
$$\Gamma^*(t-nT) = \{\underline{0}\ \ldots\ 0\ 1\ 1\ \ldots\}$$



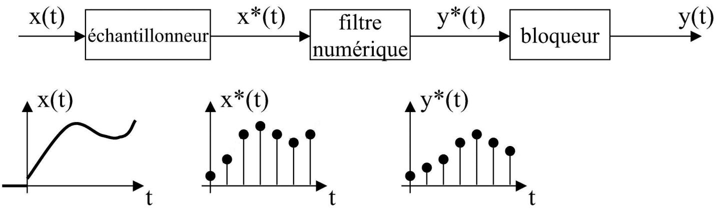
- **Le traitement numérique d'un signal continu comporte 3 étapes :**



- **Le traitement numérique d'un signal continu comporte 3 étapes :**
  - **échantillonnage**
    - transformation continu $\rightarrow$ discret
    - dépend de la période d'échantillonnage choisie

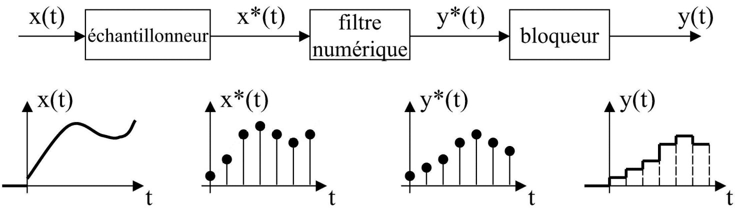


- **Le traitement numérique d'un signal continu comporte 3 étapes :**
  - **échantillonnage**
    - transformation continu $\rightarrow$ discret
    - dépend de la période d'échantillonnage choisie
  - **traitement numérique**
    - relation de récurrence entre suites

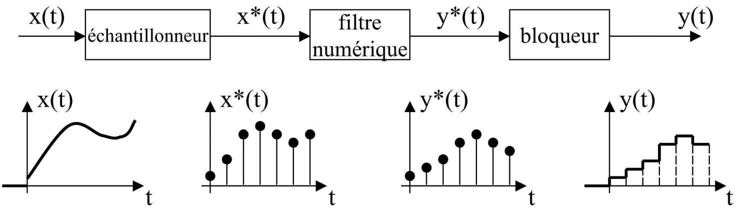


6.2 Traitement numérique de signaux continus

- **Le traitement numérique d'un signal continu comporte 3 étapes :**
  - **échantillonnage**
    - transformation continu $\rightarrow$ discret
    - dépend de la période d'échantillonnage choisie
  - **traitement numérique**
    - relation de récurrence entre suites
  - **reconstruction**
    - transformation discret $\rightarrow$ continu
    - blocage : le signal discret est bloqué à sa valeur pendant une période T

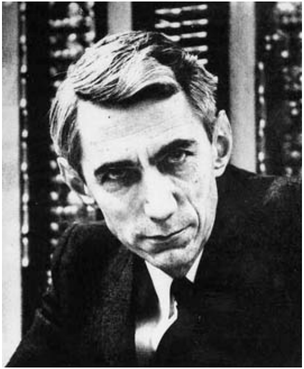


- **Le traitement numérique d'un signal continu comporte 3 étapes :**
  - **échantillonnage**
    - transformation continu → discret
    - dépend de la période d'échantillonnage choisie
  - **traitement numérique**
    - relation de récurrence entre suites
  - **reconstruction**
    - transformation discret → continu
    - blocage : le signal discret est bloqué à sa valeur pendant une période T



- **Problème :** comment ne pas perdre d'information lors du traitement ?

6.2 Théorème de Shannon



Claude ... (1916 - 2001)

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- le signal discret est donné par ($x(t)$**peigne de Dirac*) :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - kT)$$

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- le signal discret est donné par ($x(t)$*_peigne de Dirac_) :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - kT)$$

- on peut développer le _peigne de Dirac_ en série d'exponentielles :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

où : $C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - \ell T) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T}$

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- le signal discret est donné par ($x(t)$*_peigne de Dirac_) :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - kT)$$

- on peut développer le _peigne de Dirac_ en série d'exponentielles :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

où : $C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - \ell T) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T}$

- la transformée de Fourier de $x^*(t)$ est donnée par :

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \right) e^{-j\omega t} dt$$

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- le signal discret est donné par ($x(t)$*peigne de Dirac) :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - kT)$$

- on peut développer le *peigne de Dirac* en série d'exponentielles :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

où : $C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta^*(t - \ell T) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T}$

- la transformée de Fourier de $x^*(t)$ est donnée par :

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \right) e^{-j\omega t} dt$$

- avec $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$, il vient :

$$X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j(\omega_e k - \omega)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(\omega - \omega_e k)$$

6.2 Théorème de Shannon

- On suppose que le spectre du signal continu est à support borné :
$$X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [-\omega_0 \ \omega_0]$$

- On suppose que le spectre du signal continu est à support borné :
$$X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [-\omega_0 \ \omega_0]$$
- La T.F. de $x^*(t)$ est la répétition de $X(\omega)$ tous les $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$:

$$X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(\omega - \omega_e k)$$

$\rightarrow$ 2 cas sont à distinguer

6.2 Théorème de Shannon

- On suppose que le spectre du signal continu est à support borné :

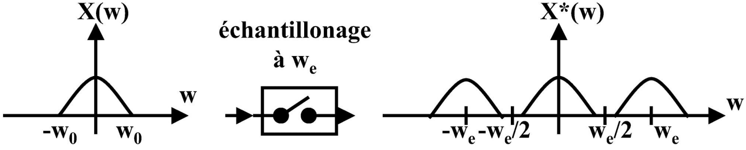
$$X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [-\omega_0 \ \omega_0]$$

- La T.F. de $x^*(t)$ est la répétition de $X(\omega)$ tous les $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$:

$$X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(\omega - \omega_e k)$$

$\rightarrow$ 2 cas sont à distinguer

- cas où $\omega_e > 2\omega_0$



6.2 Théorème de Shannon

- On suppose que le spectre du signal continu est à support borné :

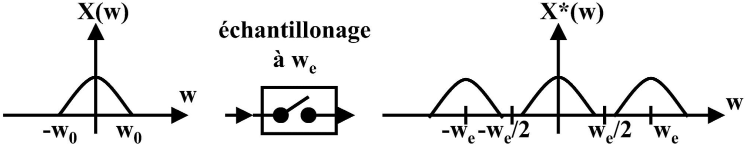
$$X(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin [-\omega_0 \ \omega_0]$$

- La T.F. de $x^*(t)$ est la répétition de $X(\omega)$ tous les $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$:

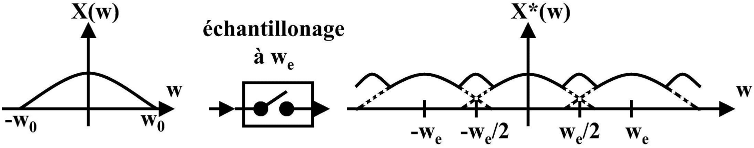
$$X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(\omega - \omega_e k)$$

$\rightarrow$ 2 cas sont à distinguer

- cas où $\omega_e > 2\omega_0$

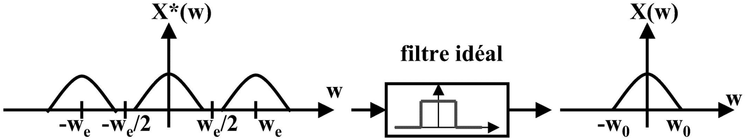


- cas où $\omega_e < 2\omega_0$



Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

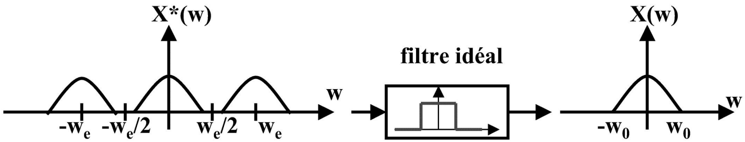
- **Dans le cas où $\omega_e > 2\omega_0$**



→ on peut reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x^*(t)$

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- **Dans le cas où $\omega_e > 2\omega_0$**



→ on peut reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x^*(t)$

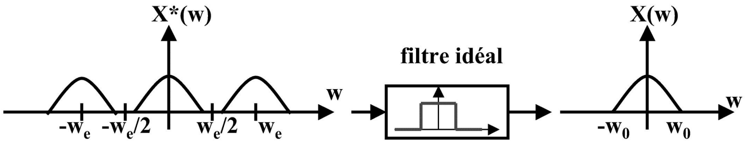
Avec le filtre porte idéal, on a :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_e/2}^{+\omega_e/2} X^*(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

6.2 Théorème de Shannon

Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- **Dans le cas où** $\omega_e > 2\omega_0$



→ on peut reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x^*(t)$

Avec le filtre porte idéal, on a :

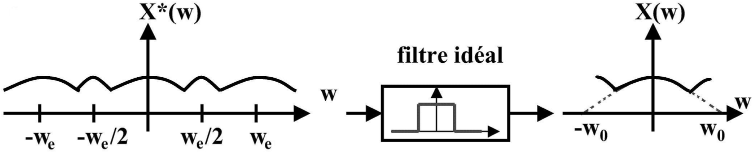
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_e/2}^{+\omega_e/2} X^*(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Avec $X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)e^{-j\omega kT}$ il vient :

$$x(t) = x^*(t) \star \frac{\sin(\omega_e t/2)}{\omega_e t/2}$$

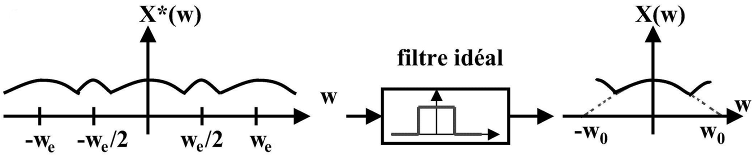
Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- **Dans le cas où** $\omega_e < 2\omega_0$



Peut-on retrouver $x(t)$ après les conversions discret→continu→discret ?

- **Dans le cas où $\omega_e < 2\omega_0$**



Zone de recouvrement
→ impossible de distinguer $X(\omega)$ et $X(\omega \pm \omega_e)$
→ il est impossible de reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x^*(t)$

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0 \ \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

6.2 Théorème de Shannon

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0 \ \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

- **Application :**
  Peut on reconstruire le signal $x(t) = \sin(100t) + 0.5\sin(t) + 0.24\sin(5t)$, s'il a été échantillonné avec une période $T = 0.05$ s ?

6.2 Théorème de Shannon

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0\ \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

- **Application :**
  Peut on reconstruire le signal $x(t) = \sin(100t) + 0.5\sin(t) + 0.24\sin(5t)$, s'il a été échantillonné avec une période $T = 0.05$ s ?
  - le spectre de $x(t)$ a trois composantes :
    $\omega_1 = 5$ rad/s, $\omega_2 = 1$ rad/s et $\omega_3 = 100$ rad/s

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0\ \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

- **Application :**
  Peut on reconstruire le signal $x(t) = \sin(100t) + 0.5\sin(t) + 0.24\sin(5t)$, s'il a été échantillonné avec une période $T = 0.05$ s ?
  - le spectre de $x(t)$ a trois composantes :
    $\omega_1 = 5$ rad/s, $\omega_2 = 1$ rad/s et $\omega_3 = 100$ rad/s
  - le support du spectre est :
    $[-\omega_0\ \omega_0] = [-100\ 100]$

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0 \ \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

- **Application :**
  Peut on reconstruire le signal $x(t) = \sin(100t) + 0.5\sin(t) + 0.24\sin(5t)$, s'il a été échantillonné avec une période $T = 0.05$ s ?
  - le spectre de $x(t)$ a trois composantes :
    $\omega_1 = 5$ rad/s, $\omega_2 = 1$ rad/s et $\omega_3 = 100$ rad/s
  - le support du spectre est :
    $[-\omega_0 \ \omega_0] = [-100 \ 100]$
  - la pulsation d'échantillonnage doit vérifier : $\omega_e > 2\omega_0 = 200 \ \mathrm{rad/s}$

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0 \ \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

- **Application :**
  Peut on reconstruire le signal $x(t) = \sin(100t) + 0.5\sin(t) + 0.24\sin(5t)$, s'il a été échantillonné avec une période $T = 0.05$ s ?
  - le spectre de $x(t)$ a trois composantes :
    $\omega_1 = 5$ rad/s, $\omega_2 = 1$ rad/s et $\omega_3 = 100$ rad/s
  - le support du spectre est :
    $[-\omega_0 \ \omega_0] = [-100 \ 100]$
  - la pulsation d'échantillonnage doit vérifier : $\omega_e > 2\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$
  - la période d'échantillonnage doit vérifier : $T < \frac{\pi}{\omega_0} = 0.0314 \ s$

6.2 Théorème de Shannon

Théorème de Shannon

Soit un signal continu $x(t)$ dont le spectre est à support borné $[-\omega_0 \; \omega_0]$.
Le signal $x(t)$ est échantillonné à la pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ pour obtenir $x^*(t)$.
Le signal continu peut être reconstruit à partir de $x^*(t)$ si $\omega_e > 2\omega_0$

- **Application :**
  Peut on reconstruire le signal $x(t) = \sin(100t) + 0.5\sin(t) + 0.24\sin(5t)$, s'il a été échantillonné avec une période $T = 0.05$ s ?
  - le spectre de $x(t)$ a trois composantes :
    $\omega_1 = 5$ rad/s, $\omega_2 = 1$ rad/s et $\omega_3 = 100$ rad/s
  - le support du spectre est :
    $[-\omega_0 \; \omega_0] = [-100 \; 100]$
  - la pulsation d'échantillonnage doit vérifier : $\omega_e > 2\omega_0 = 200 \text{ rad/s}$
  - la période d'échantillonnage doit vérifier : $T < \frac{\pi}{\omega_0} = 0.0314 \; s$
  - $T = 0.05$ s est trop grand, le signal ne pourra pas être reconstruit correctement.

6.3 Propriétés des systèmes à temps discret

Linéarité

Le système Σ à temps discret est linéaire si, pour toutes constantes α et β, et tous signaux d'entrée $x_1^*(t)$ et $x_2^*(t)$, on a la propriété suivante :

- si l'entrée $x_1^*(t)$ provoque la sortie $y_1^*(t)$
- si l'entrée $x_2^*(t)$ provoque la sortie $y_2^*(t)$
- alors l'entrée $x(t) = \alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)$ provoque la sortie $y(t) = \alpha y_1^*(t) + \beta y_2^*(t)$

6.3 Propriétés des systèmes à temps discret

Linéarité

Le système Σ à temps discret est linéaire si, pour toutes constantes α et β, et tous signaux d'entrée $x_1^*(t)$ et $x_2^*(t)$, on a la propriété suivante :

- si l'entrée $x_1^*(t)$ provoque la sortie $y_1^*(t)$
- si l'entrée $x_2^*(t)$ provoque la sortie $y_2^*(t)$
- alors l'entrée $x(t) = \alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)$ provoque la sortie $y(t) = \alpha y_1^*(t) + \beta y_2^*(t)$

Stationnarité

Un processus à temps discret est stationnaire, si pour tout entier m

- si la réponse du système à l'entrée $u^*(t)$ est $y^*(t)$
- alors la réponse à une entrée $u^*(t - mT)$, est donnée par $y^*(t - mT)$

6.3 Propriétés des systèmes à temps discret

Linéarité

Le système Σ à temps discret est linéaire si, pour toutes constantes α et β, et tous signaux d'entrée $x_1^*(t)$ et $x_2^*(t)$, on a la propriété suivante :

- si l'entrée $x_1^*(t)$ provoque la sortie $y_1^*(t)$
- si l'entrée $x_2^*(t)$ provoque la sortie $y_2^*(t)$
- alors l'entrée $x(t) = \alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)$ provoque la sortie $y(t) = \alpha y_1^*(t) + \beta y_2^*(t)$

Stationnarité

Un processus à temps discret est stationnaire, si pour tout entier m

- si la réponse du système à l'entrée $u^*(t)$ est $y^*(t)$
- alors la réponse à une entrée $u^*(t - mT)$, est donnée par $y^*(t - mT)$

Causalité

Un processus à temps discret est causal si $y(nT)$ dépend uniquement :

- des valeurs de la sortie $y(kT)$ pour $k < n$
- des valeurs de l'entrée $x(kT)$ pour $k \leq n$

analogie continu/discret :

continu $\sim$ discret
dérivation $\sim$ prévision
eq. différentielle $\sim$ eq. récurrence

Système à temps discret

Un système linéaire stationnaire causal à temps discret est décrit par une relation de récurrence entre les signaux d'entrée $x^*(t)$ et de sortie $y^*(t)$:

$$a_0 y^*(t) + a_1 y^*(t-T) + \ldots + a_n y^*(t-nT) = b_0 x^*(t) + b_1 x^*(t-T) + \ldots + b_m x^*(t-mT)$$

analogie continu/discret :

continu $\sim$ discret
dérivation $\sim$ prévision
eq. différentielle $\sim$ eq. récurrence

Système à temps discret

Un système linéaire stationnaire causal à temps discret est décrit par une relation de récurrence entre les signaux d'entrée $x^*(t)$ et de sortie $y^*(t)$:

$$a_0 y^*(t) + a_1 y^*(t-T) + \ldots + a_n y^*(t-nT) = b_0 x^*(t) + b_1 x^*(t-T) + \ldots + b_m x^*(t-mT)$$

Exemple :

$$y^*(t) + \frac{1}{2} y^*(t-T) = x^*(t)$$

pour $x^*(t) = \Gamma(t)$ et $T = 0.1$ s.

$y^*(t) = \{1 \;\; 0.5 \;\; 0.75 \;\; 0.63 \;\; 0.69 \;\; 0.66 \; \ldots\}$

analogie continu/discret :

$$\begin{aligned} \text{continu} &\sim \text{discret} \\ \text{dérivation} &\sim \text{prévision} \\ \text{eq. différentielle} &\sim \text{eq. récurrence} \end{aligned}$$

Système à temps discret

Un système linéaire stationnaire causal à temps discret est décrit par une relation de récurrence entre les signaux d'entrée $x^*(t)$ et de sortie $y^*(t)$:

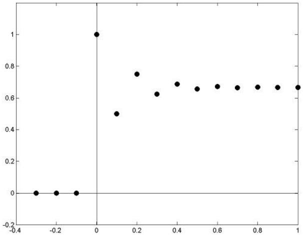
$$a_0 y^*(t) + a_1 y^*(t-T) + \ldots + a_n y^*(t-nT) = b_0 x^*(t) + b_1 x^*(t-T) + \ldots + b_m x^*(t-mT)$$

Exemple :

$$y^*(t) + \frac{1}{2} y^*(t-T) = x^*(t)$$

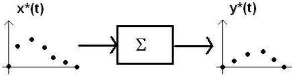
pour $x^*(t) = \Gamma(t)$ et $T = 0.1$ s.

$$y^*(t) = \{1 \;\; 0.5 \;\; 0.75 \;\; 0.63 \;\; 0.69 \;\; 0.66 \;\ldots\}$$

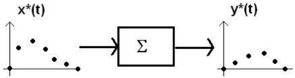


6.3 Systèmes à temps discret

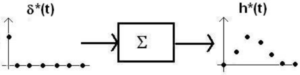
- Soit un système linéaire, causal, stationnaire



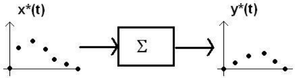
- Soit un système linéaire, causal, stationnaire



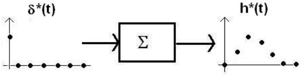
- on suppose connaître sa réponse impulsionnelle $h^*(t)$



- Soit un système linéaire, causal, stationnaire



- on suppose connaître sa réponse impulsionnelle $h^*(t)$

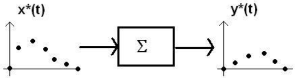


- en décomposant l'entrée sous la forme

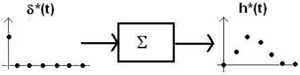
$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta^*(t - kT)$$

6.3 Systèmes à temps discret

- Soit un système linéaire, causal, stationnaire



- on suppose connaître sa réponse impulsionnelle $h^*(t)$



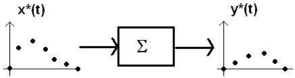
- en décomposant l'entrée sous la forme

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta^*(t - kT)$$

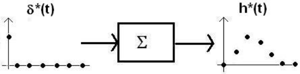
- par linéarité et stationnarité, on peut écrire

$$\boxed{y^*(t) = h^*(t) \star x^*(t)}$$

- Soit un système linéaire, causal, stationnaire



- on suppose connaître sa réponse impulsionnelle $h^*(t)$



- en décomposant l'entrée sous la forme

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta^*(t - kT)$$

- par linéarité et stationnarité, on peut écrire

$$\boxed{y^*(t) = h^*(t) \star x^*(t)}$$

$\rightarrow$ il faut un outil mathématique pour manier la convolution ($\sim$ T. Laplace)

Transformée en z

La transformée en z du signal $x^*(t)$ (causal) est définie par :

$$\mathcal{Z}(x^*(t)) = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)z^{-k}$$

Transformée en z

La transformée en z du signal $x^*(t)$ (causal) est définie par :

$$\mathcal{Z}(x^*(t)) = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)z^{-k}$$

Transformée inverse en z

La transformée inverse d'une fraction rationnelle en z, $X(z)$, est donnée par

$$\mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = x^*(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} X(z)z^{k-1}dz$$

où $\mathcal{C}$, centré en l'origine, entoure tous les pôles de $X(z)$.

Transformée en z

La transformée en z du signal $x^*(t)$ (causal) est définie par :

$$\mathcal{Z}(x^*(t)) = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)z^{-k}$$

Transformée inverse en z

La transformée inverse d'une fraction rationnelle en z, $X(z)$, est donnée par

$$\mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = x^*(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} X(z)z^{k-1}dz$$

où $\mathcal{C}$, centré en l'origine, entoure tous les pôles de $X(z)$.

Exemples :

$\rightarrow$ Impulsion unitaire : $\mathcal{Z}(\delta^*(t)) = 1$

$\rightarrow$ Échelon unitaire : $\mathcal{Z}(\Gamma^*(t)) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

$\rightarrow$ Exponentielle : $\mathcal{Z}(\{e^{-akT}\}_{k\in\mathbb{N}}) = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$

6.4 Propriétés de la transformée en z

- **Linéarité :**

$$\mathcal{Z}(\alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

6.4 Propriétés de la transformée en z

- **Linéarité :**

$$\mathcal{Z}(\alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- **Transformée en z d'un signal retardé :**

$$\mathcal{Z}(x^*(t - nT)) = z^{-n} X(z)$$

6.4 Propriétés de la transformée en z

- **Linéarité :**

$$\mathcal{Z}(\alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- **Transformée en z d'un signal retardé :**

$$\mathcal{Z}(x^*(t - nT)) = z^{-n} X(z)$$

- **Transformée en z d'un produit de convolution :**

$$\mathcal{Z}(x_1^*(t) \star x_2^*(t)) = X_1(z) X_2(z)$$

- **Linéarité :**

$$\mathcal{Z}(\alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- **Transformée en z d'un signal retardé :**

$$\mathcal{Z}(x^*(t - nT)) = z^{-n} X(z)$$

- **Transformée en z d'un produit de convolution :**

$$\mathcal{Z}(x_1^*(t) \star x_2^*(t)) = X_1(z) X_2(z)$$

- **Valeur finale d'un signal :**

$$\lim_{t \to +\infty} x^*(t) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

6.4 Propriétés de la transformée en z

- **Linéarité :**

$$\mathcal{Z}(\alpha x_1^*(t) + \beta x_2^*(t)) = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- **Transformée en z d'un signal retardé :**

$$\mathcal{Z}(x^*(t - nT)) = z^{-n} X(z)$$

- **Transformée en z d'un produit de convolution :**

$$\mathcal{Z}(x_1^*(t) \star x_2^*(t)) = X_1(z) X_2(z)$$

- **Valeur finale d'un signal :**

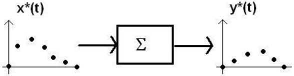
$$\lim_{t \to +\infty} x^*(t) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

- **Valeur initiale d'un signal :**

$$x^*(0) = \lim_{z \to +\infty} X(z)$$

6.4 Fonction de transfert en z

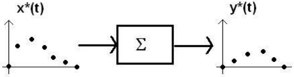
- La relation entrée/sortie d'un système linéaire (...) à temps discret est



$$y^*(t) = h^*(t) \star x^*(t)$$

6.4 Fonction de transfert en z

- La relation entrée/sortie d'un système linéaire (...) à temps discret est



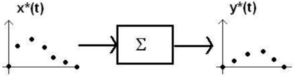
$$y^*(t) = h^*(t) \star x^*(t)$$

$\rightarrow$ or la T.Z. d'un produit de convolution est un produit

$$\mathcal{Z}(h^*(t) \star x^*(t)) = H(z)X(z)$$

6.4 Fonction de transfert en z

- La relation entrée/sortie d'un système linéaire (...) à temps discret est



$$y^*(t) = h^*(t) \star x^*(t)$$

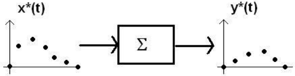
$\rightarrow$ or la T.Z. d'un produit de convolution est un produit

$$\mathcal{Z}(h^*(t) \star x^*(t)) = H(z)X(z)$$

$\rightarrow$ donc la relation entrée/sortie peut s'écrire

$$\boxed{Y(z) = H(z)X(z)}$$

- La relation entrée/sortie d'un système linéaire (...) à temps discret est



$$y^*(t) = h^*(t) \star x^*(t)$$

$\rightarrow$ or la T.Z. d'un produit de convolution est un produit

$$\mathcal{Z}(h^*(t) \star x^*(t)) = H(z)X(z)$$

$\rightarrow$ donc la relation entrée/sortie peut s'écrire

$$\boxed{Y(z) = H(z)X(z)}$$

Fonction de transfert en z

Un système linéaire, stationnaire et causal à temps discret est décrit par sa fonction de transfert $H(z)$.
La fonction de transfert $H(z)$ est la T.Z. de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \mathcal{Z}(h^*(t))$$

6.4 Fonction de transfert en z

- On considère un système à temps discret décrit par :

$$y^*(t) + y^*(t - T) + 0.1y^*(t - 2T) = x^*(t) + x^*(t - T) - 3x^*(t - 3T)$$

6.4 Fonction de transfert en z

- On considère un système à temps discret décrit par :

$$y^*(t) + y^*(t - T) + 0.1y^*(t - 2T) = x^*(t) + x^*(t - T) - 3x^*(t - 3T)$$

- Par linéarité et avec $\mathcal{Z}(x^*(t - nT)) = z^{-n}X(z)$, on a :

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) + 0.1z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) - 3z^{-3}X(z)$$

6.4 Fonction de transfert en z

- On considère un système à temps discret décrit par :

$$y^*(t) + y^*(t-T) + 0.1y^*(t-2T) = x^*(t) + x^*(t-T) - 3x^*(t-3T)$$

- Par linéarité et avec $\mathcal{Z}(x^*(t-nT)) = z^{-n}X(z)$, on a :

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) + 0.1z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) - 3z^{-3}X(z)$$

- La fonction de transfert est donc définie par :

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1 + z^{-1} - 3z^{-3}}{1 + z^{-1} + 0.1z^{-2}}}_{H(z)} X(z)$$

ou encore (pour faire apparaître tous les pôles) :

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^3 + z^2 - 3}{z^3 + z^2 + 0.1z}}_{H(z)} X(z)$$

- **Filtrage de signaux à temps discret**

- **Filtrage de signaux à temps discret**

$$\begin{array}{c}\text{spécifications fréquentielles}\\ \Downarrow\ \text{synthèse de filtre}\\ \text{filtre à temps continu } H(p)\end{array}$$

- **Filtrage de signaux à temps discret**

spécifications fréquentielles

$\|$

synthèse de filtre

$\Downarrow$

filtre à temps continu $H(p)$

filtre à temps discret $H(z)$

$\|$

T.Z. inverse

$\Downarrow$

Relation de récurrence entre signaux à temps discret

6.5 Discrétisation de fonction de transfert en p

- **Filtrage de signaux à temps discret**

spécifications fréquentielles

$\|$

synthèse de filtre

$\Downarrow$

filtre à temps continu $H(p)$

$\|$

discrétisation

$\Downarrow$

filtre à temps discret $H(z)$

$\|$

T.Z. inverse

$\Downarrow$

Relation de récurrence entre signaux à temps discret

6.5 Discrétisation de fonction de transfert en p

- **Filtrage de signaux à temps discret**

$$\begin{array}{c} \text{spécifications fréquentielles} \\ \| \\ \text{synthèse de filtre} \\ \Downarrow \\ \text{filtre à temps continu } H(p) \\ \| \\ \text{discrétisation} \\ \Downarrow \\ \text{filtre à temps discret } H(z) \\ \| \\ \text{T.Z. inverse} \\ \Downarrow \\ \text{Relation de récurrence entre signaux à temps discret} \end{array}$$

- Il manque une relation entre les variables p et z

$$\begin{array}{cl} p & \sim \text{dérivation} \\ z^{-1} & \sim \text{retard de } T \\ z & \sim \text{avance de } T \end{array}$$

6.5 Discrétisation arrière (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

6.5 Discrétisation arrière (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) \simeq \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t)-x^*(t-T)}{T}\right) = \frac{\mathbf{1-z^{-1}}}{\mathbf{T}}X(z)$$

6.5 Discrétisation arrière (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) \simeq \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t)-x^*(t-T)}{T}\right) = \frac{\mathbf{1-z^{-1}}}{\mathbf{T}}X(z)$$

$\rightarrow$ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

6.5 Discrétisation arrière (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

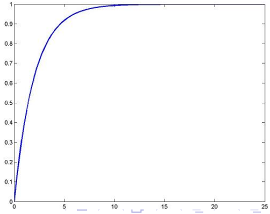
- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) \simeq \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t) - x^*(t-T)}{T}\right) = \frac{\mathbf{1 - z^{-1}}}{\mathbf{T}} X(z)$$

$\rightarrow$ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{2p+1}$



6.5 Discrétisation arrière (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

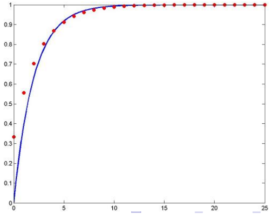
- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) \simeq \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t)-x^*(t-T)}{T}\right) = \frac{\mathbf{1-z^{-1}}}{\mathbf{T}}X(z)$$

$\rightarrow$ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{1-z^{-1}}{T}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{2p+1}$
  - Pour $T = 1$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{1}{2\frac{1-z^{-1}}{1}+1} = \frac{1}{3-2z^{-1}}$



6.5 Discrétisation arrière (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

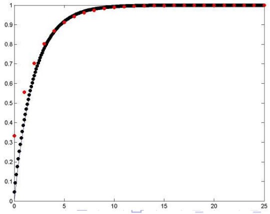
- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) \simeq \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t) - x^*(t-T)}{T}\right) = \frac{\mathbf{1 - z^{-1}}}{\mathbf{T}}X(z)$$

$\rightarrow$ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{2p+1}$
  - Pour $T = 1$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{1}{2\frac{1-z^{-1}}{1}+1} = \frac{1}{3-2z^{-1}}$
  - Pour $T = 0.1$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{1}{2\frac{1-z^{-1}}{0.1}+1} = \frac{1}{21-20z^{-1}}$



6.5 Discrétisation avant (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

6.5 Discrétisation avant (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t+T)-x^*(t)}{T}\right) = \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{T}}X(z)$$

6.5 Discrétisation avant (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t+T)-x^*(t)}{T}\right) = \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{T}}X(z)$$

$\rightarrow$ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{z-1}{T}}$$

6.5 Discrétisation avant (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

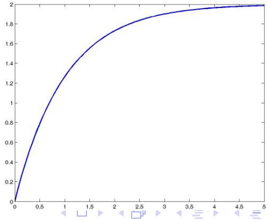
- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t+T)-x^*(t)}{T}\right) = \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{T}}X(z)$$

→ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{z-1}{T}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{p+1}$



- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

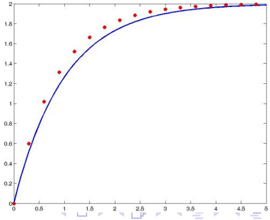
- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t+T)-x^*(t)}{T}\right) = \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{T}}X(z)$$

→ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{z-1}{T}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{p+1}$
  - Pour $T = 0.3$ s → $H_d(z) = \frac{2}{\frac{z-1}{0.3}+1} = \frac{0.6}{z-0.7}$



6.5 Discrétisation avant (simple)

- On considère un système dérivateur $y(t) = dx(t)/dt$, sa F.T. est :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathbf{p}X(p)$$

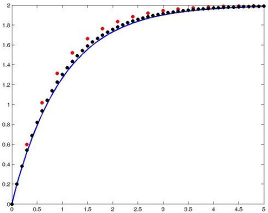
- La T.Z. du signal dérivé est :

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathcal{Z}\left(\frac{x^*(t+T)-x^*(t)}{T}\right) = \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{T}}X(z)$$

$\rightarrow$ On obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable :

$$\boxed{p \sim \frac{z-1}{T}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{p+1}$
  - Pour $T = 0.3$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{2}{\frac{z-1}{0.3}+1} = \frac{0.6}{z-0.7}$
  - Pour $T = 0.1$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{2}{\frac{z-1}{0.1}+1} = \frac{0.2}{z-0.9}$



6.5 Discrétisation par la méthode des trapèzes (précise)

- On considère un intégrateur : $y(t) = \int_0^t x$ de F.T. $Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t+T) = y(t) + \int_t^{t+T} x(\tau)d\tau \simeq y(t) + \frac{x(t)+x(t+T)}{2}T$$
$$2\left(y(t+T) - y(t)\right) = T\left(x(t+T) + x(t)\right)$$
$$2(z-1)Y(z) = T(z+1)X(z)$$

6.5 Discrétisation par la méthode des trapèzes (précise)

- On considère un intégrateur : $y(t) = \int_0^t x$ de F.T. $Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t+T) = y(t) + \int_t^{t+T} x(\tau)d\tau \simeq y(t) + \frac{x(t)+x(t+T)}{2}T$$

$$2\left(y(t+T) - y(t)\right) = T\left(x(t+T) + x(t)\right)$$

$$2(z-1)Y(z) = T(z+1)X(z)$$

$\rightarrow$ on obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable

$$\boxed{p \sim \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

6.5 Discrétisation par la méthode des trapèzes (précise)

- On considère un intégrateur : $y(t) = \int_0^t x$ de F.T. $Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t+T) = y(t) + \int_t^{t+T} x(\tau)d\tau \simeq y(t) + \frac{x(t) + x(t+T)}{2}T$$
$$2\left(y(t+T) - y(t)\right) = T\left(x(t+T) + x(t)\right)$$
$$2(z-1)Y(z) = T(z+1)X(z)$$

$\rightarrow$ on obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable

$$\boxed{p \sim \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{0.01p^2+0.1p^2+1}$

- On considère un intégrateur : $y(t) = \int_0^t x$ de F.T. $Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t+T) = y(t) + \int_t^{t+T} x(\tau)d\tau \simeq y(t) + \frac{x(t)+x(t+T)}{2}T$$

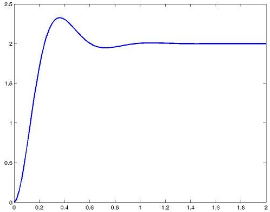
$$2\left(y(t+T) - y(t)\right) = T\left(x(t+T) + x(t)\right)$$

$$2(z-1)Y(z) = T(z+1)X(z)$$

$\rightarrow$ on obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable

$$\boxed{p \sim \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{0.01p^2+0.1p^2+1}$
  - Pour $T = 0.3$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{0.18z^2+0.36z+0.18}{0.19z^2+0.1z+0.07}$



6.5 Discrétisation par la méthode des trapèzes (précise)

- On considère un intégrateur : $y(t) = \int_0^t x$ de F.T. $Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t+T) = y(t) + \int_t^{t+T} x(\tau)d\tau \simeq y(t) + \frac{x(t)+x(t+T)}{2}T$$

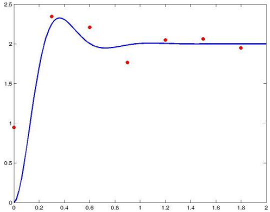
$$2\left(y(t+T) - y(t)\right) = T\left(x(t+T) + x(t)\right)$$

$$2(z-1)Y(z) = T(z+1)X(z)$$

$\rightarrow$ on obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable

$$\boxed{p \sim \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{0.01p^2+0.1p^2+1}$
  - Pour $T = 0.3$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{0.18z^2+0.36z+0.18}{0.19z^2+0.1z+0.07}$
  - Pour $T = 0.1$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{0.02z^2+0.04z+0.02}{0.07z^2-0.06z+0.03}$



6.5 Discrétisation par la méthode des trapèzes (précise)

- On considère un intégrateur : $y(t) = \int_0^t x$ de F.T. $Y(p) = \frac{1}{p}X(p)$

$$y(t+T) = y(t) + \int_t^{t+T} x(\tau)d\tau \simeq y(t) + \frac{x(t)+x(t+T)}{2}T$$

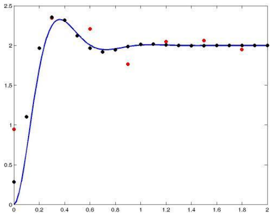
$$2\left(y(t+T) - y(t)\right) = T\left(x(t+T) + x(t)\right)$$

$$2(z-1)Y(z) = T(z+1)X(z)$$

$\rightarrow$ on obtient $H_d(z)$ à partir de $H(p)$ avec le changement de variable

$$\boxed{p \sim \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

- Exemple : On discrétise la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{0.01p^2+0.1p^2+1}$
  - Pour $T = 0.3$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{0.18z^2+0.36z+0.18}{0.19z^2+0.1z+0.07}$
  - Pour $T = 0.1$ s $\rightarrow$ $H_d(z) = \frac{0.02z^2+0.04z+0.02}{0.07z^2-0.06z+0.03}$



6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$
- filtre passe-bas normalisé équivalent : $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2} p_n + 1}$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$
- filtre passe-bas normalisé équivalent : $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2} p_n + 1}$
- dénormalisation $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0} \right) = \frac{1}{4.8} \left(p + \frac{1}{p} \right)$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$
- filtre passe-bas normalisé équivalent : $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2} p_n + 1}$
- dénormalisation $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right) = \frac{1}{4.8}\left(p + \frac{1}{p}\right)$
- filtre passe-bande : $H(p) = \frac{23.04p^2}{p^4 + 6.788p^3 + 25.04p^2 + 6.788p + 1}$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$
- filtre passe-bas normalisé équivalent : $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2}p_n + 1}$
- dénormalisation $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}}\left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right) = \frac{1}{4.8}\left(p + \frac{1}{p}\right)$
- filtre passe-bande : $H(p) = \frac{23.04p^2}{p^4 + 6.788p^3 + 25.04p^2 + 6.788p + 1}$
- discrétisation : $p = \frac{2(z-1)}{0.01(z+1)}$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

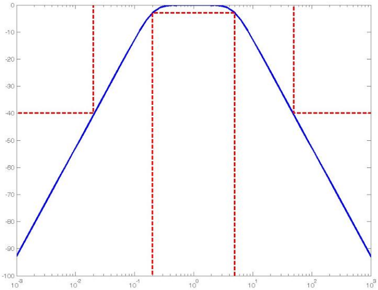
- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20 log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$
- filtre passe-bas normalisé équivalent : $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2}p_n + 1}$
- dénormalisation $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right) = \frac{1}{4.8}\left(p + \frac{1}{p}\right)$
- filtre passe-bande : $H(p) = \frac{23.04p^2}{p^4 + 6.788p^3 + 25.04p^2 + 6.788p + 1}$
- discrétisation : $p = \frac{2(z-1)}{0.01(z+1)}$
- filtre passe-bande discret : $H_d(z) = \frac{0.0005568z^4 - 0.001114z^2 + 0.0005568}{z^4 - 3.932z^3 + 5.798z^2 - 3.801z + 0.9344}$

6.6 Synthèse d'un filtre discret

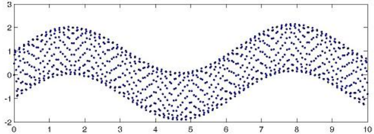
- On veut filtrer un signal mesuré toutes les 10 ms afin :
  - amplifier d'au moins -3 dB les pulsations entre 0.2 et 5 rad/s
  - amplifier d'au plus -40 dB les pulsations $\omega < 0.02$ ou $\omega > 50$ rad/s
- facteur de forme : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} = 1$
- sélectivité : $k = \frac{\omega_{p+} - \omega_{p-}}{\omega_{a+} - \omega_{a-}} = 0.096$
- ordre du FPBNE $n \geq \frac{A_a - A_p}{20log\left(\frac{1}{k}\right)} = 1.8 \rightarrow n = 2$
- filtre passe-bas normalisé équivalent : $H_n(p_n) = \frac{1}{p_n^2 + \sqrt{2}p_n + 1}$
- dénormalisation $p_n = \frac{\omega_0}{\omega_{p+} - \omega_{p-}} \left(\frac{\omega_0}{p} + \frac{p}{\omega_0}\right) = \frac{1}{4.8}\left(p + \frac{1}{p}\right)$
- filtre passe-bande : $H(p) = \frac{23.04p^2}{p^4 + 6.788p^3 + 25.04p^2 + 6.788p + 1}$
- discrétisation : $p = \frac{2(z-1)}{0.01(z+1)}$
- filtre passe-bande discret : $H_d(z) = \frac{0.0005568z^4 - 0.001114z^2 + 0.0005568}{z^4 - 3.932z^3 + 5.798z^2 - 3.801z + 0.9344}$
- Récurrence : $y^*(t) = 3.932y^*(t-T) - 5.798y^*(t-2T) + 3.801y^*(t-3T) - 0.9344y^*(t-4T) + 0.0005568x^*(t) - 0.001114x^*(t-2T) + 0.0005568x^*(t-4T)$

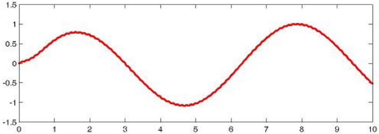
6.6 Synthèse d'un filtre discret

- Diagramme de Bode du filtre $H(p)$



- Filtrage de $x^*(t) = \sin(0.02t) + \sin(t) + \sin(50t)$





seule $\sin(t)$ est en bande passante