Traitement statistique et approche système

Benoît Marx

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)

disponible sur Arche et à l'adresse : `cran.univ-lorraine.fr/benoit.marx`

Plan de la partie *Approche système*

1. Rappels sur les signaux et systèmes
   - Représentation d'un procédé
   - Outils d'analyse d'un procédé
   - Vers la conduite d'un procédé
2. Introduction à la commande en boucle fermée
   - Introduction (sur un exemple)
   - Effet de la BF sur des systèmes simples (ordre 1 et 2)
   - Structures générales de commande
3. Performances et robustesse en BF
   - Stabilité (critère de Routh)
   - Précision
   - Robustesse
   - Robustesse aux perturbations
4. Quelques correcteurs et leurs réglages
   - Correcteurs élémentaires (P, PI, retard de φ, PID)
   - Correcteur à avance de phase
   - Approche temporelle du réglage de correcteurs
5. Identification de procédés
   - Obtention d'un modèle statique
   - Obtention d'un modèle dynamique à temps continu

Approche système (4CM + 4TD)

- Ne pas oublier tout de suite ce qui a été vu en TdS
- Aller plus loin dans l'analyse des performances d'un processus
- Être capable d'améliorer les performances d'un processus, en la fermant (la boucle)
- Être capable de déterminer un modèle à partir de données mesurées

Evaluation de la partie Approche système

- Examen en fin de module

1.2 Rappels sur les signaux et systèmes

Un système est défini par :

- une frontière
- des variables d'entrée et de sortie
- des liens fonctionnels entre les grandeurs d'entrée/sortie

On fait généralement quelques hypothèses :

- linéarité (au moins locale)
- invariance dans le temps
- causalité

1.3 Rappels : représentation d'un procédé

On cherche une représentation d'un procédé :

- calcul d'un point d'équilibre pour entrée(s) constante(s)
- linéarisation autour du point d'équilibre
- mise sous forme de fonction de transfert
- principe de superposition
- schéma blocs

pour pouvoir :

- analyser / évaluer
- simuler le fonctionnement
- améliorer les performances

1.3 Exemple introductif

On considère un **chemostat**, utilisé pour la production contrôlée d'une bactérie nourrie par l'apport d'un substrat.

- **Modèle (non linéaire) du chemostat:**

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) - D(t)x(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) + D(t)(s_{in}(t) - s(t)) \end{cases}$$

$x(t)$: concentration en bactérie	$D(t)$: débit entrant (contenant le substrat)
$s(t)$: concentration en substrat	$s_{in}(t)$: concentration en substrat à l'entrée

1.3 Exemple introductif

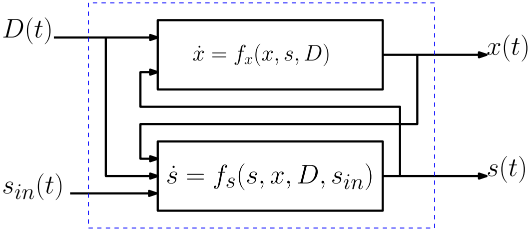
On considère un **chemostat**, utilisé pour la production contrôlée d'une bactérie nourrie par l'apport d'un substrat.

- **Modèle (non linéaire) du chemostat:**

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) - D(t)x(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) + D(t)(s_{in}(t) - s(t)) \end{cases}$$

$x(t)$: concentration en bactérie $\quad D(t)$: débit entrant (contenant le substrat)
$s(t)$: concentration en substrat $\quad s_{in}(t)$: concentration en substrat à l'entrée

- **Schéma fonctionnel :**



- Le chemostat est défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \mu\frac{s(t)}{k+s(t)}x(t) - D(t)x(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\mu\frac{s(t)}{k+s(t)}x(t) + D(t)(s_{in}(t) - s(t)) \end{cases}$$

- **Point d'équilibre pour $D(t) = D_0$ et $s_{in}(t) = s_{in0}$**

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mu\frac{s(t)}{k+s(t)}x(t) - \mathbf{D_0}x(t) \\ \mathbf{0} = -\mu\frac{s(t)}{k+s(t)}x(t) + \mathbf{D_0}(\mathbf{s_{in0}} - s(t)) \end{cases}$$

1.3 Rappels : calcul d'un point d'équilibre

- Le chemostat est défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) - D(t)x(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) + D(t)(s_{in}(t) - s(t)) \end{cases}$$

- **Point d'équilibre pour $D(t) = D_0$ et $s_{in}(t) = s_{in0}$**

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) - \mathbf{D_0} x(t) \\ \mathbf{0} = -\mu \frac{s(t)}{k+s(t)} x(t) + \mathbf{D_0}(\mathbf{s_{in0}} - s(t)) \end{cases}$$

- On détermine les valeurs des sorties à l'équilibre :

$$\begin{cases} s_0 = \frac{kD_0}{\mu - D_0} \\ x_0 = s_{in0} - \frac{kD_0}{\mu - D_0} \end{cases}$$

Linéarisation autour du point d'équilibre (D_0, s_0, s_{in0}, x_0)

- Variations autour du point d'équilibre définies par :

$$\delta D(t) = D(t) - D_0 \qquad \delta s(t) = s(t) - s_0$$
$$\delta x(t) = x(t) - x_0 \qquad \delta s_{in}(t) = s_{in}(t) - s_{in0}$$

Linéarisation autour du point d'équilibre (D_0, s_0, s_{in0}, x_0)

- Variations autour du point d'équilibre définies par :

$$\delta D(t) = D(t) - D_0 \qquad \delta s(t) = s(t) - s_0$$
$$\delta x(t) = x(t) - x_0 \qquad \delta s_{in}(t) = s_{in}(t) - s_{in0}$$

- Développement de Taylor à partir du point d'équilibre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_x(x, s, D) \\ \dot{s}(t) = f_s(x, s, D, s_{in}) \end{cases}$$

Linéarisation autour du point d'équilibre (D_0, s_0, s_{in0}, x_0)

- Variations autour du point d'équilibre définies par :

$$\delta D(t) = D(t) - D_0 \qquad \delta s(t) = s(t) - s_0$$
$$\delta x(t) = x(t) - x_0 \qquad \delta s_{in}(t) = s_{in}(t) - s_{in0}$$

- Développement de Taylor à partir du point d'équilibre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_x(x, s, D) \\ \dot{s}(t) = f_s(x, s, D, s_{in}) \end{cases}$$

- On obtient :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \underbrace{f_x(x_0, s_0, D_0)}_{=0} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) \\ \dot{\delta s}(t) = \underbrace{f_s(x_0, s_0, D_0, s_{in0})}_{=0} + \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s_{in}}\right)_{eq} \delta s_{in}(t) \end{cases}$$

Mise sous forme de fonction de transfert

- Proche du point d'équilibre, le procédé est décrit par :

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) \\ \delta\dot{s}(t) = \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s_{in}}\right)_{eq} \delta s_{in}(t) \end{cases}$$

Mise sous forme de fonction de transfert

- Proche du point d'équilibre, le procédé est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) \\ \dot{\delta s}(t) = \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s_{in}}\right)_{eq} \delta s_{in}(t) \end{cases}$$

- La transformée de Laplace ayant la propriété :

$$\mathcal{L}(\dot{\delta x}(t)) = p\Delta X(p) - \delta x(0)$$

les équations différentielles $\rightarrow$ équations polynomiales en p

Mise sous forme de fonction de transfert

- Proche du point d'équilibre, le procédé est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_x}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) \\ \dot{\delta s}(t) = \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)_{eq} \delta x(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s}\right)_{eq} \delta s(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial D}\right)_{eq} \delta D(t) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial s_{in}}\right)_{eq} \delta s_{in}(t) \end{cases}$$

- La transformée de Laplace ayant la propriété :

$$\mathcal{L}(\dot{\delta x}(t)) = p\Delta X(p) - \delta x(0)$$

les équations différentielles $\rightarrow$ équations polynomiales en p

- Si la condition initiale est le point d'équilibre : $\delta x(0) = 0$:

$$\begin{cases} \Delta X(p) = H_{sx}(p)\Delta S(p) + H_{Dx}(p)\Delta D(p) \\ \Delta S(p) = H_{xs}(p)\Delta X(p) + H_{Ds}(p)\Delta D(p) + H_{s_{in}s}\Delta S_{in}(p) \end{cases}$$

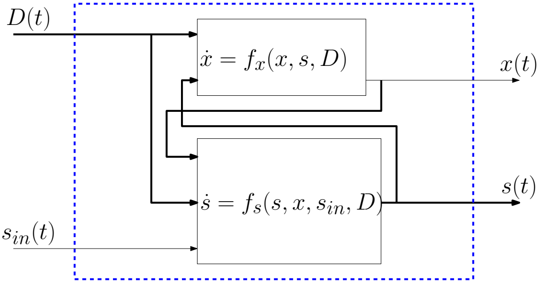
où $\mathcal{L}(\delta x(t)) = \Delta X(p)$, $\mathcal{L}(\delta s(t)) = \Delta S(p)$, etc.
où toutes les fonctions de transfert sont des fonctions du premier ordre.

1.3 Rappels : Schéma bloc

Le chemostat est décrit en p par :

$$\begin{cases} \Delta X(p) = H_{sx}(p)\Delta S(p) + H_{Dx}(p)\Delta D(p) \\ \Delta S(p) = H_{xs}(p)\Delta X(p) + H_{Ds}(p)\Delta D(p) + H_{s_{in}s}\Delta S_{in}(p) \end{cases}$$

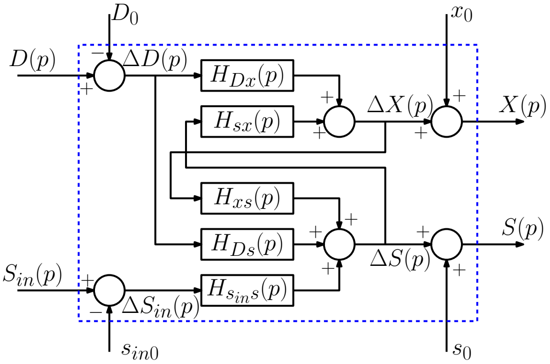
Le schéma fonctionnel



Le chemostat est décrit en p par :

$$\begin{cases} \Delta X(p) = H_{sx}(p)\Delta S(p) + H_{Dx}(p)\Delta D(p) \\ \Delta S(p) = H_{xs}(p)\Delta X(p) + H_{Ds}(p)\Delta D(p) + H_{s_{in}s}\Delta S_{in}(p) \end{cases}$$

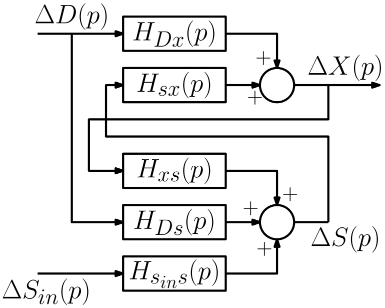
Le schéma fonctionnel devient un schéma bloc



1.3 Rappels : principe de superposition

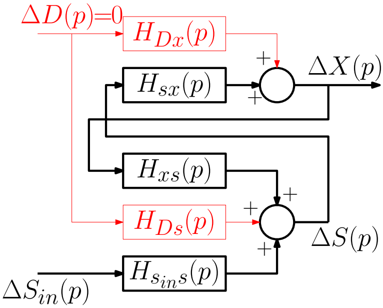
La réponse d'un système linéaire a plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée, calculée en annulant les autres.

$$\Delta X(p) = H_1(p)\Delta S_{in}(p) + H_2(p)\Delta D(p)$$



La réponse d'un système linéaire a plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée, calculée en annulant les autres.

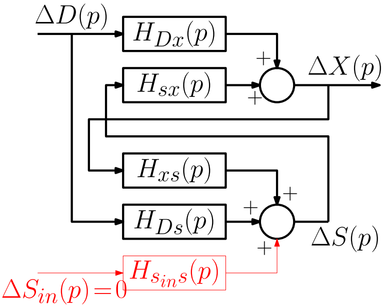
$$\Delta X(p) = H_1(p)\Delta S_{in}(p) + H_2(p)\Delta D(p)$$



$$H_1(p) = \frac{H_{s_{in}s}(p)H_{sx}(p)}{1 - H_{xs}(p)H_{sx}(p)}$$

La réponse d'un système linéaire a plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée, calculée en annulant les autres.

$$\Delta X(p) = H_1(p)\Delta S_{in}(p) + H_2(p)\Delta D(p)$$



$$H_1(p) = \frac{H_{s_{in}s}(p)H_{sx}(p)}{1 - H_{xs}(p)H_{sx}(p)} \qquad H_2(p) = \frac{H_{Dx}(p) + H_{Ds}(p)H_{sx}(p)}{1 - H_{sx}(p)H_{xs}(p)}$$

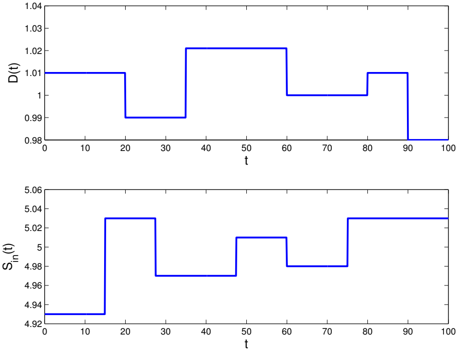
1.3 Rappels : superposition et linéarisation

Validation du modèle linéaire en simulation

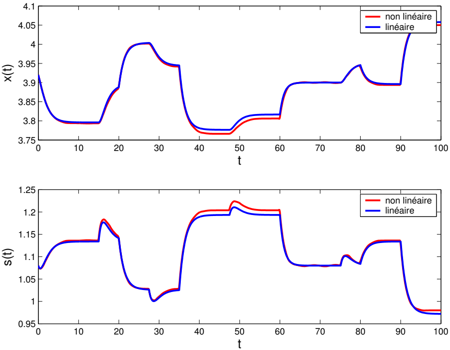
On utilise les valeurs numériques suivantes :

$$\mu = 1.25 \quad k = 0.27 \quad D_0 = 1 \quad S_{in0} = 5$$
$$x_0 = 3.92 \quad s_0 = 1.08$$

les entrées $D(t)$ et $S_{in}(t)$:



les sorties $x(t)$ et $s(t)$:



Le modèle linéaire est correct, surtout pour $x(t)$ et $s(t)$ proches de x_0 et s_0

1.3 Rappels. Outils d'analyse d'un système

Pour $\delta D(t) = 0$ et $\delta s_{in}(t) = \sin(\omega t)$ on a : $\Delta X(p) = H_1(p)\Delta S_{in}(p)$

- **analyse fréquentielle**
  $\rightarrow$ la réponse à un sinus est un sinus **amplifié** et **déphasé** :

$$\delta x(t) = G_1(\omega)\sin(\omega t + \Phi_1(\omega))$$
$$\text{avec} \quad G_1(\omega) = |H_1(j\omega)| \quad \text{et} \quad \Phi_1(\omega) = Arg(H_1(j\omega))$$

  $\rightarrow$ représentation par le diagramme de bode, en échelle log pour ω
  $\rightarrow$ bande passante : intervalle de ω où le gain est proche de son max

Pour $\delta D(t) = 0$ et $\delta s_{in}(t) = \sin(\omega t)$ on a : $\Delta X(p) = H_1(p)\Delta S_{in}(p)$

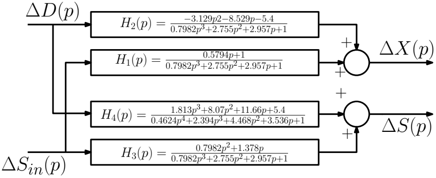
- **analyse fréquentielle**
  $\rightarrow$ la réponse à un sinus est un sinus **amplifié** et **déphasé** :

$$\delta x(t) = G_1(\omega)\sin(\omega t + \Phi_1(\omega))$$
$$\text{avec} \quad G_1(\omega) = |H_1(j\omega)| \quad \text{et} \quad \Phi_1(\omega) = Arg(H_1(j\omega))$$

  $\rightarrow$ représentation par le diagramme de bode, en échelle log pour ω
  $\rightarrow$ bande passante : intervalle de ω où le gain est proche de son max
- **analyse temporelle**
  $\rightarrow$ rapport sortie/entrée en permanent : gain statique $G_1(0)$
  $\rightarrow$ temps de réponse donné par les racines du dénominateur de $\Delta X(p)$
  $\rightarrow$ racines réelles : exponentielles
  $\rightarrow$ racines complexes : sinus (ou cosinus) modulé par exponentielles
  $\rightarrow$ racines complexes à parties réelles positive : instable (*sortie* $\rightarrow \pm\infty$)
  $\rightarrow$ racines complexes à parties réelles négatives : stable (*sortie* $\rightarrow 0$)

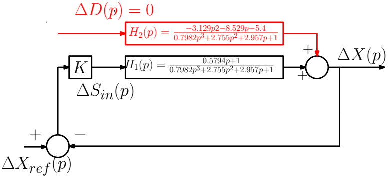
Objectif : la concentration en $x(t)$ doit suivre une référence $x_{ref}(t)$

- moyen d'action : modifier $S_{in}(t)$ et / ou $D(t)$
- évaluation du résultat : comparer $x_{ref}(t)$ et $x(t)$
- influence des entrées sur $x(t)$: $H_1(0) = 1$ et $H_2(0) = -5.4$



Objectif : la concentration en $x(t)$ doit suivre une référence $x_{ref}(t)$

- moyen d'action : modifier $S_{in}(t)$ et / ou $D(t)$
- évaluation du résultat : comparer $x_{ref}(t)$ et $x(t)$
- influence des entrées sur $x(t)$: $H_1(0) = 1$ et $H_2(0) = -5.4$



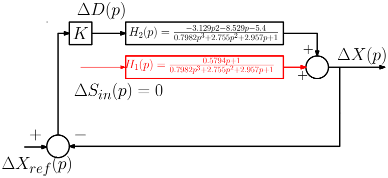
- plusieurs commandes sont possibles :

$$\begin{cases} \text{si } x(t) < x_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } S_{in}(t) \\ \text{si } x(t) > x_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } S_{in}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{in}(t) = S_{in0} + K_1(x_{ref}(t) - x(t)) \\ D(t) = D_0 \end{cases}$$

1.4 Intro à la commande sur l'exemple du chemostat

Objectif : la concentration en $x(t)$ doit suivre une référence $x_{ref}(t)$

- moyen d'action : modifier $S_{in}(t)$ et / ou $D(t)$
- évaluation du résultat : comparer $x_{ref}(t)$ et $x(t)$
- influence des entrées sur $x(t)$: $H_1(0) = 1$ et $H_2(0) = -5.4$

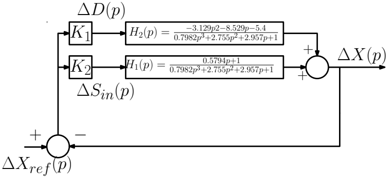


- plusieurs commandes sont possibles :
  - $\begin{cases} \text{si } x(t) < x_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } S_{in}(t) \\ \text{si } x(t) > x_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } S_{in}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{in}(t) = S_{in0} + K_1(x_{ref}(t) - x(t)) \\ D(t) = D_0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} \text{si } x(t) < x_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } D(t) \\ \text{si } x(t) > x_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } D(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(t) = D_0 + K_2(x_{ref}(t) - x(t)) \\ S_{in}(t) = S_{in0} \end{cases}$

1.4 Intro à la commande sur l'exemple du chemostat

Objectif : la concentration en $x(t)$ doit suivre une référence $x_{ref}(t)$

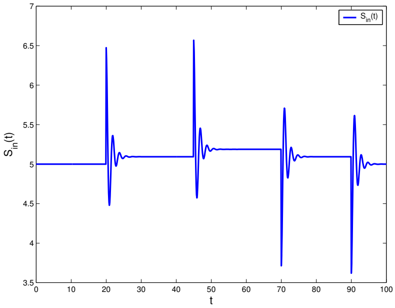
- moyen d'action : modifier $S_{in}(t)$ et / ou $D(t)$
- évaluation du résultat : comparer $x_{ref}(t)$ et $x(t)$
- influence des entrées sur $x(t)$: $H_1(0) = 1$ et $H_2(0) = -5.4$



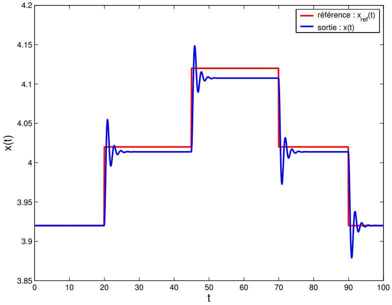
- plusieurs commandes sont possibles :
  - $\begin{cases} \text{si } x(t) < x_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } S_{in}(t) \\ \text{si } x(t) > x_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } S_{in}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{in}(t) = S_{in0} + K_1(x_{ref}(t) - x(t)) \\ D(t) = D_0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} \text{si } x(t) < x_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } D(t) \\ \text{si } x(t) > x_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } D(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(t) = D_0 + K_2(x_{ref}(t) - x(t)) \\ S_{in}(t) = S_{in0} \end{cases}$
  - on agit sur les deux à la fois

Commande de $x(t)$ à partir de $S_{in}(t)$ en maintenant $D(t)$ constant :

$$S_i n(t) = 15(x_{ref}(t) - x(t)) \quad \text{et} \quad D(t) = 1$$



entrée $S_{in}(t)$



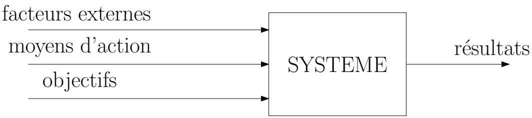
référence $x_{ref}(t)$ et sortie $x(t)$

+ la sortie $x(t)$ suit rapidement $x_{ref}(t)$
- erreur en régime permanent entre $x(t)$ et $x_{ref}(t)$
- la sortie $x(t)$ présente de fortes oscillations

2.1 Introduction : pourquoi la BF ?

Pour automatiser un procédé il faut :

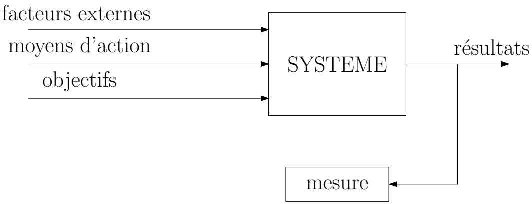
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre



2.1 Introduction : pourquoi la BF ?

Pour automatiser un procédé il faut :

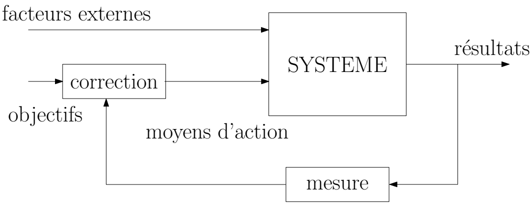
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus



2.1 Introduction : pourquoi la BF ?

Pour automatiser un procédé il faut :

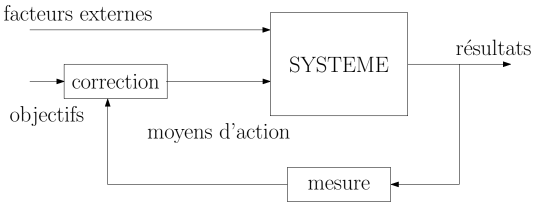
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus
- comparer résultats et objectifs
- adapter son action aux objectifs



2.1 Introduction : pourquoi la BF ?

Pour automatiser un procédé il faut :

- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus
- comparer résultats et objectifs
- adapter son action aux objectifs

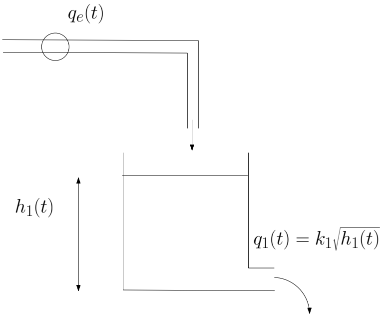


L'automatisation reproduit le comportement humain normal :

observation $\rightarrow$ réflexion $\rightarrow$ action

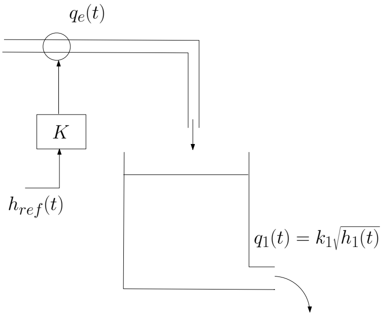
2.2 Exemple de régulation

- On veut réguler la hauteur d'un réservoir en contrôlant le débit d'entrée :
    - action : débit $q_e(t)$
    - objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
    - mesure : hauteur $h_1(t)$



2.2 Exemple de régulation

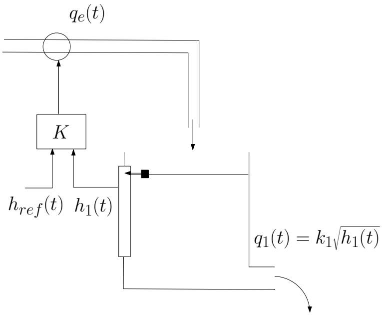
- On veut réguler la hauteur d'un réservoir en contrôlant le débit d'entrée :
  - action : débit $q_e(t)$
  - objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
  - mesure : hauteur $h_1(t)$



- **Boucle ouverte :** on peut commander directement :
  - $q_e(t) = Kh_{ref}(t)$

2.2 Exemple de régulation

- On veut réguler la hauteur d'un réservoir en contrôlant le débit d'entrée :
  - action : débit $q_e(t)$
  - objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
  - mesure : hauteur $h_1(t)$



- **Boucle ouverte :** on peut commander directement :
  - $q_e(t) = Kh_{ref}(t)$
- **Boucle fermée :** ou adapter la commande à la mesure:
  - $\begin{cases} \text{si } h_1(t) > h_{ref}(t) \rightarrow \text{ diminuer } q_e(t) \\ \text{si } h_1(t) < h_{ref}(t) \rightarrow \text{ augmenter} q_e(t) \end{cases} \Rightarrow q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_1(t))$

2.2 Exemple de régulation, en boucle fermée

- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{h}_1(t) &= \frac{q_e(t)}{S} - \frac{k_1}{S}\sqrt{h_1(t)} \\ q_e(t) &= K(h_{ref}(t) - h_1(t))\end{aligned}$$

2.2 Exemple de régulation, en boucle fermée

- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_1(t) =& \frac{q_e(t)}{S} - \frac{k_1}{S}\sqrt{h_1(t)} \\
q_e(t) =& K(h_{ref}(t) - h_1(t))
\end{aligned}
$$

- On peut linéariser ce système :

$$\Delta H_1(p) = \frac{G_0}{Tp+1}\Delta H_{ref}(p), \text{ avec } G_0 = \frac{K2\sqrt{h_{10}}/k_1}{1+K2\sqrt{h_{10}}/k_1} \text{ et } T = \frac{2S\sqrt{h_{10}}/k_1}{1+2K2\sqrt{h_{10}}/k_1}$$

2.2 Exemple de régulation, en boucle fermée

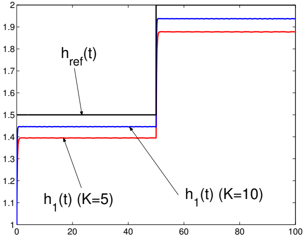
- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$\dot{h}_1(t) = \frac{q_e(t)}{S} - \frac{k_1}{S}\sqrt{h_1(t)}$$
$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_1(t))$$

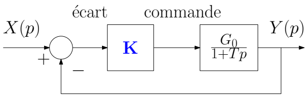
- On peut linéariser ce système :

$$\Delta H_1(p) = \frac{G_0}{Tp+1}\Delta H_{ref}(p), \text{ avec } G_0 = \frac{K2\sqrt{h_{10}}/k_1}{1+K2\sqrt{h_{10}}/k_1} \text{ et } T = \frac{2S\sqrt{h_{10}}/k_1}{1+2K2\sqrt{h_{10}}/k_1}$$

- Influence de K sur le système : lorsque K augmente :
  - le gain statique G_0 tend vers 1
    $\rightarrow$ h_1 suit mieux h_{ref}
  - la constante de temps T diminue
    $\rightarrow$ le suivi est plus rapide



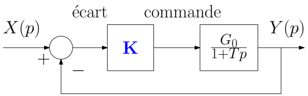
- Le résultat précédent se généralise à tout système du 1^{er} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\begin{cases} \textit{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1+Tp} U(p) \\ \textit{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

2.2 Effet d'un bouclage sur un premier ordre

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 1^{er} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



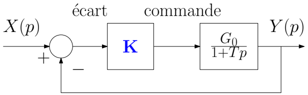
$$\begin{cases} \textit{système} : & Y(p) = \frac{G_0}{1+Tp} U(p) \\ \textit{correcteur} : & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un premier ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + T_{BF}\,p} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} \xrightarrow[K>>1]{} 1 \\ T_{BF} = \frac{T}{1+KG_0} \xrightarrow[K>>1]{} 0 \end{cases}$$

2.2 Effet d'un bouclage sur un premier ordre

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 1^{er} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\begin{cases} \textit{système} : & Y(p) = \frac{G_0}{1+Tp} U(p) \\ \textit{correcteur} : & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un premier ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + T_{BF}\, p} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} \xrightarrow[K>>1]{} 1 \\ T_{BF} = \frac{T}{1+KG_0} \xrightarrow[K>>1]{} 0 \end{cases}$$

- Pour K grand :
  - \+ suivi unitaire de $x(t)$ par $y(t)$
  - \+ suivi rapide de $x(t)$ par $y(t)$
  - − commande grande : coûteuse, bruit amplifié

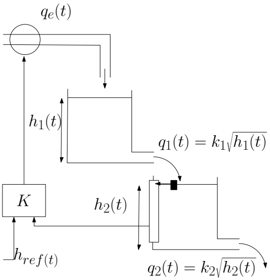
2.2 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- On veut réguler $h_2(t)$ la hauteur du deuxième réservoir par $q_e(t)$ le débit d'entrée :

$$\dot{h}_1(t) = \frac{q_e(t)}{S_1} - \frac{k_1}{S_1}\sqrt{h_1(t)}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{k_1}{S_2}\sqrt{h_1(t)} - \frac{k_2}{S_2}\sqrt{h_2(t)}$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$



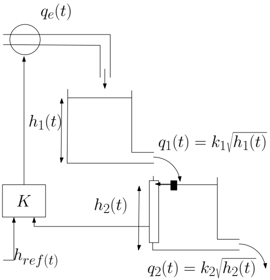
2.2 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- On veut réguler $h_2(t)$ la hauteur du deuxième réservoir par $q_e(t)$ le débit d'entrée :

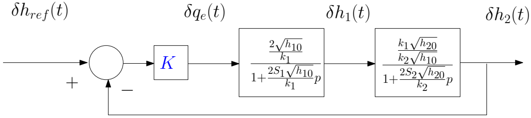
$$\dot{h}_1(t) = \frac{q_e(t)}{S_1} - \frac{k_1}{S_1}\sqrt{h_1(t)}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{k_1}{S_2}\sqrt{h_1(t)} - \frac{k_2}{S_2}\sqrt{h_2(t)}$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$



- On peut linéariser ce système (autour de $h_1(t) \approx h_{10}$ et $h_2(t) \approx h_{20}$)

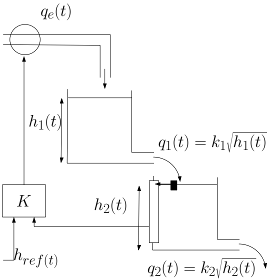


- On veut réguler $h_2(t)$ la hauteur du deuxième réservoir par $q_e(t)$ le débit d'entrée :

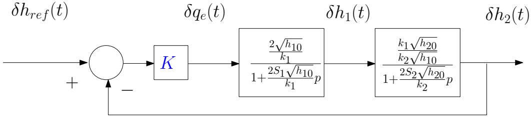
$$\dot{h}_1(t) = \frac{q_e(t)}{S_1} - \frac{k_1}{S_1}\sqrt{h_1(t)}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{k_1}{S_2}\sqrt{h_1(t)} - \frac{k_2}{S_2}\sqrt{h_2(t)}$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$



- On peut linéariser ce système (autour de $h_1(t) \approx h_{10}$ et $h_2(t) \approx h_{20}$)

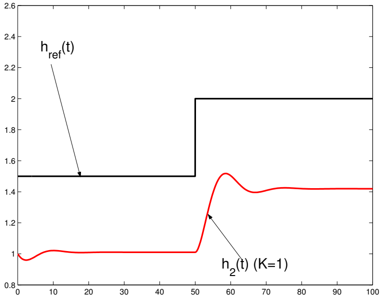


- Le gain statique en boucle fermée est donné par :

$$G_{BF} = \frac{2K\sqrt{h_{20}}}{k_2 + 2K\sqrt{h_{20}}} \xrightarrow[K>>1]{} 1$$

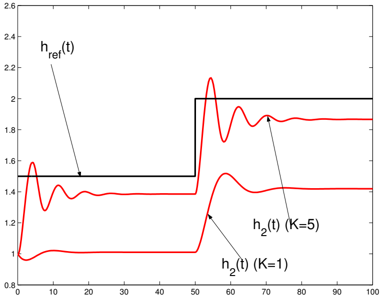
2.2 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- conditions initiales :
  $h_{ref}(0) = 1.5$ et $h_2(0) = 1$
- variation de h_{ref} de $+0.5$ en $t = 50$
- Pour $K = 1$
  - $\rightarrow$ oscillations faibles et lentes
  - $\rightarrow$ peu de dépassement de $h_2(\infty)$
  - $\rightarrow$ suivi médiocre



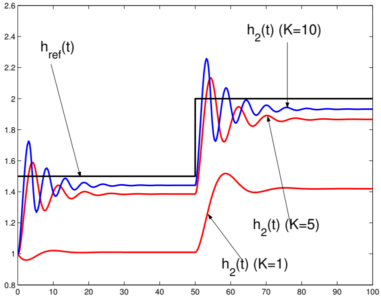
2.2 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- conditions initiales : $h_{ref}(0) = 1.5$ et $h_2(0) = 1$
- variation de h_{ref} de $+0.5$ en $t = 50$
- Pour $K = 5$
  - $\rightarrow$ oscillations faibles et lentes
  - $\rightarrow$ dépassement de $h_2(\infty)$ important
  - $\rightarrow$ suivi moyen



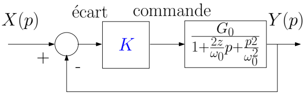
2.2 Exemple de régulation (compliquons un peu)

- conditions initiales :
  $h_{ref}(0) = 1.5$ et $h_2(0) = 1$
- variation de h_{ref} de $+0.5$ en $t = 50$
- Pour $K = 10$
  - $\rightarrow$ oscillations fortes et rapides
  - $\rightarrow$ dépassement de $h_2(\infty)$ très (trop) important
  - $\rightarrow$ suivi correct



2.2 Effet d'un bouclage sur un second ordre

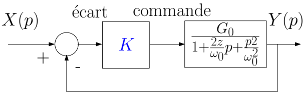
- Le résultat précédent se généralise à tout système du 2ème ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\begin{cases} \textit{système} : & Y(p) = \frac{G_0}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \textit{correcteur} : & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

2.2 Effet d'un bouclage sur un second ordre

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 2ème ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



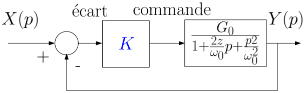
$$\begin{cases} \textit{système} : & Y(p) = \frac{G_0}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \textit{correcteur} : & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un second ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{BF}^2}} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} & \xrightarrow[K>>1]{} 1 \\ \omega_{BF} = \omega_0 \sqrt{1+KG_0} & \xrightarrow[K>>1]{} >> 1 \\ z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KG_0}} & \xrightarrow[K>>1]{} 0 \end{cases}$$

2.2 Effet d'un bouclage sur un second ordre

- Le résultat précédent se généralise à tout système du $2^{ème}$ ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\begin{cases} \textit{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \textit{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un second ordre :

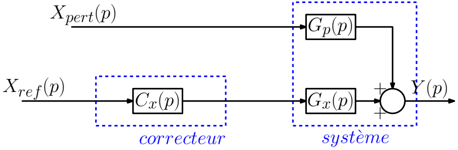
$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{BF}^2}} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} & \xrightarrow[K>>1]{} 1 \\ \omega_{BF} = \omega_0\sqrt{1+KG_0} & \xrightarrow[K>>1]{} >> 1 \\ z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KG_0}} & \xrightarrow[K>>1]{} 0 \end{cases}$$

- Pour K grand :
  - \+ suivi unitaire de $x(t)$ par $y(t)$
  - \+ suivi rapide de $x(t)$ par $y(t)$
  - − risque d'oscillations rapides (ω_{BF} grand) et importantes (z_{BF} petit)
  - − commande grande : coûteuse, bruit amplifié

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

- Si aucune mesure n'est disponible
  $\rightarrow$ boucle ouverte :

$$C_x \approx G_x^{-1}$$

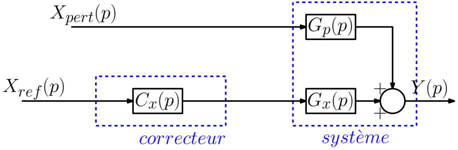


2.3 Structures de commande en boucle ouverte

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

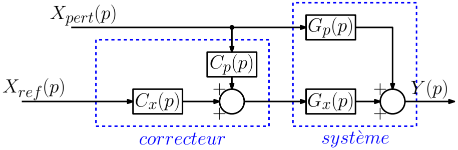
- Si aucune mesure n'est disponible
  $\rightarrow$ boucle ouverte :

$$C_x \approx G_x^{-1}$$



- Si la perturbation est mesurable
  $\rightarrow$ BO avec anticipation :

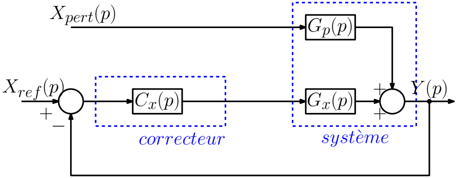
$$C_x \approx G_x^{-1} \text{ et } C_p \approx -G_p G_x^{-1}$$



2.3 Structures de commande en boucle fermée

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

- Si la sortie est mesurable
  $\rightarrow$ boucle fermée :



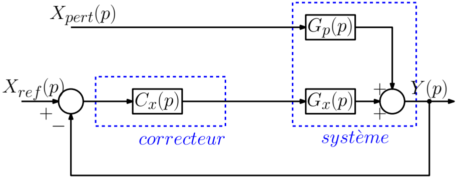
$$\frac{C_x G_x}{1 + C_x G_x} \approx 1 \text{ et } \frac{G_p}{1 + C_x G_x} \approx 0$$

2.3 Structures de commande en boucle fermée

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

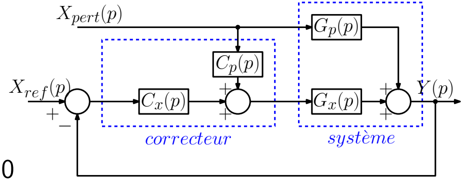
- Si la sortie est mesurable
  $\rightarrow$ boucle fermée :

$$\frac{C_x G_x}{1 + C_x G_x} \approx 1 \text{ et } \frac{G_p}{1 + C_x G_x} \approx 0$$

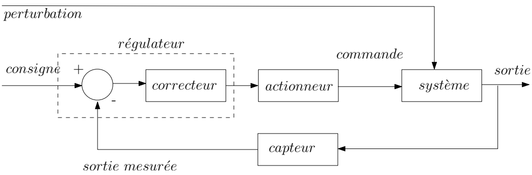


- Si sortie et perturbation sont mesurables
  $\rightarrow$ BF avec anticipation :

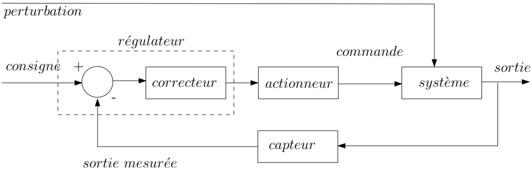
$$\frac{C_x G_x}{1 + C_x G_x} \approx 1 \text{ et } \frac{G_p + G_x C_p}{1 + C_x G_x} \approx 0$$



2.3 Schéma standard de régulation

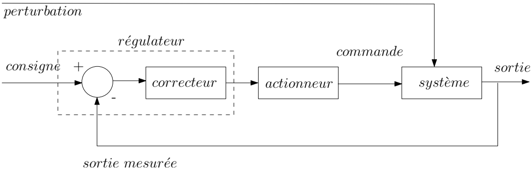


2.3 Schéma standard de régulation



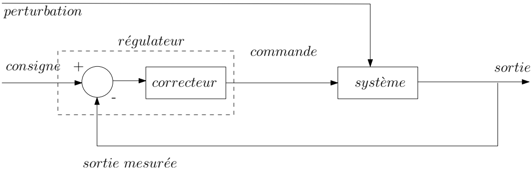
- **Objectifs :**
  - suivi de consigne par la sortie
  - limiter l'influence des perturbations
  - être robuste à des erreurs de modélisation

2.3 Schéma standard de régulation



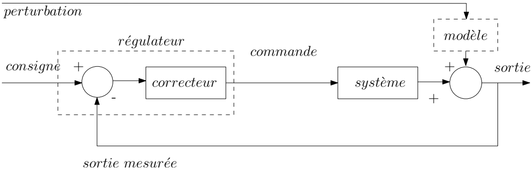
- **Objectifs :**
  - suivi de consigne par la sortie
  - limiter l'influence des perturbations
  - être robuste à des erreurs de modélisation
- **Hypothèses :**
  - capteur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)

2.3 Schéma standard de régulation



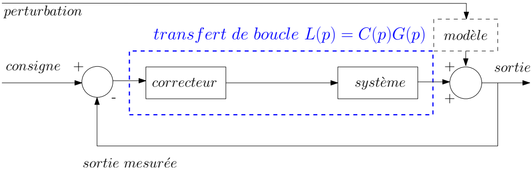
- **Objectifs :**
  - suivi de consigne par la sortie
  - limiter l'influence des perturbations
  - être robuste à des erreurs de modélisation
- **Hypothèses :**
  - capteur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)
  - actionneur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)

2.3 Schéma standard de régulation



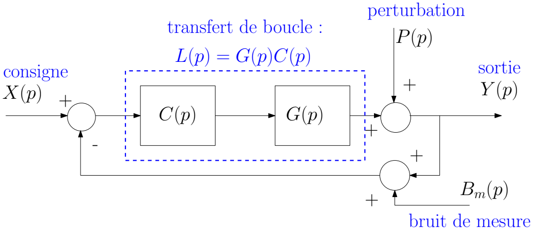
- **Objectifs :**
  - suivi de consigne par la sortie
  - limiter l'influence des perturbations
  - être robuste à des erreurs de modélisation
- **Hypothèses :**
  - capteur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)
  - actionneur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)
  - perturbations en sortie (entrée oubliée), parfois modélisées

2.3 Schéma standard de régulation



- **Objectifs :**
  - suivi de consigne par la sortie
  - limiter l'influence des perturbations
  - être robuste à des erreurs de modélisation
- **Hypothèses :**
  - capteur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)
  - actionneur rapide (/ au système) $\rightarrow$ dynamique négligée (ou intégrée)
  - perturbations en sortie (entrée oubliée), parfois modélisées
- La synthèse du correcteur se fait à partir du **transfert de boucle** :

$$L(p) = C(p)G(p)$$



- La réponse en boucle fermée est :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{=H_{BF},\ suivi\ de\ X} X(p) + \underbrace{\frac{1}{1+L(p)}}_{sensibilit\acute{e}\ \grave{a}\ P} P(p) - \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{sensibilit\acute{e}\ \grave{a}\ B_m} B_m(p)$$

- Connaissant $L(p) = G(p)C(p)$, peut-on savoir si le système en BF...
  - est stable ?
  - suit précisément $X(p)$?
  - reste stable si le gain statique de $G(p)$ varie ?
  - reste stable si la phase de $G(p)$ varie ?
  - atténue les perturbations $P(p)$ et les bruits de mesures $B_m(p)$?

Définition.

Un système est **stable**

$\Leftrightarrow$ sa réponse impulsionnelle tend vers 0, quand $t \to \infty$

$\Leftrightarrow$ une entrée bornée provoque une sortie bornée

$\Leftrightarrow$ les pôles de la fonction de transfert sont tous à **partie réelle strictement négative**

- Tester la stabilité sans calculer les pôles en BF ?
  $\rightarrow$ critère de Routh
- Il existe d'autres critères pour tester la stabilité en **BF** en connaissant la **BO**... (critères de Nyquist, critère du revers, etc.)
- Exemple :

$$G(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} \Rightarrow y(t) = a_1 e^{-2t} + \underbrace{a_2 e^{t}}_{instable!} + \dots$$

3.2 Étude de la stabilité par le critère de Routh

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- Copier les coefficients du dénominateur dans deux lignes d'un tableau

	C_1		C_j	C_{j+1}	
L_1	a_n	a_{n-2}		$\cdots$	a_0
L_2	a_{n-1}	a_{n-3}		$\cdots$	0

3.2 Étude de la stabilité par le critère de Routh

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- Copier les coefficients du dénominateur dans deux lignes d'un tableau
- Puis compléter selon la règle : $a_{i,j} = \frac{a_{i-1,1} a_{i-2,j+1} - a_{i-1,j+1} a_{i-2,1}}{a_{i-1,1}}$

	C_1		C_j	C_{j+1}	
L_1	a_n	a_{n-2}		$\cdots$	a_0
L_2	a_{n-1}	a_{n-3}		$\cdots$	0
	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
L_{i-2}	$a_{i-2,1}$			$a_{i-2,j+1}$	
L_{i-1}	$a_{i-1,1}$			$a_{i-1,j+1}$	
L_i			$\boxed{a_{i,j}}$		
L_{n+1}	$a_{n+1,1}$	0	$\cdots$	$\cdots$	0

3.2 Étude de la stabilité par le critère de Routh

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- Copier les coefficients du dénominateur dans deux lignes d'un tableau
- Puis compléter selon la règle : $a_{i,j} = \frac{a_{i-1,1} a_{i-2,j+1} - a_{i-1,j+1} a_{i-2,1}}{a_{i-1,1}}$
- $G(p)$ **stable** $\Leftrightarrow$ **les termes de la** $1^{ère}$ **colonne sont de même signe.**

	C_1		C_j	C_{j+1}	
L_1	a_n	a_{n-2}		$\cdots$	a_0
L_2	a_{n-1}	a_{n-3}		$\cdots$	0
	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
L_{i-2}	$a_{i-2,1}$			$a_{i-2,j+1}$	
L_{i-1}	$a_{i-1,1}$			$a_{i-1,j+1}$	
L_i			$a_{i,j}$		
L_{n+1}	$a_{n+1,1}$	0	$\cdots$	$\cdots$	0

3.2 Étude de la stabilité par le critère de Routh

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

- Copier les coefficients du dénominateur dans deux lignes d'un tableau
- Puis compléter selon la règle : $a_{i,j} = \frac{a_{i-1,1} a_{i-2,j+1} - a_{i-1,j+1} a_{i-2,1}}{a_{i-1,1}}$
- $G(p)$ **stable** $\Leftrightarrow$ **les termes de la** $1^{ère}$ **colonne sont de même signe.**

	C_1		C_j	C_{j+1}	
L_1	a_n	a_{n-2}		$\cdots$	a_0
L_2	a_{n-1}	a_{n-3}		$\cdots$	0
	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$
L_{i-2}	$a_{i-2,1}$			$a_{i-2,j+1}$	
L_{i-1}	$a_{i-1,1}$			$a_{i-1,j+1}$	
L_i			$\boxed{a_{i,j}}$		
L_{n+1}	$a_{n+1,1}$	0	$\cdots$	$\cdots$	0

- Exemple. $G(p) = \frac{p+1}{p^3+2p^2+p-1}$ est-il stable ?
- Exemple. Quel gain choisir pour rendre $G(p)$ stable en BF ?

3.3 Suivi de référence constante : précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

3.3 Suivi de référence constante : précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Pour une entrée constante, $x(t) = x_0$, l'erreur statique est

$$e_\infty = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + L(p)} x_0$$

3.3 Suivi de référence constante : précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Pour une entrée constante, $x(t) = x_0$, l'erreur statique est

$$e_\infty = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + L(p)} x_0$$

- **Pour avoir e_∞ faible, il faut $|L(p)| >> 1$ en basses fréquences**
- **Si $L(p)$ contient un intégrateur $\Rightarrow e_\infty = 0$**

- Pour $x(t)$ polynomial : $x(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$
- Notons : $L(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$
- L'erreur de poursuite est définie par $e(t) = x(t) - y(t)$, donc :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} \left(\frac{x_0}{p} + \cdots + \frac{\tilde{x}_n}{p^{n+1}} \right)$$

$$e_\infty = \lim_{p \to 0} p \frac{Den(p)}{Num(p) + Den(p)} \left(\frac{x_0}{p} + \cdots + \frac{\tilde{x}_n}{p^{n+1}} \right)$$

- Pour $x(t)$ polynomial : $x(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$
- Notons : $L(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$
- L'erreur de poursuite est définie par $e(t) = x(t) - y(t)$, donc :

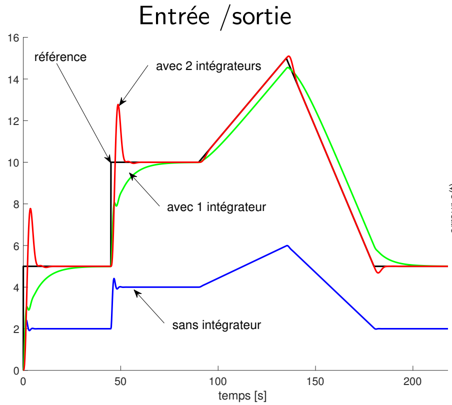
$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} \left(\frac{x_0}{p} + \cdots + \frac{\tilde{x}_n}{p^{n+1}} \right)$$

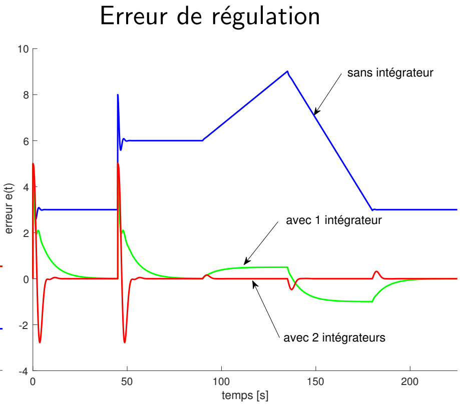
$$e_\infty = \lim_{p \to 0} p \frac{Den(p)}{Num(p) + Den(p)} \left(\frac{x_0}{p} + \cdots + \frac{\tilde{x}_n}{p^{n+1}} \right)$$

- **Quand $x(t) = x_0 + \cdots + x_n t^n$, il faut au moins $(n+1)$ intégrateurs dans $L(p)$ pour annuler e_∞**

	$x(t) = x_0$	$x(t) = x_0 + x_1 t$	$x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$
$L(p) = \tilde{L}(p)$	$e_\infty = \frac{x_0}{1+\tilde{L}(0)}$	$e_\infty = \infty$	$e_\infty = \infty$
$L(p) = \frac{1}{p}\tilde{L}(p)$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{x_1}{\tilde{L}(0)}$	$e_\infty = \infty$
$L(p) = \frac{1}{p^2}\tilde{L}(p)$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{x_2}{\tilde{L}(0)}$

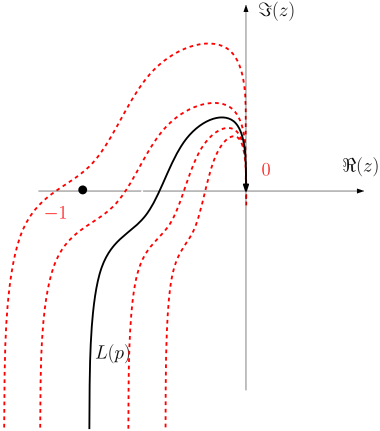
3.3 Suivi de référence variable : précision dynamique en BF





On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas

$\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1



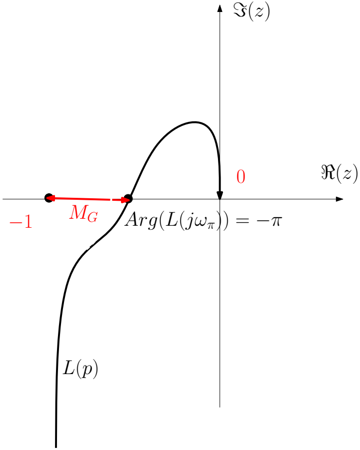
3.4 Marges de robustesse en BF

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
$\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- **Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

où $Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$



On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
$\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- **Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

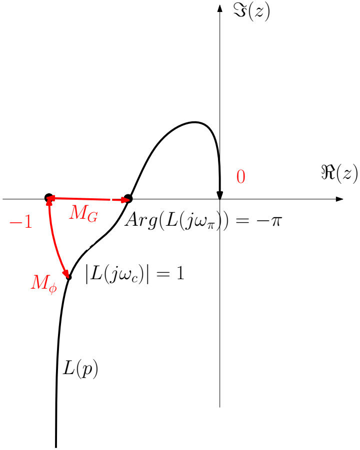
$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

où $Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$

- **Marge de phase** : déphasage max qu'on peut ajouter à $L(p)$ sans passer par -1

$$M_\phi = Arg(L(j\omega_c)) + 180$$

où $|L(j\omega_c)| = 1$



3.4 Marges de robustesse en BF

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
$\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- **Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

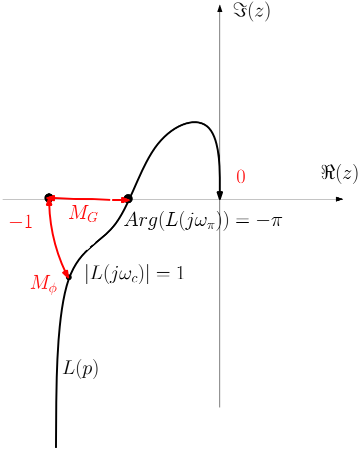
où $Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$

- **Marge de phase** : déphasage max qu'on peut ajouter à $L(p)$ sans passer par -1

$$M_\phi = Arg(L(j\omega_c)) + 180$$

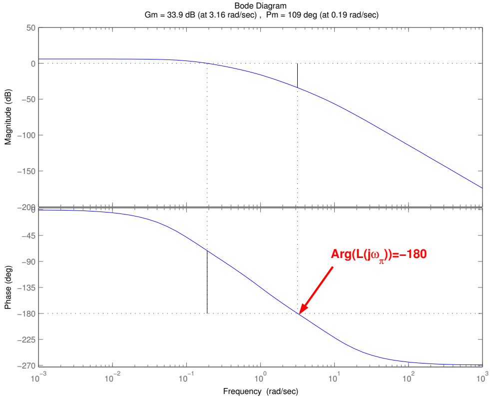
où $|L(j\omega_c)| = 1$

- **stabilité en BF** $\Leftrightarrow M_\phi > 0$



Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de **L(p)**

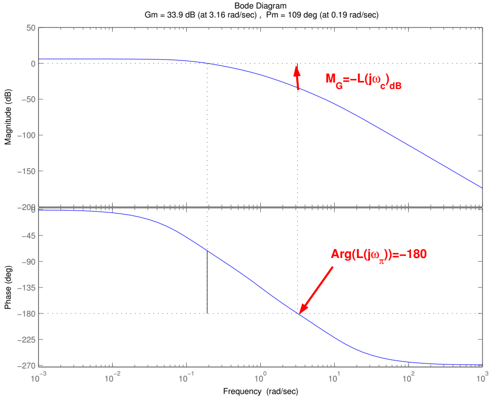
- **Marge de gain** :
  trouver ω_π tel que :
  $$Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$
  $$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$



3.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de **L(p)**

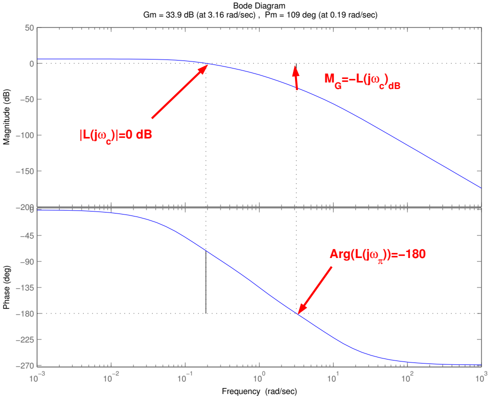
- **Marge de gain** :
  trouver ω_π tel que :
  $$Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$
  $$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$



3.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de **L(p)**

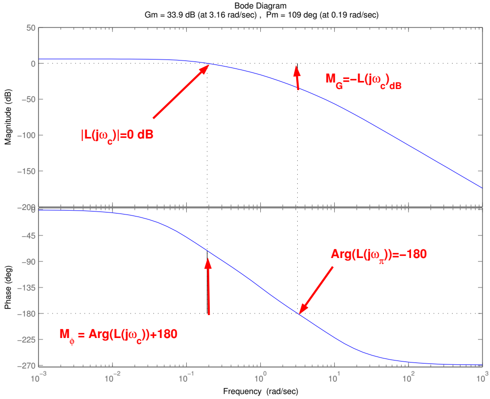
- **Marge de gain** :
  trouver ω_π tel que :
  $$Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$
  $$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$
- **Marge de phase** :
  trouver ω_c tel que :
  $$|L(j\omega_c)| = 1$$
  $$M_\phi = Arg(L(j\omega_c)) + 180$$



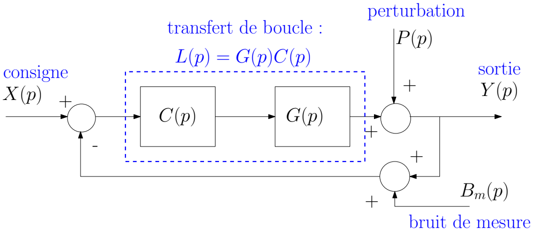
3.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de **L(p)**

- **Marge de gain** :
  trouver ω_π tel que :
  $$Arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$
  $$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$
- **Marge de phase** :
  trouver ω_c tel que :
  $$|L(j\omega_c)| = 1$$
  $$M_\phi = Arg(L(j\omega_c)) + 180$$
- **Valeurs indicatives** :
  $M_G \approx 6\ dB$ et $M_\phi \approx 45^o$
  (commande `margin` sous Matlab)



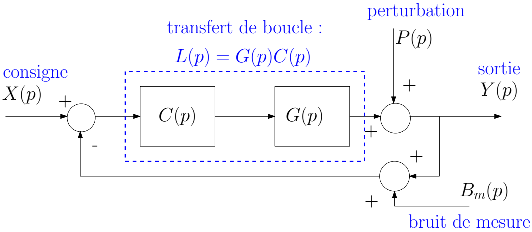
3.4 Robustesse aux bruits de mesure et aux perturbations

- 

- La réponse en boucle fermée est :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{=H_{BF},\ suivi\ de\ X} X(p) + \underbrace{\frac{1}{1+L(p)}}_{sensibilité\ à\ P} P(p) - \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{sensibilité\ à\ B_m} B_m(p)$$

3.4 Robustesse aux bruits de mesure et aux perturbations

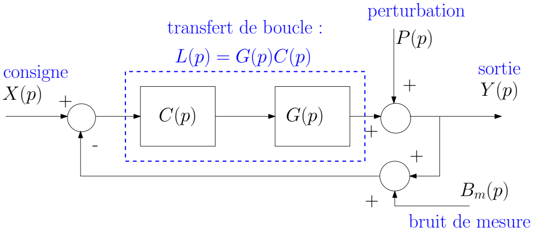


- La réponse en boucle fermée est :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{=H_{BF},\ suivi\ de\ X} X(p) + \underbrace{\frac{1}{1+L(p)}}_{sensibilité\ à\ P} P(p) - \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{sensibilité\ à\ B_m} B_m(p)$$

- Pour rejeter des perturbations en **basses fréquences** (lentes) $\rightarrow$ il faut $|L(j\omega)| >> 1$, **quand** ω **petit**

3.4 Robustesse aux bruits de mesure et aux perturbations



- La réponse en boucle fermée est :

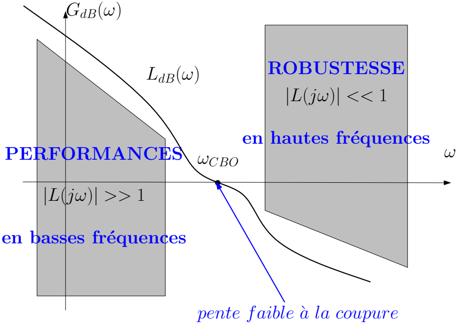
$$Y(p) = \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{=H_{BF},\ suivi\ de\ X} X(p) + \underbrace{\frac{1}{1+L(p)}}_{sensibilit\acute{e}\ \grave{a}\ P} P(p) - \underbrace{\frac{L(p)}{1+L(p)}}_{sensibilit\acute{e}\ \grave{a}\ B_m} B_m(p)$$

- Pour rejeter des perturbations en **basses fréquences** (lentes)
  → il faut $|L(j\omega)| >> 1$, **quand** ω **petit**

- Pour rejeter des bruits en **hautes fréquences**
  → il faut $|L(j\omega)| << 1$, **quand** ω **grand**

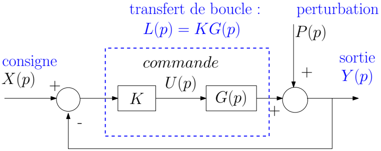
4.1 Objectifs de synthèse du correcteur

- On peut résumer les différents objectifs de synthèse d'un correcteur :
  $\rightarrow$ trouver $C(p)$, tel que $L(p) = G(p)C(p)$



- gain élevé de $L(p)$ en basses fréquences
  $\rightarrow$ bonne précision statique
  $\rightarrow$ bon rejet des perturbations lentes en sortie
- gain faible de $L(p)$ en hautes fréquences
  $\rightarrow$ bon rejet des bruits de mesure
  $\rightarrow$ bonnes marges de robustesse

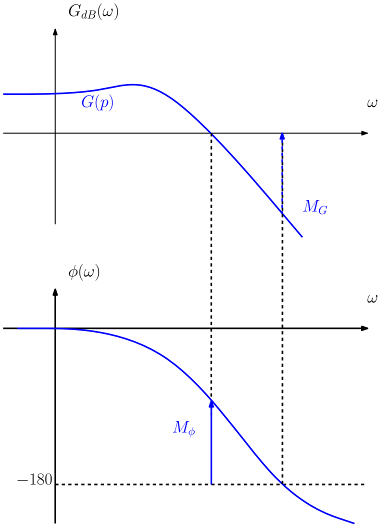
4.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)



- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

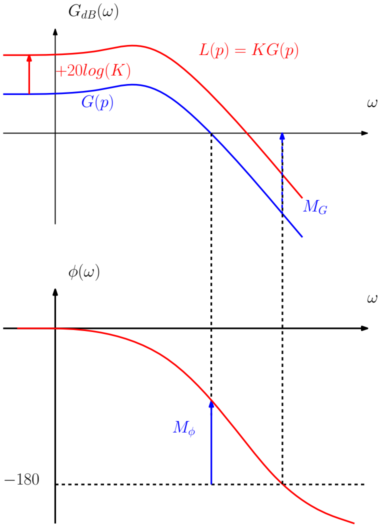
4.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)



- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

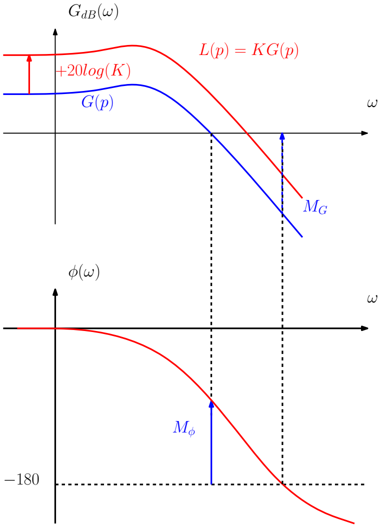
- Effets sur le transfert de boucle :



- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ augmenté de $20log(K)$ dB
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ inchangée



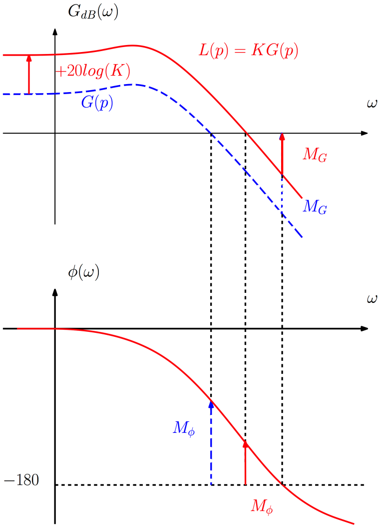
- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ augmenté de $20log(K)$ dB
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ inchangée

- Pour **K** $>> 1$
  $\rightarrow$ **précision meilleure**
  car $|L(\omega)| >> 1$ en BF

4.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)



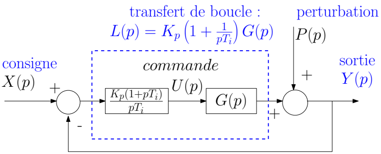
- Correcteur **Proportionnel**

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ augmenté de $20log(K)\ dB$
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ inchangée

- Pour **K** $>> 1$
  $\rightarrow$ **précision meilleure**
  car $|L(\omega)| >> 1$ en BF

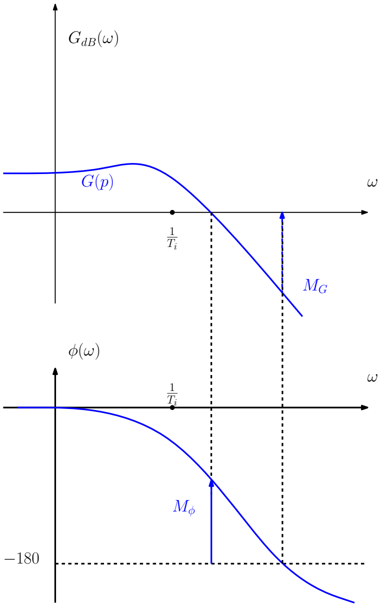
- Pour **K** $>> 1$
  $\rightarrow$ **robustesse diminuée**
  car M_ϕ et M_G $\searrow$



$$C(p) = K_p\left(1+\frac{1}{pT_i}\right)$$
$$u(t) = K_p(x-y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (x-y)$$

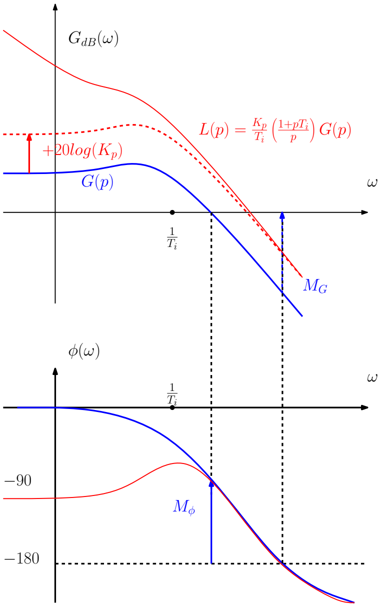
- Correct. **P**roportionnel-**I**ntégral

4.3 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)

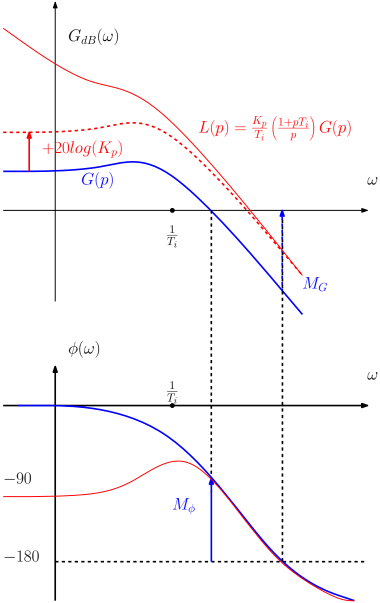


- Correct. Proportionnel-Intégral
  $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{pT_i}\right)$
  $u(t) = K_p(x-y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (x-y)$
- Effets sur le transfert de boucle :

4.3 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)

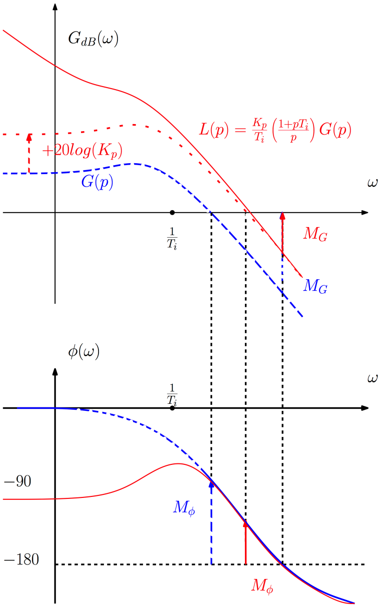


- Correct. Proportionnel-Intégral
  $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{pT_i}\right)$
  $u(t) = K_p(x-y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (x-y)$
- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ translaté vers le haut, surtout en BF
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ diminuée de 90^o en BF

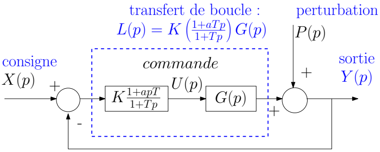


- Correct. Proportionnel-Intégral
  $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{pT_i}\right)$
  $u(t) = K_p(x-y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (x-y)$
- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ translaté vers le haut, surtout en BF
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ diminuée de 90^o en BF
- **précision meilleure**
  $(|L(0)| \rightarrow \infty)$
  rejet de perturbations constantes
  suivi de référence constante

4.3 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)

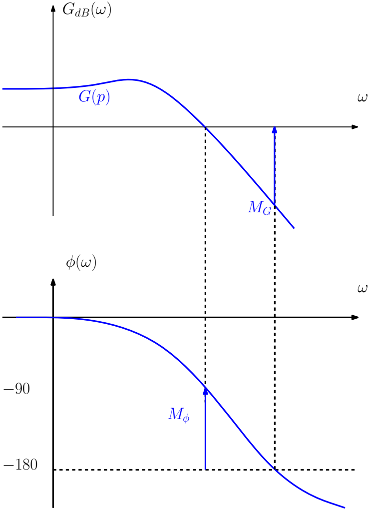


- Correct. Proportionnel-Intégral
  $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{pT_i}\right)$
  $u(t) = K_p(x-y) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t (x-y)$
- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ translaté vers le haut, surtout en BF
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ diminuée de 90^o en BF
- **précision meilleure**
  $(|L(0)| \rightarrow \infty)$
  rejet de perturbations constantes
  suivi de référence constante
- **robustesse éventuellement diminuée**
- réponse parfois lente



- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K\frac{1+aTp}{1+Tp},\ \ a > 1$$

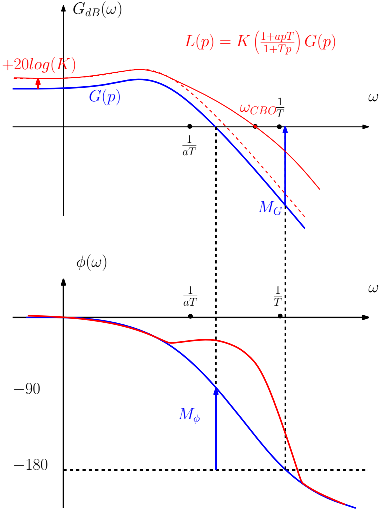


- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K\frac{1+aTp}{1+Tp}, \ \ a > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :

4.4 Améliorer la robustesse : avance de phase

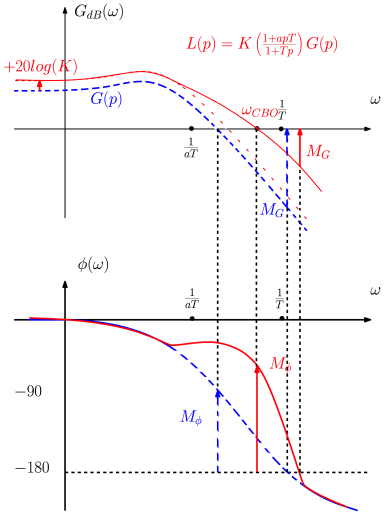


- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K\frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ augmenté de $20log(K)$ en BF et plus en HF
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ augmentée, pour $1/(aT) < \omega < 1/T$
- Pour **K** $>> 1$
  $\rightarrow$ **précision** car $|L(0)| \nearrow$
  $\rightarrow$ **rapidité** car $\omega_{CBO} \nearrow$

4.4 Améliorer la robustesse : avance de phase



- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K\frac{1+aTp}{1+Tp}, \ \ a > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :
  $\rightarrow$ gain de $L(p)$ augmenté de $20log(K)$ en BF et plus en HF
  $\rightarrow$ phase de $L(p)$ augmentée, pour $1/(aT) < \omega < 1/T$
- Pour **K** $>> 1$
  $\rightarrow$ **précision** car $|L(0)| \nearrow$
  $\rightarrow$ **rapidité** car $\omega_{CBO} \nearrow$
- **robustesse**
  $\rightarrow$ $M_\phi \nearrow$ car phase $\nearrow$ pour $\omega \approx \omega_{CBO}$
  $\rightarrow$ possible détérioration de M_G

4.5 Précision statique et rapidité : proportionnel intégral dérivé (PID)

- Pour accélérer le transitoire du **PI** on ajoute un terme **D**érivé :

$$C(p) = K_p(1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d)$$

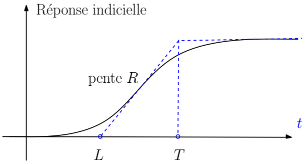
- Le régulateur obtenu cumule les effets d'un PI (en basses fréquences) et d'un avance de phase (en hautes fréquences)

4.5 Précision statique et rapidité : proportionnel intégral dérivé (PID)

- Pour accélérer le transitoire du **PI** on ajoute un terme **D**érivé :

$$C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d\right)$$

- Le régulateur obtenu cumule les effets d'un PI (en basses fréquences) et d'un avance de phase (en hautes fréquences)
- La méthode de Ziegler-Nichols permet d'avoir des valeurs des gains à partir de la réponse indicielle de $G(p)$ (stable)

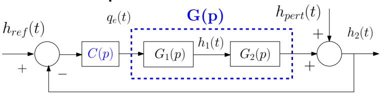


	P	PI	PID
K_p	$\frac{1}{LR}$	$\frac{0.9}{LR}$	$\frac{1.2}{LR}$
T_i		$3.3L$	$2L$
T_d			$0.5L$

- Les valeurs obtenues sont approximatives, il faut ensuite affiner

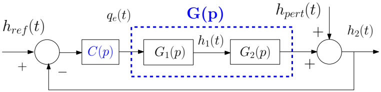
4.6 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

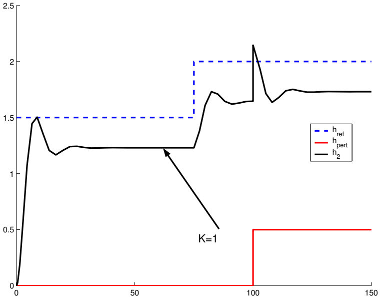


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0$, $h_{ref}(0) = 1.5$

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

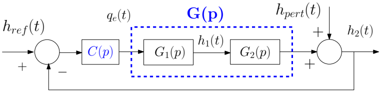


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0$, $h_{ref}(0) = 1.5$
- **P :** $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre

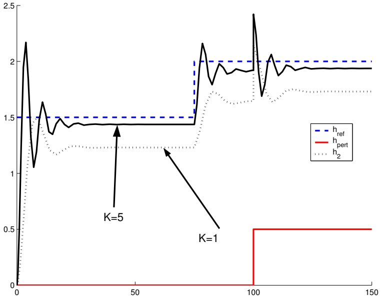


4.6 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

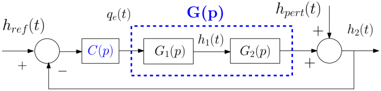


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0,\ h_{ref}(0) = 1.5$
- **P :** $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre

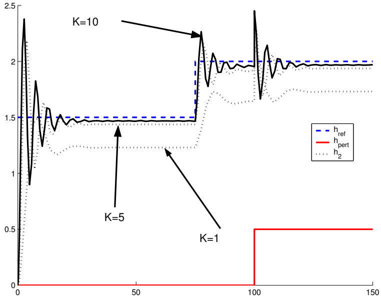


4.6 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

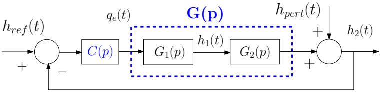


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0$, $h_{ref}(0) = 1.5$
- **P :** $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- **P :** $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis

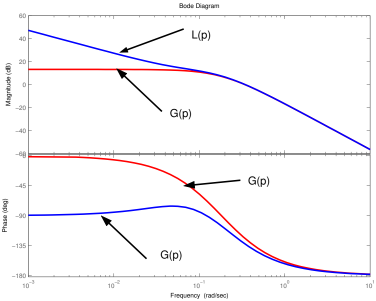


4.6 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

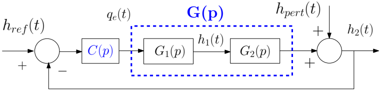


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0,\ h_{ref}(0) = 1.5$
- **P :** $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- **P :** $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis
- **PI :** $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
  $\rightarrow$ suivi et rejet corrects

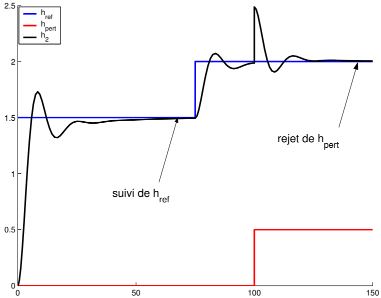


4.6 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

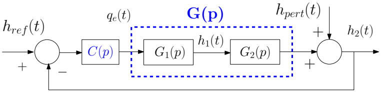


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0$, $h_{ref}(0) = 1.5$
- **P :** $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- **P :** $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis
- **PI :** $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
  $\rightarrow$ suivi et rejet corrects

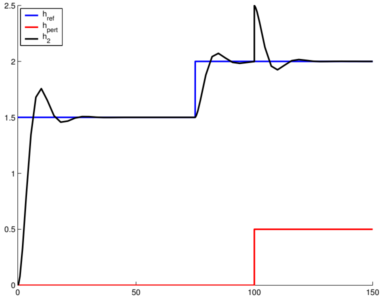


4.6 Exemple de corrections P, PI, PID

- Reprenons l'exemple des 2 cuves avec une perturbation

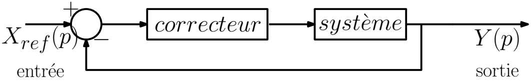


- Suivre h_{ref} et rejeter h_{pert}.
- $h_1(0) = h_2(0) = 0,\ h_{ref}(0) = 1.5$
- **P :** $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre
- **P :** $C(p) = 10 \rightarrow$ assez précis
- **PI :** $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
  $\rightarrow$ suivi et rejet corrects
- **PID :**
  $C(p) = 0.9(1 + \frac{1}{12p} + 0.5p)$
  $\rightarrow$ transitoire amélioré



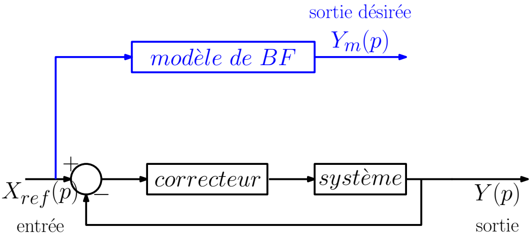
Objectif : déterminer les paramètres du correcteur

- système et ordre du correcteur sont fixés



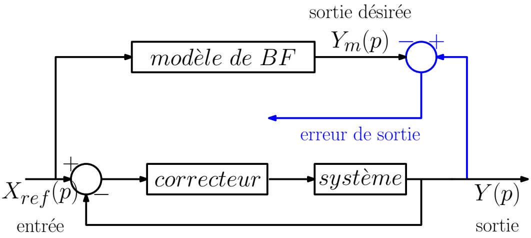
Objectif : déterminer les paramètres du correcteur

- système et ordre du correcteur sont fixés
- on définit un modèle à suivre par le **système en BF**



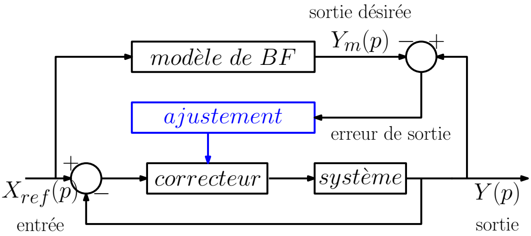
Objectif : déterminer les paramètres du correcteur

- système et ordre du correcteur sont fixés
- on définit un modèle à suivre par le **système en BF**
- le correcteur doit minimiser l'écart entre $y(t)$ et $y_m(t)$



Objectif : déterminer les paramètres du correcteur

- système et ordre du correcteur sont fixés
- on définit un modèle à suivre par le **système en BF**
- le correcteur doit minimiser l'écart entre $y(t)$ et $y_m(t)$
- le correcteur est ajusté pour minimiser cet écart



4.7 Réglage de correcteur par l'approche temporelle

- Trouver les paramètres du correcteur θ qui minimisent l'écart sortie/modèle quantifiée par :

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(y(t,\theta) - y_m(t))^2 dt$$

- Minimisation itérative $\Phi(\theta)$ par
  - gradient : $\theta_{k+1} = \theta_k - \Delta\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)_{\theta_k}$
  - Newton-Raphson : $\theta_{k+1} = \theta_k - \left(\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}\right)_{\theta_k}^{-1}\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)_{\theta_k}$

4.7 Réglage de correcteur par l'approche temporelle

- Trouver les paramètres du correcteur θ qui minimisent l'écart sortie/modèle quantifiée par :

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (y(t,\theta) - y_m(t))^2 dt$$

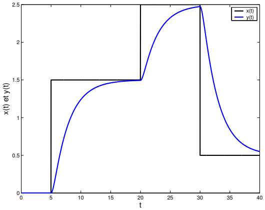
- Minimisation itérative $\Phi(\theta)$ par
  - gradient : $\theta_{k+1} = \theta_k - \Delta \left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)_{\theta_k}$
  - Newton-Raphson : $\theta_{k+1} = \theta_k - \left(\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}\right)_{\theta_k}^{-1} \left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)_{\theta_k}$
- Pour une valeur donnée de θ_k :
  - simulation du système en BF $\rightarrow y(t,\theta_k)$
  - simulation des fonctions de sensibilités $\rightarrow \frac{dy(t,\theta_k)}{d\theta}$
  - calcul de $\left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)_{\theta_k} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial y(t,\theta_k)}{\partial\theta}\right)(y(t,\theta_k) - y_m(t))dt$
  - calcul de $\left(\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}\right)_{\theta_k} \simeq \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial y(t,\theta_k)}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y(t,\theta_k)}{\partial\theta}\right)^T dt$
  - calcul de la nouvelle valeur de θ_{k+1}, tant que $\left|\frac{d\Phi(\theta_k)}{d\theta}\right| > \varepsilon$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système à contrôler :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 3p + p^2}$$

réponse à $x(t)$ trop lente
$T_{2\%} \approx 10\ s$

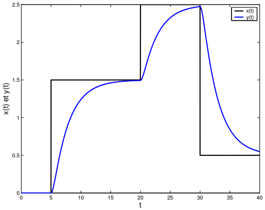


4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système à contrôler :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 3p + p^2}$$

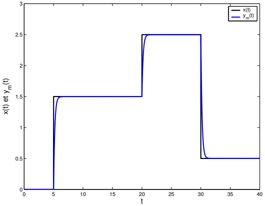
réponse à $x(t)$ trop lente
$T_{2\%} \approx 10\ s$



- Modèle à suivre en BF :

$$M(p) = \frac{1}{1 + 0.2p}$$

$M(0) = 1$ et $T_{2\%} \approx 0.6\ s$

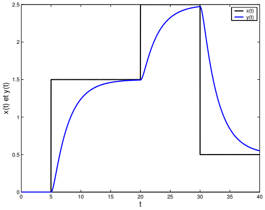


4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système à contrôler :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 3p + p^2}$$

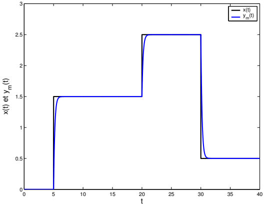
réponse à $x(t)$ trop lente
$T_{2\%} \approx 10\ s$



- Modèle à suivre en BF :

$$M(p) = \frac{1}{1 + 0.2p}$$

$M(0) = 1$ et $T_{2\%} \approx 0.6\ s$



- On cherche un correcteur de type PID, à 3 paramètres $\theta^T = [a\ \ b\ \ c]$:

$$C(p, \theta) = \frac{cp^2 + bp + a}{p}$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système en BF :

$$Y(p,\theta) = \frac{cp^2 + bp + a}{p^3 + (3+c)p^2 + (b+1)p + a} X(p)$$

- Équation différentielle en x et y

$$\dddot{y}(t,\theta) + (3+c)\ddot{y}(t,\theta) + (b+1)\dot{y}(t,\theta) + ay(t,\theta) = c\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t)$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système en BF :

$$Y(p,\theta) = \frac{cp^2 + bp + a}{p^3 + (3+c)p^2 + (b+1)p + a} X(p)$$

- Équation différentielle en x et y

$$\dddot{y}(t,\theta) + (3+c)\ddot{y}(t,\theta) + (b+1)\dot{y}(t,\theta) + ay(t,\theta) = c\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t)$$

- On définit les sensibilités de la sortie aux paramètres a, b et c par :

$$\sigma_a(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial a} \qquad \sigma_b(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial b} \qquad \sigma_c(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial c}$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système en BF :

$$Y(p,\theta) = \frac{cp^2 + bp + a}{p^3 + (3+c)p^2 + (b+1)p + a} X(p)$$

- Équation différentielle en x et y

$$\dddot{y}(t,\theta) + (3+c)\ddot{y}(t,\theta) + (b+1)\dot{y}(t,\theta) + ay(t,\theta) = c\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t)$$

- On définit les sensibilités de la sortie aux paramètres a, b et c par :

$$\sigma_a(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial a} \qquad \sigma_b(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial b} \qquad \sigma_c(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial c}$$

- On dérive l'équation différentielle en x et y par rapport à a, b et c :

$$\dddot{\sigma}_a(t,\theta) + (3+c)\ddot{\sigma}_a(t,\theta) + (b+1)\dot{\sigma}_a(t,\theta) + a\sigma_a(t,\theta) = x(t) - y(t,\theta)$$
$$\dddot{\sigma}_b(t,\theta) + (3+c)\ddot{\sigma}_b(t,\theta) + (b+1)\dot{\sigma}_b(t,\theta) + a\sigma_b(t,\theta) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t,\theta)$$
$$\dddot{\sigma}_c(t,\theta) + (3+c)\ddot{\sigma}_c(t,\theta) + (b+1)\dot{\sigma}_c(t,\theta) + a\sigma_c(t,\theta) = \ddot{x}(t) - \ddot{y}(t,\theta)$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Système en BF :

$$Y(p,\theta) = \frac{cp^2 + bp + a}{p^3 + (3+c)p^2 + (b+1)p + a} X(p)$$

- Équation différentielle en x et y

$$\dddot{y}(t,\theta) + (3+c)\ddot{y}(t,\theta) + (b+1)\dot{y}(t,\theta) + ay(t,\theta) = c\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + ax(t)$$

- On définit les sensibilités de la sortie aux paramètres a, b et c par :

$$\sigma_a(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial a} \qquad \sigma_b(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial b} \qquad \sigma_c(t,\theta) = \frac{\partial y(t,\theta)}{\partial c}$$

- On dérive l'équation différentielle en x et y par rapport à a, b et c :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\sigma_a(t,\theta)\right) &= \Sigma_a(p) = H_a(p)(X(p) - Y(p)) \\
\mathcal{L}\left(\sigma_b(t,\theta)\right) &= \Sigma_b(p) = H_b(p)(X(p) - Y(p)) \\
\mathcal{L}\left(\sigma_c(t,\theta)\right) &= \Sigma_c(p) = H_c(p)(X(p) - Y(p))
\end{aligned}$$

- Pour $x(t)$ et $y(t,\theta_k)$ connus $\Rightarrow \sigma_a(t,\theta_k)$, $\sigma_b(t,\theta_k)$ et $\sigma_c(t,\theta_k)$

- Initialisation (Ziegler-Nichols) : $a_0 = 4.8$, $b_0 = 4.8$ et $c_0 = 1.2$, $k = 0$
- Simulation du système en BF :

$$Y(p, \theta_k) = \frac{c_k p^2 + b_k p + a_k}{p^3 + (3 + c_k)p^2 + (b_k + 1)p + a_k} X(p)$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Initialisation (Ziegler-Nichols) : $a_0 = 4.8$, $b_0 = 4.8$ et $c_0 = 1.2$, $k = 0$
- Simulation du système en BF :

$$Y(p,\theta_k) = \frac{c_k p^2 + b_k p + a_k}{p^3 + (3 + c_k)p^2 + (b_k + 1)p + a_k} X(p)$$

- Simulation des fonctions de sensibilités :

$$\Sigma_a(p) = \frac{X(p) - Y(p,\theta_k)}{p^3 + (3+c_k)p^2 + (b_k+1)p + a_k} \qquad \Sigma_b(p) = p\Sigma_a(p) \quad \Sigma_c(p) = p^2\Sigma_a(p)$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Initialisation (Ziegler-Nichols) : $a_0 = 4.8,\ b_0 = 4.8$ et $c_0 = 1.2,\ k = 0$
- Simulation du système en BF :

$$Y(p,\theta_k) = \frac{c_k p^2 + b_k p + a_k}{p^3 + (3 + c_k)p^2 + (b_k + 1)p + a_k} X(p)$$

- Simulation des fonctions de sensibilités :

$$\Sigma_a(p) = \frac{X(p) - Y(p,\theta_k)}{p^3 + (3 + c_k)p^2 + (b_k + 1)p + a_k} \qquad \Sigma_b(p) = p\Sigma_a(p) \quad \Sigma_c(p) = p^2\Sigma_a(p)$$

- Calculs approchés du gradient et du Hessien (sommes de Riemann) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \sigma_a(t) \\ \sigma_b(t) \\ \sigma_c(t) \end{pmatrix} (y(t) - y_m(t))dt \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \approx \int_0^\infty \begin{pmatrix} \sigma_a(t) \\ \sigma_b(t) \\ \sigma_c(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_a(t) \\ \sigma_b(t) \\ \sigma_c(t) \end{pmatrix}^T dt$$

4.7 Un exemple de réglage par approche temporelle

- Initialisation (Ziegler-Nichols) : $a_0 = 4.8,\ b_0 = 4.8$ et $c_0 = 1.2,\ k = 0$
- Simulation du système en BF :

$$Y(p,\theta_k) = \frac{c_k p^2 + b_k p + a_k}{p^3 + (3+c_k)p^2 + (b_k+1)p + a_k} X(p)$$

- Simulation des fonctions de sensibilités :

$$\Sigma_a(p) = \frac{X(p) - Y(p,\theta_k)}{p^3 + (3+c_k)p^2 + (b_k+1)p + a_k} \qquad \Sigma_b(p) = p\Sigma_a(p) \quad \Sigma_c(p) = p^2\Sigma_a(p)$$

- Calculs approchés du gradient et du Hessien (sommes de Riemann) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} \sigma_a(t) \\ \sigma_b(t) \\ \sigma_c(t) \end{pmatrix} (y(t) - y_m(t))dt \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \approx \int_0^\infty \begin{pmatrix} \sigma_a(t) \\ \sigma_b(t) \\ \sigma_c(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_a(t) \\ \sigma_b(t) \\ \sigma_c(t) \end{pmatrix}^T dt$$

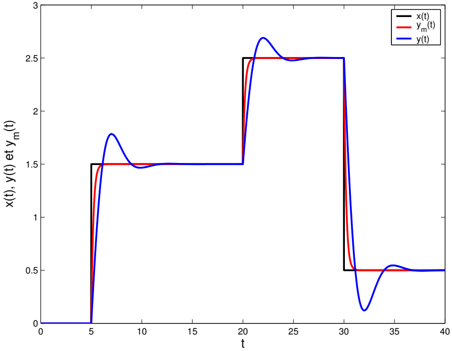
- Mise à jour des paramètres $\theta_k = [a_k\ b_k\ c_k]^T$:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right)^{-1}_{\theta_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_{\theta_k}$$

- Itération tant que $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right|_{\theta_k} > \varepsilon$

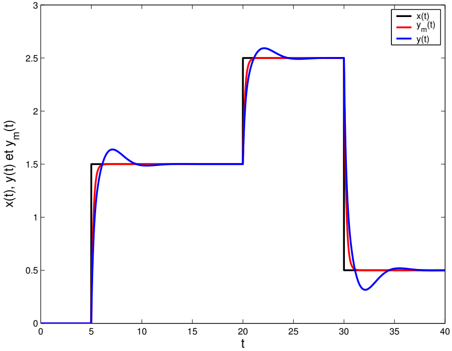
Résultats du réglage :

Comparaison entre $x(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$ à l'itération 1



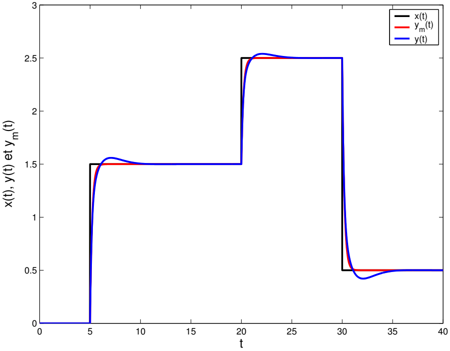
Résultats du réglage :

Comparaison entre $x(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$ à l'itération 2



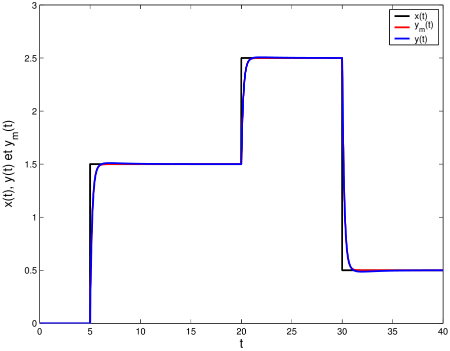
Résultats du réglage :

Comparaison entre $x(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$ à l'itération 3



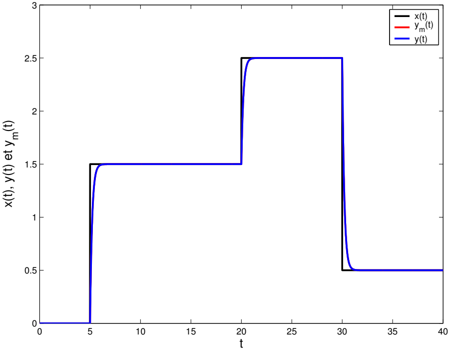
Résultats du réglage :

Comparaison entre $x(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$ à l'itération 4



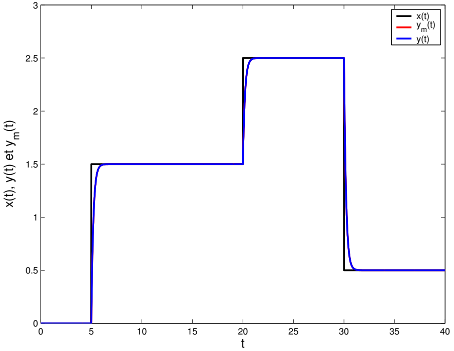
Résultats du réglage :

Comparaison entre $x(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$ à l'itération 5



Résultats du réglage :

Comparaison entre $x(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$ à l'itération 6



Le correcteur trouvé est : $C(p) = \frac{5+15p+4.99p^2}{p}$

5.1 Introduction à l'identification

- **Définition de l'identification :**
  caractériser le lien mathématique entre entrée(s) et sortie(s) à partir de connaissances et/ou de données expérimentales.
- **Origine du modèle :**
  $\rightarrow$ modèle de connaissance (modèles physiques, chimiques, etc.)
  $\rightarrow$ boîte noire (calage de paramètres à partir des données)

5.1 Introduction à l'identification

- **Définition de l'identification :**
  caractériser le lien mathématique entre entrée(s) et sortie(s) à partir de connaissances et/ou de données expérimentales.
- **Origine du modèle :**
  $\rightarrow$ modèle de connaissance (modèles physiques, chimiques, etc.)
  $\rightarrow$ boîte noire (calage de paramètres à partir des données)
- **Nature du modèle :**
  $\rightarrow$ statique / dynamique
  $\rightarrow$ linéaire / non linéaire (en les paramètres et/ou les variables)
  $\rightarrow$ variables continues / discrètes
  $\rightarrow$ temps continu / discret

- **Définition de l'identification :**
  caractériser le lien mathématique entre entrée(s) et sortie(s) à partir de connaissances et/ou de données expérimentales.
- **Origine du modèle :**
  → modèle de connaissance (modèles physiques, chimiques, etc.)
  → boîte noire (calage de paramètres à partir des données)
- **Nature du modèle :**
  → statique / dynamique
  → linéaire / non linéaire (en les paramètres et/ou les variables)
  → variables continues / discrètes
  → temps continu / discret
- **Utilisation :**
  → description et analyse (compréhension, analyse de sensibilité, etc)
  → simulation d'un procédé (dimensionnement, formation d'opérateurs, conception de correcteurs, etc)
  → surveillance (comparaison comportement réel / modèle de bon fonctionnement → alerte)

5.1 Étapes de la modélisation

- **Définition du système :**
  → frontières du système, choix des variables entrées/sorties, choix des paramètres à identifier

- **Définition du modèle :**
  → choix de la structure du modèle, choix de la nature du modèle, simplification

5.1 Étapes de la modélisation

- **Définition du système :**
  → frontières du système, choix des variables entrées/sorties, choix des paramètres à identifier
- **Définition du modèle :**
  → choix de la structure du modèle, choix de la nature du modèle, simplification
- **Identification de paramètres :**
  → détermination de la valeur des paramètres minimisant l'écart entre grandeurs modélisées et réelles

5.1 Étapes de la modélisation

- **Définition du système :**
  → frontières du système, choix des variables entrées/sorties, choix des paramètres à identifier
- **Définition du modèle :**
  → choix de la structure du modèle, choix de la nature du modèle, simplification
- **Identification de paramètres :**
  → détermination de la valeur des paramètres minimisant l'écart entre grandeurs modélisées et réelles
- **Validation de l'identification :**
  → comparaison des grandeurs modélisées et réelles sur un autre jeux de données (que celles ayant servi à l'identification)

- Modélisation statique :
  on cherche les paramètres d'une relation entrée / sortie du type :

$$y_m(t,\theta) = f(x(t),\theta)$$

  où $f(.,.)$ est connue et avec :
  - $y_m(t,\theta)$ est la sortie modélisée
  - $x(t)$ est un vecteur d'entrée(s)
  - θ est le vecteur de paramètres à déterminer

5.2 Obtention d'un modèle statique

- Modélisation statique :
  on cherche les paramètres d'une relation entrée / sortie du type :

$$y_m(t, \theta) = f(x(t), \theta)$$

  où $f(.,.)$ est connue et avec :
  - $y_m(t, \theta)$ est la sortie modélisée
  - $x(t)$ est un vecteur d'entrée(s)
  - θ est le vecteur de paramètres à déterminer
- Objectif :
  déterminer θ qui minimise l'écart entre $y_m(t, \theta)$ et $y(t)$:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(y_m(t,\theta) - y(t))^2 dt \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_m(k,\theta) - y(k))^2$$

5.2 Obtention d'un modèle statique

- Modélisation statique :
  on cherche les paramètres d'une relation entrée / sortie du type :

$$y_m(t,\theta) = f(x(t),\theta)$$

  où $f(.,.)$ est connue et avec :
  - $y_m(t,\theta)$ est la sortie modélisée
  - $x(t)$ est un vecteur d'entrée(s)
  - θ est le vecteur de paramètres à déterminer
- Objectif :
  déterminer θ qui minimise l'écart entre $y_m(t,\theta)$ et $y(t)$:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y_m(t,\theta) - y(t))^2 dt \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_m(k,\theta) - y(k))^2$$

- Résolution d'un problème d'optimisation :
  - $f(x,\theta)$ linéaire en $\theta \rightarrow$ moindres carrés
  - $f(x,\theta)$ non linéaire en $\theta \rightarrow$ algorithme du gradient ou Newton-Raphson

5.2 Obtention d'un modèle statique linéaire

- On dispose d'un relevé de données à certains instants :

$$\{y(k)\}_{k=1,\dots,N}\,, \quad \{x_1(k)\}_{k=1,\dots,N}\,, \quad \dots\,, \quad \{x_n(k)\}_{k=1,\dots,N}$$

- Si les grandeurs sont corrélées linéairement, on peut écrire le modèle :

$$y_m(k,\theta) = a_0 + a_1 x_1(k) + \cdots + a_n x_n(k)$$

5.2 Obtention d'un modèle statique linéaire

- On dispose d'un relevé de données à certains instants :

$$\{y(k)\}_{k=1,\ldots,N}\,, \quad \{x_1(k)\}_{k=1,\ldots,N}\,, \quad \ldots, \quad \{x_n(k)\}_{k=1,\ldots,N}$$

- Si les grandeurs sont corrélées linéairement, on peut écrire le modèle :

$$y_m(k,\theta) = a_0 + a_1 x_1(k) + \cdots + a_n x_n(k)$$

- Par concaténation, on a un système de N équations à $(n+1)$ inconnues :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_m(1,\theta) \\ y_m(2,\theta) \\ \vdots \\ y_m(N,\theta) \end{bmatrix}}_{Y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1(1) & x_2(1) & \ldots & x_n(1) \\ 1 & x_1(2) & x_2(2) & \ldots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1(N) & x_2(N) & \ldots & x_n(N) \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{Y}$$

5.2 Obtention d'un modèle statique linéaire

- On dispose d'un relevé de données à certains instants :

$$\{y(k)\}_{k=1,\dots,N}\,, \quad \{x_1(k)\}_{k=1,\dots,N}\,, \quad \dots, \quad \{x_n(k)\}_{k=1,\dots,N}$$

- Si les grandeurs sont corrélées linéairement, on peut écrire le modèle :

$$y_m(k,\theta) = a_0 + a_1 x_1(k) + \cdots + a_n x_n(k)$$

- Par concaténation, on a un système de N équations à $(n+1)$ inconnues :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_m(1,\theta) \\ y_m(2,\theta) \\ \vdots \\ y_m(N,\theta) \end{bmatrix}}_{Y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ 1 & x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_n(N) \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{Y}$$

- Minimisation de $J(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(y_m(k,\theta) - y(k))^2$ par moindres carrés :

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

5.2 Exemple d'identification de modèle statique linéaire

- On cherche à modéliser la pollution à l'ozone (O_3) en fonction des taux de monoxyde d'azote (NO) et de dioxyde d'azote (NO_2), de l'humidité dans l'air (H) et du rayonnement solaire (RS).
- On dispose de plus de 15000 mesures de chaque grandeur (CUGN)

5.2 Exemple d'identification de modèle statique linéaire

- On cherche à modéliser la pollution à l'ozone (O_3) en fonction des taux de monoxyde d'azote (NO) et de dioxyde d'azote (NO_2), de l'humidité dans l'air (H) et du rayonnement solaire (RS).
- On dispose de plus de 15000 mesures de chaque grandeur (CUGN)
- Coefficients de corrélation du taux de O_3 avec les autres grandeurs :

	NO	NO_2	RS	H
$corr(O_3, *)$	-0.2820	-0.2907	0.6093	-0.7759

- On cherche les paramètres du modèle :

$$O_{3m}(k) = a_0 + a_1 NO(k) + a_2 NO_2(k) + a_3 RS(k) + a_4 H(k)$$

5.2 Exemple d'identification de modèle statique linéaire

- On cherche à modéliser la pollution à l'ozone (O_3) en fonction des taux de monoxyde d'azote (NO) et de dioxyde d'azote (NO_2), de l'humidité dans l'air (H) et du rayonnement solaire (RS).
- On dispose de plus de 15000 mesures de chaque grandeur (CUGN)
- Coefficients de corrélation du taux de O_3 avec les autres grandeurs :

	NO	NO_2	RS	H
$corr(O_3, *)$	-0.2820	-0.2907	0.6093	-0.7759

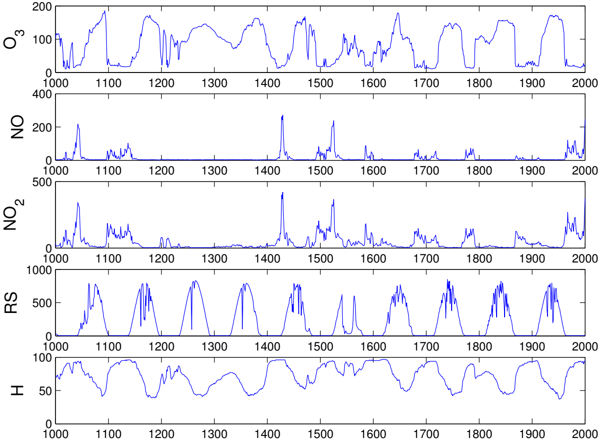
- On cherche les paramètres du modèle :

$$O_{3m}(k) = a_0 + a_1 NO(k) + a_2 NO_2(k) + a_3 RS(k) + a_4 H(k)$$

- Résultat : $\theta = [223.8073 \; 1.1488 \; -0.8837 \; 0.0144 \; -1.6650]$
$\rightarrow$ erreur de modélisation de l'ordre de 10% de la valeur de O_3.

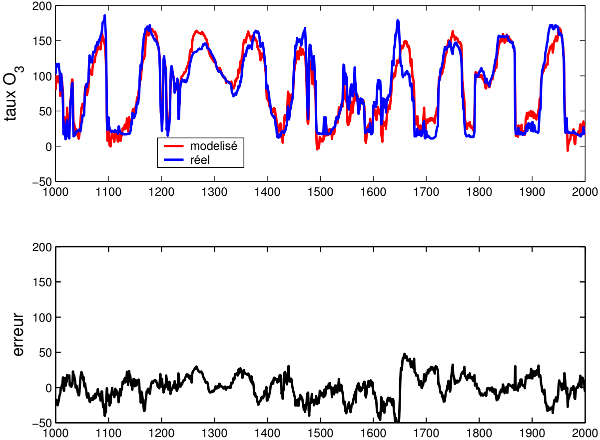
5.2 Exemple d'identification de modèle statique linéaire

Données utilisées pour la modélisation ($k = 1000, \ldots, 2000$, soit 10 jours)

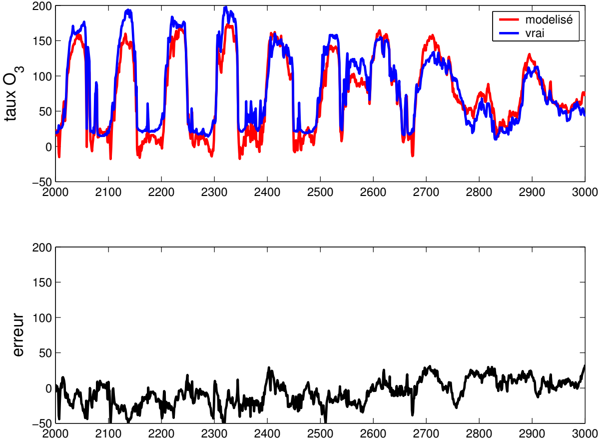


5.2 Exemple d'identification de modèle statique linéaire

Comparaison du taux de O_3 réel et modélisé ($k = 1000, \ldots, 2000$)



Validation du modèle de O_3 ($k = 2000, \ldots, 3000$)



- **Modèles non linéaires en l'entrée**, par exemple polynomial :

$$y_m(k,\theta) = a_0 + a_1 x(k) + a_2 x(k)^2 + \cdots + a_n x(k)^n$$

- **Modèles non linéaires en l'entrée**, par exemple polynomial :

$$y_m(k,\theta) = a_0 + a_1 x(k) + a_2 x(k)^2 + \cdots + a_n x(k)^n$$

- Par concaténation pour $k = 1, \ldots, N$, il vient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_m(1,\theta) \\ y_m(2,\theta) \\ \vdots \\ y_m(N,\theta) \end{bmatrix}}_{Y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x(1) & x(1)^2 & \ldots & x(1)^n \\ 1 & x(2) & x(2)^2 & \ldots & x(2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x(N) & x(N)^2 & \ldots & x(N)^n \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{Y}$$

- **Solution** de la minimisation de $J(\theta) = (X\theta - Y)^T(X\theta - Y)$:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

5.2 Extensions immédiates

- **Modèles non linéaires en l'entrée**, par exemple polynomial :

$$y_m(k,\theta) = a_0 + a_1 x(k) + a_2 x(k)^2 + \cdots + a_n x(k)^n$$

- Par concaténation pour $k = 1, \ldots, N$, il vient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_m(1,\theta) \\ y_m(2,\theta) \\ \vdots \\ y_m(N,\theta) \end{bmatrix}}_{Y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x(1) & x(1)^2 & \ldots & x(1)^n \\ 1 & x(2) & x(2)^2 & \ldots & x(2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x(N) & x(N)^2 & \ldots & x(N)^n \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\theta} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{Y}$$

- **Solution** de la minimisation de $J(\theta) = (X\theta - Y)^T(X\theta - Y)$:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- Se généralise à tout modèle **linéaire en θ, linéaire ou non en l'entrée**
- Pour un modèle non linéaire en $\theta \rightarrow$ solutions itératives (Gradient, N-R)

5.2 Extension presque immédiate

- **Modèles dynamiques linéaires à temps discret**

$$
\begin{aligned}
y_m(k,\theta) = & a_1 y_m(k-1,\theta) + a_2 y_m(k-2,\theta) + \cdots + a_n y_m(k-n,\theta) \\
& + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m), n \geq m
\end{aligned}
$$

5.2 Extension presque immédiate

- **Modèles dynamiques linéaires à temps discret**

$$\begin{aligned} y_m(k,\theta) = & a_1 y_m(k-1,\theta) + a_2 y_m(k-2,\theta) + \cdots + a_n y_m(k-n,\theta) \\ & + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m), \; n \geq m \end{aligned}$$

- Par concaténation pour $k = n+1, \ldots, N$, il vient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_m(n+1,\theta) \\ y_m(n+2,\theta) \\ \vdots \\ y_m(N,\theta) \end{bmatrix}}_{Y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} y(n) & \ldots & y(1) & x(n+1) & \ldots & x(n+1-m) \\ y(n+1) & \ldots & y(2) & x(n+2) & \ldots & x(n+2-m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & \ldots & y(N-n) & x(N) & \ldots & x(N-m) \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\theta} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{Y}$$

- **Solution** de la minimisation de $J(\theta) = (X\theta - Y)^T(X\theta - Y)$:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

5.2 Extension presque immédiate

- **Modèles dynamiques linéaires à temps discret**

$$y_m(k,\theta) = a_1 y_m(k-1,\theta) + a_2 y_m(k-2,\theta) + \cdots + a_n y_m(k-n,\theta) \\ + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m),\ n \geq m$$

- Par concaténation pour $k = n+1, \ldots, N$, il vient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_m(n{+}1,\theta) \\ y_m(n{+}2,\theta) \\ \vdots \\ y_m(N,\theta) \end{bmatrix}}_{Y_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} y(n) & \ldots & y(1) & x(n{+}1) & \ldots & x(n{+}1{-}m) \\ y(n{+}1) & \ldots & y(2) & x(n{+}2) & \ldots & x(n{+}2{-}m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N{-}1) & \ldots & y(N{-}n) & x(N) & \ldots & x(N{-}m) \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\theta} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y(n{+}1) \\ y(n{+}2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{Y}$$

- **Solution** de la minimisation de $J(\theta) = (X\theta - Y)^T(X\theta - Y)$:

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

- Augmenter l'ordre du système (n et m) tant que le critère $J(\theta)$ diminue.

5.3 Obtention d'un modèle dynamique à temps continu

- On cherche un modèle entrée/sortie sous forme de fonction de transfert

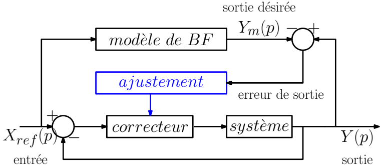
$$Y_m(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n} \, X(p) \approx Y(p), \quad n \geq m$$

5.3 Obtention d'un modèle dynamique à temps continu

- On cherche un modèle entrée/sortie sous forme de fonction de transfert

$$Y_m(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n} X(p) \approx Y(p), \quad n \geq m$$

- Problème analogue au réglage de correcteur par approche temporelle

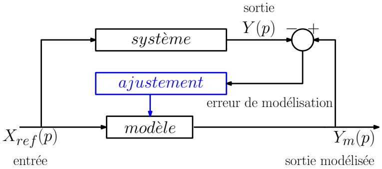


5.3 Obtention d'un modèle dynamique à temps continu

- On cherche un modèle entrée/sortie sous forme de fonction de transfert

$$Y_m(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n} X(p) \approx Y(p), \quad n \geq m$$

- Problème analogue au réglage de correcteur par approche temporelle



- Solution identique par minimisation (gradient, Newton-Raphson) de :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y_m(t,\theta) - y(t))^2 dt$$

avec $\theta^T = [b_0 \ b_1 \ \ldots \ b_m \ a_0 \ a_1 \ \ldots \ a_n]$

5.3 Obtention d'un modèle dynamique à temps continu

- On cherche $\theta^T = [b_0 \ \ldots \ b_m \ a_0 \ \ldots \ a_n]$ tq $y(t) \approx y_m(t)$, avec :

  $a_0 y_m(t,\theta) + a_1 \dot{y}_m(t,\theta) + \cdots + a_n y_m(t,\theta)^{(n)} = b_0 x(t) + \cdots + b_m x(t)^{(m)}$

- **Fonctions de sensibilité** :

$$\sigma_{a_k}(t) = \frac{\partial y_m(t,\theta)}{\partial a_k} \quad \text{et} \quad \sigma_{b_k}(t) = \frac{\partial y_m(t,\theta)}{\partial b_k}$$

5.3 Obtention d'un modèle dynamique à temps continu

- On cherche $\theta^T = [b_0 \ \ldots \ b_m \ a_0 \ \ldots \ a_n]$ tq $y(t) \approx y_m(t)$, avec :

$$a_0 y_m(t,\theta) + a_1 \dot{y}_m(t,\theta) + \cdots + a_n y_m(t,\theta)^{(n)} = b_0 x(t) + \cdots + b_m x(t)^{(m)}$$

- **Fonctions de sensibilité** :

$$\sigma_{a_k}(t) = \frac{\partial y_m(t,\theta)}{\partial a_k} \quad \text{et} \quad \sigma_{b_k}(t) = \frac{\partial y_m(t,\theta)}{\partial b_k}$$

- On peut montrer que :

$$\Sigma_{a_k}(p) = \frac{-p^k}{a_0 + \cdots + a_n p^n} Y_m(p) \quad \text{et} \quad \Sigma_{b_k}(p) = \frac{p^k}{a_0 + \cdots + a_n p^n} X(p)$$

- On cherche $\theta^T = [b_0 \; \dots \; b_m \; a_0 \; \dots \; a_n]$ tq $y(t) \approx y_m(t)$, avec :

$$a_0 y_m(t,\theta) + a_1 \dot{y}_m(t,\theta) + \cdots + a_n y_m(t,\theta)^{(n)} = b_0 x(t) + \cdots + b_m x(t)^{(m)}$$

- **Fonctions de sensibilité** :

$$\sigma_{a_k}(t) = \frac{\partial y_m(t,\theta)}{\partial a_k} \quad \text{et} \quad \sigma_{b_k}(t) = \frac{\partial y_m(t,\theta)}{\partial b_k}$$

- On peut montrer que :

$$\Sigma_{a_k}(p) = \frac{-p^k}{a_0 + \cdots + a_n p^n} Y_m(p) \quad \text{et} \quad \Sigma_{b_k}(p) = \frac{p^k}{a_0 + \cdots + a_n p^n} X(p)$$

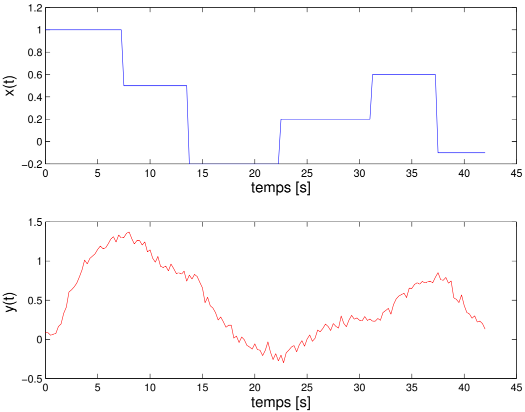
- Pour θ fixé, on peut calculer le gradient et le hessien de $J(\theta)$:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \int_0^\infty \left(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}\right)(y_m - y) \text{ et } \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2} \approx \int_0^\infty \left(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial y_m}{\partial \theta}\right)^T$$

$\rightarrow$ **Solution itérative** pour trouver θ qui minimise $J(\theta)$

5.3 Exemple d'identification de modèle dynamique

- On a les données entrées / sorties



- On cherche un modèle de la forme : $Y_m(p) = \frac{b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} X(p)$

–1– Initialisation : $k = 0$, $\theta^0 = [\dots]$, précision $\varepsilon = \dots$

5.3 Exemple d'identification de modèle dynamique

–1– Initialisation : $k = 0$, $\theta^0 = [\ldots]$, précision $\varepsilon = \ldots$

–2– Simulation de $y_m(t)$: $Y_m(p) = \frac{\theta_1^k}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} X(p)$

–3– Simulation des fonctions de sensibilité :

$$\Sigma_{a_1}(p) = \frac{-p}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p) \qquad \Sigma_{a_2}(p) = \frac{-p^2}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p)$$

$$\Sigma_{a_3}(p) = \frac{-p^3}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p) \qquad \Sigma_{b_0}(p) = \frac{1}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} X(p)$$

–1– Initialisation : $k = 0$, $\theta^0 = [\dots]$, précision $\varepsilon = \dots$

–2– Simulation de $y_m(t)$: $Y_m(p) = \frac{\theta_1^k}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} X(p)$

–3– Simulation des fonctions de sensibilité :

$$\Sigma_{a_1}(p) = \frac{-p}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p) \qquad \Sigma_{a_2}(p) = \frac{-p^2}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p)$$

$$\Sigma_{a_3}(p) = \frac{-p^3}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p) \qquad \Sigma_{b_0}(p) = \frac{1}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} X(p)$$

–4– Calcul du gradient et du Hessien (sommes de Riemann) :

$$J'(\theta^k) \approx T_e \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}(1) & \sigma_{a_1}(2) & \dots & \sigma_{a_1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b_0}(1) & \sigma_{b_0}(2) & \dots & \sigma_{b_0}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m(1) - y(1) \\ \vdots \\ y_m(N) - y(N) \end{bmatrix}$$

$$J''(\theta^k) \approx T_e \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}(1) & \sigma_{a_1}(2) & \dots & \sigma_{a_1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b_0}(1) & \sigma_{b_0}(2) & \dots & \sigma_{b_0}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}(1) & \sigma_{a_1}(2) & \dots & \sigma_{a_1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b_0}(1) & \sigma_{b_0}(2) & \dots & \sigma_{b_0}(N) \end{bmatrix}^T$$

–5– Actualisation de θ^k : $\theta^{k+1} = \theta^k - (J''(\theta^k))^{-1} J'(\theta^k)$

5.3 Exemple d'identification de modèle dynamique

–1– Initialisation : $k = 0$, $\theta^0 = [\dots]$, précision $\varepsilon = \dots$

–2– Simulation de $y_m(t)$: $Y_m(p) = \frac{\theta_1^k}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} X(p)$

–3– Simulation des fonctions de sensibilité :

$$\Sigma_{a_1}(p) = \frac{-p}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p) \qquad \Sigma_{a_2}(p) = \frac{-p^2}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p)$$

$$\Sigma_{a_3}(p) = \frac{-p^3}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} Y_m(p) \qquad \Sigma_{b_0}(p) = \frac{1}{1+\theta_2^k p+\theta_3^k p^2+\theta_4^k p^3} X(p)$$

–4– Calcul du gradient et du Hessien (sommes de Riemann) :

$$J'(\theta^k) \approx T_e \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}(1) & \sigma_{a_1}(2) & \dots & \sigma_{a_1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b_0}(1) & \sigma_{b_0}(2) & \dots & \sigma_{b_0}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m(1) - y(1) \\ \vdots \\ y_m(N) - y(N) \end{bmatrix}$$

$$J''(\theta^k) \approx T_e \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}(1) & \sigma_{a_1}(2) & \dots & \sigma_{a_1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b_0}(1) & \sigma_{b_0}(2) & \dots & \sigma_{b_0}(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}(1) & \sigma_{a_1}(2) & \dots & \sigma_{a_1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{b_0}(1) & \sigma_{b_0}(2) & \dots & \sigma_{b_0}(N) \end{bmatrix}^T$$

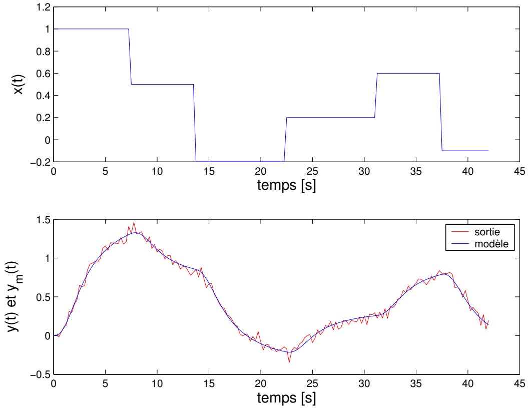
–5– Actualisation de θ^k : $\theta^{k+1} = \theta^k - (J''(\theta^k))^{-1} J'(\theta^k)$

–6– Test d'arrêt :

si $|J'(\theta^k)| > \varepsilon$, alors $k \leftarrow (k+1)$ et aller en –2– ; sinon, FIN

5.3 Exemple d'identification de modèle dynamique

- Comparaison des données entrée / sortie et de la sortie du modèle



- Le modèle trouvé est : $Y_m(p) = \frac{1.497}{1.274p^3+3.191p^2+4.021p+1}X(p)$