Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

...

École Nationale Supérieure de Géologie

...

première année

Présentation du module

Composition du cours

Partie	AF	Cours	TD	Intervenants
Tenseurs	AF2	2	1	A. Giraud
$\mathcal{F}$ourier $\mathcal{L}$aplace	AF1	2	2	B. Marx
Trait. du Signal	AF4	5	4	B. Marx
Analyse Numérique	AF3	5	5	L. Cheng, L. Scholtès, A.J. Tinet

Supports

- polycopiés (distribués en cours)
- présentations (Arche / sites persos / ...)

Évaluation

- Examen final (documents autorisés)
- Comptes rendus de TD / Rapports
- Quizz

Présentation

Qui suis-je ?

- Benoît MARX (depuis 1977)
- Ingénieur et docteur en automatique (ECN 2000 et Grenoble-INP 2003)
- Maître de conférences à l'Université de Lorraine (depuis 2004)

Que fais-je ?

- Enseignant
  - en automatique, traitement du signal, math appli
  - à l'ENSG, ENSEM, ENSGSI, ...
- Chercheur
  - estimation, diagnostic et contrôle tolérant de systèmes non linéaires
  - au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)

Où suis-je ?

- bureau : ENSEM, 100 couloir bleu
- e-mail : benoit.marx@univ-lorraine.fr
- pages pro : www.cran.univ-lorraine.fr/benoit.marx

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

...

Séries et Transformation de Fourier
Transformation de Laplace

Benoît Marx

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)

disponible en ligne : www.cran.univ-lorraine.fr/benoit.marx
contact : benoit.marx@univ-lorraine.fr

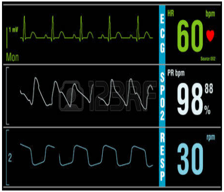
Plan du cours

1. Séries de Fourier
   - Préliminaires
   - Développement en *exponentielles* de fonctions 2π-périodiques
   - Conditions de convergence de Dirichlet
   - Théorème de Parseval
   - Développement en *sin-cos* de fonctions 2π-périodiques
   - Extension aux fonctions T-périodiques
2. Transformée de Fourier
   - Définition de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$
   - Propriétés de la TF
   - TF de fonctions périodiques
   - Théorème de Parseval
   - TF de fonctions discrètes
3. Transformée de Laplace
   - Définition de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{-1}$
   - Propriétés de la TL
   - Applications de la TL

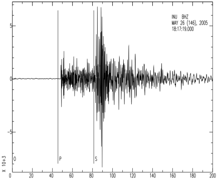
Introduction

- Les séries et transformée de Fourier permettent :
  - d'écrire une fonction sous forme de somme de sinus et cosinus
  - de mettre en évidence des fréquences caractéristiques dans un signal

biomédical



sismique

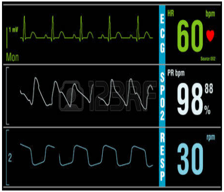


audio

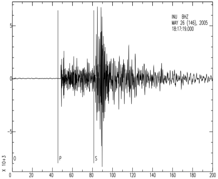
  - de résoudre des équations différentielles (EDP)

- Les séries et transformée de Fourier permettent :
  - d'écrire une fonction sous forme de somme de sinus et cosinus
  - de mettre en évidence des fréquences caractéristiques dans un signal

biomédical



sismique



audio

  - de résoudre des équations différentielles (EDP)

- La transformée de Laplace permet :
  - de résoudre des équations différentielles
  - de représenter des systèmes linéaires dynamiques

Préliminaire : fonctions périodiques

- Le développement en séries de Fourier est possible pour les fonctions périodiques.

fonction T-périodique

Une fonction $f(t)$ est dite périodique, s'il existe T tel que :

$$f(t+T) = f(t), \ \forall t$$

La période est le plus petit T vérifiant l'égalité ci-dessus.

Préliminaire : fonctions périodiques

- Le développement en séries de Fourier est possible pour les fonctions périodiques.

fonction T-périodique

Une fonction $f(t)$ est dite périodique, s'il existe T tel que :

$$f(t+T) = f(t),\ \forall t$$

La période est le plus petit T vérifiant l'égalité ci-dessus.

- Quelques exemples évidents :
  - $\rightarrow$ la fonction $\cos(t)$ est 2π-périodique
  - $\rightarrow$ la fonction $\sin(5t)$ est $\frac{2\pi}{5}$-périodique
  - $\rightarrow$ la fonction $exp\left(i\frac{2\pi}{T}t\right)$ est T-périodique

- **Dans un premier temps, on s'intéressera exclusivement aux fonctions 2π-périodiques.**

Préliminaire : produit hermitique

- Le développement en séries de Fourier peut s'interpréter comme une projection dans une base de fonctions

  $\rightarrow$ il faut définir une base de fonction

  $\rightarrow$ il faut pouvoir projeter (*un produit scalaire*) et mesurer (*une norme*)

Charles ...(1822 - 1901)

Préliminaire : produit hermitique

- Le développement en séries de Fourier peut s'interpréter comme une projection dans une base de fonctions
  - $\rightarrow$ il faut définir une base de fonction
  - $\rightarrow$ il faut pouvoir projeter (*un produit scalaire*) et mesurer (*une norme*)

La projection : forme hermitique

Soient deux fonctions f et g à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'opérateur $< f, g > \in \mathbb{C}$ est une forme hermitique à droite si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$< f_1 + f_2, g > = < f_1, g > + < f_2, g >$$
$$< \lambda f, g > = \lambda < f, g >$$
$$< f, g_1 + g_2 > = < f, g_1 > + < f, g_2 >$$
$$< f, \lambda g > = \overline{\lambda} < f, g >$$

Exemple : $< f(t), g(t) > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$

Préliminaire : produit hermitique (suite)

Forme hermitique symétrique

Une forme hermitique est symétrique si elle vérifie

$$\overline{< f, g >} = < g, f >$$

Forme hermitique symétrique définie positive

Une forme hermitique symétrique est définie positive si elle vérifie

$$< f, f > > 0, \quad \forall f \neq 0$$

Préliminaire : produit hermitique (suite)

Forme hermitique symétrique

Une forme hermitique est symétrique si elle vérifie

$$\overline{< f, g >} = < g, f >$$

Forme hermitique symétrique définie positive

Une forme hermitique symétrique est définie positive si elle vérifie

$$< f, f > > \; 0, \quad \forall f \neq 0$$

La mesure : norme

Une forme hermitique symétrique, définie positive permet de construire une norme, notée $||f||$, définie par : $||f|| = \sqrt{< f, f >}$, vérifiant

$$||f|| > 0, \quad \forall f \neq 0$$
$$||\lambda f|| = |\lambda| ||f||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$
$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$$

Exemple : idem

Préliminaire : base de fonctions

- Définissons le produit scalaire et la norme d'une fonction 2π-périodique

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \quad \text{et} \quad ||f|| = \sqrt{< f, f >}$$

Préliminaire : base de fonctions

- Définissons le produit scalaire et la norme d'une fonction 2π-périodique

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \quad \text{et} \quad ||f|| = \sqrt{< f, f >}$$

- Définissons une famille de fonctions de base

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Préliminaire : base de fonctions

- Définissons le produit scalaire et la norme d'une fonction 2π-périodique

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \quad \text{et} \quad ||f|| = \sqrt{< f, f >}$$

- Définissons une famille de fonctions de base

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

- On peut montrer que cette famille de fonctions est orthonormée, c-à-d

$$< u_n(t), u_m(t) >= \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Développement en *exp* de fonctions 2π-périodiques

- On a défini une famille de fonctions orthonormées :

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

Développement en *exp* de fonctions 2π-périodiques

- On a défini une famille de fonctions orthonormées :

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

- On peut écrire le développement de $f(t)$ dans cette base

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u_n(t)$$

- Les coordonnées de $f(t)$ dans la base sont obtenues par projection

$$c_n =< f(t), u_n(t) >$$

Développement de Fourier généralisé

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Développement en *exp* de fonctions 2π-périodiques

- On a défini une famille de fonctions orthonormées :

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$$

- On peut écrire le développement de $f(t)$ dans cette base

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u_n(t)$$

- Les coordonnées de $f(t)$ dans la base sont obtenues par projection

$$c_n =< f(t), u_n(t) >$$

Développement de Fourier généralisé

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

- Exemple : développement de $f(t)$, fonction 2π-périodique, définie par $f(t) = -1$ sur $[0\ \pi[$ et $f(t) = 1$ sur $[\pi\ 2\pi[$.

Conditions de convergence de Dirichlet

- On ne s'est pas posé la question de la convergence de la série $\Sigma c_n u_n(t)$ vers $f(t)$

Conditions de convergence de Dirichlet

- On ne s'est pas posé la question de la convergence de la série $\Sigma c_n u_n(t)$ vers $f(t)$
- ... mais Dirichlet si.

Johann Peter Gustav Lejeune ...(1805 - 1859)

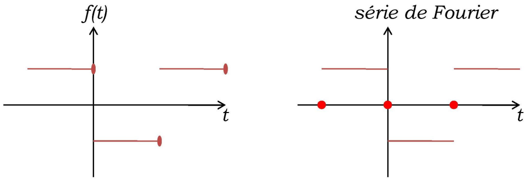
Conditions de convergence de Dirichlet

- On ne s'est pas posé la question de la convergence de la série $\Sigma c_n u_n(t)$ vers $f(t)$
- ...mais Dirichlet si.

Théorème de Dirichlet

Soit $f(t)$ une fonction 2π-périodique, telle que $f(t)$ et sa dérivée $f'(t)$ soient continues par morceaux sur l'intervalle $[0\ 2\pi]$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n u_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si f(t) est continue en t} \\ \frac{f(t-)+f(t+)}{2}, & \text{si t est un point de discontinuité de f(t)} \end{cases}$$



Théorème de Parseval

- Le théorème de Parseval fait le lien entre l'énergie d'une fonction sur une période et celle de la série d'exponentielles.

Théorème de Parseval

- Le théorème de Parseval fait le lien entre l'énergie d'une fonction sur une période et celle de la série d'exponentielles.

Théorème de Parseval

Soit une fonction 2π-périodique $f(t)$ telle que $f(t)$ et sa dérivée sont continues par morceaux. Les coefficients de Fourier généralisés, notés c_n, vérifient

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Théorème de Parseval

- Le théorème de Parseval fait le lien entre l'énergie d'une fonction sur une période et celle de la série d'exponentielles.

Théorème de Parseval

Soit une fonction 2π-périodique $f(t)$ telle que $f(t)$ et sa dérivée sont continues par morceaux. Les coefficients de Fourier généralisés, notés c_n, vérifient

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

- Exemple : Utiliser le développement de Fourier généralisé de $f(t)$, fonction 2π-périodique définie ci-dessous, pour prouver $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0\ \pi[\\ 0, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

Développement en séries de Fourier *sin*-*cos* de fonctions 2π-périodiques

Jean-Baptiste (dit Joseph) ... (1768 - 1830)

Développement en séries de Fourier *sin-cos* de fonctions 2π-périodiques

- On étudie les fonctions $f(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- On peut remarquer que les coefficients de Fourier généralisés vérifient :

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Développement en séries de Fourier *sin*-*cos* de fonctions 2π-périodiques

- On étudie les fonctions $f(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
- On peut remarquer que les coefficients de Fourier généralisés vérifient :

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

- En posant

$$c_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a_0 \quad , \quad c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(a_n - ib_n) \quad , \quad c_{-n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(a_n + ib_n)$$

- on obtient le développement de $f(t)$ en *cosinus* et *sinus*

Développement en séries de Fourier *sin*-*cos* de fonctions 2π-périodiques

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n cos(nt) + b_n sin(nt))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(nt)dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(nt)dt$$

Développement en *sin-cos* de fonctions 2π-périodiques

- On peut écrire le théorème de Parseval avec les coefficients du développement en *sin-cos*

Théorème de Parseval

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Développement en *sin-cos* de fonctions 2π-périodiques

- On peut écrire le théorème de Parseval avec les coefficients du développement en *sin-cos*

Théorème de Parseval

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

- Quelques remarques
  - Si $f(t)$ est paire, alors $b_n = 0$ et $\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n cos(nt)$
    $\rightarrow$ une fonction paire se développe en cosinus uniquement
  - Si $f(t)$ est impaire, alors $a_0 = a_n = 0$ et $\tilde{f}(t) = \sum_{n \geq 1} b_n sin(nt)$
    $\rightarrow$ une fonction impaire se développe en sinus uniquement
  - les conditions de convergence de la série en *cos-sin* sont celles de la série en *exp*
    $\rightarrow$ pour $f(t) \in \mathcal{C}_m^1$, la série converge vers $(f(t^-) + f(t^+))/2$

Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0 \ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi \ 2\pi[\end{cases}$$

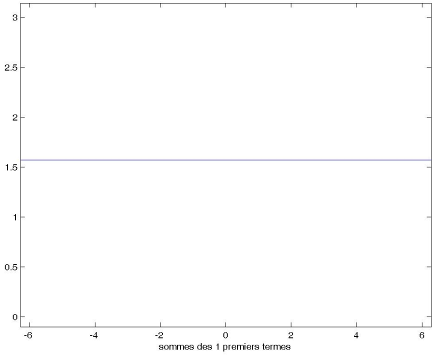
- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \geq 1} 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$

Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant le premier terme

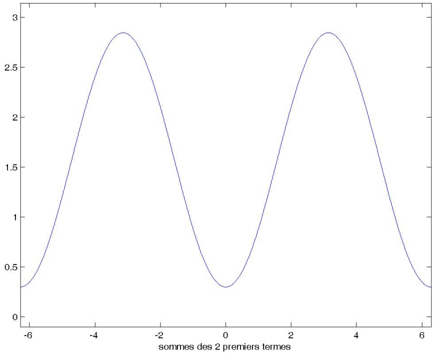


Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant les 2 premiers termes

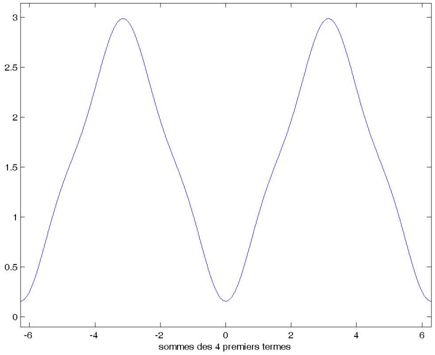


Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant les 4 premiers termes

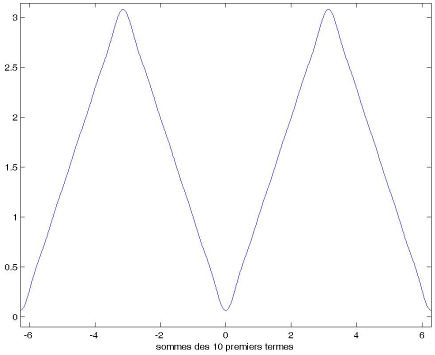


Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant les 10 premiers termes

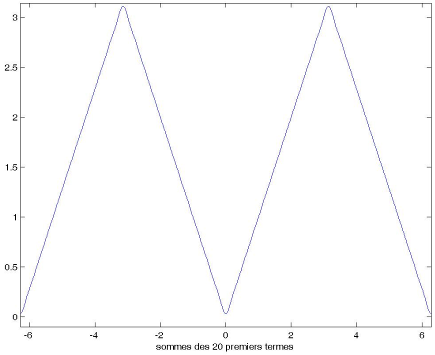


Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0 \ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi \ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant les 20 premiers termes

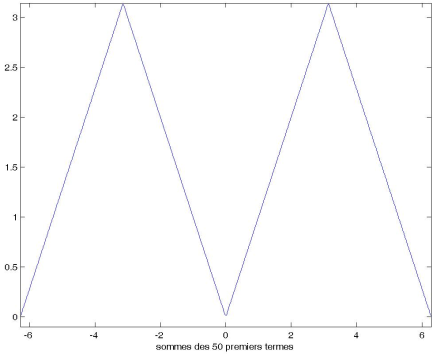


Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant les 50 premiers termes

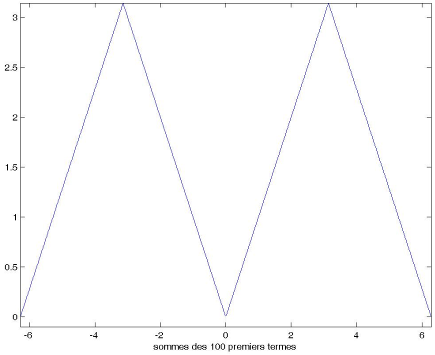


Exemple de développement en *sin*-*cos*

- Exemple : déterminer le développement en *cos*-*sin* de la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases}$$

- on trouve : $\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} cos(nt)$
- En considérant les 100 premiers termes



Extension aux fonctions T-périodiques

- En choisissant :
  - $\rightarrow$ les fonctions de base : $u_n(t) = \frac{e^{i2\pi nt/T}}{\sqrt{T}}$
  - $\rightarrow$ le p.h.s.d.p. : $< f(t), g(t) >= \int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$
  - $\rightarrow$ la norme : $||f(t)|| = \sqrt{< f(t), f(t) >}$

Extension aux fonctions T-périodiques

- En choisissant :
  - $\rightarrow$ les fonctions de base : $u_n(t) = \frac{e^{i2\pi nt/T}}{\sqrt{T}}$
  - $\rightarrow$ le p.h.s.d.p. : $< f(t), g(t) >= \int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$
  - $\rightarrow$ la norme : $||f(t)|| = \sqrt{< f(t), f(t) >}$
- on étend le développement en exponentielles de $f(t)$

Développement en *exp* de $f(t)$ T-périodique

Pour $f(t)$, une fonction T-périodique on a :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{i2\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \text{avec} \quad c_n = \int_0^T f(t)\frac{e^{-i2\pi nt/T}}{\sqrt{T}}dt$$

Les conditions de convergences sont celles de Dirichlet.

Extension aux fonctions T-périodiques

- En posant $a_0 = \frac{c_0\sqrt{T}}{2}$ et $c_n = \frac{\sqrt{T}}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \frac{\sqrt{T}}{2}(a_n + ib_n)$

Développement en *sin-cos* de $f(t)$ T-périodique

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Extension aux fonctions T-périodiques

- En posant $a_0 = \frac{c_0\sqrt{T}}{2}$ et $c_n = \frac{\sqrt{T}}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \frac{\sqrt{T}}{2}(a_n + ib_n)$

Développement en *sin-cos* de $f(t)$ T-périodique

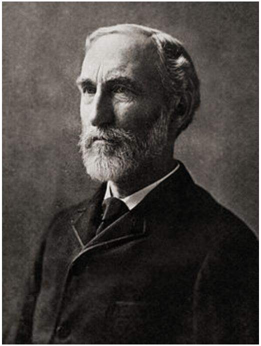
$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

- On a toujours
  - une fonction paire se développe en cosinus $(+a_0/2)$ uniquement
  - une fonction impaire se développe en sinus uniquement
  - les conditions de convergence de Dirichlet : $f(t) \in \mathcal{C}^1_m$

Une bizarrerie : l'effet Gibbs



Josiah Willard ... (1839 - 1903)

Une bizarrerie : l'effet Gibbs

- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

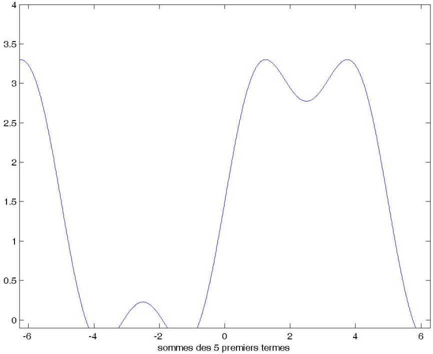
$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

Une bizarrerie : l'effet Gibbs

- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

En considérant les 5 premiers termes

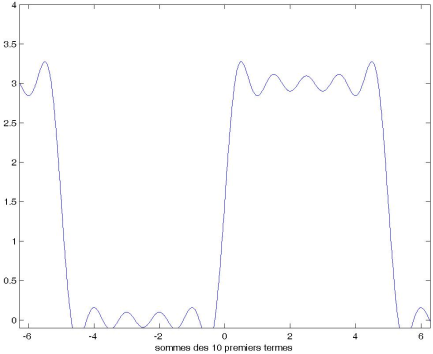


Une bizarrerie : l'effet Gibbs

- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

En considérant les 10 premiers termes

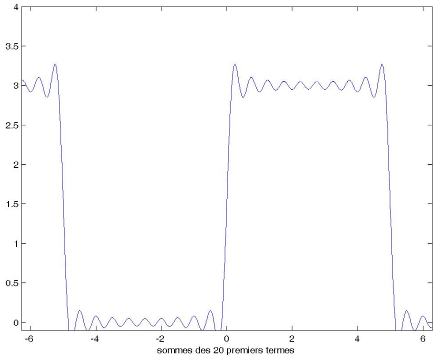


Une bizarrerie : l'effet Gibbs

- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

En considérant les 20 premiers termes

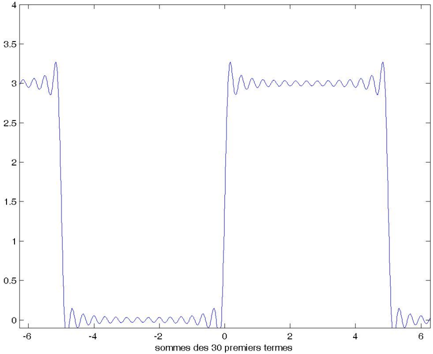


Une bizarrerie : l'effet Gibbs

- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

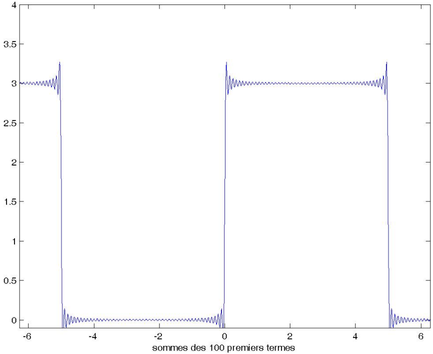
En considérant les 30 premiers termes



- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

En considérant les 100 premiers termes

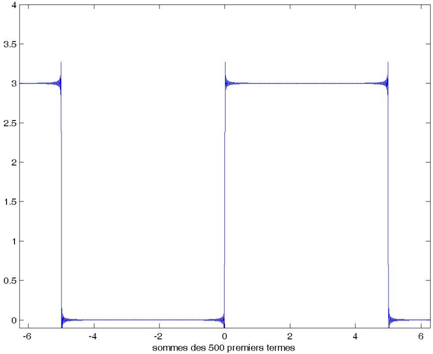


Une bizarrerie : l'effet Gibbs

- Il y a un problème de convergence lorsque la fonction est discontinue
- On considère la fonction $f(t)$, 10-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 3, & t \in [0\ 5[\\ 0, & t \in [5\ 10[\end{cases}$$

En considérant les 500 premiers termes



Introduction à la transformée de Fourier

- On cherche à étendre les séries de Fourier aux fonctions non périodiques
- Pour cela on suppose qu'une fonction non périodique est périodique avec une période infinie

Introduction à la transformée de Fourier

- On cherche à étendre les séries de Fourier aux fonctions non périodiques
- Pour cela on suppose qu'une fonction non périodique est périodique avec une période infinie
- Pour $f(t)$ T-périodique on a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\int_T f(t)\frac{e^{-int2\pi/T}}{\sqrt{T}}dt\right)}_{c_n} \underbrace{\frac{e^{i2\pi tn/T}}{\sqrt{T}}}_{u_n}$$

Introduction à la transformée de Fourier

- On cherche à étendre les séries de Fourier aux fonctions non périodiques
- Pour cela on suppose qu'une fonction non périodique est périodique avec une période infinie
- Pour $f(t)$ T-périodique on a

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(\int_T f(t) \frac{e^{-int2\pi/T}}{\sqrt{T}} dt \right)}_{c_n} \underbrace{\frac{e^{i2\pi tn/T}}{\sqrt{T}}}_{u_n}$$

- on pose $1/T = \nu_0$ et $F(n\nu_0) = \int_T f(t) e^{-i2\pi n\nu_0 t} dt$

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_0 F(n\nu_0) e^{i2\pi tn\nu_0}$$

Introduction à la transformée de Fourier

- On cherche à étendre les séries de Fourier aux fonctions non périodiques
- Pour cela on suppose qu'une fonction non périodique est périodique avec une période infinie
- Pour $f(t)$ T-périodique on a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\int_T f(t)\frac{e^{-int2\pi/T}}{\sqrt{T}}dt\right)}_{c_n} \underbrace{\frac{e^{i2\pi tn/T}}{\sqrt{T}}}_{u_n}$$

- on pose $1/T = \nu_0$ et $F(n\nu_0) = \int_T f(t)e^{-i2\pi n\nu_0 t}dt$

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu_0 F(n\nu_0)e^{i2\pi tn\nu_0}$$

- Pour $T \to \infty \Leftrightarrow \nu_0 \to 0$, $f(t)$ est définie par une somme de Riemann :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu)e^{2i\pi\nu t}d\nu$$

- Avec $\nu = n\nu_0$, on a:

$$F(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$$

Définition de la transformée de Fourier

Transformation de Fourier

Soit $f(t)$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(t) \in \mathcal{C}_m^1$. La transformée de $f(t)$ est définie par :

$$F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$$

Définition de la transformée de Fourier

Transformation de Fourier

Soit $f(t)$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(t) \in \mathcal{C}_m^1$. La transformée de $f(t)$ est définie par :

$$F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$$

- On définit également la transformée de Fourier inverse telle que :

$$F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu))$$

Transformation inverse de Fourier

La transformée inverse de $F(\nu)$ est définie par :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$$

Quelques remarques et applications de la TF

- La condition d'absolue intégrabilité est suffisante mais pas nécessaire

Quelques remarques et applications de la TF

- La condition d'absolue intégrabilité est suffisante mais pas nécessaire
- Si $f(t)$ est réelle et paire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est réelle et paire.
- Si $f(t)$ est réelle et impaire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est imaginaire pure et impaire.

Quelques remarques et applications de la TF

- La condition d'absolue intégrabilité est suffisante mais pas nécessaire
- Si $f(t)$ est réelle et paire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est réelle et paire.
- Si $f(t)$ est réelle et impaire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est imaginaire pure et impaire.
- Si $f(t)$ est imaginaire et paire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est imaginaire et paire.
- Si $f(t)$ est imaginaire et impaire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est réelle et impaire.

Quelques remarques et applications de la TF

- La condition d'absolue intégrabilité est suffisante mais pas nécessaire
- Si $f(t)$ est réelle et paire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est réelle et paire.
- Si $f(t)$ est réelle et impaire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est imaginaire pure et impaire.
- Si $f(t)$ est imaginaire et paire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est imaginaire et paire.
- Si $f(t)$ est imaginaire et impaire $\leftrightarrow$ $F(\nu)$ est réelle et impaire.
- Exemples : Calculer la TF des fonctions suivantes
  - $f(t) = \begin{cases} t+T, & \text{si } -T \leq t \leq 0 \\ T-t, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
  - $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
  - $f(t) = \delta(t - t_0)$ (impulsion de Dirac centrée en t_0)

Propriétés de la transformée de Fourier

- linéarité de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t))$
- linéarité de $\mathcal{F}^{-1}$: $\mathcal{F}^{-1}(aF(\nu) + bG(\nu)) = a\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + b\mathcal{F}^{-1}(G(\nu))$

Propriétés de la transformée de Fourier

- linéarité de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t))$
- linéarité de $\mathcal{F}^{-1}$: $\mathcal{F}^{-1}(aF(\nu) + bG(\nu)) = a\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + b\mathcal{F}^{-1}(G(\nu))$
- dérivation en t : $\mathcal{F}\left(\frac{df^n(t)}{dt^n}\right) = (2i\pi\nu)^n F(\nu)$

Propriétés de la transformée de Fourier

- linéarité de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t))$
- linéarité de $\mathcal{F}^{-1}$: $\mathcal{F}^{-1}(aF(\nu) + bG(\nu)) = a\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + b\mathcal{F}^{-1}(G(\nu))$
- dérivation en t : $\mathcal{F}\left(\frac{df^n(t)}{dt^n}\right) = (2i\pi\nu)^n F(\nu)$
- convolution : $\mathcal{F}(f * g) = F(\nu)G(\nu)$
- convolution : $\mathcal{F}(fg) = F(\nu) * G(\nu)$

Propriétés de la transformée de Fourier

- linéarité de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t))$
- linéarité de $\mathcal{F}^{-1}$: $\mathcal{F}^{-1}(aF(\nu) + bG(\nu)) = a\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + b\mathcal{F}^{-1}(G(\nu))$
- dérivation en t : $\mathcal{F}\left(\frac{df^n(t)}{dt^n}\right) = (2i\pi\nu)^n F(\nu)$
- convolution : $\mathcal{F}(f * g) = F(\nu)G(\nu)$
- convolution : $\mathcal{F}(fg) = F(\nu) * G(\nu)$
- translation en t : $\mathcal{F}(f(t - t_0)) = e^{-2i\pi\nu t_0} F(\nu)$
- modulation : $\mathcal{F}(e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)) = F(\nu - \nu_0)$

Propriétés de la transformée de Fourier

- linéarité de $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{F}(f(t)) + b\mathcal{F}(g(t))$
- linéarité de $\mathcal{F}^{-1}$: $\mathcal{F}^{-1}(aF(\nu) + bG(\nu)) = a\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + b\mathcal{F}^{-1}(G(\nu))$
- dérivation en t : $\mathcal{F}\left(\frac{df^n(t)}{dt^n}\right) = (2i\pi\nu)^n F(\nu)$
- convolution : $\mathcal{F}(f * g) = F(\nu)G(\nu)$
- convolution : $\mathcal{F}(fg) = F(\nu) * G(\nu)$
- translation en t : $\mathcal{F}(f(t - t_0)) = e^{-2i\pi\nu t_0} F(\nu)$
- modulation : $\mathcal{F}(e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)) = F(\nu - \nu_0)$
- dilatation en t : $\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{k} F(\nu/k)$
- conjugaison : $\mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right) = \overline{F(-\nu)}$
- dérivation en ν : $\frac{dF^n(\nu)}{d\nu^n} = F((-2i\pi t)^n f(t))$

Transformée de Fourier de fonctions périodiques

- On a vu (et pas encore oublié) qu'une fonction T-périodique s'écrit :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \text{avec} \quad c_n = \int_0^T f(t) \frac{e^{-2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} dt$$

Transformée de Fourier de fonctions périodiques

- On a vu (et pas encore oublié) qu'une fonction T-périodique s'écrit :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \text{avec} \quad c_n = \int_0^T f(t) \frac{e^{-2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} dt$$

- On peut montrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu - \nu_0)) = e^{2i\pi\nu_0 t} \Leftrightarrow \mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 t}\right) = \delta(\nu - \nu_0)$$

Transformée de Fourier de fonctions périodiques

- On a vu (et pas encore oublié) qu'une fonction T-périodique s'écrit :

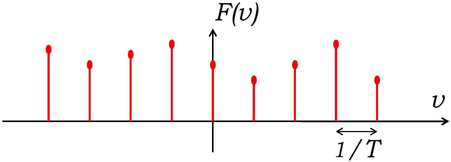
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \text{avec} \quad c_n = \int_0^T f(t)\frac{e^{-2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}}dt$$

- On peut montrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-\nu_0)) = e^{2i\pi\nu_0 t} \Leftrightarrow \mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 t}\right) = \delta(\nu-\nu_0)$$

- Par linéarité de la TF, $\mathcal{F}(f(t))$ s'écrit :

$$F(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}}\delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$



Transformée de Fourier de fonctions périodiques

- On a vu (et pas encore oublié) qu'une fonction T-périodique s'écrit :

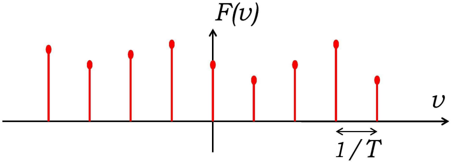
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \text{avec} \quad c_n = \int_0^T f(t) \frac{e^{-2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} dt$$

- On peut montrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu - \nu_0)) = e^{2i\pi\nu_0 t} \Leftrightarrow \mathcal{F}\left(e^{2i\pi\nu_0 t}\right) = \delta(\nu - \nu_0)$$

- Par linéarité de la TF, $\mathcal{F}(f(t))$ s'écrit :

$$F(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$



- Exemple : Montrer que la TF que $\mathcal{F}\left(cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) = \frac{\delta\left(\nu - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{T}\right)}{2}$

Théorème de Parseval

- Le théorème de Parseval établit un lien entre l'énergie d'une fonction $f(t)$ et l'énergie de sa transformée de Fourier

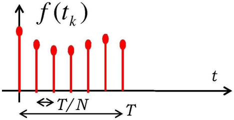
Théorème de Parseval

Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie et $F(\nu)$ sa transformée de Fourier. Les fonctions $f(t)$ et $F(\nu)$ ont la même énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

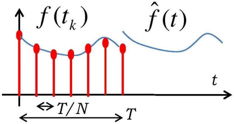
Transformée de Fourier discrète

- Une fonction discrète est connue aux instants $t_k = \frac{kT}{N}$ $(k=0, ..., N-1)$.



Transformée de Fourier discrète

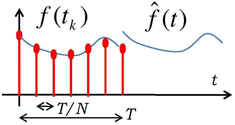
- Une fonction discrète est connue aux instants $t_k = \frac{kT}{N}$ $(k=0, \ldots, N-1)$.
- Il existe $\hat{f}(t)$, T-périodique, t.q. $f(t_k) = \hat{f}(t_k)$ $(k=0, \ldots, N-1)$.



Transformée de Fourier discrète

- Une fonction discrète est connue aux instants $t_k = \frac{kT}{N}$ $(k=0, \dots, N-1)$.
- Il existe $\hat{f}(t)$, T-périodique, t.q. $f(t_k) = \hat{f}(t_k)$ $(k=0, \dots, N-1)$.
- La TF de $\hat{f}(t)$ est donnée par

$$\hat{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\hat{f}(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$



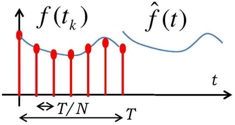
Transformée de Fourier discrète

- Une fonction discrète est connue aux instants $t_k = \frac{kT}{N}$ $(k=0, \ldots, N-1)$.
- Il existe $\hat{f}(t)$, T-périodique, t.q. $f(t_k) = \hat{f}(t_k)$ $(k=0, \ldots, N-1)$.
- La TF de $\hat{f}(t)$ est donnée par

$$\hat{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\hat{f}(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

- les coefficient c_n peuvent se calculer par une somme de Riemann :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \hat{f}(t) e^{-2i\pi nt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T}{N} \hat{f}\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi nk/N}$$



Transformée de Fourier discrète

- Une fonction discrète est connue aux instants $t_k = \frac{kT}{N}$ $(k=0, \ldots, N-1)$.
- Il existe $\hat{f}(t)$, T-périodique, t.q. $f(t_k) = \hat{f}(t_k)$ $(k=0, \ldots, N-1)$.
- La TF de $\hat{f}(t)$ est donnée par

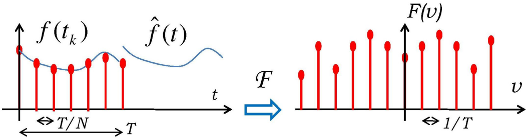
$$\hat{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\hat{f}(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

- les coefficient c_n peuvent se calculer par une somme de Riemann :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \hat{f}(t) e^{-2i\pi nt/T} dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T}{N} \hat{f}\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi nk/N}$$

- On a donc finalement :

$$F(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi nk/N} \right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$



Introduction à la transformée de Laplace

- Par hypothèse, on considère exclusivement des fonctions causales :

$$f(t) = 0, \forall t < 0$$

Introduction à la transformée de Laplace

- Par hypothèse, on considère exclusivement des fonctions causales :

$$f(t) = 0, \forall t < 0$$

- On cherche à maintenir certaines propriétés de la TF, mais pour une classe de fonctions plus étendue
$\rightarrow$ les fonctions (éventuellement à support ∞) qui croissent moins vite que e^{at}, pour $a > 0$

Introduction à la transformée de Laplace

- Par hypothèse, on considère exclusivement des fonctions causales :

$$f(t) = 0, \forall t < 0$$

- On cherche à maintenir certaines propriétés de la TF, mais pour une classe de fonctions plus étendue
  $\rightarrow$ les fonctions (éventuellement à support ∞) qui croissent moins vite que e^{at}, pour $a > 0$
- Pour forcer la convergence de l'intégrale définissant $\mathcal{F}(f(t))$, on pondère par $e^{-\alpha t}$, avec $\alpha > a > 0$

$$\mathcal{F}(f(t)e^{-\alpha t}) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-2i\pi\nu t}dt$$

Introduction à la transformée de Laplace

- Par hypothèse, on considère exclusivement des fonctions causales :

$$f(t) = 0, \forall t < 0$$

- On cherche à maintenir certaines propriétés de la TF, mais pour une classe de fonctions plus étendue
  $\rightarrow$ les fonctions (éventuellement à support ∞) qui croissent moins vite que e^{at}, pour $a > 0$
- Pour forcer la convergence de l'intégrale définissant $\mathcal{F}(f(t))$, on pondère par $e^{-\alpha t}$, avec $\alpha > a > 0$

$$\mathcal{F}(f(t)e^{-\alpha t}) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-2i\pi\nu t}dt$$

- En posant $p = \alpha + i2\pi\nu$, on a la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Pierre Simon, Marquis de ... (1749 - 1827)

Définition de la transformée de Laplace et de son inverse

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction causale $f(t)$ est donnée par

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

Définition de la transformée de Laplace et de son inverse

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction causale $f(t)$ est donnée par

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

- On définit également la transformée de Laplace inverse telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

Transformée inverse de Laplace

La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$ est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\alpha \geq a$).

Quelques exemples de T.L.

- La T.L. de l'impulsion de Dirac est donnée par :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

Quelques exemples de T.L.

- La T.L. de l'impulsion de Dirac est donnée par :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

- La T.L. de la fonction de Heavyside, définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$$

Quelques exemples de T.L.

- La T.L. de l'impulsion de Dirac est donnée par :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

- La T.L. de la fonction de Heavyside, définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$$

- La T.L. de la fonction *cosinus* est donnée par :

$$\mathcal{L}(cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$
- Linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$: $\mathcal{L}^{-1}(aF(p) + bG(p)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(p)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(p))$

Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$
- Linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$: $\mathcal{L}^{-1}(aF(p)+bG(p)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(p)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(p))$
- Dérivation en t : $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$
- intégration en t : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{p}$

Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$
- Linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$: $\mathcal{L}^{-1}(aF(p)+bG(p)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(p)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(p))$
- Dérivation en t : $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$
- intégration en t : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{p}$
- Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$
- Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$

Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$
- Linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$: $\mathcal{L}^{-1}(aF(p)+bG(p)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(p)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(p))$
- Dérivation en t : $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$
- intégration en t : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{p}$
- Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$
- Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$
- Translation en t : $\mathcal{L}(f(t-t_0)) = e^{-pt_0}F(p)$
- Dilatation en t : $\mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$

Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité de $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$
- Linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$: $\mathcal{L}^{-1}(aF(p) + bG(p)) = a\mathcal{L}^{-1}(F(p)) + b\mathcal{L}^{-1}(G(p))$
- Dérivation en t : $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$
- intégration en t : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}(f(t))}{p}$
- Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$
- Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$
- Translation en t : $\mathcal{L}(f(t - t_0)) = e^{-pt_0}F(p)$
- Dilatation en t : $\mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$
- modulation : $\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p + a)$

Applications de la transformée de Laplace

- La principale application des T.L. est la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants
  - appliquer la T.L. aux deux membres de l'équation différentielle
  - les C.I. sont directement prises en compte
  - résoudre en p
  - prendre la T.L. inverse de la solution

Applications de la transformée de Laplace

- La principale application des T.L. est la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants
  - appliquer la T.L. aux deux membres de l'équation différentielle
  - les C.I. sont directement prises en compte
  - résoudre en p
  - prendre la T.L. inverse de la solution

- Exemple : résoudre l'équation différentielle suivante

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 2e^{-2t}, \quad \text{avec} \quad x(0) = 0 \text{ et } x'(0) = 1$$