École Nationale Supérieure de Géologie

– **Cours de première année** –

Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

– **Séries et transformées de $\mathcal{F}$ourier et de $\mathcal{L}$aplace** –

Benoît Marx, Maître de Conférences HDR à l'Université de Lorraine

Table des matières

Chapitre 1

Analyse de Fourier

Les séries de Fourier [1] et la transformée de Fourier sont très utilisées en physique dans différents buts. La transformée de Fourier permet de résoudre certaines équations différentielles dont la résolution serait notablement plus lourde sans l'utilisation de cet outil. La transformée de Fourier d'une fonction, ou dans un contexte plus concret : d'un signal mesuré permet de mettre en évidence un spectre, c'est à dire de caractériser le contenu fréquentiel du signal. Autrement dit on cherche à mettre en évidence un ou plusieurs comportements périodiques (qui se reproduit à l'identique au cours du temps) et à donner la ou les périodes caractéristiques du signal.

Dans une première partie de ce chapitre on verra que toute fonction périodique (sous certaines conditions qui seront précisées) peut s'écrire sous la forme d'une somme pondérée de fonctions exponentielles complexes, ou sous la forme d'une somme pondérée de *sinus* et de *cosinus*.

Dans une seconde partie, on définira la transformée de Fourier, on étudiera ses propriétés et quelques applications.

1.1 Séries de Fourier

1.1.1 Préliminaires au développement en séries de Fourier

Le développement en série de Fourier est utilisé pour représenter une certaine classe de fonctions : les fonctions périodiques. Dans un premier temps il est donc utile de définir cette classe.

1. Jean-Baptiste (ou Joseph) Fourier (1768-1830) participe à la révolution en tant qu'animateur du comité local révolutionnaire d'Auxerre. La chute de Robespierre en 1793 lui évite la guillotine. Il étudie à l'École Normale Supérieure, et a pour professeur Lagrange, Laplace et Monge. En 1797, il remplace Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique de l'Ecole Polytechnique. En 1798, il rejoint les expéditions napoléoniennes en Égypte. En 1801, il revient en France et est nommé préfet de l'Isère. Il étudie le problème de la chaleur, c'est-à-dire l'évolution de la température d'un corps au cours du temps. De 1802 à 1807, il étudie l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, et trouve une méthode pour la résoudre : l'analyse de Fourier. Fourier décompose une fonction mathématique unique, mais difficile à décrire mathématiquement, en une somme infinie de fonctions en sinus et en cosinus. Il est alors plus facile de décrire au cours du temps l'évolution de chacune de ces fonctions, et de retrouver la température au temps t en refaisant la somme. Cette hypothèse audacieuse est contestée par ses contemporains (Laplace, Poisson et Lagrange). Malgré ces réserves, Fourier est primé par l'Institut pour son mémoire en 1812.

Définition 1.1. *Une fonction $f(t)$, où $t \in \mathbb{R}$, est dite périodique, si elle vérifie :*

$$\forall t, \quad f(t+T) = f(t) \tag{1.1}$$

La période T de $f(t)$ est le plus petit réel non nul vérifiant (1.1).

À l'évidence, tout multiple de T satisfait également cette propriété : $f(t+nT) = f(t)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Une fonction périodique de période T est dite T-périodique. Les fonctions périodiques les plus utilisées sont les fonctions trigonométriques *cosinus*, *sinus*, et *tangente* qui sont toutes trois 2π-périodiques :

$$\cos(t+4\pi) = \cos(t+2\pi) = \cos(t) \tag{1.2}$$

$$\sin(t+4\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin(t) \tag{1.3}$$

Dans un premier temps, on étudiera le développement en série de Fourier des fonctions 2π-périodiques. Les résultats qui seront établis se généraliseront facilement aux fonctions T-périodiques car, par un changement de variable, l'étude d'une fonction T-périodique se ramène à l'étude d'une fonction 2π-périodique. En effet soit $f(t)$ une fonction T-périodique. Si on pose le changement de variable :

$$u = \frac{2\pi}{T} t \tag{1.4}$$

et si on définit la fonction $\tilde{f}(u)$ par :

$$\tilde{f}(u) = f\left(\frac{T}{2\pi} u\right) = f(t) \tag{1.5}$$

Alors la fonction $\tilde{f}(u)$ est 2π-périodique, en effet on a :

$$\tilde{f}(u+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(u+2\pi)\right) = f\left(\frac{Tu}{2\pi} + T\right) = f(t+T) = f(t) = \tilde{f}(u) \tag{1.6}$$

1.1.1.1 Produit hermitique et norme

La décomposition en série de Fourier d'une fonction peut être vue comme l'expression de la fonction dans une base particulière. On peut songer à l'analogie avec un point de l'espace courant (à trois dimensions) repéré par ses trois coordonnées. Ce repérage est possible de manière unique si on se donne une base ayant la propriété d'être orthonormale, c'est à dire une base dont chaque vecteur est de norme unitaire et orthogonal à tous les autres. Dans le cas courant des vecteurs de l'espace à trois dimensions, on peut choisir la norme euclidienne, et l'orthogonalité est caractérisée par un produit scalaire nul.

Dans un espace fonctionnel, on a besoin de se donner une norme. Cette norme sera définie par un produit hermitique, qui est l'extension au cas complexe du produit scalaire.

Définition 1.2 (forme hermitique)**.** *Soient deux fonctions f et g à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'opérateur noté $< f, g > \in \mathbb{C}$ est une forme hermitique à droite si elle vérifie les propriétés suivantes :*

$$< f_1 + f_2, g > = < f_1, g > + < f_2, g > \tag{1.7}$$

$$< \lambda f, g > = \lambda < f, g > \tag{1.8}$$

$$< f, g_1 + g_2 > = < f, g_1 > + < f, g_2 > \tag{1.9}$$

$$< f, \lambda g > = \overline{\lambda} < f, g > \tag{1.10}$$

Définition 1.3 (forme hermitique symétrique)**.** *Une forme hermitique est symétrique si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\overline{< f, g >} =< g, f > \tag{1.11}$$

Si $< *, * >$ est une forme hermitique symétrique, alors $< f, f >$ est réel (car il est égal à son conjugué).

Définition 1.4 (forme hermitique symétrique définie positive)**.** *Une forme hermitique symétrique est définie positive si elle vérifie (en plus de (1.11)) la propriété suivante :*

$$< f, f > > 0, \quad \forall f \neq 0 \in \mathbb{C} \tag{1.12}$$

Une forme hermitique définie positive permet de construire une norme à partir du produit hermitique. Cette norme, notée $||f||$, est définie par :

$$||f|| = \sqrt{< f, f >} \tag{1.13}$$

Cette norme vérifie les propriétés essentielles d'une norme à savoir :

$$||f|| > 0, \quad \forall f \neq 0 \tag{1.14}$$
$$||\lambda f|| = |\lambda| ||f||, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.15}$$
$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g|| \tag{1.16}$$

Les deux premières propriétés sont évidentes à démontrer de par la définition d'une forme définie positive, et par la linéarité d'une forme hermitique. Pour démontrer la troisième il est commode de commencer par établir la propriété connue sous le nom d'inégalité de Schwarz.

Proposition 1.1 (inégalité de Schwarz)**.** *Pour f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, et une norme $|| * ||$ définie par un produit hermitique $< *, * >$, on a :*

$$| < f, g > | \leq ||f|| \; ||g|| \tag{1.17}$$

Démonstration. Il suffit de développer le produit $< f + \lambda g, f + \lambda g >$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Le produit hermitique étant défini positif, cette quantité est positive ou nulle.

$$< f + \lambda g, f + \lambda g >=< f, f > +\lambda < g, f > +\overline{\lambda} < f, g > +|\lambda|^2 < g, g > \tag{1.18}$$

Or le complexe $< g, f >$ peut s'écrire : $< g, f >= | < g, f > | e^{i\theta}$. Dans ce cas il vient $< f, g >= | < g, f > | e^{-i\theta}$. En posant : $\lambda = pe^{-i\theta}$. On a alors :

$$< f + \lambda g, f + \lambda g >=< f, f > +2p| < g, f > | + p^2 < g, g >\geq 0 \tag{1.19}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré en p. On sait que la quantité est positive, donc le polynôme admet au plus une racine. Autrement dit, le discriminant est négatif ou nul :

$$(2| < g, f > |)^2 - 4||f||^2||g||^2 \leq 0 \tag{1.20}$$

L'inégalité de Schwarz est donc démontrée. □

Une fois ce résultat établi, on montre les équivalences :

$$(1.16) \Leftrightarrow < f+g, f+g > \leq < f, f > + < g, g > +2||f||||g|| \tag{1.21}$$
$$\Leftrightarrow \Re < f, g > \leq ||f||||g|| \tag{1.22}$$

D'une part, le fait que pour tout complexe la partie réelle est inférieure ou égale au module, et d'autre part l'inégalité de Schwarz permettent d'écrire :

$$\Re < f, g > \leq | < f, g > | \leq ||f||||g|| \tag{1.23}$$

La dernière inégalité implique que (1.22) est vérifiée. Par équivalence, l'inégalité triangulaire est donc prouvée.

On peut vérifier que, pour a et b réels, (1.24) définit bien un produit hermitique, et que (1.25) définit une norme :

$$< f, g > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \tag{1.24}$$
$$< f, f > = ||f||^2 = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt \tag{1.25}$$

Les inégalités triangulaire et de Schwarz s'écrivent alors respectivement :

$$\sqrt{\int_a^b |f(t)+g(t)|^2 \, dt} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 \, dt} \tag{1.26}$$
$$\left| \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt} \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 \, dt} \tag{1.27}$$

1.1.1.2 Base fonctionnelle

Dans ce paragraphe, on montre qu'une famille de fonctions est orthonormée et peut donc servir à construire une base dans laquelle il sera possible de représenter d'autres fonctions.

Définissons la famille de fonctions 2π-périodiques, $u_n(t)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.28}$$

Montrons que cette famille est orthonormée pour la norme définie par :

$$< f(t), g(t) > = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{1.29}$$
$$||f(t)|| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}dt} \tag{1.30}$$

Pour cela il convient de distinguer deux cas, suivant que m et n sont égaux ou distincts.

- Si $m = n$, alors on a :

$$< u_n, u_n > = \int_0^{2\pi} u_n(t)\overline{u_n(t)}dt \tag{1.31}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-n)t}dt \tag{1.32}$$

$$= 1 \tag{1.33}$$

On a montré que chaque fonction u_n est normée.

- Pour $m \neq n$, on a :

$$< u_n, u_m > = \int_0^{2\pi} u_n(t)\overline{u_m(t)}dt \tag{1.34}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt \tag{1.35}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} \tag{1.36}$$

$$= 0 \tag{1.37}$$

On a montré que les fonctions u_n sont orthogonales deux à deux.

On a donc bien établi que les fonctions $u_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$ forment une base orthonormée pour le produit (1.29) et la norme (1.30). Par la suite on utilisera cette base pour exhiber un développement particulier des fonctions périodiques.

1.1.2 Développement en série d'exponentielles

La famille de fonctions $u_n(t)$ étant orthonormée, on peut écrire une fonction 2π-périodique $f(t)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des différentes fonctions de base $u_n(t)$. Autrement dit, le développement en série d'exponentielles d'une fonction 2π-périodique $f(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(t) \tag{1.38}$$

où les coefficients c_n donnent la projection de $f(t)$ sur la $n^{ème}$ composante de la base. Donc, pour calculer les coefficients c_n, appelés **coefficients de Fourier généralisés** de f(t), on étudie $< f(t), u_n(t) >$:

$$< f(t), u_n(t) > =< \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k u_k(t), u_n(t) > \tag{1.39}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k < u_k(t), u_n(t) > \tag{1.40}$$

$$= c_n \tag{1.41}$$

On a donc le développement de Fourier généralisé de $f(t)$ défini par :

$$\boxed{\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt} \tag{1.42}$$

Remarque 1.1. Le coefficient de Fourier généralisé c_0 donne la moyenne de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0\ 2\pi]$ à une constante multiplicative près, en effet on a :

$$Moy(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i0t}dt\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_0 \tag{1.43}$$

Exemple 1.1. Montrer que la fonction 2π-périodique $f(t)$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{pour } t \in]0\ \pi[\\ 1, & \text{pour } t \in]\pi\ 2\pi[\end{cases} \tag{1.44}$$

peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2i}{\pi(2n+1)} e^{i(2n+1)t} \tag{1.45}$$

Les coefficients sont définis par :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \tag{1.46}$$

et

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt & (1.47)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\pi} -e^{-int}dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-int}dt\right) & (1.48)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{e^{-int}}{in}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-e^{-int}}{in}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) & (1.49)\\ &= \frac{1}{in\sqrt{2\pi}}\left(e^{-in\pi} - 1 - 1 + e^{-in\pi}\right) & (1.50) \end{aligned}$$

Il faut donc distinguer deux cas, suivant la parité de n :

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{4i}{n\sqrt{2\pi}}, & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \tag{1.51}$$

On a donc le développement de Fourier :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2i}{\pi(2n+1)} e^{i(2n+1)t} \tag{1.52}$$

1.1.3 Conditions de convergence de Dirichlet

Dans le paragraphe précédent, on a proposé un développement d'une fonction en somme infinie, sans se préoccuper de savoir si la somme proposée convergeait. Le mathématicien Dirichlet [2] a démontré, en 1829, que les fonctions périodiques continues, ou

2. Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) fait ses études à Paris, où il côtoie Legendre, Poisson, Laplace et Fourier. Il s'intéresse alors aux séries trigonométriques et à la physique mathématique. En 1825 il retourne enseigner en Allemagne où il aura pour élève Kronecker et Riemann. À la mort de Gauss, il prend sa succession à Göttingen, jusqu'à sa mort en 1859.

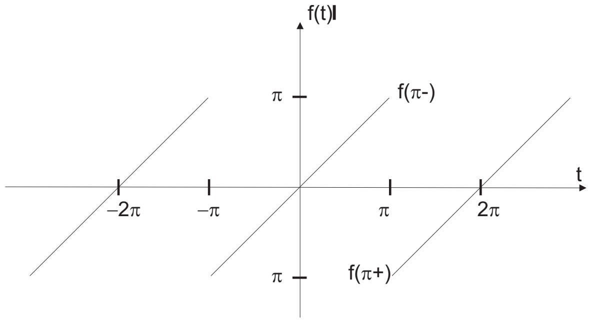


FIGURE 1.1 – Exemple de fonction continue par morceaux

continues par morceaux pouvaient être développées en série de Fourier et que sous certaines conditions (logiquement appelées conditions de Dirichlet) la série converge vers la fonction.

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\ b]$ est une fonction qui a un nombre fini de discontinuités et qui est continue sur chaque intervalle compris entre deux discontinuités. Si on note t_i avec $i = 1, \ldots, n$ les points de discontinuité vérifiant $t_i < t_{i+1}$, la fonction est continue sur $]a\ t_1[$, $]t_1\ t_2[$, $]t_2\ t_3[$, ..., $]t_{n-1}\ t_n[$, $]t_n\ b[$. Pour chaque point de discontinuité t_i, la fonction a une limite à gauche (par valeurs inférieures) notée $f(t_i^-)$, et une limite à droite (par valeurs supérieures), notée $f(t_i^+)$.

Par exemple la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t$ sur $] - \pi\ \pi[$ est continue par morceaux sur $[-3\pi\ 3\pi]$, comme le montre la figure 1.1. Les limites de $f(t)$ en $t = \pi$ sont : $f(\pi^-) = \pi$ et $f(\pi^+) = -\pi$.

Le résultat établi par Dirichlet donne des conditions suffisantes à la convergence de la série de Fourier vers la fonction. Il est admis sans démonstration.

Théorème 1.1 (théorème de Dirichlet). *Soit $f(t)$ une fonction 2π-périodique, telle que $f(t)$ et sa dérivée $f'(t)$ soient continues par morceaux sur l'intervalle $[0\ 2\pi]$. La série de Fourier (1.42) converge vers :*
- *$f(t)$, si $f(t)$ est continue en t ;*
- *$\frac{f(t-)+f(t+)}{2}$, si t est un point de discontinuité de $f(t)$.*

1.1.4 Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval relie l'énergie d'un signal (définie par l'intégrale de son carré) à la somme des carrés des coefficients de la série de Fourier. En effet, du point de vue mathématique, l'énergie du signal correspond à la norme de la fonction. Or les fonctions $u_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}$ formant une base orthonormée de l'espace des fonctions le carré de la norme de la fonction est égal à la somme des carrés des projections de la fonction sur les vecteurs de base. En effet :

$$< f(t), f(t) > = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n u_n(t) \right) \overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m u_m(t) \right)} dt \qquad (1.53)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n \overline{c_m} \underbrace{\int_0^{2\pi} u_n(t)\overline{u_m(t)}dt}_{=1 \text{ si } n=m,\ =0 \text{ sinon}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \qquad (1.54)$$

On a établi le résultat connu sous le nom de théorème de Parseval.

Théorème 1.2 (théorème de Parseval). *Soit une fonction 2π-périodique $f(t)$ telle que $f(t)$ et $f'(t)$ soient continues par morceaux. Les coefficients de Fourier généralisés, c_n, vérifient :*

$$\boxed{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2} \tag{1.55}$$

Ce résultat faisant le lien entre une somme infinie et une intégrale sur un support compact est parfois utilisé pour calculer des sommes de séries, comme l'exemple suivant l'illustre.

Exemple 1.2. Utiliser le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \in]0\ \pi[\\ 0, & \text{pour } t \in]\pi\ 2\pi[\end{cases} \tag{1.56}$$

pour démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1.1.5 Développement en série de cosinus et sinus

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où $f(t)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ce cas correspond à la majorité des signaux physiques qu'on peut mesurer et être amené à analyser d'un point de vue spectral (généralement l'écriture complexe est une modélisation particulière, tentant par exemple de rendre compte d'un caractère oscillatoire d'un phénomène).

Considérons une fonction 2π-périodique $f(t)$ réelle, et écrivons son développement en série de Fourier :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n\geq 1} \frac{c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.57}$$

Les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} dt \tag{1.58}$$

Les coefficients c_n et c_{-n} sont liés par la relation suivante :

$$c_{-n} = \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} dt = \overline{\int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}} dt} = \overline{c_n} \tag{1.59}$$

Pour $n \geq 1$, posons :

$$c_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a_0 \tag{1.60}$$

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (a_n - ib_n) \tag{1.61}$$

$$c_{-n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (a_n + ib_n) \tag{1.62}$$

avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Le développement en série de Fourier devient alors :

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(a_n + ib_n)e^{-int} + (a_n - ib_n)e^{int}}{2} \tag{1.63}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{1.64}$$

On a donc obtenu un développement de $f(t)$ réelle en série de *cosinus* et de *sinus*. Les coefficients a_n et b_n sont donnés, pour $n \geq 1$, par :

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}c_0 \quad a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \quad b_n = i\frac{c_n - c_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.65}$$

En reportant les expressions de c_0, et c_n dans ces écritures on obtient :

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{\sqrt{2\pi}} dt \tag{1.66}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \tag{1.67}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\frac{e^{-int} + e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.68}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \tag{1.69}$$

$$b_n = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\frac{e^{-int} - e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.70}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \tag{1.71}$$

Pour récapituler, on peut, sous les conditions données par le théorème de Dirichlet, développer une fonction 2π-périodique par une série de *cosinus* et de *sinus* sous la forme :

$$\boxed{\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))} \tag{1.72}$$

où les coefficients a_n et b_n sont définis par :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt} \tag{1.73}$$

Pour des fonctions réelles, cette écriture est plus usitée que celle en série d'exponentielles. En effet, l'intégrale ne faisant intervenir que des fonctions réelles est souvent plus simple à calculer, surtout numériquement.

On peut réécrire le théorème de Parseval avec cette représentation.

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \tag{1.74}$$

$$= c_0^2 + \sum_{n\geq 1} |c_n|^2 + \sum_{n\geq 1} |c_{-n}|^2 \tag{1.75}$$

$$= \frac{\pi}{2} a_0^2 + 2\sum_{n\geq 1} |c_n|^2 \tag{1.76}$$

$$= \frac{\pi}{2} a_0^2 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{1.77}$$

Autrement dit, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 (théorème de Parseval)**.** *Soit une fonction 2π-périodique $f(t)$ telle que $f(t)$ et $f'(t)$ soient continues par morceaux. Les coefficients de la série de Fourier en cosinus et sinus, a_n et b_n, vérifient :*

$$\boxed{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n\geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right)} \tag{1.78}$$

Remarque 1.2. Si la fonction $f(t)$ est paire [3], alors les fonctions $f(t)\sin(nt)$ sont impaires, dans ce cas les intégrales de ces fonctions sur une période sont nulles. On en conclue que le développement d'une fonction paire ne comporte que des termes en *cosinus*, et éventuellement un terme constant dû au a_0.

Remarque 1.3. De même si la fonction $f(t)$ est impaire [4], alors les fonctions $f(t)\cos(nt)$ sont impaires, et leurs intégrales sur une période sont nulles. Autrement dit, le développement d'une fonction impaire ne comporte que des termes en *sinus*.

Exemple 1.3. Donner le développement en série de Fourier en *cosinus* et *sinus* de la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } t \in [0\ \pi[\\ 2\pi - t, & \text{pour } t \in [\pi\ 2\pi[\end{cases} \tag{1.79}$$

Cette fonction est paire, donc les coefficients b_n sont nuls. Calculons les coefficients a_n. Le calcul du coefficient a_0 est immédiat :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi \tag{1.80}$$

Les autres coefficients a_n sont donnés par :

$$a_n = 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \tag{1.81}$$

3. c'est à dire, si $f(t)$ vérifie $f(-t) = f(t),\ \forall t$
4. c'est à dire, si $f(t)$ vérifie $f(-t) = -f(t),\ \forall t$

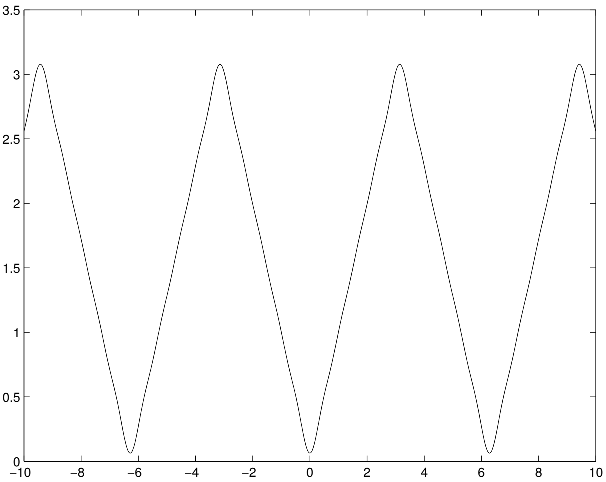


FIGURE 1.2 – Somme des 10 premiers termes de la série de Fourier de $f(t)$.

En effet, on a

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt && (1.82)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - t)\cos(nt)dt\right) && (1.83)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt + \left[\frac{(2\pi-t)\sin(nt)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) && (1.84)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) && (1.85)\\
& && (1.86)
\end{aligned}
$$

On a donc le développement suivant de $f(t)$:

$$\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n\geq 1} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nt) \tag{1.87}$$

La figure 1.2 représente la somme des 10 premiers termes de la série de Fourier. On constate qu'une somme finie de peu de termes donne déjà une très bonne approximation de la fonction $f(t)$.

En utilisant le théorème de Parseval, et par un raisonnement similaire à celui utilisé dans l'exemple précédent (séparation de la somme selon la parité des indices) on peut montrer que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{1.88}$$

1.1.6 Développements pour une fonction de période quelconque

Les résultats établis pour les fonctions 2π-périodiques s'étendent aux fonctions T-périodiques sans peine. En effet, on peut montrer que la famille de fonction $u_n(t)$ définies par :

$$u_n(t) = \frac{e^{i2\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \tag{1.89}$$

est une famille orthonormée pour la norme définie par :

$$||f(t)|| = \sqrt{< f(t), f(t) >} \tag{1.90}$$

$$< f(t), g(t) > = \int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt \tag{1.91}$$

Dans ce cas, on peut écrire le développement en série d'exponentielles de $f(t)$ sous la forme :

$$\boxed{\tilde{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{in2\pi t/T}}{\sqrt{T}}} \tag{1.92}$$

On peut montrer très facilement que les coefficients de Fourier généralisés sont donnés par $c_n =< f(t), u_n >$, autrement dit :

$$\boxed{c_n = \int_0^T f(t)\frac{e^{-i2\pi nt/T}}{\sqrt{T}}dt} \tag{1.93}$$

On remarque que $c_{-n} = \overline{c_n}$. En posant $c_n = (a_n - ib_n)\sqrt{T}/2$, on peut écrire le développement en série de Fourier d'une fonction T-périodique, réelle sous la forme :

$$\boxed{\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\right)} \tag{1.94}$$

avec :

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt} \tag{1.95}$$

Le théorème de Parseval s'écrit :

$$\boxed{\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)} \tag{1.96}$$

1.2 Transformée de Fourier

Le développement en séries de Fourier permet de représenter les fonctions périodiques au moyen de séries. On peut néanmoins chercher à mettre en œuvre des outils similaires pour les fonctions qui ne sont pas périodiques. Autrement dit, pour les fonctions périodiques de période infinie. On peut donc écrire son développement en exponentielles :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T f(t)e^{-i2\pi tn/T}dt\right)}_{c_n} \underbrace{\frac{e^{i2\pi tn/T}}{\sqrt{T}}}_{u_n(t)} \tag{1.97}$$

On pose $\nu_0 = 1/T$ et on définit la fonction $F(n\nu_0) = \int_0^T f(t)e^{-i2\pi tn\nu_0}dt$. La fonction $f(t)$ s'écrit alors :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu_0 F(n\nu_0)e^{i2\pi n\nu_0 t} \tag{1.98}$$

En faisant tendre $T \to +\infty$, autrement dit $\nu_0 \to 0$, on fait apparaître une somme de Riemann (où ν_0 est le pas d'intégration de la variable ν) et on a :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu \tag{1.99}$$

En notant $\nu = n\nu_0$ dans la fonction F définie plus haut, et en considérant que la période de la fonction est $\mathbb{R}$, il vient :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt \tag{1.100}$$

1.2.1 Définition

Soit une fonction $f(t)$ absolument intégrable [5] sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t)$ et sa dérivée $f'(t)$ sont continues (éventuellement par morceaux) sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de $f(t)$, notée $\mathcal{F}(f(t))$ est définie par :

$$\boxed{F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt} \tag{1.101}$$

On définit également la transformée inverse de Fourier, notée $\mathcal{F}^{-1}$, telle que si $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$, alors $f(t)$ est la transformée inverse de $F(\nu)$. Autrement dit, on a l'équivalence :

$$F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) \tag{1.102}$$

La transformée inverse est définie par :

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu} \tag{1.103}$$

Remarque 1.4. La condition $f(t)$ *absolument intégrable* est une condition suffisante mais non nécessaire, certaines fonctions non absolument intégrables ont tout de même une transformée de Fourier.

Remarque 1.5. Si la fonction $f(t)$ est discontinue en t_0, la transformée de Fourier est définie en considérant les intégrales à gauche et à droite de $f(t)$, par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{t_0} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt + \int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{1.104}$$

Dans ce cas, la transformée inverse de $F(\nu)$ coïncide avec $f(t)$ partout sauf en t_0. En ce point particulier la comparaison n'a pas de sens étant donné que $f(t)$ n'est pas définie.

5. on dit que $f(t)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ converge.

Remarque 1.6. Si la fonction $f(t)$ est réelle et paire, la transformée de Fourier de $f(t)$ est une fonction réelle et paire. En effet, en séparant le domaine d'intégration en $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$, il vient (en faisant le changement de variable $u = -t$ dans la seconde intégrale) :

$$F(\nu) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt + \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{1.105}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt - \int_{+\infty}^0 f(-u)e^{2i\pi\nu u}du \tag{1.106}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{2i\pi\nu t}dt \tag{1.107}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\nu t)dt \tag{1.108}$$

La fonction *cosinus* étant paire, on a bien $F(-\nu) = F(\nu)$, et de toute évidence $F(\nu)$ est réelle.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et paire, alors $F(\nu)$ sera imaginaire et paire.

De la même manière si $f(t)$ est réelle et impaire, alors la transformée de Fourier de $f(t)$ est imaginaire et impaire. En effet :

$$F(\nu) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt + \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{1.109}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{2i\pi\nu t}dt \tag{1.110}$$

$$= 2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\nu t)dt \tag{1.111}$$

La fonction *sinus* étant impaire, on a bien $F(-\nu) = -F(\nu)$, et $F(\nu)$ est visiblement imaginaire.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et impaire, alors $F(\nu)$ sera réelle et impaire.

Exemple 1.4. Montrer que la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.112}$$

est

$$F(\nu) = Te^{-i\pi\nu T} sinc(\pi\nu T) \tag{1.113}$$

La transformée de Fourier est donnée par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt = \int_0^T e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{1.114}$$

$$= \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_0^T = \frac{e^{-2i\pi\nu T} - 1}{-2i\pi\nu} \tag{1.115}$$

Où la fonction *sinc* (pour *sinus cardinal*) est définie par $sinc(x) = \sin(x)/x$, si $x \neq 0$, et $sinc(0) = 1$).

Exemple 1.5. Montrer que la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac centrée en t_0, notée $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ est $F(\nu) = 1$, pour $t_0 = 0$.
La transformée de l'impulsion de Dirac est donnée par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = e^{-2i\pi\nu t_0} \tag{1.116}$$

On peut en particulier noter que s'il s'agit de l'impulsion centrée en l'origine, la transformée est $F(\nu) = 1$.
Exemple 1.6. Montrer que la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t + T, & \text{si } -T \leq t \leq 0 \\ T - t, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.117}$$

est

$$F(\nu) = \frac{1 - \cos(2\pi\nu T)}{2\pi^2\nu^2} \tag{1.118}$$

1.2.2 Propriétés

Quelques propriétés utiles de la transformée de Fourier seront établies dans cette section. Pour cela on considère une fonction $f(t)$ telle que sa transformée de Fourier $F(\nu)$ existe, et que la transformée de Fourier inverse de $F(\nu)$ est $f(t)$. Autrement dit :

$$F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) \quad \text{et} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) \tag{1.119}$$

1.2.2.1 Linéarité

La transformée de Fourier (et son inverse) est définie par une intégrale. L'intégrale étant linéaire, la transformée de Fourier (et son inverse) est linéaire. Pour tout couple de scalaires α et β, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{F}(f(t)) + \beta \mathcal{F}(g(t))} \tag{1.120}$$

De même pour la transformée inverse, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\alpha F(\nu) + \beta G(\nu)) = \alpha \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) + \beta \mathcal{F}^{-1}(G(\nu))} \tag{1.121}$$

1.2.2.2 Translation dans l'espace de départ

La transformée de Fourier d'une fonction translatée de a est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{F}(f(t - a)) = e^{-2i\pi\nu a} \mathcal{F}(f(t))} \tag{1.122}$$

Cette propriété se prouve avec le changement de variable : $u = t - a$.

1.2.2.3 Dilatation ou contraction dans l'espace de départ

La transformée de Fourier d'une fonction dont la variable subit une homothétie de rapport $k > 0$ est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{\nu}{k}\right)} \tag{1.123}$$

Cette propriété se montre avec le changement de variable : $u = kt$.
Remarque 1.7. Pour un rapport k négatif, il vient : $\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}\left(\frac{\nu}{k}\right)$

1.2.2.4 Transformée de Fourier d'une fonction modulée

La transformée de Fourier d'un signal $f(t)$ modulé par $e^{2i\pi\nu_0 t}$ est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 t}f(t)) = F(\nu-\nu_0)} \tag{1.124}$$

Cette propriété se montre en reconnaissant la transformée de Fourier de $f(t)$ où ν est remplacé par $\nu-\nu_0$.

1.2.2.5 Conjugaison

La transformée de Fourier du conjugué d'une fonction $f(t)$ est :

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right) = \overline{F(-\nu)}} \tag{1.125}$$

Le conjugué d'un produit étant le produit des conjugués, on a :

$$\mathcal{F}(\overline{f(t)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}e^{-2i\pi\nu t}dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi\nu t}dt} = \overline{F(-\nu)} \tag{1.126}$$

1.2.2.6 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

La transformée de Fourier de la dérivée $f'(t)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = 2i\pi\nu F(\nu)} \tag{1.127}$$

Pour établir ce résultat, il faut intégrer par parties l'intégrale définissant la transformée de Fourier de la dérivée :

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \left[f(t)e^{-2i\pi\nu t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi\nu f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{1.128}$$

La fonction $f(t)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, cela implique que sa limite est nulle pour $t\to-\infty$ et $t\to+\infty$. De ce fait, le premier terme du membre de droite de (1.128) est nul, et il vient :

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = 2i\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\nu t}dt = 2i\pi\nu F(\nu) \tag{1.129}$$

Ce résultat se généralise pour les dérivées successives de $f(t)$ (à condition qu'elle vérifient les conditions d'existence de la transformée de Fourier). En effet, on démontre facilement par récurrence que :

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (2i\pi\nu)^n F(\nu)} \tag{1.130}$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles. En particulier, si on considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n où $y(t)$ est inconnue et où le terme forcé est $u(t)$:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \tag{1.131}$$

La transformée de Fourier étant linéaire, la transformée de Fourier de cette équation est un polynôme d'ordre n en ν :

$$a_n(2i\pi\nu)^n Y(\nu) + a_{n-1}(2i\pi\nu)^{n-1}Y(\nu) + \cdots + a_1 2i\pi Y(\nu) = U(\nu) \tag{1.132}$$

Il est alors facile de déduire $Y(\nu)$ et d'en déduire, à l'aide d'une transformée inverse, la solution $y(t)$ de l'équation différentielle. Comme on le verra au chapitre suivant cette méthode est encore plus commode avec la transformée de Laplace. Dans un cas comme dans l'autre, la transformée inverse est parfois fastidieuse il est fréquemment fait usage de tables où sont consignées un grand nombre de fonctions usuelles et leurs transformées respectives.

1.2.2.7 Dérivation de la transformée de Fourier

La dérivation de $F(\nu)$ par rapport à la variable ν donne :

$$\boxed{\frac{dF(\nu)}{d\nu} = F(-2i\pi t f(t))} \tag{1.133}$$

Il suffit de dériver sous le signe d'intégration la transformée de Fourier.

Ce résultat se généralise aux dérivées successives de $F(\nu)$ par :

$$\boxed{\frac{d^n F(\nu)}{d\nu^n} = F\left((-2i\pi t)^n f(t)\right)} \tag{1.134}$$

1.2.2.8 Convolution

Définition 1.5 (produit de convolution)**.** *Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions absolument intégrables. Le produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$, noté $f(t) \star g(t)$ est défini par :*

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.135}$$

Il est évident que le produit de convolution est linéaire en $f(t)$ et en $g(t)$, car il est défini par une intégrale.

La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit usuel des transformées de Fourier de chaque fonction :

$$\boxed{\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t))} \tag{1.136}$$

Ce résultat se prouve par des changements de variable successifs, dans un premier temps on pose $u = t - \tau$, ensuite on fait $v = t - u$. Il vient alors :

$$\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{1.137}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)e^{-2i\pi\nu(t-u+u)}dudt \tag{1.138}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(u)e^{-2i\pi\nu(v+u)}dudv \tag{1.139}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-2i\pi\nu v}dv\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-2i\pi\nu u}du\right) \tag{1.140}$$

$$= F(\nu).G(\nu) \tag{1.141}$$

Le produit de convolution est très utilisé en physique car on peut montrer que les comportements entrée/sortie de beaucoup de systèmes dynamiques peuvent se représenter par un produit de convolution. Dans ce cas, les signaux de sorties du système sont donnés par la convolution des signaux d'entrée et d'un opérateur modélisant le système. On peut par exemple penser aux systèmes dynamiques linéaires. Leur comportement est décrit par une équation différentielle linéaire portant sur les variables d'entré $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Dans ce cas, on a vu que la résolution de l'équation différentielle peut se faire à l'aide de la transformée de Fourier. On a alors une solution de la forme : $Y(\nu) = H(\nu).U(\nu)$. L'opérateur $H(\nu)$ représente alors le comportement du système. Dans l'espace de départ $y(t)$ est donné par un produit de convolution de cet opérateur et des entrées $u(t)$.

On peut démontrer de manière analogue que la transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions est le produit de convolution des transformées de chaque fonction :

$$\boxed{\mathcal{F}(f(t)g(t)) = F(\nu) \star G(\nu)} \tag{1.142}$$

1.2.3 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Les fonctions périodiques ne sont pas toujours à énergie finie, donc théoriquement elles n'admettent pas de transformée de Fourier. On va néanmoins montrer qu'il est possible de déterminer une transformée de Fourier, dite généralisée, en utilisant la décomposition en série de Fourier.

On a vu précédemment qu'une fonction T-périodique peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles comme suit :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \quad \text{avec} \quad c_n = \int_0^T f(t) \frac{e^{-2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} dt \tag{1.143}$$

Dans ce cas, par linéarité de la transformée de Fourier, on peut écrire :

$$\mathcal{F}(f(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}} \mathcal{F}\left(e^{2i\pi nt/T}\right) \tag{1.144}$$

Pour déterminer la transformée de Fourier de l'exponentielle complexe, on étudie la transformée inverse de l'impulsion de Dirac, centrée en ν_0 :

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu - \nu_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - \nu_0) e^{2i\pi\nu t} d\nu = e^{2i\pi\nu_0 t} \tag{1.145}$$

Autrement dit, on a établi que la transformée de Fourier de l'exponentielle est :

$$\mathcal{F}\left(e^{2i\pi nt/T}\right) = \delta\left(\nu - n/T\right) \tag{1.146}$$

On peut donc écrire la transformée de $f(t)$ sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{F}(f(t)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)} \tag{1.147}$$

Exemple 1.7. Considérons la fonction T-périodique $f(t) = \cos(2\pi t/T)$. Cette fonction peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \frac{\sqrt{T}}{2} \left(\frac{e^{2i\pi t/T}}{\sqrt{T}} + \frac{e^{-2i\pi t/T}}{\sqrt{T}} \right) \tag{1.148}$$

Les seuls coefficients c_n non nuls, sont $c_1 = c_{-1} = \sqrt{T}/2$. D'après ce qui vient d'être établi la transformée de Fourier généralisée de la fonction *cosinus* est :

$$\mathcal{F}\left(\cos(2\pi t/T)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta\left(\nu - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{T}\right)\right) \tag{1.149}$$

La transformée de Fourier d'une fonction périodique sur un support fini se fait en remarquant qu'une telle fonction est le produit d'une fonction périodique à support infini par une fonction porte (fonction égale à 1 sur le support, et nulle ailleurs). La transformée d'un produit étant le produit de convolution des transformées, il vient que la transformée de la fonction périodique sur un support fini est le produit de convolution de la transformée de la fonction périodique (une somme pondérée de Dirac) par la transformée de la fonction porte (un *sinus cardinal*, comme on l'a vu à l'exercice 1.4)

1.2.4 Théorème de Parseval

On peut montrer que, de manière similaire au cas des séries de Fourier, l'énergie d'un signal temporel est égale à l'énergie de sa transformée de Fourier. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de Parseval.

Théorème 1.3 (théorème de Parseval)**.** *Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie et $F(\nu)$ sa transformée de Fourier, également à énergie finie. Les fonctions $f(t)$ et $F(\nu)$ ont la même énergie :*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu} \tag{1.150}$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat, on peut commencer par remarquer, la valeur particulière de $F(\nu)$ quand $\nu = 0$:

$$F(\nu = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \tag{1.151}$$

En considérant la fonction $f(t)\overline{f(t)}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t)} dt = \left[\mathcal{F}\left(f(t)\overline{f(t)}\right)\right]_{\nu=0} \tag{1.152}$$

On sait que $f(t)\overline{f(t)} = |f(t)|^2$, et on a établi que la transformée d'un produit est le produit de convolution des transformées, et que la transformée du conjugué de $f(t)$ est $\mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right) = \overline{F(-\nu)}$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \left[\mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}\left(\overline{f(t)}\right)\right]_{\nu=0} \tag{1.153}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(-(\nu-\tau))} d\tau\right]_{\nu=0} \tag{1.154}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(\tau)} d\tau \tag{1.155}$$

or $F(\tau)\overline{F(\tau)} = |F(\tau)|^2$, ce qui achève la démonstration. □

On peut montrer de la même manière que pour deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et leurs transformées de Fourier respectives $F(\nu)$ et $G(\nu)$, lorsque les intégrales suivantes sont définies, on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\overline{G(\nu)}d\nu} \tag{1.156}$$

1.2.5 Transformée de Fourier d'un signal discret

On appelle signal discret, ou numérique, un signal dont on ne connaît la valeur que par instants. C'est le cas de la plupart des signaux physiques mesurés, où l'enregistrement est effectué à intervalles de temps régulier. De ce fait, lorsqu'on est amené à mettre en évidence le caractère périodique d'un signal mesuré on ne connaît pas le signal pour toute valeur du temps t.

Il est généralement illusoire de partir du principe qu'on connaît le signal de manière analytique, c'est à dire de supposer qu'on peut écrire la forme mathématique de $f(t)$ en fonction de t. Si on cherche à faire une étude spectrale d'un signal mesuré c'est justement car on en ignore les caractéristiques, on est donc loin de pouvoir en donner une représentation mathématique exacte.

Les informations accessibles sont généralement le relevé de N mesures, régulièrement espacées dans le temps. Le temps qui s'écoule entre deux mesures successives est appelé la période d'échantillonnage, notée T_e, donnée par $T_e = T/N$. Les seules données sont donc les N valeurs du signal aux instants $t_k = kT/N$, pour $k = 0, \dots, N-1$.

Étant donné que le signal $f(t)$ n'est connu que sur le support $[0\ T[$, on peut supposer que $f(t)$ est T-périodique. On cherche alors une fonction $\hat{f}(t)$, T-périodique qui estime le signal mesuré $f(t)$. Cette fonction estimée, censée coïncider avec $f(t)$ pour toutes les valeurs connues de $f(t)$, peut se mettre sous la forme :

$$\hat{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \frac{e^{2i\pi nt/T}}{\sqrt{T}} \tag{1.157}$$

Autrement dit la transformée de Fourier de ce signal est donnée par :

$$\mathcal{F}\left(\hat{f}(t)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{\sqrt{T}}\delta(\nu - n/T) \tag{1.158}$$

Les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \hat{f}(t)e^{-2i\pi nt/T}dt \tag{1.159}$$

Si le nombre de mesures est suffisamment grand, on peut approcher cette intégrale par sa somme de Riemann (autrement dit, approcher la surface sous la courbe par des petits rectangles) :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi kn/N}\frac{T}{N} \tag{1.160}$$

Or par construction de $\hat{f}(t)$, pour les points $t_k = \frac{kT}{N}$ ($k = 0, \dots, N-1$), on a $\hat{f}(t) = f(t)$. Les coefficients c_n peuvent donc se calculer selon :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi kn/N}\frac{T}{N} \tag{1.161}$$

Dans ce cas la transformée de Fourier devient :

$$\mathcal{F}\left(\hat{f}(t)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kT}{N}\right) e^{-2i\pi kn/N}\right] \delta(\nu - n/T) \tag{1.162}$$

La transformée de Fourier est alors une somme de raies de poids $c_n/\sqrt{T}$. Théoriquement la détermination du poids de chaque raie nécessite le calcul de N *cosinus* et N sinus. De plus on ne sait pas quel nombre de raies il convient de chercher (théoriquement il y en a une infinité, mais sont elles toutes indépendantes ?).

On peut remarquer que les coefficients c_n sont N-périodiques, en effet du fait que l'exponentielle complexe est 2π-périodique, on a $c_n = c_{n+N}$, de ce fait, il suffit de calculer N coefficients, par exemple c_0 à c_{N-1}.

De plus on remarque que n est en facteur dans l'exponentielle complexe, donc si $f(t)$ est un signal réel -ce qui est souvent le cas en pratique- il apparaît que : $c_{-n} = \overline{c_n}$. En tenant compte du fait que c_n est N-périodique, il suffit de calculer $N/2$ valeurs de c_n pour $n = 0, \ldots, N/2$.

Enfin, on peut remarquer que, toujours si $f(t)$ est une fonction à valeurs réelles, on a : $c_{N-n} = c_{-n} = \overline{c_n}$. De ce fait le calcul du spectre à partir des valeurs numériques acquises à la fréquence $\nu_e = N/T$ ne peut pas faire apparaître les composantes du spectre au delà de $N/(2T)$. En effet, au delà de la composante de fréquence $N/(2T)$, on a le symétrique de la recopie des $N/2$ premiers termes. Autrement dit, pour reconstruire exactement le spectre de $f(t)$, à partir des mesures faites à la fréquence ν_e, il faut que le spectre de $f(t)$ soit nul pour toutes les composantes $\nu \geq \nu_e/2$. C'est le théorème de Shannon (énoncé en 1948).

Théorème 1.4 (théorème de Shannon)**.** *La mesure d'un signal de spectre compris entre $-\nu_{max}$ et $+\nu_{max}$ doit être faite à une fréquence supérieure à $2\nu_{max}$. Autrement dit, la période d'échantillonnage doit vérifier : $T_e \leq \frac{1}{2\nu_{max}}$.*

On trouvera en annexe un algorithme permettant de calculer rapidement [6] les coefficients de la transformée de Fourier d'un signal discret.

6. surtout avec un calculateur ...

Chapitre 2

Transformée de Laplace

L'intérêt de la transformation de Laplace [1] est d'offrir sensiblement les mêmes propriétés que la transformée de Fourier, mais dans un cadre moins restrictif. Ainsi de nombreuses fonctions dont les transformées de Fourier n'existent pas (car l'intégrale sur un support infini de ces fonctions ne sont pas définies) admettent une transformée de Laplace. Comme on le verra, pour obtenir ce résultat, l'intégrale comprend un terme supplémentaire, tendant vers 0 lorsque $t \to \infty$ afin de forcer la convergence de l'intégrale.

La transformée de Laplace est très utile pour résoudre des équations différentielles. En effet, on s'apercevra qu'une équation différentielle linéaire devient un polynôme. De plus les conditions initiales des problèmes différentiels sont très facilement prises en compte lors de la résolution par transformée de Laplace.

2.1 Définition de la transformée et de la et transformée inverse

La transformée de Laplace est essentiellement utilisée dans un cadre physique, c'est pourquoi on considère uniquement des signaux dits *causaux*, c'est à dire nuls pour $t < 0$.

Un grand nombre de fonctions usuelles $f(t)$ non intégrables sur $\mathbb{R}$ croissent moins vite que la fonction exponentielle lorsque $t \to \infty$, autrement dit même si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}+} f(t)dt$ n'existe pas, l'intégrale suivante est bien définie, pour un réel positif $a > 0$ suffisamment grand :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt \tag{2.1}$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier du produit $f(t)e^{-\alpha t}$, avec $\alpha \geq a$ existe. La transformée de Fourier de $f(t)e^{-\alpha t}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}\left(f(t)e^{-at}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-2i\pi\nu t}dt \tag{2.2}$$

1. Pierre Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827) élu à l'Académie des Sciences en 1785, il participe après la révolution à la mise en place du système métrique, et à l'organisation de l'École Normale et de l'École Polytechnique. Il étudie le calcul des probabilités, la mécanique céleste, les transformations adiabatiques d'un gaz, l'électromagnétisme. Il réunit ses travaux et ceux de Newton, Halley, Clairaut, d'Alembert et Euler dans les cinq volumes de sa "Mécanique Céleste" (1825). Quand Napoléon lui fît remarquer qu'il n'y était nulle part fait mention de Dieu, il répondît : "je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse".

Sachant que $f(t)$ est nulle pour $t < 0$, et en notant $p = \alpha + i\omega = \alpha + i2\pi\nu$, il vient :

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{2.3}$$

Définition 2.1 (transformée de Laplace)**.** *La transformée de Laplace de la fonction causale $f(t)$, notée $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ est donnée par :*

$$\boxed{F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt} \tag{2.4}$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, on peut définir une transformation inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) \tag{2.5}$$

Cette transformation inverse est définie comme suit.

Définition 2.2 (transformée inverse de Laplace)**.** *La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ est donnée par :*

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)e^{pt}dp} \tag{2.6}$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\alpha \geq a$).

On utilise très peu cette définition mathématique pour calculer des transformées inverses. Dans la plupart des applications on parvient à se ramener à des formes répertoriées dans des tables où sont consignées des fonctions usuelles et leurs transformées de Laplace. Une table succincte est donnée en annexe, page 44.

2.2 Propriétés des transformées de Laplace

Une fois établies quelques propriétés pratiques de la transformée de Laplace, on étudiera les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation (respectivement, d'intégration) par rapport au temps t, à la multiplication (respectivement, la division) par la variable p.

2.2.1 Linéarité

De par la linéarité de l'intégration, la transformée de Laplace est linéaire, autrement dit, pour tout couple de fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ telles que leurs transformées de Laplace convergent, et pour tout couple de constantes α et β, on vérifie :

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha\mathcal{L}(f_1(t)) + \beta\mathcal{L}(f_2(t))} \tag{2.7}$$

Il en est évidemment de même pour la transformée inverse. Pour tout couple de constantes α et β, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F_1(p)) + \beta\mathcal{L}^{-1}(F_2(p))} \tag{2.8}$$

2.2.2 Translation dans l'espace de départ

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ retardée de τ est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}\mathcal{L}(f(t)) = e^{-p\tau}F(p)} \tag{2.9}$$

Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = t - \tau$, $du = dt$, dans le calcul de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-p(u+\tau)}du = e^{-p\tau}\underbrace{\int_0^\infty x(u)e^{-pu}du}_{F(p)} \tag{2.10}$$

2.2.3 Dilatation ou contraction dans l'espace de départ

Pour un réel positif k, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)} \tag{2.11}$$

Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = kt$, $du = kdt$, dans le calcul de la transformée de Laplace.

2.2.4 Transformée de Laplace d'une fonction modulée

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, modulée par e^{-at} est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = F(p+a)} \tag{2.12}$$

Le terme de modulation étant constant par rapport à la variable d'intégration, on peut le déplacer dans l'intégrale et faire apparaître la transformée de Laplace en $(p+a)$ au lieu de p.

2.2.5 Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

Si on note $f(0^+)$ la valeur initiale de la fonction $f(t)$, la transformée de Laplace de la dérivée $\frac{df(t)}{dt}$ est donnée par la relation :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p) - f(0^+)} \tag{2.13}$$

Cette relation se prouve en intégrant par parties la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ et en se souvenant que $\Re(p) > 0$.

2.2.6 Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p}F(p)} \tag{2.14}$$

Pour prouver cette relation, notons $\tilde{f}(t)$, la primitive de $f(t)$ nulle en l'origine (*i.e.* $\frac{d\tilde{f}(t)}{dt} = f(t)$, et $\tilde{f}(0) = 0$), en intégrant par parties il vient :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \int_0^\infty \tilde{f}(t)e^{-pt}dt \tag{2.15}$$

$$= \left[-\tilde{f}(t)\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t)) \tag{2.17}$$

2.2.7 Dérivation de la transformée de Laplace

En dérivant la transformée de Laplace dans l'intégrale, on a :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}(f(t))}{dp} = -t\mathcal{L}(f(t))} \tag{2.18}$$

Plus généralement, en dérivant n fois, on a :

$$\boxed{\frac{d^n\mathcal{L}(f(t))}{dp^n} = (-t)^n\mathcal{L}(f(t))} \tag{2.19}$$

Le terme en $(-t)^n$ n'affecte pas la convergence de l'intégrale si l'intégrale en $f(t)$ était définie (autrement dit, si $f(t)$ admettait une transformée de Laplace).

2.2.8 Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction à partir de la relation connue sous le nom de *théorème de la valeur initiale.*

Théorème 2.1 (théorème de la valeur initiale)**.** *La valeur en $t = 0$ de $f(t)$ est donnée par :*

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)} \tag{2.20}$$

Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to \infty$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$.

2.2.9 Théorème de la valeur finale

La valeur finale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction à partir de la relation connue sous l'appellation de *théorème de la valeur finale.*

Théorème 2.2 (théorème de la valeur finale)**.** *La limite pour $t \to \infty$ de la fonction $f(t)$ est donnée par :*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)} \tag{2.21}$$

Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to 0$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$.

2.2.10 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions causales $f(t)$ et $g(t)$, noté $f(t) \star g(t)$, est défini par :

$$f(t) \star g(t) = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{2.22}$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit usuel des transformées de Laplace des fonctions :

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))} \tag{2.23}$$

En effet on peut calculer :

$$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) e^{-pt}dt \tag{2.24}$$

en posant le changement de variable $v = t - \tau$ (donc : $dv = dt$), on peut séparer les variables des deux intégrales :

$$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(v)e^{-p(v+\tau)}d\tau dv \tag{2.25}$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau}_{\mathcal{L}(f(t))} \underbrace{\int_0^\infty g(v)e^{-pv}dv}_{\mathcal{L}(g(t))} \tag{2.26}$$

2.3 Applications

Dans un premier temps on calculera les transformées de Laplace de fonctions très utiles en pratique (en particulier pour l'étude des systèmes dynamiques, et de leur réponse aux signaux d'entrée types). Puis on présentera un exemple de résolution d'équation différentielle par la transformée de Laplace.

2.3.1 Transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac

L'impulsion, ou Dirac [2], notée $\delta(t)$, est définie par les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = 0, \text{ pour } t \neq 0 \tag{2.27}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \tag{2.28}$$

Le dirac, s'il n'est pas physiquement réalisable (valeur infinie pendant un temps infiniment court !) est utilisé pour décrire la réponse des systèmes dynamiques à des sollicitations très brèves. On peut approcher la fonction dirac par une fonction porte d'amplitude $T/1$ sur un intervalle T. On considère donc la fonction :

$$d_0(t) = \begin{cases} 1/T, & \text{si } t \in]0\ T[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.29}$$

2. du nom de Paul A.M. Dirac (1902-1986), physicien britannique. Après avoir proposé un formalisme pour la physique quantique, il découvrît l'existence du positron en 1928. En 1933, il partagea le prix Nobel avec E. Schrödinger.

La transformée de Laplace de $d_0(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(d_0(t)) = \int_0^\infty d_0(t)e^{-pt}dt = \int_0^T \frac{e^{-pt}}{T}dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-pT}\right]_0^T = \frac{e^{-pT}-1}{-pT} \tag{2.30}$$

Écrivons le développement en série de ce résultat :

$$\mathcal{L}(d_0(t)) = \frac{e^{-pT}-1}{-pT} = \frac{-1+\sum_{k\geq 0}\frac{(-pT)^k}{k!}}{-pT} = \sum_{k\geq 1}\frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1-\frac{pT}{2}+\frac{p^2T^2}{6}-\dots \tag{2.31}$$

La limite de cette somme lorsque $T \to 0$ donne la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{T\to 0}\sum_{k\geq 1}\frac{(-pT)^{k-1}}{k!} = 1 \tag{2.32}$$

2.3.2 Transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside [3] et notée $\Gamma(t)$, est définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \int_0^\infty \Gamma(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty \tag{2.34}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. On a donc finalement :

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p} \tag{2.35}$$

2.3.3 Transformée de Laplace de la fonction *sinus*

La fonction *sinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \tag{2.36}$$

Donc la transformée de Laplace du *sinus* se calcule comme suit :

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{i\omega t-pt}-e^{-i\omega t-pt}dt = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega-p}+\frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega+p}\right]_0^\infty \tag{2.37}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i\omega-p}+\frac{1}{i\omega+p}\right) = \frac{\omega}{\omega^2+p^2} \tag{2.38}$$

3. du nom d'Oliver Heaviside (1850-1925), physicien anglais et néanmoins autodidacte. Après avoir servi dans les télégraphes, il étudia la transmission des ondes radio, le calcul vectoriel, et les circuits électriques. Nous lui devons les équations de Maxwell (sic !).

2.3.4 Transformée de Laplace de la fonction *cosinus*

Comme pour la fonction *sinus*, la fonction *cosinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\cos(\omega t)) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \tag{2.39}$$

Donc la transformée de Laplace du *cosinus* se calcule comme suit :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{i\omega t - pt} + e^{-i\omega t - pt} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\omega t - pt}}{i\omega - p} - \frac{e^{-i\omega t - pt}}{i\omega + p}\right]_0^\infty \tag{2.40}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{i\omega + p}\right) = \frac{p}{\omega^2 + p^2} \tag{2.41}$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction *sinus* donne :

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\cos(\omega t) \tag{2.42}$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il vient :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega}\left(p\mathcal{L}(\sin(\omega t)) - \sin(0)\right) = \frac{p}{\omega}\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{2.43}$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

2.3.5 Transformée de Laplace de l'exponentielle

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{-at}$ se calcule directement par :

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\right) = \int_0^\infty e^{-at - pt} dt = \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a + p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p + a} \tag{2.44}$$

2.3.6 Résolution d'une équation différentielle linéaire

On cherche la solution $x(t)$ de l'équation différentielle :

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 2e^{-2t} \tag{2.45}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x'(0) = 1 \tag{2.46}$$

Prenons la transformée de Laplace de chaque membre de l'égalité. Le terme forcé est une exponentielle, dont on a déjà calculé la transformée de Laplace. Donc la transformée du membre de droite est :

$$\mathcal{L}(2e^{-2t}) = \frac{2}{p + 2} \tag{2.47}$$

Notons $X(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $x(t)$. Par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x''(t)+4x'(t)+3x(t)) &= \mathcal{L}(x''(t))+4\mathcal{L}(x'(t))+3\mathcal{L}(x(t)) &(2.48)\\
&= p\mathcal{L}(x'(t))-x'(0)+4\left(p\mathcal{L}-x(0)\right)+3\mathcal{L}(x(t)) &(2.49)\\
&= p^2X(p)-px(0)-x'(0)+4pX(p)-4x(0)+3X(p) &(2.50)\\
&= \left(p^2+4p+3\right)X(p)-1 &(2.51)
\end{aligned}$$

En remarquant que $p^2+4p+3=(p+1)(p+3)$, on obtient l'équation suivante, donnant l'expression de $X(p)$ en fonction de p :

$$\left(p^2+4p+3\right)X(p)-1=\frac{2}{p+2} \qquad (2.52)$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\frac{2}{(p+2)(p+1)(p+3)}+\frac{1}{(p+1)(p+3)} \qquad (2.53)$$

Une décomposition en éléments simples de chaque fraction rationnelle en p donne :

$$\frac{2}{(p+2)(p+1)(p+3)}=-\frac{2}{p+2}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+3} \qquad (2.54)$$

$$\frac{1}{(p+1)(p+3)}=\frac{1/2}{p+1}-\frac{1/2}{p+3} \qquad (2.55)$$

Autrement dit, il vient :

$$X(p)=-\frac{2}{p+2}+\frac{3/2}{p+1}+\frac{1/2}{p+3} \qquad (2.56)$$

Reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$x(t)=-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right) \qquad (2.57)$$

On a déjà établi que la transformée de Laplace de e^{-at} est $1/(p+a)$, la solution est donc finalement :

$$x(t)=-2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t} \qquad (2.58)$$

On vérifie aisément que la solution trouvée satisfait les conditions initiales (2.46), et est solution de l'équation différentielle (2.45).

Résolution d'équation différentielles avec la transformée de Laplace

Cet exemple montre comment résoudre un problème différentiel au moyen de la transformée de Laplace. Cette méthode comporte trois étapes :

— Dans un premier temps on prend la transformée de Laplace du problème. Une équation différentielle linéaire à coefficients constants devient alors une simple équation polynomiale en p. Les conditions initiales se traduisent aussi par des termes en puissance de p, sans compliquer notablement la forme de l'équation. Le terme forcé fait apparaître un second membre en p.

— Dans un second temps on résout le problème en p, autrement dit on détermine $X(p)$ qui est la transformée de Laplace de la solution.

— Enfin, il suffit d'effectuer la transformée inverse (ou de consulter des tables) pour obtenir la fonction $x(t)$ solution du problème différentiel.

Malgré la succession des étapes il est souvent moins complexe de résoudre ainsi les équations différentielles linéaires, surtout pour un ordre élevé.

Chapitre 3

Sujets de travaux dirigés

1. Séries et transformée de Fourier.
2. Transformée de Laplace et résolution d'équations différentielles.

– Travaux dirigés 1 –
SÉRIES ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

1. Chercher les coefficients de Fourier correspondants à la fonction 10-périodique suivante :
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } -5 < x < 0 \\ 3, & \text{pour } 0 < x < 5 \end{cases}$$
Écrire la série de Fourier correspondante. Définir $f(x)$ aux points de discontinuité afin que la série de Fourier converge vers $f(x)$, pour tout x réel.

2. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique, définie par $f(x) = x^2$ pour $0 < x < 2\pi$. En déduire la relation suivante :
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Développer $f(x) = x$, pour $0 < x < 2 \ldots$
   (a) ... en série de Fourier sinus
   (b) ... en série de Fourier cosinus

4. Écrire l'identité de Parseval pour la série en cosinus calculée précédemment. En déduire la somme suivante : $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots$.

5. Soit $g(t)$ la fonction 4-périodique définie par : $g(t) = 1$ pour $|t| < 1$ et $g(t) = 0$ pour $1 < |t| < 2$.
   (a) Représenter graphiquement cette fonction.
   (b) Calculer les coefficients (a_0, a_n et b_n) de son développement en série de Fourier sinus et cosinus.

6. Soit la fonction 2π-périodique $f(t)$, définie par $f(t) = e^t$ pour $t \in]-\pi\ \pi[$.
   (a) Représenter graphiquement cette fonction.
   (b) Calculer les coefficients (a_0, a_n et b_n) de son développement en série de Fourier sinus et cosinus.

7. Soit la fonction π-périodique $f(t)$, définie par $f(t) = |\sin(t)|$, pour $t \in]-\pi\ \pi[$.
   (a) Représenter graphiquement cette fonction.
   (b) Calculer les coefficients (a_0, a_n et b_n) de son développement en série de Fourier sinus et cosinus.
   (c) La série de Fourier converge t-elle partout vers la fonction f ?
   (d) En déduire la valeur de $S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

8. On considère la fonction $f(t)$ définie par :
$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |t| < T/2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

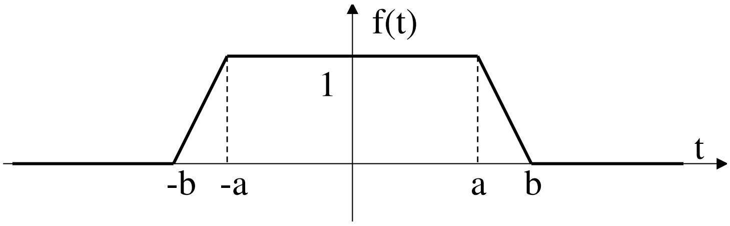
(a) Déterminer sa transformée de Fourier

(b) Tracer son spectre

(c) Donner sa valeur en 0

9. On considère la fonction $f(t)$, représentée ci-dessous, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{b-a} + \frac{b}{b-a} & \text{pour } -b < t < -a \\ 1 & \text{pour } -a < t < a \\ -\frac{t}{b-a} + \frac{b}{b-a} & \text{pour } a < t < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



(a) Déterminer sa transformée de Fourier, en utilisant la transformée de Fourier de $\frac{df(t)}{dt}$.

(b) Peut-on généraliser ce raisonnement pour le calcul de la transformée de Fourier d'un polynôme d'ordre n, par l'intermédiaire de celle de sa dérivée $(n+1)^{ième}$?

10. Soit l'équation

$$f(x) - kf(x+T) - kf(x-T) = \phi(x)$$

où $f(x)$ et $\phi(x)$ sont deux fonctions dont les transformées de Fourier existent, où T et k sont des réels tels que : $T > 0$ et $|k| < 1/2$.

(a) Montrez que $F(\nu)$ et $\Phi(\nu)$ vérifient une relation du type $F(\nu) = \Phi(\nu)/G(\nu)$, où $F(\nu) = \mathcal{F}(f(x))$, $\Phi(\nu) = \mathcal{F}(\phi(x))$ et où $G(\nu)$ est à préciser.

(b) Trouvez $F(\nu)$ pour $\phi(x) = \delta(x)$ (fonction impulsion de Dirac).

(c) Trouvez $F(\nu)$ pour $\phi(x) = \begin{cases} 1, & si \ -T \leq x \leq T \\ 0, & sinon \end{cases}$

11. Modulation d'une mesure de concentration (extrait de l'examen de 2012)
Pour mesurer la concentration d'un corps dans un liquide on fait passer un faisceau lumineux à une certaine fréquence dans une cellule en verre dans laquelle circule le liquide à analyser. Une fraction du flux lumineux est absorbée et on peut mesurer le coefficient d'absorption $c_a(t)$. Cette fraction étant proportionnelle à la concentration du corps à mesurer, cela permet de mesurer la concentration. La concentration à mesurer variant lentement dans le temps, la transformée de Fourier de $c_a(t)$, notée $C_a(\nu)$, est nulle pour $|\nu| > 5\ Hz$.
Le capteur de concentration délivre en sortie une tension $V_c(t)$, fonction du coefficient d'absorption, comprise entre 0 et 2 mV. Il faut donc amplifier cette tension pour pouvoir l'exploiter. Le gain de l'amplificateur étant $G = 5000$, la tension en sortie de l'amplificateur $V_a(t)$ est donc comprise entre 0 et 10 V. Malheureusement

l'amplification apporte un bruit de fond en basses fréquences, noté $b(t)$. La transformée de Fourier du bruit, notée $B(\nu)$, est nulle pour $|\nu| > 7\ Hz$. La tension en sortie de l'amplificateur est :

$$V_a(t) = G(V_c(t) + b(t))$$

Si la tension en sortie de capteur est directement proportionnelle au coefficient d'absorption $V_c(t) = k_0 c_a(t)$ on a :

$$V_a(t) = G(k_0 c_a(t) + b(t))$$

Le bruit $b(t)$ et $c_a(t)$ ayant les mêmes fréquences caractéristiques, on ne peut pas les séparer et accéder à la mesure de la concentration. Une solution consiste alors à *moduler* le coefficient d'absorption, dans ce cas $V_c(t)$ est donnée par :

$$V_c(t) = k_0 \cos(2\pi\nu_0 t) c_a(t)$$

(a) Quelle est la transformée inverse de Fourier du dirac en fréquence, décalée de ν_0, noté $\delta(\nu - \nu_0)$?

(b) En déduire la transformée de Fourier de $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$.

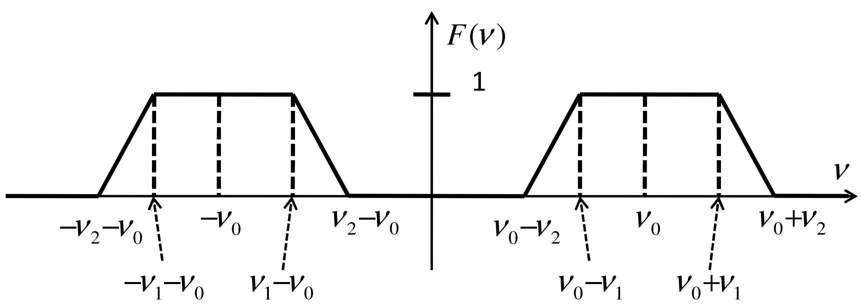
(c) Montrer qu'avec la modulation, la transformée de Fourier de la tension en sortie de l'amplificateur est :

$$\mathcal{F}(V_a(t)) = V_a(\nu) = \frac{Gk_0}{2}\left(C_a(\nu - \nu_0) + C_a(\nu + \nu_0)\right) + GB(\nu)$$

(d) Donner l'allure $V_a(\nu)$, pour $B(\nu)$ et $C_a(\nu)$ connues.

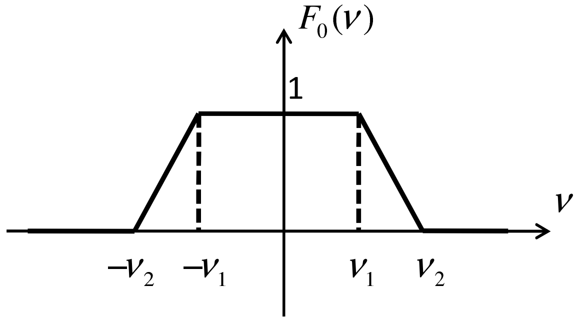
(e) Comment choisir ν_0 pour que les spectres du bruit et du coefficient d'absorption soient disjoints [1] ?

12. Camion vibreur (extrait de l'examen de 2011)
En sismique réflexion terrestre, des camions vibreurs sont utilisés pour envoyer dans le sol un signal basses fréquences qui se réfléchit sur les différentes limites de couches. Le signal émis doit avoir un spectre non nul, et si possible plat, sur une certaine bande de fréquences. Pour éviter les difficultés dues au phénomène de Gibbs, on utilise un signal continu et de spectre continu. Autrement dit, on cherche à générer un signal dont la transformée de Fourier est représentée à la figure ci-dessous.



1. Dans ce cas, un filtrage passe-bande permet de récupérer le signal $c_a(t)$, mais ceci est une autre histoire…

(a) Montrer que $\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = 2cos(2\pi\nu_0 t)\mathcal{F}^{-1}(F_0(\nu))$, où la fonction $F_0(\nu)$ est représentée ci-dessous



(b) Montrer que, si $\lim_{\nu\to-\infty} F(\nu) = \lim_{\nu\to-\infty} F(\nu) = 0$, il vient

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = \frac{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{dF(\nu)}{d\nu}\right)}{-2i\pi t}$$

Utiliser cette relation pour montrer qu'on a finalement

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = f(t) = \frac{A}{\pi^2 t^2} cos(2\pi\nu_0 t)\left(cos(2\pi\nu_1 t) - cos(2\pi\nu_2 t)\right)$$

où la constante A est à expliciter.

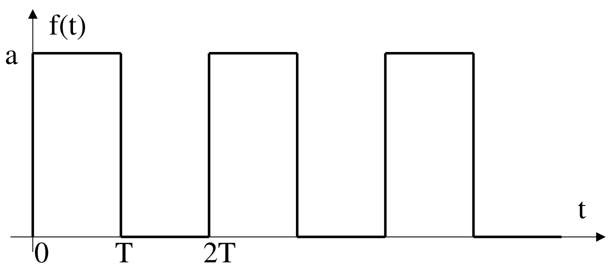
(En pratique, le signal utilisé est un sinus à fréquence linéaire dans le temps, c'est à dire $sin(2\pi(at + b)t)$. Je vous laisse le soin de vérifier que c'est encore pire à étudier.)

– Travaux dirigés 2 –
TRANSFORMÉE DE LAPLACE
ET RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

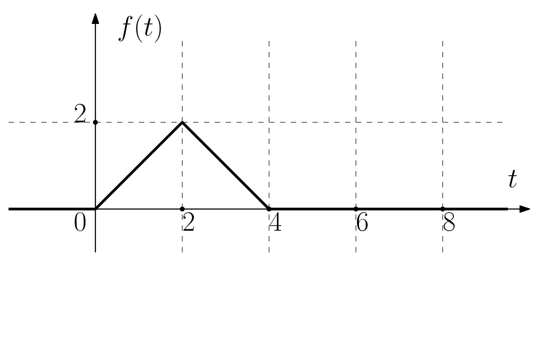
1. En utilisant la définition de la transformée de Laplace, démontrer les propriétés suivantes
   (a) $\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a > 0$
   (b) $\mathcal{L}\left(e^{-at}f(t)\right) = F(p+a)$
   (c) $\mathcal{L}\left(f(t-\tau)\right) = e^{-p\tau}F(p)$, $\tau > 0$
   (d) $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p) - f(0^+)$
   (e) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{p}F(p)$
   (f) $\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t)$
   (g) $\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0} f(t)$
   (h) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right) = F_1(p).F_2(p)$

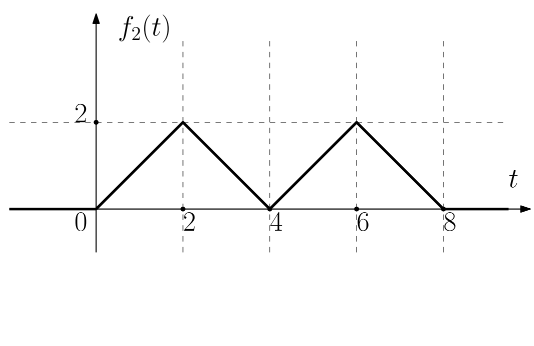
2. En utilisant certains des résultats précédents et les théorèmes relatifs à la transformée de Laplace, trouver les transformées des fonctions suivantes :
   (a) t^n, avec n entier positif
   (b) $e^{at}t^2$
   (c) $e^{-at}sin(\omega t)$
   (d) $e^{-at}cos(\omega t)$

3. Calculer la transformée de Laplace de la fonction périodique, de période $2T$, représentée par la figure ci-dessous.



4. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ représentée plus bas à gauche et en déduire la transformée de Laplace de $f_2(t)$ à droite.

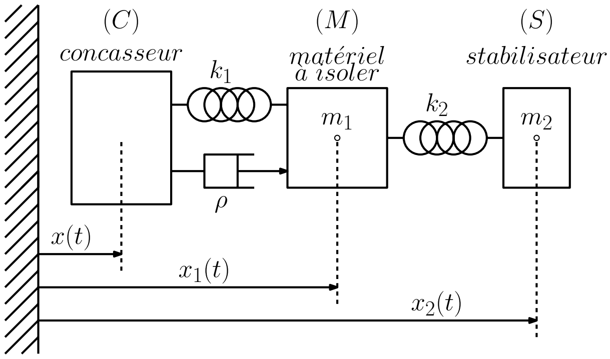




5. Résoudre l'équation intégrale de Volterra :
$$\int_0^t y(u)f(t-u)du = g(t)$$
pour $f(t) = e^{-t}$ et $g(t) = sin(t)$.

6. Calculer les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :
   (a) $F(p) = \frac{1}{1+p+p^2}$
   (b) $F(p) = \frac{1-2p}{p(1+p)^2}$
   (c) $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}$

7. Dispositif anti-vibration (extrait de l'examen de 2012)
Dans une unité de traitement de minerais, on utilise un concasseur pour réduire la taille des minerais. Pour cela, une machine tournante génère une vibration de pulsation donnée. Le but étant de casser les blocs de minerai, mais pas l'installation elle même, il est nécessaire d'isoler une partie du matériel, au moyen d'un amortisseur. Ce dispositif est représenté à la figure ci-dessous. La position par rapport au point d'équilibre du concasseur (C) est notée $x(t)$, celle du matériel à isoler (M) de masse m_1 est notée $x_1(t)$ et celle du stabilisateur (S) de masse m_2 est notée $x_2(t)$. Le concasseur (C) est relié à (M) par l'intermédiaire d'un ressort (R_1) de raideur k_1 et un amortisseur (A) de coefficient ρ. Le stabilisateur (S) est relié à (M) par l'intermédiaire d'un ressort (R_2) de raideur k_2.



En appliquant le principe fondamental de la dynamique à (M) et à (S), il vient :
$$m_1\ddot{x}_1(t) + \rho\dot{x}_1(t) + (k_1+k_2)x_1(t) = \rho\dot{x}(t) + k_1x(t) + k_2x_2(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2(t) + k_2x_2(t) = k_2x_1(t)$$

   (a) On note $X(p)$, $X_1(p)$ et $X_2(p)$ les transformées de Laplace de $x(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ respectivement. Calculer $X_1(p)$ et $X_2(p)$ pour $x(t) = 0$ et les conditions initiales suivantes : $x_2(0) = 1$, $x(0) = x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.
   (b) La vibration générée par la machine tournante est $x(t) = x_0\sin(\omega t)$. On suppose $x(0) = x_1(0) = x_2(0) = 0$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Écrire $X_1(p)$ et $X_2(p)$ sous la forme : $X_1(p) = Z_1(p)X(p)$ et $X_2(p) = Z_2(p)X(p)$. Donner l'expression de $Z_1(p)$ et $Z_2(p)$.
   (c) Sachant que pour $x(t) = x_0\sin(\omega t)$, on a :
$$x_1(t) = x_0|Z_1(i\omega)|\sin(\omega t + Arg(Z_1(i\omega)))$$
et que le but est d'annuler les déplacements de (M), quelle valeur de la masse m_2 doit-on choisir, pour m_1, k_1, k_2, ρ et ω fixés ?

8. Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = t$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$, et $\frac{dy(0)}{dt} = -2$.

9. Équations différentielles couplées

Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} 3\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_1(t) &= 1 \\ \frac{dy_1(t)}{dt} + 4\frac{dy_2(t)}{dt} + 3y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

avec $y_1(0) = 0$, et $y_2(0) = 0$.

10. Résolution de l'équation de la corde vibrante

Résoudre le problème suivant (équation hyperbolique avec conditions initiales et aux limites) à l'aide de la méthode de séparation des variables, du principe de superposition des solutions, et de la méthode de décomposition en séries de Fourier.

Une corde de longueur L est tendue entre les points $(0, 0)$ et $(L, 0)$ sur l'axe des x. Au temps $t = 0^+$, sa forme est donnée par la fonction $p(x)$, pour $0 < x < L$, puis elle est libérée. Trouver le déplacement de la corde à tout instant ultérieur ($t > 0$). L'équation de la corde vibrante est donnée par :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0$$

où $y(x, t)$ désigne l'écartement par rapport à l'axe des x au temps t.
Les conditions aux limites (les extrémités de la corde sont fixées en $x = 0$, et $x = L$) sont données par :

$$\begin{aligned} y(x = 0, t > 0) = 0 \\ y(x = L, t > 0) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions initiales (position et vitesse) sont données par :

$$\begin{aligned} y(x, t = 0^+) &= p(x) \\ \frac{\partial y(x, t = 0^+)}{\partial t} &= v(x) \end{aligned}$$

Faire l'application pour :
- clavecin : $p(x) = 1$ et $v(x) = 0$
- guitare : $p(x) = kx$ et $v(x) = 0$
- piano : $p(x) = 0$ et $v(x) = 1$

11. Résolution de l'équation de la chaleur

Résoudre le problème suivant, à l'aide des méthodes de séparation des variables, de superposition des solutions et à l'aide des séries de Fourier. L'équation de diffusion de la chaleur dans un milieu borné ($x > 0$) est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = 0, \text{ pour } 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le t$$

où $\theta(x, y)$ désigne la température au point de coordonnées (x, y).
Les conditions aux limites et initiales sont données par :

$$\theta(x = 0, t \geq 0) = 0$$
$$\theta(x = 1, t \geq 0) = 0$$
$$\theta(0 \leq x \leq 1, t = 0) = \theta_1$$

Reprendre l'exercice dans le cas où la condition initiale est $\theta(0 \leq x \leq 1, t = 0) = \alpha x$.

Annexe A

Transformée de Fourier rapide

Dans cette annexe, est exposé un algorithme permettant de calculer les coefficients de la transformée de Fourier d'un signal discret en limitant significativement le nombre d'opérations. Cet algorithme porte le nom de transformée de Fourier rapide (ou FFT pour *fast Fourier transform*[1])

L'objectif est de calculer les coefficients c_n de la transformée de Fourier, d'un signal dont on connaît N valeurs ($f_k = f\left(\frac{kT}{N}\right)$, pour $k = 0, \ldots, N-1$). Il a été vu que les coefficients sont donnés par :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2ik\pi n/N} \tag{A.1}$$

Par ailleurs, on a vu que, pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, il suffit de calculer $N/2$ coefficients car, d'une part $c_{n+N} = c_n$ et d'autre part $c_{N-n} = \overline{c_n}$.

Hypothèse[2] : supposons que N est une puissance de 2, autrement dit, on a : $N = 2^m$.

- **étape 1.** N est divisible par 2, on peut donc scinder l'équation (A.1) en deux sommes, selon :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} f_k e^{-2ik\pi n/N} + \sum_{k=N/2}^{N-1} f_k e^{-2ik\pi n/N} \right) \tag{A.2}$$

  Après décalage d'indice, il vient :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N} \left(\sum_{k=0}^{N/2-1} f_k e^{-2ik\pi n/N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{k+N/2} e^{-i2(k+N/2)\pi n/N} \right) \tag{A.3}$$

  En posant : $f_k^1 = f_k + f_{k+N/2} e^{-i\pi n}$, il vient :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_k^1 e^{-2ik\pi n/N} \tag{A.4}$$

1. NdT, en franglais dans le texte
2. cette hypothèse n'est pas restrictive : dans la mesure où N est suffisamment grand, il suffit de choisir la plus grande puissance de 2 inférieure à N

- **étape 2.** N est divisible par 4, on peut donc répéter le raisonnement pour écrire :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N}\left(\sum_{k=0}^{N/4-1} f_k e^{-2ik\pi n/N} + \sum_{k=N/4}^{N/2-1} f_k e^{-2ik\pi n/N}\right) \tag{A.5}$$

$$= \frac{\sqrt{T}}{N}\left(\sum_{k=0}^{N/4-1} f_k e^{-2ik\pi n/N} + \sum_{k=0}^{N/4-1} f_{k+N/4} e^{-i2(k+N/4)\pi n/N}\right) \tag{A.6}$$

en posant : $f_k^2 = f_k^1 + f_{k+N/4}^1 e^{-in\pi/2}$, il vient :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N}\sum_{k=0}^{N/4-1} f_k^2 e^{-2ik\pi n/N} \tag{A.7}$$

- **étape $\ell < m$.** N est divisible par 2^ℓ, on pose :

$$f_k^\ell = f_k^{\ell-1} + f_{k+\frac{N}{2^\ell}}^{\ell-1} e^{-i\frac{n\pi}{2^{\ell-1}}} \tag{A.8}$$

afin d'écrire :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2^\ell}-1} f_k^\ell e^{-2i\frac{k\pi n}{N}} \tag{A.9}$$

- **étape m.** On obtient finalement :

$$c_n = \frac{\sqrt{T}}{N} f_0^m \tag{A.10}$$

À chaque étape le coefficient f_0^ℓ est donné par (A.8), donc nécessite le calcul de $e^{-i\frac{n\pi}{2^{\ell-1}}}$, soit un cosinus et un sinus. Au final, pour un signal connu en $N = 2^m$ points, en utilisant l'algorithme de FFT, pour chacun des $N/2 = 2^{m-1}$ coefficients c_n, il faut calculer m sinus et m cosinus, on fait donc $2^{m-1}m$ calculs. Si on ignore l'algorithme de FFT et que l'on calcule les $N/2$ coefficients c_n avec (A.1), il faut N calculs de cosinus et de sinus. On passe donc de N^2 calculs à Nm calculs. À titre d'exemple, pour un signal de $2024 = 10^{11}$, on passe de 4 194 304 opérations à 22 528, soit près de 200 fois moins de calculs (le rapport entre les deux nombres de calculs est de $\frac{Nln(2)}{ln(N)}$).

Annexe B

Décomposition en éléments simples

L'objectif est de décomposer une fraction rationnelle $F(z)$ en la variable complexe z en différents éléments simples. La fraction rationnelle $F(z)$ peut s'écrire sous la forme suivante, où $N(z)$ et $D(z)$ sont des polynômes :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{B.1}$$

On supposera que le degré du numérateur $N(z)$ est strictement inférieur à celui du dénominateur $D(z)$. Dans le cas contraire on fera une division polynomiale afin d'écrire le numérateur sous la forme : $N(z) = N_1(z)D(z) + N_2(z)$.

Sur le corps des complexes le polynôme dénominateur peut se décomposer selon n_s pôles simples $p_{s,i}$ $(i = 1, \ldots, n_s)$, et n_m pôles $p_{m,i}$ $(i = 1, \ldots, n_m)$ de multiplicité m_i,

$$D(z) = \prod_{i=1}^{n_s}(z - p_{s,i}) \prod_{i=1}^{n_m}(z - p_{m,i})^{m_i} \tag{B.2}$$

L'objectif de la décomposition en éléments simples est alors d'écrire $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{a_i}{z - p_{s,i}} + \sum_{i=1}^{n_m}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{i,j}}{(z - p_{s,i})^j} \tag{B.3}$$

- Pour déterminer les coefficients a_i, il suffit de multiplier (B.3) par $(z - p_{s,i})$. En faisant tendre $z \to p_{s,i}$ on annule tous les termes autres que a_i. On a donc :

$$\boxed{a_i = \lim_{z \to p_{s,i}} (z - p_{s,i})F(z)} \tag{B.4}$$

- Pour déterminer les coefficients b_i, il faut multiplier (B.3) par $(z - p_{m,i})^{m_i}$.

$$F(z)(z-p_{m,i})^{m_i} = \sum_{j=1}^{n_s} \frac{a_j(z - p_{m,i})^{m_i}}{z - p_{s,j}} + \sum_{l \neq i, l=1}^{n_m}\sum_{j=1}^{m_l} \frac{b_{l,j}(z - p_{m,i})^{m_i}}{(z - p_{m,l})^j} + \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{i,j}(z-p_{m,i})^j \tag{B.5}$$

En dérivant n fois cette expression, et en faisant tendre $z \to p_{m,i}$ on annule tous les termes en a_i, tous les termes en b_l $(l \neq i)$ et seul un terme en b_i est conservé :

$$\lim_{z \to p_{m,i}} \left(F(z)(z - p_{m,i})^{m_i}\right)^{(n)} = n! b_{m_i-n} \tag{B.6}$$

on donc finalement :

$$\boxed{\lim_{z \to p_{m,i}} \frac{\left(F(z)(z - p_{m,i})^{m_i}\right)^{(n)}}{n!} = b_{m_i-n}} \tag{B.7}$$

Annexe C

Table de transformées de Laplace

$x(t)$	$\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$
$\delta(t)$ impulsion unitaire	1
$\Gamma(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$
t(rampe unitaire)	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
$x(t-\tau)$ (retard)	$e^{-p\tau}X(p)$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab}\left(1 - \frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{b-a}\right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{be^{-bt}-ae^{-at}}{b-a}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$1-(at+1)e^{-at}$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$(1+(b-a)t)e^{-at}$	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$