Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

...

Analyse $\mathbb{C}$omplexe

Benoît Marx

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)

disponible à l'adresse :
http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html

Plan du cours d'Analyse Complexe

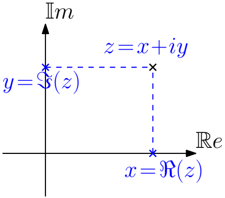
Plan du Chapitre

Pour $z \in \mathbb{C}$, il existe 2 façons de le repérer dans le plan complexe :

coordonnées cartésiennes

x : partie réelle

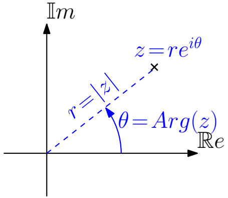
y : partie imaginaire



coordonnées polaires

r : module

θ : argument



Pour $z \in \mathbb{C}$, il existe 2 façons de le repérer dans le plan complexe :

coordonnées cartésiennes

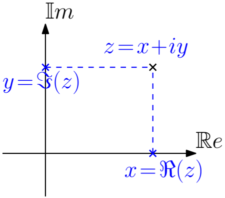
x : partie réelle

y : partie imaginaire

coordonnées polaires

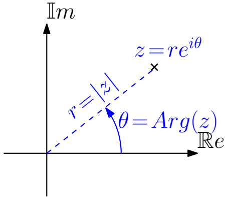
r : module

θ : argument



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = atan(y/x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$



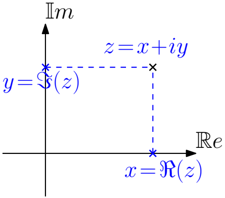
1.1 Rappels sur les nombres complexes

Pour $z \in \mathbb{C}$, il existe 2 façons de le repérer dans le plan complexe :

coordonnées cartésiennes

x : partie réelle

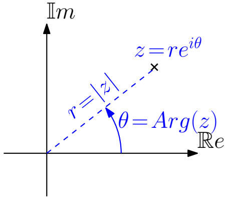
y : partie imaginaire



coordonnées polaires

r : module

θ : argument



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = atan(y/x) \end{cases}$$

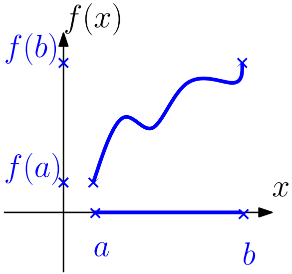
$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

- Conjugué de z : $\bar{z} = x - iy$ ou $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- Propriétés de $\bar{z}$: $\bar{z}z = |z|^2$, $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Cas réel

- x et $f(x)$ sont sur des droites (1D)
$\rightarrow$ graphe en 2D possible
- x varie entre a et $b \rightarrow x \in [a\ b]$

$$x,\ f(x) \in \mathbb{R}$$

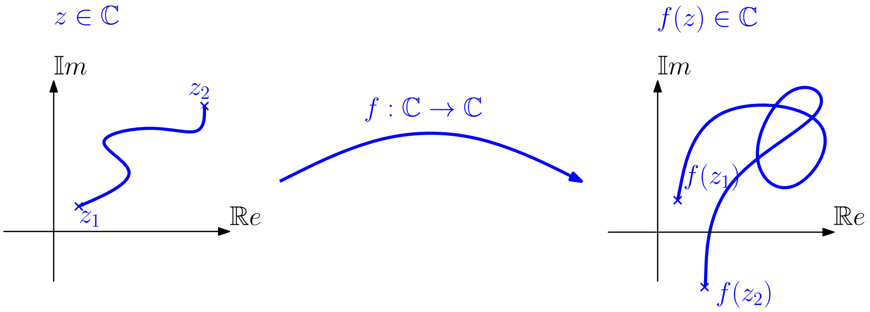


Cas réel

- x et $f(x)$ sont sur des droites (1D) $\rightarrow$ graphe en 2D possible
- x varie entre a et $b \rightarrow x \in [a\ b]$

Cas complexe

- z et $f(z)$ sont sur des plans (2D) $\rightarrow$ graphe impossible



1.2 Fonction d'une variable complexe (problème)

Cas réel

- x et $f(x)$ sont sur des droites (1D)

$\rightarrow$ graphe en 2D possible

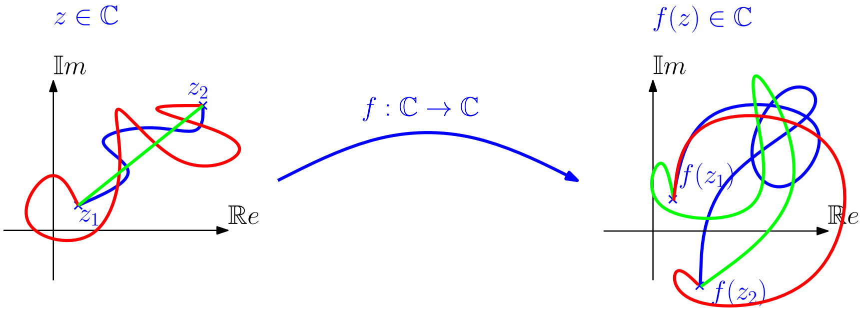
- x varie entre a et b $\rightarrow$ $x \in [a\ b]$

Cas complexe

- z et $f(z)$ sont sur des plans (2D)

$\rightarrow$ graphe impossible

- z varie entre z_1 et z_2 $\rightarrow$ $f(z)$???

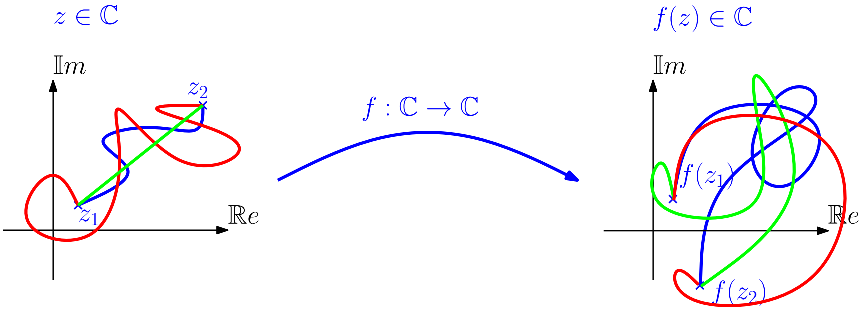


Cas réel

- x et $f(x)$ sont sur des droites (1D)
  $\rightarrow$ graphe en 2D possible
- x varie entre a et b $\rightarrow$ $x \in [a\ b]$

Cas complexe

- z et $f(z)$ sont sur des plans (2D)
  $\rightarrow$ graphe impossible
- z varie entre z_1 et z_2 $\rightarrow$ $f(z)$???



- notions d'unicité de $f(z)$, de chemin entre z_1 et z_2,...

1.2 Fonction d'une variable complexe (notation)

- Pour se rapprocher du cas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, donc $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est équivalent à $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})^2$
- une fonction à valeurs complexes de la variable complexe est définie par deux fonctions à valeurs réelles de deux variables réelles :

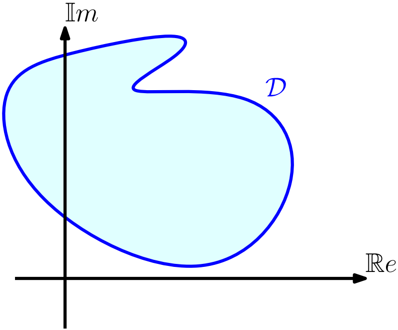
$$\mathbf{f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)}$$

où u, v sont les parties réelle et imaginaire de $f(z)$:

$$\begin{cases} x = \Re(z) \\ y = \Im(z) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} u = \Re(f(z)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ v = \Im(f(z)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Domaine de $\mathbb{C}$:

$\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{C}$ si tout point de $\mathcal{D}$ est le centre d'un cercle inclus dans $\mathcal{D}$.



concrètement : un sous-ensemble

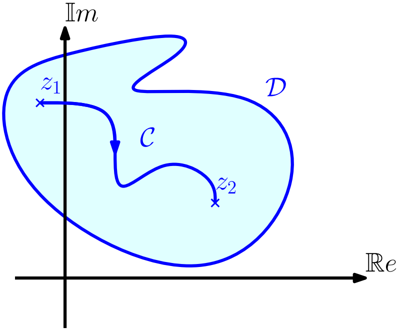
1.2 Fonction d'une variable complexe (vocabulaire 1/2)

Domaine de $\mathbb{C}$:

$\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{C}$ si tout point de $\mathcal{D}$ est le centre d'un cercle inclus dans $\mathcal{D}$.

Chemin dans $\mathcal{D}$:

Un chemin de z_1 à z_2 dans un domaine $\mathcal{D}$ est défini par une application continue $\varphi : [0\ 1] \to \mathcal{D}$, t.q. : $\varphi(0) = z_1$ et $\varphi(1) = z_2$.



concrètement : une ligne de z_1 à z_2

Domaine de $\mathbb{C}$:

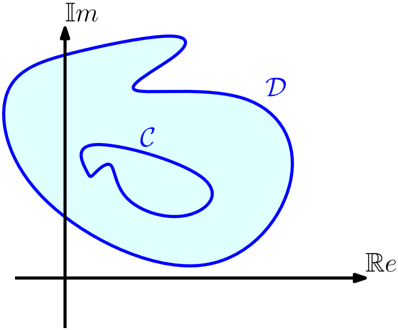
$\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{C}$ si tout point de $\mathcal{D}$ est le centre d'un cercle inclus dans $\mathcal{D}$.

Chemin dans $\mathcal{D}$:

Un chemin de z_1 à z_2 dans un domaine $\mathcal{D}$ est défini par une application continue $\varphi : [0\ 1] \to \mathcal{D}$, t.q. : $\varphi(0) = z_1$ et $\varphi(1) = z_2$.

Circuit dans $\mathcal{D}$:

Un circuit de $\mathcal{D}$ est un chemin dont les deux extrémités sont confondues, défini par une application continue $\varphi : [0\ 1] \to \mathcal{D}$, t.q. : $\varphi(0) = \varphi(1)$.



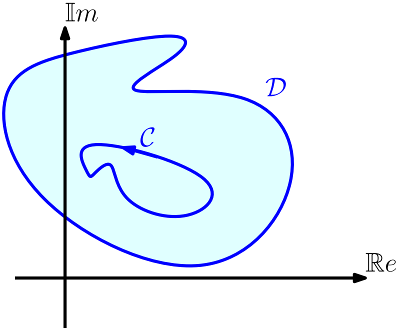
concrètement : une ligne fermée

Domaine de $\mathbb{C}$:
$\mathcal{D}$ est un domaine de $\mathbb{C}$ si tout point de $\mathcal{D}$ est le centre d'un cercle inclus dans $\mathcal{D}$.

Chemin dans $\mathcal{D}$:
Un chemin de z_1 à z_2 dans un domaine $\mathcal{D}$ est défini par une application continue $\varphi : [0\ 1] \to \mathcal{D}$, t.q. : $\varphi(0) = z_1$ et $\varphi(1) = z_2$.

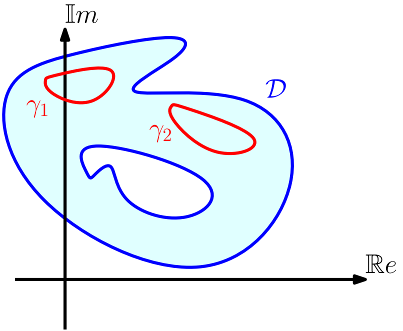
Circuit dans $\mathcal{D}$:
Un circuit de $\mathcal{D}$ est un chemin dont les deux extrémités sont confondues, défini par une application continue $\varphi : [0\ 1] \to \mathcal{D}$, t.q. : $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Orientation d'un circuit :
Un circuit est orienté positivement si l'intérieur est à gauche lorsqu'on le parcourt.



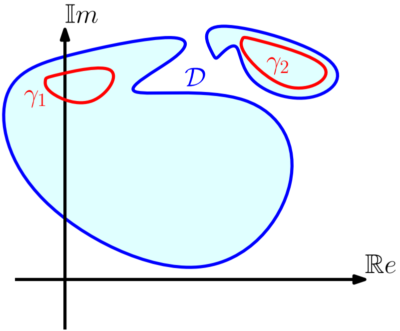
concrètement : anti-horaire

Circuits homotopes dans $\mathcal{D}$:
deux circuits γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathcal{D}$ s'il existe une application continue
$\varphi : [0\ 1] \times [0\ 1] \to \mathcal{D}$ t.q. :
$\varphi(u,0) = \gamma_1$, $\varphi(u,1) = \gamma_2$ et
$\varphi(0,v) = \varphi(1,v)$, $\forall v \in [0\ 1]$.



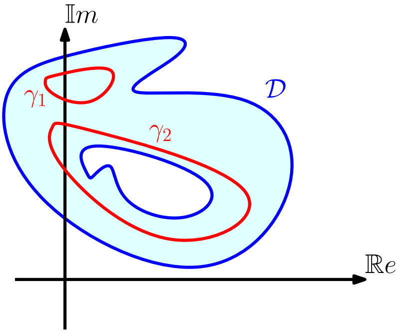
γ_1 et γ_2 homotopes dans $\mathcal{D}$

Circuits homotopes dans $\mathcal{D}$:
deux circuits γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathcal{D}$ s'il existe une application continue
$\varphi : [0\ 1] \times [0\ 1] \to \mathcal{D}$ t.q. :
$\varphi(u,0) = \gamma_1$, $\varphi(u,1) = \gamma_2$ et
$\varphi(0,v) = \varphi(1,v)$, $\forall v \in [0\ 1]$.



γ_1 et γ_2 non homotopes dans $\mathcal{D}$

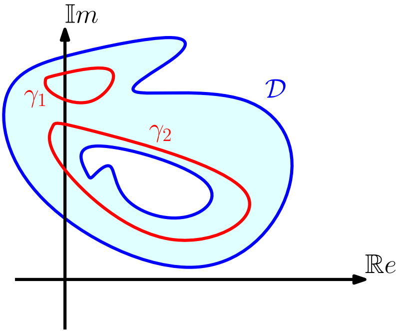
Circuits homotopes dans $\mathcal{D}$:
deux circuits γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathcal{D}$ s'il existe une application continue
$\varphi : [0\ 1] \times [0\ 1] \to \mathcal{D}$ t.q. :
$\varphi(u, 0) = \gamma_1$, $\varphi(u, 1) = \gamma_2$ et
$\varphi(0, v) = \varphi(1, v)$, $\forall v \in [0\ 1]$.



γ_1 et γ_2 non homotopes dans $\mathcal{D}$

Circuits homotopes dans $\mathcal{D}$:
deux circuits γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathcal{D}$ s'il existe une application continue
$\varphi : [0\ 1] \times [0\ 1] \to \mathcal{D}$ t.q. :
$\varphi(u,0) = \gamma_1$, $\varphi(u,1) = \gamma_2$ et
$\varphi(0,v) = \varphi(1,v)$, $\forall v \in [0\ 1]$.

Circuit homotope à zéro dans $\mathcal{D}$:
Un circuit est homotope à zéro s'il est homotope à un point ($\gamma_2 = z_0$).



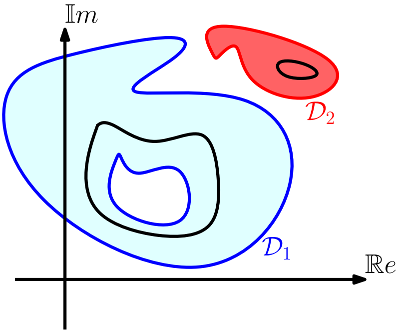
γ_1 : oui ; γ_2 non

1.2 Fonction d'une variable complexe (vocabulaire 2/2)

Circuits homotopes dans $\mathcal{D}$:
deux circuits γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathcal{D}$ s'il existe une application continue
$\varphi : [0\ 1] \times [0\ 1] \rightarrow \mathcal{D}$ t.q. :
$\varphi(u, 0) = \gamma_1$, $\varphi(u, 1) = \gamma_2$ et
$\varphi(0, v) = \varphi(1, v)$, $\forall v \in [0\ 1]$.

Circuit homotope à zéro dans $\mathcal{D}$:
Un circuit est homotope à zéro s'il est homotope à un point ($\gamma_2 = z_0$).

Domaine simplement connexe:
$\mathcal{D}$ est simplement connexe si tout circuit de $\mathcal{D}$ est homotope à zéro dans $\mathcal{D}$.



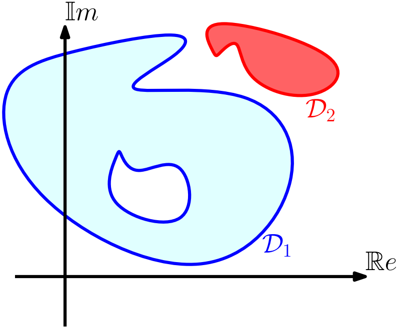
$\mathcal{D}_1$: non ; $\mathcal{D}_2$: oui

Circuits homotopes dans $\mathcal{D}$:
deux circuits γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathcal{D}$ s'il existe une application continue
$\varphi : [0\ 1] \times [0\ 1] \to \mathcal{D}$ t.q. :
$\varphi(u,0) = \gamma_1$, $\varphi(u,1) = \gamma_2$ et
$\varphi(0,v) = \varphi(1,v)$, $\forall v \in [0\ 1]$.

Circuit homotope à zéro dans $\mathcal{D}$:
Un circuit est homotope à zéro s'il est homotope à un point ($\gamma_2 = z_0$).

Domaine simplement connexe:
$\mathcal{D}$ est simplement connexe si tout circuit de $\mathcal{D}$ est homotope à zéro dans $\mathcal{D}$.

Domaine connexe :
$\mathcal{D}$ est connexe si pour tout z_1 et z_2 de $\mathcal{D}$ il existe un chemin de z_1 à z_2 dans $\mathcal{D}$.

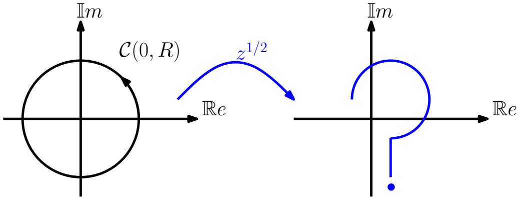


$\mathcal{D}_1$ ou $\mathcal{D}_2$: oui ; $\mathcal{D}_1 \bigcup \mathcal{D}_2$: non

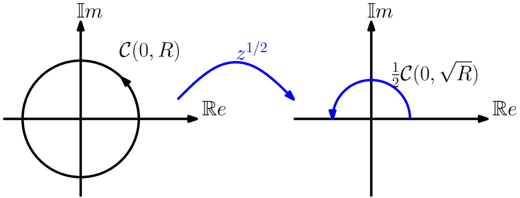
1.3 Fonctions multivalentes

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

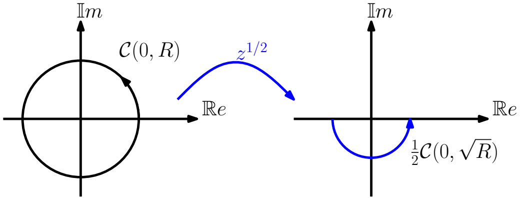
- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$



- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

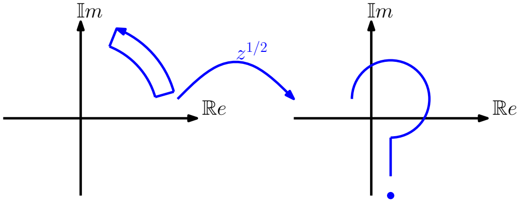


- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$



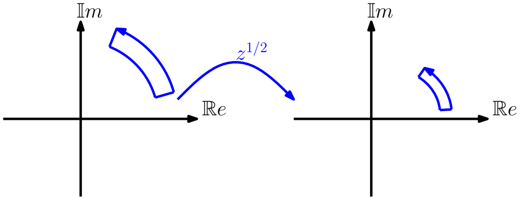
1.3 Fonctions multivalentes

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

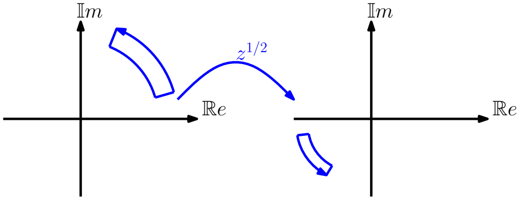


1.3 Fonctions multivalentes

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$



- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$



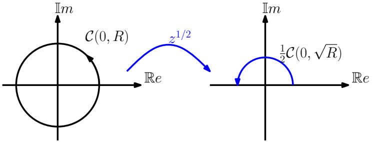
1.3 Fonctions multivalentes

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

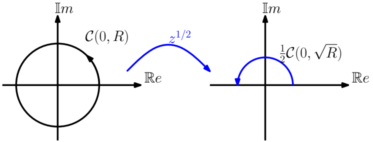
- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.



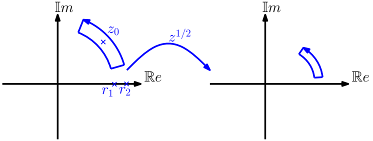
pour $R \to 0$
$\Rightarrow z_0 = 0$ est point de branchement de f

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.



pour $R \to 0$
$\Rightarrow z_0 = 0$ est point de branchement de f



pour r_1 et $r_2 \to |z_0|$
$\Rightarrow z_0$ n'est pas point de branchement de f

1.3 Fonctions multivalentes

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

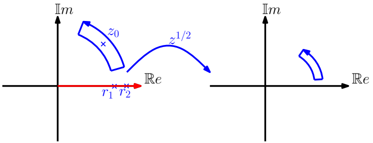
- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.

- **Coupure de Riemann :**
  Un chemin $\mathcal{C}$ est une coupure de Riemann pour $f(z)$ si l'image par f de tout circuit ne coupant pas $\mathcal{C}$ est un circuit.

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.

- **Coupure de Riemann :**
  Un chemin $\mathcal{C}$ est une coupure de Riemann pour $f(z)$ si l'image par f de tout circuit ne coupant pas $\mathcal{C}$ est un circuit.

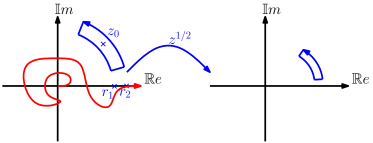


toute ligne infinie issue de $z_0 = 0$
est coupure de Riemann
par exemple $\mathbb{R}^+$

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.

- **Coupure de Riemann :**
  Un chemin $\mathcal{C}$ est une coupure de Riemann pour $f(z)$ si l'image par f de tout circuit ne coupant pas $\mathcal{C}$ est un circuit.



toute ligne infinie issue de $z_0 = 0$ est coupure de Riemann par exemple $\mathbb{R}^+$, ou autre chose

- **Fonction multivalente :**
  $f(z)$ est multivalente si, à une valeur de la variable z, elle associe plusieurs valeurs $f(z)$.
- Un exemple : $f(z) = z^{1/2}$

- **Point de Branchement :**
  z_0 est un point de branchement de $f(z)$ s'il existe un circuit entourant z_0, dont l'image par f n'est pas un circuit.

- **Coupure de Riemann :**
  Un chemin $\mathcal{C}$ est une coupure de Riemann pour $f(z)$ si l'image par f de tout circuit ne coupant pas $\mathcal{C}$ est un circuit.

- Un autre exemple : $f(z) = ln(z)$

Point(s) de branchement ? Coupure(s) de  ?

Cas réel

- Limite : $f(x)$ a une limite en x_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

dans ce cas : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$

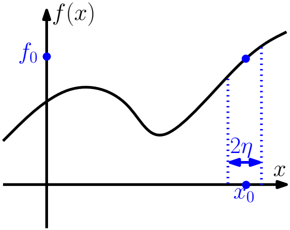
1.4 Limite d'une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Cas réel

- Limite : $f(x)$ a une limite en x_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

dans ce cas : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$

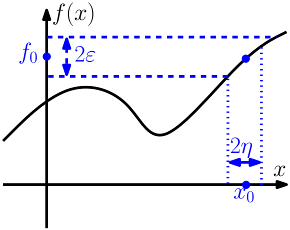


Cas réel

- Limite : $f(x)$ a une limite en x_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

dans ce cas : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$



1.4 Limite d'une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Cas réel

- Limite : $f(x)$ a une limite en x_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

  dans ce cas : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$

- Continuité : Si $f(x_0) = f_0$, alors f est continue en x_0.

Cas réel

- Limite : $f(x)$ a une limite en x_0, ssi il existe f_0 t.q. :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

  dans ce cas : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0$

- Continuité : Si $f(x_0) = f_0$, alors f est continue en x_0.

- Limite à gauche / droite :
  Pour $f(x) =$ discontinue en x_0, on peut définir des limites à gauche et à droite :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f_{0+}| < \varepsilon$$

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f_{0-}| < \varepsilon$$

Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$

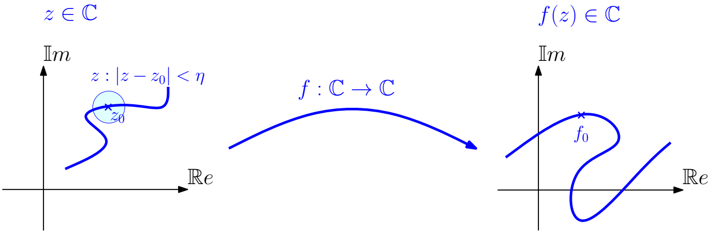
dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$

Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$

dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$

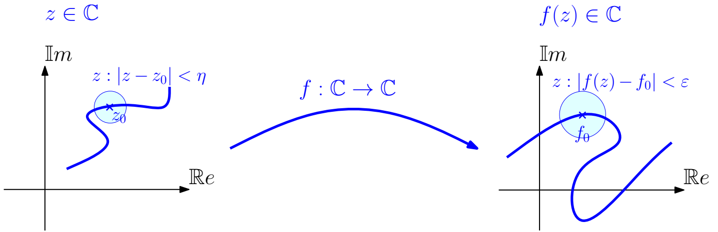


Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$

dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$



Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$

  dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$

- $f(z)$ a une limite en $z_0 \Leftrightarrow u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont une limite en (x_0, y_0)

Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$
dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$
- $f(z)$ a une limite en $z_0 \Leftrightarrow u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont une limite en (x_0, y_0)
- Continuité : Si $f(z)$ est définie au voisinage de z_0 et si sa limite en z_0 existe, alors f est continue en z_0.

1.4 Limite d'une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$

  dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$

- $f(z)$ a une limite en $z_0 \Leftrightarrow u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont une limite en (x_0, y_0)

- Continuité : Si $f(z)$ est définie au voisinage de z_0 et si sa limite en z_0 existe, alors f est continue en z_0.

- Pas de Limite à gauche / droite :
  car il y a une infinité de manière de faire $z \to z_0$

Cas complexe

- Limite : $f(z)$ a une limite en z_0, ssi il existe f_0 t.q. :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon$$

  dans ce cas : $\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$

- $f(z)$ a une limite en $z_0 \Leftrightarrow u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont une limite en (x_0, y_0)

- Continuité : Si $f(z)$ est définie au voisinage de z_0 et si sa limite en z_0 existe, alors f est continue en z_0.

- Pas de Limite à gauche / droite :
  car il y a une infinité de manière de faire $z \to z_0$

- Un exemple : $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, en $z_0 = 0$

- **Dérivabilité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**
  Dérivée donnée par la limite du taux d'accroissement :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{\delta x}$$

1.5 Dérivation d'une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

- **Dérivabilité de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$**
  $f(z)$ est dérivable en z_0 si la limite suivante existe :
  $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$
- Règles usuelles de dérivabilité de $(f+g)$, (fg), (f/g), $(f(g))$

1.5 Dérivation d'une fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

- **Dérivabilité de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$**
  $f(z)$ est dérivable en z_0 si la limite suivante existe :
  $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$
- Règles usuelles de dérivabilité de $(f + g)$, (fg), (f/g), $(f(g))$
- **Holomorphe**
  Une fonction dérivable en tout point d'un domaine $\mathcal{D}$ est dite holomorphe dans $\mathcal{D}$.

- **Conditions de Cauchy-Riemann (CCR)**
  La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe en z_0 ssi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z_0} \quad et \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z_0} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

- **Conditions de Cauchy-Riemann (CCR)**
  La fonction $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ est holomorphe en z_0 ssi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z_0} \quad et \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z_0} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

- Si f est holomorphe en z_0 la dérivée est :

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

- **Conditions de Cauchy-Riemann (CCR)**
  La fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe en z_0 ssi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z_0} \quad et \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z_0} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

- Si f est holomorphe en z_0 la dérivée est :

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

- Si $f(z)$ est holomorphe, $f(z)$ est infiniment dérivable.

- **Conditions de Cauchy-Riemann (CCR)**
  La fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe en z_0 ssi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z_0} \quad et \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z_0} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

- Si f est holomorphe en z_0 la dérivée est :

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{z_0} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{z_0}$$

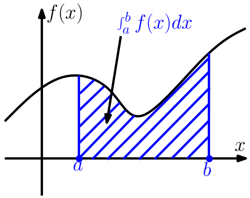
- Si $f(z)$ est holomorphe, $f(z)$ est infiniment dérivable.
- Un exemple : $f(z) = ln(z)$, pour $-\pi \leq arg(z) < \pi$.

Plan du Chapitre

2. Intégration des fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$
   - Introduction
   - Inégalité fondamentale
   - Intégration indépendante du chemin
   - Intégrales de Cauchy

Cas réel

$\int_a^b f(x)dx =$ aire sous la courbe

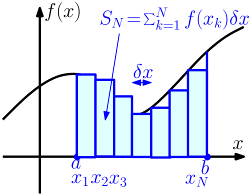


Cas réel

$\int_a^b f(x)dx =$ aire sous la courbe

limite d'une somme de Riemann :

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} S_N$

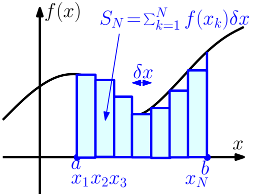


Cas réel

$\int_a^b f(x)dx$ = aire sous la courbe

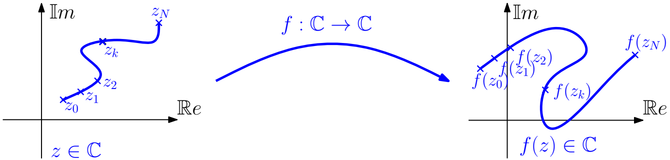
limite d'une somme de Riemann :

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} S_N$



Cas complexe

On considère une fonction f et un chemin d'intégration $\mathcal{C}$ de z_0 à z_N



$$S_N = \sum_{k=1}^{N} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

L'intégrale est définie par une somme :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \lim_{N\rightarrow\infty} \sum_{k=1}^{N} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

- **Linéarité**

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \beta \int_{\mathcal{C}} g(z)dz$$

L'intégrale est définie par une somme :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

- **Linéarité**

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \beta \int_{\mathcal{C}} g(z)dz$$

- **Addition des chemins**

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$$

2.1 Introduction à l'intégration des fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

L'intégrale est définie par une somme :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

- **Linéarité**

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \beta \int_{\mathcal{C}} g(z)dz$$

- **Addition des chemins**

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$$

- **Influence du sens de parcours**

$$\int_{-\mathcal{C}} f(z)dz = -\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$

- **Propriété**

  L'intégrale d'une fonction $f(z)$, bornée en module par un réel M, sur un chemin $\mathcal{C}$ de longueur L, vérifie :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq ML$$

(surtout utile quand le majorant ML tend vers 0)

2.2 Inégalité fondamentale

- **Propriété**
  L'intégrale d'une fonction $f(z)$, bornée en module par un réel M, sur un chemin $\mathcal{C}$ de longueur L, vérifie :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq ML$$

  (surtout utile quand le majorant ML tend vers 0)

- Un exemple : $\int_R^{R+ia} e^{-z^2} dz \xrightarrow[R\to\infty]{} ??$

- **Propriété**
  L'intégrale d'une fonction $f(z)$, bornée en module par un réel M, sur un chemin $\mathcal{C}$ de longueur L, vérifie :

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| \leq ML$$

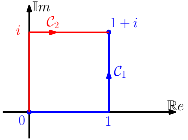
  (surtout utile quand le majorant ML tend vers 0)

- Un exemple : $\int_R^{R+ia} e^{-z^2} dz \xrightarrow[R\to\infty]{} ??$

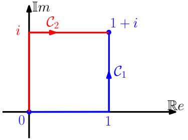
- Un autre exemple : $\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{1}{1+z^2} dz \xrightarrow[R\to\infty]{} ??$

2.3 Intégration indépendante du chemin (Problème)

- Intégrer la fonction $f(z) = \Im(z)$ de $z_1 = 0$ à $z_2 = 1 + i$ selon les chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

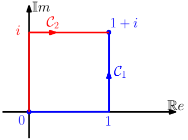


- Intégrer la fonction $f(z) = \Im(z)$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = 1 + i$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
  $\rightarrow$ le résultat dépend de $\mathcal{C}$?

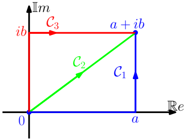


2.3 Intégration indépendante du chemin (Problème)

- Intégrer la fonction $f(z) = \Im(z)$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = 1 + i$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
  $\rightarrow$ le résultat dépend de $\mathcal{C}$?

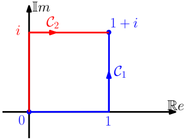


- Intégrer la fonction $f(z) = z$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = a + ib$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$

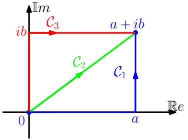


2.3 Intégration indépendante du chemin (Problème)

- Intégrer la fonction $f(z) = \Im(z)$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = 1 + i$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
  $\rightarrow$ le résultat dépend de $\mathcal{C}$?

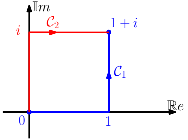


- Intégrer la fonction $f(z) = z$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = a + ib$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$
  $\rightarrow$ le résultat ne dépend pas de $\mathcal{C}$?

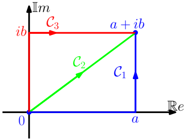


2.3 Intégration indépendante du chemin (Problème)

- Intégrer la fonction $f(z) = \Im(z)$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = 1 + i$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
  $\rightarrow$ le résultat dépend de $\mathcal{C}$?



- Intégrer la fonction $f(z) = z$
  de $z_1 = 0$ à $z_2 = a + ib$
  selon les chemins $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$
  $\rightarrow$ le résultat ne dépend pas de $\mathcal{C}$?



- Peut-on trouver une condition pour que $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$ ne dépende que des bornes et pas du chemin suivi ?

- **Théorème**

La valeur de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ est indépendante du chemin suivi s'il existe deux fonctions $U(x,y)$ et $V(x,y)$ vérifiant les relations :

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Dans ce cas, l'intégrale est donnée par

$$\int_C f(z)dz = (U(x_2,y_2) + iV(x_2,y_2)) - (U(x_1,y_1) + iV(x_1,y_1))$$

- **Théorème**
  La valeur de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ est indépendante du chemin suivi s'il existe deux fonctions $U(x,y)$ et $V(x,y)$ vérifiant les relations :

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

  Dans ce cas, l'intégrale est donnée par

$$\int_C f(z)dz = (U(x_2,y_2) + iV(x_2,y_2)) - (U(x_1,y_1) + iV(x_1,y_1))$$

- **Théorème**
  Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, alors l'intégrale $\int_C f(z)dz$ prend la même valeur sur tous les chemins C de $\mathcal{D}$ ayant les mêmes extrémités.

2.3 Intégration indépendante du chemin (Solution)

- **Théorème**
  La valeur de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ est indépendante du chemin suivi s'il existe deux fonctions $U(x,y)$ et $V(x,y)$ vérifiant les relations :

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

  Dans ce cas, l'intégrale est donnée par

$$\int_C f(z)dz = (U(x_2,y_2) + iV(x_2,y_2)) - (U(x_1,y_1) + iV(x_1,y_1))$$

- **Théorème**
  Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, alors l'intégrale $\int_C f(z)dz$ prend la même valeur sur tous les chemins C de $\mathcal{D}$ ayant les mêmes extrémités.
- Retour aux exemples : $f(z) = \Im(z)$ et $f(z) = z$.

2.4 Intégrales de Cauchy (Problème)

- **Objectif**
  Calculer simplement des intégrales de fonctions complexes sur un contour fermé.

  En physique : calcul de flux à travers une surface, etc.

- **Objectif**
  Calculer simplement des intégrales de fonctions complexes sur un contour fermé.

  En physique : calcul de flux à travers une surface, etc.

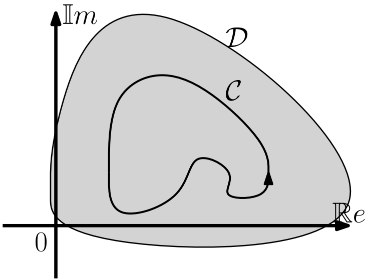
- **Définition**
  La fonction $f(z)$ admet une **singularité d'ordre n en z_0**, si $f(z)$ n'est pas définie en z_0, mais peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^n}$$

où $f_h(z)$ est une fonction **holomorphe** au voisinage de z_0.

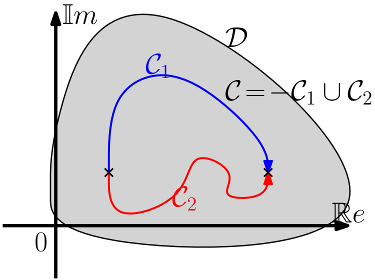
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution à l'absence de problème)

Cas 1 : pas de singularité dans $\mathcal{C}$



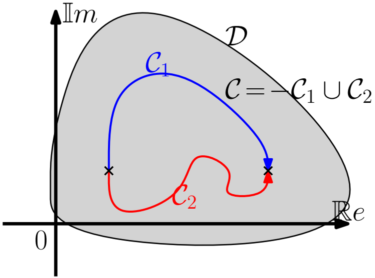
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution à l'absence de problème)

Cas 1 : pas de singularité dans $\mathcal{C}$



2.4 Intégrales de Cauchy (Solution à l'absence de problème)

Cas 1 : pas de singularité dans $\mathcal{C}$

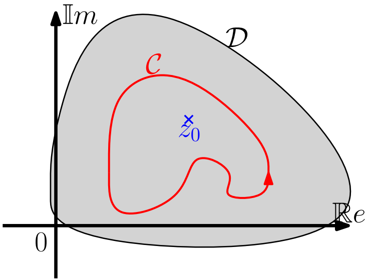


- **Théorème de Cauchy**
  Si une fonction $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D simplement connexe, son intégrale sur tout circuit C de $\mathcal{D}$ est nulle :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$$

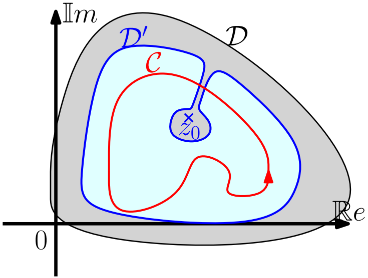
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution qui n'en est pas une)

Cas 2 : une singularité dans $\mathcal{C}$



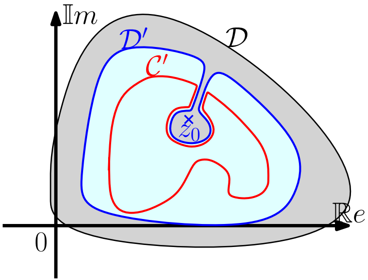
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution qui n'en est pas une)

Cas 2 : une singularité dans $\mathcal{C}$



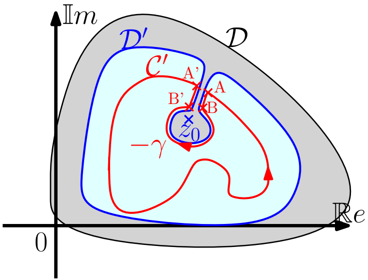
2.4 Intégrales de Cauchy
(Solution qui n'en est pas une)

Cas 2 : une singularité dans $\mathcal{C}$



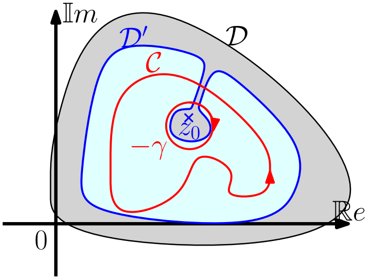
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution qui n'en est pas une)

Cas 2 : une singularité dans $\mathcal{C}$



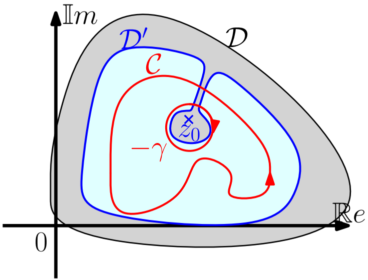
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution qui n'en est pas une)

Cas 2 : une singularité dans $\mathcal{C}$



2.4 Intégrales de Cauchy (Solution qui n'en est pas une)

Cas 2 : une singularité dans $\mathcal{C}$

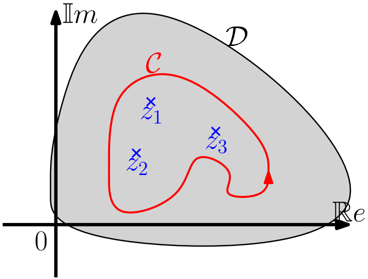


- **Théorème de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_0**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant z_0.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

où γ entoure z_0.

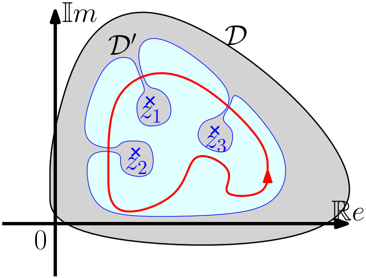
Cas 2(bis) : plusieurs singularités dans $\mathcal{C}$



"C'est quand il y en a beaucoup qu'il y a des problèmes" (B. Hortefeux)

2.4 Intégrales de Cauchy
(Solution qui n'en est pas non plus une)

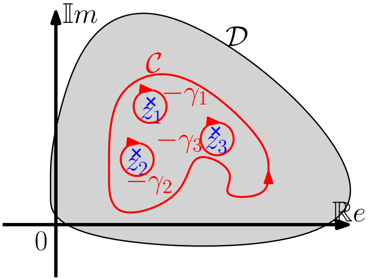
Cas 2(bis) : plusieurs singularités dans $\mathcal{C}$



"Ben non" (...)

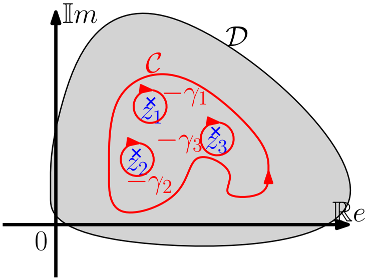
2.4 Intégrales de Cauchy (Solution qui n'en est pas non plus une)

Cas 2(bis) : plusieurs singularités dans $\mathcal{C}$



2.4 Intégrales de Cauchy
(Solution qui n'en est pas non plus une)

Cas 2(bis) : plusieurs singularités dans $\mathcal{C}$



- **Théorème de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant z_1, ..., z_n.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

où γ_k entoure z_k.

2.4 Intégrales de Cauchy (tout ça pour ça...)

Intégrale autour d'une singularité simple

- **Formule de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, f_h une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ et $\gamma \in \mathcal{D}$ un contour entourant z_0.

$$\int_\gamma \frac{f_h(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f_h(z_0)$$

2.4 Intégrales de Cauchy (tout ça pour ça...)

Intégrale autour d'une singularité simple

- **Formule de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, f_h une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ et $\gamma \in \mathcal{D}$ un contour entourant z_0.

$$\int_\gamma \frac{f_h(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f_h(z_0)$$

- Si f a une singularité simple en z_0, elle s'écrit :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{z - z_0}$$

où f_h est holomorphe sur $\mathcal{D}$

2.4 Intégrales de Cauchy (tout ça pour ça...)

Intégrale autour d'une singularité simple

- **Formule de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, f_h une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ et $\gamma \in \mathcal{D}$ un contour entourant z_0.

$$\int_\gamma \frac{f_h(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f_h(z_0)$$

- Si f a une singularité simple en z_0, elle s'écrit :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{z - z_0}$$

  où f_h est holomorphe sur $\mathcal{D}$
- L'intégrale de f autour de z_0 est donnée par :

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma \frac{f_h(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f_h(z_0)$$

Intégrale autour d'une singularité d'ordre n

- Si f a une singularité d'ordre n en z_0, elle s'écrit :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^n}$$

où f_h est holomorphe sur $\mathcal{D}$

2.4 Intégrales de Cauchy (y en a un peu plus ...)

Intégrale autour d'une singularité d'ordre n

- Si f a une singularité d'ordre n en z_0, elle s'écrit :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^n}$$

où f_h est holomorphe sur $\mathcal{D}$

- **Formule de Cauchy à l'ordre n**
Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, f_h une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ et $\gamma \in \mathcal{D}$ un contour entourant z_0.

$$\int_\gamma \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f_h^{(n)}(z_0)$$

2.4 Intégrales de Cauchy (y en a un peu plus ...)

Intégrale autour d'une singularité d'ordre n

- Si f a une singularité d'ordre n en z_0, elle s'écrit :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^n}$$

  où f_h est holomorphe sur $\mathcal{D}$

- **Formule de Cauchy à l'ordre n**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, f_h une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$ et $\gamma \in \mathcal{D}$ un contour entourant z_0.

$$\int_\gamma \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f_h^{(n)}(z_0)$$

- L'intégrale de f autour de z_0 est donnée par :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{2i\pi}{(n-1)!} f_h^{(n-1)}(z_0)$$

- Un exemple
  Déterminer l'intégrale : $\int_{\mathcal{C}} \frac{cos(\pi z)}{z(z-1)} dz$, où $\mathcal{C}$ est défini par
  - $\mathcal{C} = C(-1, R < 1)$
  - $\mathcal{C} = C(-1, 1 < R < 2)$
  - $\mathcal{C} = C(-1, 2 < R)$

2.4 Intégrales de Cauchy (Exemple)

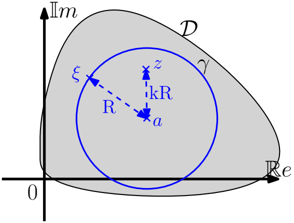
- Un exemple
  Déterminer l'intégrale : $\int_{\mathcal{C}} \frac{cos(\pi z)}{z(z-1)} dz$, où $\mathcal{C}$ est défini par
  - $\mathcal{C} = C(-1, R < 1)$
  - $\mathcal{C} = C(-1, 1 < R < 2)$
  - $\mathcal{C} = C(-1, 2 < R)$
- Un autre exemple
  Calculer l'intégrale : $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$

3. Séries entières et résidus
   - Séries de Taylor
   - Séries de Laurent
   - Théorème des résidus
   - Applications

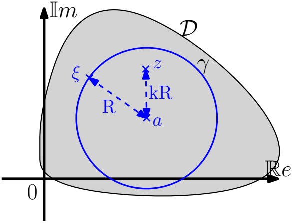
3.1 Séries de Taylor

- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes

- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes
- **Hypothèse**
  f holomorphe sur $\mathcal{D}$ simplement connexe, contenant un disque centré en a de rayon R

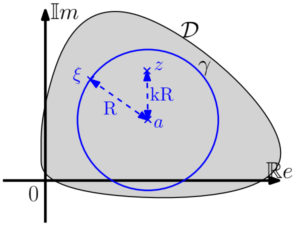


- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes
- **Hypothèse**
  f holomorphe sur $\mathcal{D}$ simplement connexe, contenant un disque centré en a de rayon R



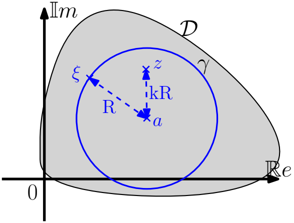
- À partir de : $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ on obtient le ...

- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes
- **Hypothèse**
  f holomorphe sur $\mathcal{D}$ simplement connexe, contenant un disque centré en a de rayon R



- À partir de : $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ on obtient le ...
- **Développement de f(z) en série de Taylor autour de a**
  Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un disque ouvert de centre a, pour tout z de ce disque, $f(z)$ est donné par :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

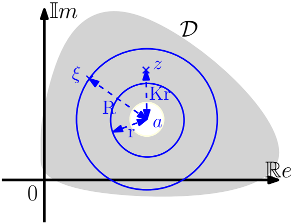


- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes
- **Hypothèse**
  f holomorphe sur $\mathcal{D}$ simplement connexe, contenant un disque centré en a de rayon R
- À partir de : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ on obtient le ...
- **Développement de f(z) en série de Taylor autour de a**
  Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un disque ouvert de centre a, pour tout z de ce disque, $f(z)$ est donné par :

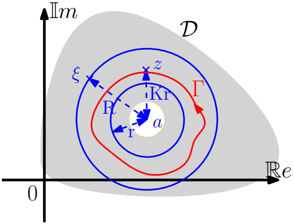
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

- Un exemple : on retrouve $e^z = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$

- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes / fractions rationnelles
- **Hypothèse**
  f holomorphe sur $\mathcal{D}$, contenant une couronne centrée en a de rayons r et R



- **Objectif**
  Écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme de polynômes / fractions rationnelles
- **Hypothèse**
  f holomorphe sur $\mathcal{D}$, contenant une couronne centrée en a de rayons r et R

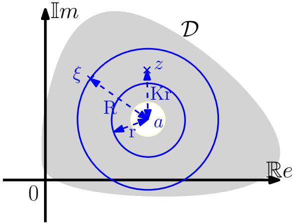


- **Série de Laurent**
  Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne définie par $\mathcal{K} = \{z : r < |z-a| < R\}$. Pour tout $z \in \mathcal{K}$, $f(z)$ est donnée par :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad où \ c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

où $\Gamma \in \mathcal{K}$ entoure a.

$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

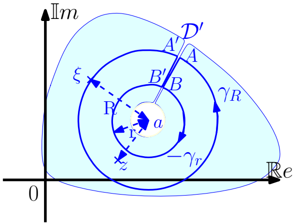


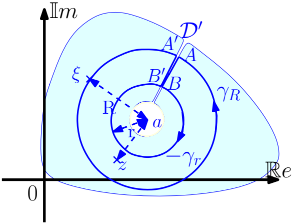
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup - \gamma_r \cup - [A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$





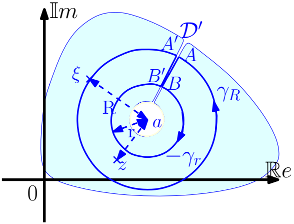
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_A^B \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{A'}^{B'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

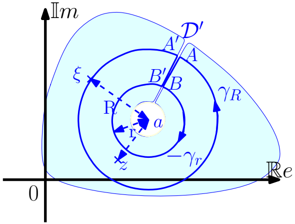
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup - \gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_A^B \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{A'}^{B'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

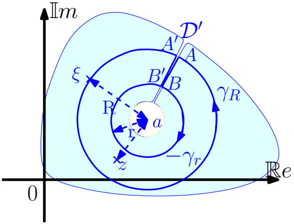
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} d\xi - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a) - (z - a)} d\xi \right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

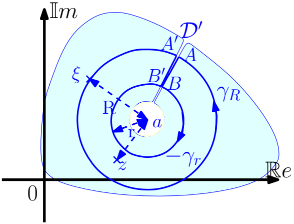
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)} d\xi - \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)} d\xi \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)\left(1-\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)\right)} d\xi + \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(z-a)\left(1-\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)\right)} d\xi \right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

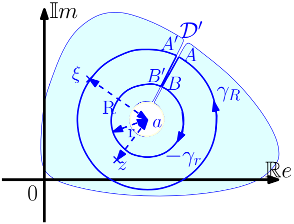
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)\left(1-\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)\right)} d\xi + \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(z-a)\left(1-\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)\right)} d\xi \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(\xi-a)^k}{(z-a)^{k+1}} d\xi \right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

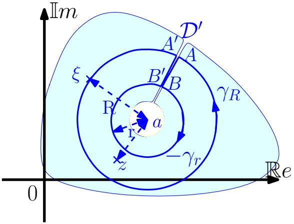
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(\xi-a)^k}{(z-a)^{k+1}} d\xi\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-a)^{-k-1}}{(\xi-a)^{-k}} d\xi\right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

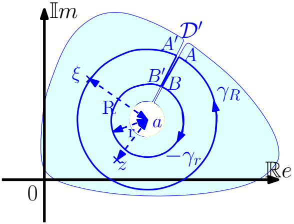
$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-a)^{-k-1}}{(\xi-a)^{-k}} d\xi\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-a)^{k-1}}{(\xi-a)^{k}} d\xi\right)$$



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

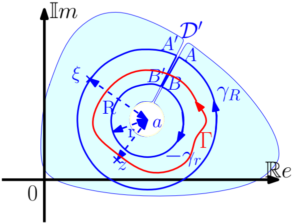
On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup - \gamma_r \cup - [A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-a)^{k-1}}{(\xi-a)^k} d\xi \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi \right)$$

3.2 L'indispensable preuve du développement en...



$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}$ sauf au voisinage de a

$f(z)$ holomorphe sur $\mathcal{D}'$ simplement connexe

On définit : $\bar{\Gamma} = \gamma_R \cup [A\ B] \cup -\gamma_r \cup -[A'\ B']$

On développe : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi + \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi \right)$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z-a)^k c_k, \quad c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi$$

- **Série de Laurent**
  Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne définie par $\mathcal{K} = \{z : r < |z - a| < R\}$. Pour tout $z \in \mathcal{K}$, $f(z)$ est donnée par :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad où\ c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

3.2 Séries de Laurent

- **Série de Laurent**
  Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne définie par $\mathcal{K} = \{z : r < |z-a| < R\}$. Pour tout $z \in \mathcal{K}$, $f(z)$ est donnée par :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad où\ c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

- $f(z)$ a une **singularité d'ordre** n en $a \Leftrightarrow c_k = 0, \forall k < -n$:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

- **Série de Laurent**
  Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne définie par $\mathcal{K} = \{z : r < |z-a| < R\}$. Pour tout $z \in \mathcal{K}$, $f(z)$ est donnée par :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad où\ c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

- $f(z)$ a une **singularité d'ordre** n en $a \Leftrightarrow c_k = 0, \forall k < -n$:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

- $f(z)$ **holomorphe en** $a \Leftrightarrow c_k = 0, \forall k < 0$ **(Taylor)**

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots, \quad avec\ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

3.2 Séries de Laurent

- **Série de Laurent**
  Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne définie par $\mathcal{K} = \{z : r < |z-a| < R\}$. Pour tout $z \in \mathcal{K}$, $f(z)$ est donnée par :

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad où\ c_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

- $f(z)$ a une **singularité d'ordre** n en $a \Leftrightarrow c_k = 0, \forall k < -n$:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

- $f(z)$ **holomorphe en** $a \Leftrightarrow c_k = 0, \forall k < 0$ **(Taylor)**

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots, \quad avec\ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

- le coefficient c_{-1} s'appelle le **résidu de f en a** :

$$Res(f,a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\xi) d\xi$$

- **Théorème de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant les z_k.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz, \ \gamma_k \ entourant \ z_k$$

- **Théorème de Cauchy**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant les z_k.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{\gamma_k} f(z)dz}_{2i\pi Res(f,z_k)}, \; \gamma_k \; entourant \; z_k$$

3.3 Théorème des résidus

- **Théorème des Résidus**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant les z_k.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

3.3 Théorème des résidus

- **Théorème des Résidus**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant les z_k.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

- **Calcul d'un résidu en une singularité simple**

$$Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$$

- **Théorème des Résidus**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant les z_k.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

- **Calcul d'un résidu en une singularité simple**

$$Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$$

- **Calcul d'un résidu en une singularité d'ordre n**

$$Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_k)^n f(z) \right)$$

3.3 Théorème des résidus

- **Théorème des Résidus**
  Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe, $f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$, **sauf en z_1, ..., z_n**, et $\mathcal{C}$ un circuit dans $\mathcal{D}$ entourant les z_k.

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

- **Calcul d'un résidu en une singularité simple**

$$Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$$

- **Calcul d'un résidu en une singularité d'ordre n**

$$Res(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_k)^n f(z) \right)$$

- **Pour $f(z) = \Phi(z)/\Psi(z)$**
  avec Φ holomorphe et Ψ ayant un zéro simple en z_k

$$Res(f, z_k) = \frac{\Phi(z_k)}{\Psi'(z_k)}$$

Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

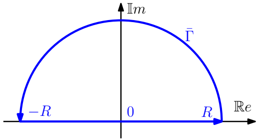
Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

on peut intégrer la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

sur $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur, centré en $z = 0$, de rayon $R \to \infty$



3.4 Intégrales de fractions rationnelles

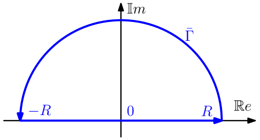
Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

on peut intégrer la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

sur $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur, centré en $z = 0$, de rayon $R \to \infty$



$\bar{\Gamma}$ entoure les deux singularités $e^{i\pi/4}$ et $e^{i3\pi/4}$. Finalement il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

3.4 Intégrales de fonctions trigonométriques

Pour intégrer des fractions rationnelles de fonctions trigonométriques sur $\theta \in [0\ 2\pi]$, t.q. :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)}$$

on fait le changement de variable $z = e^{i\theta}$

Pour intégrer des fractions rationnelles de fonctions trigonométriques sur $\theta \in [0\ 2\pi]$, t.q. :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)}$$

on fait le changement de variable $z = e^{i\theta}$, pour intégrer une fraction rationnelle en z sur le cercle trigonométrique :

$$I = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{1 + 4z + z^2}$$

3.4 Intégrales de fonctions trigonométriques

Pour intégrer des fractions rationnelles de fonctions trigonométriques sur $\theta \in [0\ 2\pi]$, t.q. :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos(\theta)}$$

on fait le changement de variable $z = e^{i\theta}$, pour intégrer une fraction rationnelle en z sur le cercle trigonométrique :

$$I = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{1 + 4z + z^2}$$

et on applique le théorème de Cauchy ou des résidus pour obtenir le résultat

$$I = 2i\pi \left(\frac{2}{i}\right) \left(\frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}}\right)_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

3.4 Intégrales réelles sur un axe

Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

on définit $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur centré en $z = 0$ de rayon $R > 1$.

Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

on définit $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur centré en $z = 0$ de rayon $R > 1$.
L'intégrale sur le contour fermé est :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2i\pi \left(\frac{e^{iz}}{z+i} \right)_{z=i} = \frac{\pi}{e}$$

3.4 Intégrales réelles sur un axe

Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx$$

on définit $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur centré en $z = 0$ de rayon $R > 1$. L'intégrale sur le contour fermé est :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = 2i\pi \left(\frac{e^{iz}}{z+i}\right)_{z=i} = \frac{\pi}{e}$$

Cette intégrale se décompose par addition des chemins en :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

on définit $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur centré en $z = 0$ de rayon $R > 1$.
L'intégrale sur le contour fermé est :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2i\pi \left(\frac{e^{iz}}{z+i} \right)_{z=i} = \frac{\pi}{e}$$

Cette intégrale se décompose par addition des chemins en :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz + \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$

L'intégrale sur le demi-cercle ouvert supérieur Γ est bornée par :

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}$$

3.4 Intégrales réelles sur un axe

Pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx$$

on définit $\bar{\Gamma}$ le demi-cercle fermé supérieur centré en $z=0$ de rayon $R>1$.
L'intégrale sur le contour fermé est :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = 2i\pi\left(\frac{e^{iz}}{z+i}\right)_{z=i} = \frac{\pi}{e}$$

Cette intégrale se décompose par addition des chemins en :

$$\int_{\bar{\Gamma}} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

L'intégrale sur le demi-cercle ouvert supérieur Γ est bornée par :

$$\left|\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$$

En faisant tendre $R\to\infty$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$$