

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE



– Cours de première année –

OUTILS MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

– Analyse Complexe –



Benoît MARX, Maître de Conférences à l'Université de Lorraine

Table des matières

1	FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE	1
1.1	Rappels sur les nombres complexes	1
1.2	Fonction d'une variable complexe	2
1.3	Fonctions multivalentes	4
1.4	Limite d'une fonction de la variable complexe	5
1.5	Dérivabilité d'une fonction de la variable complexe	6
2	INTÉGRATION DES FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE	9
2.1	Preliminaires	9
2.2	Inégalité fondamentale	10
2.3	Intégration indépendante du chemin	13
2.4	Intégrales de Cauchy	14
2.4.1	Intégrale de fonctions sans singularité	15
2.4.2	Intégrale de fonctions ayant des singularités	16
2.5	Quelques exemples d'application	19
3	SÉRIES ENTIÈRES ET RÉSIDUS	21
3.1	Séries de Taylor	21
3.2	Séries de Laurent	23
3.3	Théorème des résidus	26
3.4	Quelques applications du calcul de résidus	28
3.4.1	Calcul d'intégrales de fractions rationnelles	28
3.4.2	Calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques	29
3.4.3	Calcul de sommes de séries	30
3.4.4	Calcul d'intégrales réelles sur un axe	32
3.4.5	Calcul d'intégrales de fonctions multivalentes	32
4	SUJETS DE TRAVAUX DIRIGÉS	35
	TD1. Limite, Dérivation et Intégrales de Cauchy	37
	TD2. Intégrales de Cauchy (suite) et Résidus	38
	TD3. Résidus, Séries de Laurent et de Taylor	39

Chapitre 1

Fonctions d'une variable complexe

1.1 Rappels sur les nombres complexes

Toute l'algèbre des nombres complexes est fondée sur l'existence d'un nombre i ayant la propriété suivante

$$i^2 = -1$$

Tout nombre z du corps des complexes \mathbb{C} se définit comme une combinaison linéaire du couple $(1, i)$

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

les réels x et y sont respectivement appelés parties réelle et imaginaire du nombre complexe z , notées $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$. Cette représentation d'un nombre complexe est dite *cartésienne*. On peut également représenter un nombre complexe en utilisant les coordonnées polaires, dans ce cas on a :

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta), r \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Le module, noté $r = |z|$, est la distance entre z et l'origine. L'argument, noté $\theta = \text{Arg}(z)$, est l'angle entre le vecteur porté par la droite des réels et le vecteur formé par z . Un point du plan complexe peut avoir une infinité de coordonnées, car l'argument est défini modulo 2π . On appelle *représentation principale* d'un point celle dont l'argument vérifie $0 \leq \theta < 2\pi$.

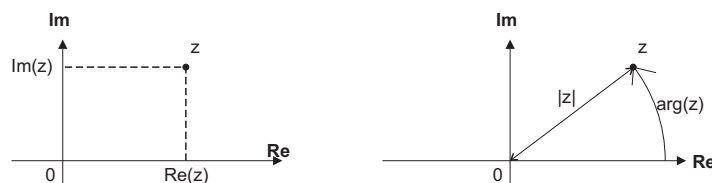


FIGURE 1.1 – (à gauche) représentation cartésienne d'un complexe; (à droite) représentation polaire d'un complexe

On peut passer d'une représentation à l'autre par :

$$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

$$y = r \sin \theta \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.4)$$

On appelle conjugué de $z = x + iy$ le nombre complexe, noté \bar{z} , défini par :

$$\bar{z} = x - iy \tag{1.5}$$

On retiendra les propriétés suivantes (qu'on peut démontrer à titre d'exercice) :

$$z\bar{z} = |z|^2 \tag{1.6}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{1.7}$$

$$\left| \sum_{j=1}^N z_j \right| \leq \sum_{j=1}^N |z_j| \tag{1.8}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \tag{1.9}$$

La deuxième relation correspond à l'*inégalité triangulaire* bien connue, généralisée par la troisième relation.

Les nombres 1 et i jouent le même rôle que les deux vecteurs orthonormalisés du plan réel, autrement dit \mathbb{C} va pouvoir être muni d'une structure d'espace vectoriel à deux dimensions sur le corps des réels. On dit alors que \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 sont isomorphes, et un complexe z peut être représenté dans le plan par un point de coordonnées (x, y) .

Les opérations usuelles d'addition et de multiplication sont définies et sont commutatives. La soustraction ainsi que la division par un complexe non nul sont également définies. On remarque facilement que l'addition et la soustraction s'expriment aisément en coordonnées cartésiennes, tandis que la multiplication ou la division s'explicitent sans peine en représentation polaire. De même, les puissances entières (ou les racines $n^{\text{ièmes}}$) s'écrivent commodément en coordonnées polaires.

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{1.10}$$

Cette relation permet de retrouver la formule de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \tag{1.11}$$

1.2 Fonction d'une variable complexe

La notion de fonction réelle de la variable réelle s'étend à celle de fonction complexe de la variable complexe. Autrement dit, à un complexe z , la fonction f associe un ¹ complexe $f(z)$. L'image de $z = x + iy$ par la fonction f étant un nombre complexe, on séparera souvent ses parties imaginaire et réelle, afin de l'écrire sous la forme :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ avec } u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

où u et v sont des fonctions réelles des variables réelles x et y . La donnée d'une fonction de la variable complexe est donc équivalente à la donnée de deux fonctions à valeurs réelles.

On écrira la dépendance des fonctions, indifféremment en la variable complexe z , ou en ses parties réelle et imaginaire car une fonction en x et y , est une fonction en z et \bar{z} , et réciproquement, en effet on a :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad z = x + iy \tag{1.12}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \qquad \bar{z} = x - iy \tag{1.13}$$

1. ou plusieurs, on verra cela par la suite ...

Contrairement aux fonctions de la variable réelle, on ne peut pas tracer de graphe car la fonction est une application plan sur plan : à chaque point du plan antécédent la fonction fait correspondre un ² point image dans le plan. Une autre distinction très importante est la notion de chemin. Il n'existe qu'une façon pour passer continûment d'un réel a à un réel b : décrire le compact $[a, b]$. En revanche, pour aller continûment d'un complexe z_1 à un autre complexe z_2 , il existe une infinité de chemins. Cette différence est à l'origine de certaines propriétés des fonctions de la variable complexe : la valeur d'une fonction en un point dépend-elle du chemin parcouru pour arriver en ce point ? la valeur de l'intégrale d'une fonction entre deux points dépend-elle du chemin emprunté pour les relier ? ...

Pour la suite du cours nous aurons besoin des quelques définitions qui suivent.

Définition 1.1 (domaine). *On dit que \mathcal{D} , inclus dans \mathbb{C} , est un domaine si tout point de \mathcal{D} est le centre d'un cercle (suffisamment petit) contenu dans \mathcal{D} .*

Définition 1.2 (chemin). *Un chemin de z_1 à z_2 , dans un domaine \mathcal{D} , est défini par une application continue $\varphi(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$, avec $\varphi(0) = z_1$ et $\varphi(1) = z_2$.*

Définition 1.3 (circuit). *Un circuit est un chemin dont les deux extrémités sont confondues et est défini par une application continue $\varphi(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$, avec $\varphi(0) = \varphi(1)$.*

Définition 1.4 (circuits homotopes). *Soient deux circuits γ_1 et γ_2 , respectivement paramétrés par les applications continues $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$. Les deux circuits sont dits homotopes dans un domaine \mathcal{D} si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue sans sortir du domaine. Autrement dit, s'il existe une application continue $\varphi(t, u) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ avec $\varphi(0, u) = \varphi(1, u)$, $\varphi(t, 0) = \varphi_1(t)$ et $\varphi(t, 1) = \varphi_2(t)$.*

Définition 1.5 (circuit homotope à zéro). *Un circuit est homotope à zéro dans le domaine \mathcal{D} , si on peut le ramener à un point par une déformation continue, et sans sortir du domaine \mathcal{D} (on prend $\varphi_2(t) = z \in \mathcal{D}$ dans la définition précédente).*

Définition 1.6 (domaine simplement connexe). *Un domaine est simplement connexe si tout circuit du domaine est homotope à zéro dans ce domaine (en langage courant : le domaine est sans trou).*

Définition 1.7 (domaine connexe). *Un domaine \mathcal{D} est connexe si deux points quelconques de \mathcal{D} peuvent être reliés par un chemin dans \mathcal{D} .*

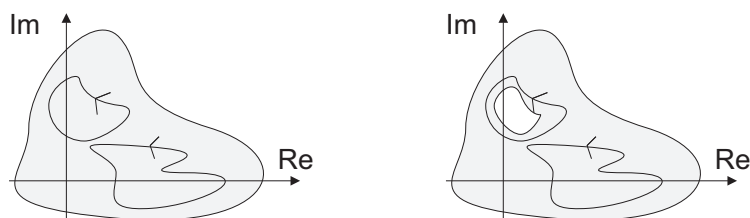


FIGURE 1.2 – (à gauche) circuits homotopes dans un domaine simplement connexe ; (à droite) circuits non homotopes dans un domaine multiplement connexe

2. même remarque...

1.3 Fonctions multivalentes

Nous avons écrit plus haut qu'à un antécédent, une fonction associe une image, c'est incomplet, comme en témoigne le cas des fonctions multivalentes, définies ci-dessous.

Définition 1.8 (fonction multivalente). *Une fonction multivalente est une fonction qui, à une valeur de la variable, fait correspondre plusieurs valeurs (parfois une infinité).*

Pour illustrer cette notion, étudions la **fonction racine** $f(z) = \sqrt{z}$. Cette fonction est définie par :

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \tag{1.14}$$

L'argument de z étant défini à 2π près ($arg(z) = \theta + 2k\pi$), l'image $f(z)$ peut être :

- soit : $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$;
- soit : $f(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)}$.

Le point $z = 0$ a un rôle particulier : c'est un *point de branchement*.

Définition 1.9 (Point de branchement). *Le complexe z_0 est un point de branchement de la fonction f s'il existe un circuit entourant z_0 dont l'image par f n'est pas un circuit.*

Ce phénomène met en évidence la multivalence de la fonction. Pour la rendre univalente, on peut réaliser une *coupure de Riemann*.

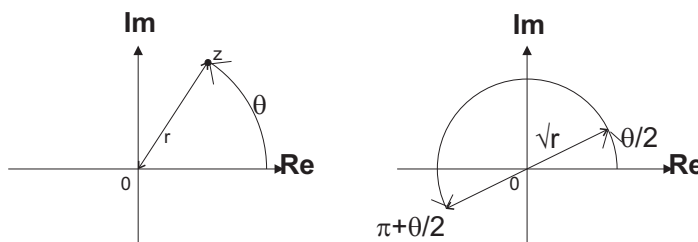


FIGURE 1.3 – Fonction racine carrée, (à gauche) un point z ; (à droite) ses racines dans \mathbb{C}

Définition 1.10 (coupure de Riemann). *On appelle coupure de Riemann pour la fonction f , une ligne du plan complexe telle que l'image par f de tout circuit ne coupant pas la coupure de Riemann est un circuit.*

Pour illustrer la notion de coupure de Riemann, revenons à la fonction racine. Lorsque le point d'affixe $z = re^{i\theta}$ fait un tour autour de l'origine il devient $z' = re^{i(\theta+2\pi)}$. De ce fait le point image passe de $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ à $f(z') = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)}$. Autrement dit, on passe d'une valeur à l'autre de la fonction. Pour empêcher ce "saut" on décide d'interdire de franchir l'axe des réels positifs (en fait n'importe quelle ligne ayant son origine en zéro). Dans ce cas, l'argument de z vérifie $0 \leq arg(z) < 2\pi$ et chaque point n'a qu'une image. La fonction racine définie sur ce domaine particulier devient univalente.

La **fonction logarithmique**, notée $ln(z)$, fournit un autre exemple intéressant de fonction multivalente. On peut la définir comme la fonction inverse de l'exponentielle, autrement dit :

$$\forall Z \in \mathbb{C}, z = e^Z \Leftrightarrow Z = ln(z) \tag{1.15}$$

En utilisant la propriété de l'exponentielle $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, on a $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$. La représentation polaire de z permet alors d'obtenir :

$$ln(z) = ln(r) + ln(e^{i\theta}) \tag{1.16}$$

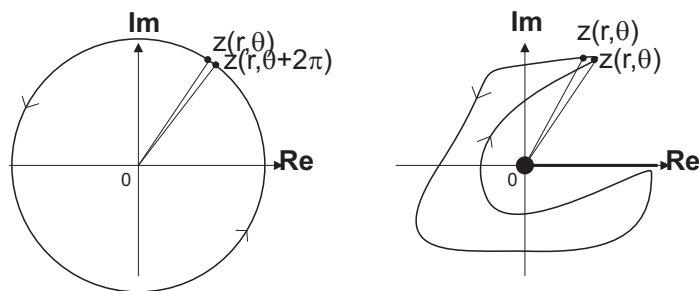


FIGURE 1.4 – (à gauche) Lorsque z parcourt le cercle l'argument évolue de 2π ; (à droite) La coupure en gras empêche de passer d'une réalisation de z à une autre.

L'argument de z étant défini à 2π près, on a finalement

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i(\theta + 2k\pi) \tag{1.17}$$

Le complexe z a alors une infinité d'images, correspondant à chaque valeur possible de $k \in \mathbb{Z}$. La détermination principale est donnée par $k = 0$. Si z décrit un circuit entourant le point zéro, alors en parcourant ce circuit l'argument évolue de 2π . En revanche, si le circuit n'entoure pas le point zéro alors l'argument de z après avoir parcouru le circuit reste inchangé. Le point $z = 0$ est donc un point de branchement. Pour rendre univalente la fonction, il faut créer une coupure interdisant de contourner l'origine. N'importe quelle ligne issue de $z = 0$ et allant vers l'infini est alors une coupure de Riemann, par exemple le demi-axe réel positif.

Exemple 1.1. Quelles sont les coupures rendant la fonction $f(z) = \sqrt{z^2 - 9}$ univalente ?
Réponse : le but étant d'empêcher z de faire le tour de l'un ou l'autre des deux points de branchement $z = 3$ et $z = -3$. On peut soit choisir une ligne reliant les deux points, soit choisir deux lignes, issues chacune d'un des deux points.

1.4 Limite d'une fonction de la variable complexe

Dans le cas des fonctions **réelles** la notion de limite est définie comme suit. On dit que la fonction $f(x)$ a une limite en x_0 si et seulement si il existe un nombre f_0 tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon \tag{1.18}$$

et dans ce cas, on écrit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f_0$. De plus si $f_0 = f(x_0)$ on dit que la fonction est continue. Si la fonction n'est pas continue en un point, alors la limite en ce point n'existe pas. En revanche, des limites à gauche et à droite peuvent exister et être différentes. Par exemple, pour la fonction échelon définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \forall x < 0 \\ 1, & \forall x > 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

la limite par valeurs inférieures est 0, tandis que la limite par valeurs supérieures est 1. Il existe donc deux limites distinctes.

Dans le cas des fonctions **complexes**, il existe une infinité de chemins possibles pour faire tendre z vers z_0 (le point évolue dans un plan et non plus sur une droite). La définition

de limite s'étend de manière immédiate par l'existence de f_0 tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f_0| < \varepsilon \quad (1.20)$$

et dans ce cas, on écrit : $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0$. Pour que la limite existe, la valeur de $f(z_0)$ ne doit pas dépendre du chemin suivi pour arriver en z_0 . Autrement dit, la limite doit être identique pour tous les chemins possibles.

L'existence de la limite de $f(z)$ est équivalente à l'existence des limites de $u(x, y)$ et de $v(x, y)$. La limite de $f(z)$ en z_0 existe si et seulement si les limites suivantes existent³ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0 \quad (1.21)$$

La continuité d'une fonction de la variable complexe est alors une extension de la continuité d'une fonction de la variable réelle

Définition 1.11 (continuité). *Une fonction est dite continue en z_0 si cette fonction est définie au voisinage de z_0 , et si sa limite en z_0 existe.*

Exemple 1.2. Soit la fonction définie par : $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$. Cette fonction est-elle continue en $z = 0$?

Réponse : en passant en coordonnées polaires, il vient : $f(z) = e^{i2\theta}$. Autrement dit, si z tend vers 0 selon l'axe des réels positifs $f(z) = 1$, mais si z tend vers 0 selon l'axe (O, i) , $f(z) = -1$. On peut conclure que la fonction $f(z)$ n'a pas de limite en $z = 0$. La fonction est bien définie au voisinage de $z = 0$ par $f(z) = e^{i2\theta}$, en revanche la limite n'existant pas, elle n'est pas continue en $z = 0$.

1.5 Dérivabilité d'une fonction de la variable complexe

La notion de dérivée d'une fonction de la variable complexe est l'extension du cas réel, à partir de la limite du taux de variation.

Définition 1.12 (dérivabilité). *La fonction $f(z)$ est dérivable en z_0 si la limite suivante existe :*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} \quad (1.22)$$

Compte tenu de la définition de la limite, la valeur de (1.22) ne doit pas dépendre du chemin suivi. Une fonction dérivable en tout point du domaine est dite continûment dérivable (ou différentiable).

Définition 1.13 (holomorphe). *Une fonction dérivable⁴ en tout point d'un domaine \mathcal{D} est dite holomorphe dans ce domaine.*

La somme et le produit de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes. De même le rapport $f(z)/g(z)$ où f et g sont holomorphes, est une fonction holomorphe partout où $g(z) \neq 0$. Par conséquent il est immédiat que les polynômes, les fractions rationnelles hors les pôles, les exponentielles sont des fonctions holomorphes.

Pour éviter de revenir à la définition de la dérivée et de la limite, on va expliciter des conditions nécessaires et suffisantes de dérivabilité, connues sous le nom de *conditions de Cauchy*⁵ ou *conditions de Cauchy-Riemann* (CCR).

3. comprendre : si elles existent et si elles sont uniques

4. donc continue, univalente, définie

5. à propos des noms de résultats scientifiques, rappelons la loi de Stigler : *une découverte scientifique ne porte jamais le nom de son auteur.* Notons que la loi de Stigler est due à... R.K. Merton.

Théorème 1.1 (conditions de Cauchy-Riemann). *La fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est dérivable en z_0 si et seulement si :*

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}} \quad (1.23)$$

Démonstration. Pour montrer la nécessité des conditions de Cauchy-Riemann, on suppose que $f(z)$ est dérivable, la limite (1.22) existe. Dans un premier temps, supposons que z tend vers z_0 par un chemin parallèle à l'axe des réels, donc $z - z_0 = h \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \quad (1.24)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \quad (1.25)$$

Dans un second temps, supposons que z tend vers z_0 par un chemin parallèle à l'axe des imaginaires purs, donc $z - z_0 = ik$, $k \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{ik} + i \frac{v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0)}{ik} \quad (1.26)$$

$$= -i \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \quad (1.27)$$

Par identification des parties réelles et imaginaires de (1.25) et (1.27), on obtient (1.23).

Pour démontrer la suffisance des CCR, on suppose qu'elles sont vérifiées. Les fonctions u et v étant différentiables, on peut les développer au voisinage de z_0 . Posons $z - z_0 = \xi = h + ik$, on a alors :

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + k \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} + \alpha(\xi)|\xi| \quad (1.28)$$

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = h \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} + \beta(\xi)|\xi| \quad (1.29)$$

où $\alpha(\xi)$ et $\beta(\xi)$ tendent vers 0 lorsque $|\xi| \rightarrow 0$. On peut alors écrire :

$$f(z_0 + \xi) - f(z_0) = \left[h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + k \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \right] + i \left[h \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \right] + \gamma(\xi)|\xi| \quad (1.30)$$

où $\gamma(\xi) = \alpha(\xi) + i\beta(\xi)$. En tenant compte des conditions de Cauchy-Riemann, il vient :

$$f(z_0 + \xi) - f(z_0) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(z_0)} \right] (h + ik) + \gamma|\xi| \quad (1.31)$$

$$= A\xi + \gamma(\xi)|\xi| \quad (1.32)$$

u et v étant différentiables, la quantité A est définie et bornée, et γ tend vers zéro lorsque $\xi \rightarrow 0$. Autrement dit, il en résulte :

$$\frac{f(z_0 + \xi) - f(z_0)}{\xi} = A + \gamma(\xi) \frac{|\xi|}{\xi} \quad (1.33)$$

Le rapport $|\xi|/\xi$ est de module égal à 1, $\gamma(\xi)$ tend vers 0 lorsque $\xi \rightarrow 0$, et A est défini et borné, donc la limite du rapport $\frac{f(z_0 + \xi) - f(z_0)}{\xi}$, lorsque $\xi \rightarrow 0$, existe. La fonction $f(z)$ est donc dérivable en z_0 , et $f'(z_0) = A$. \square

Exemple 1.3. Montrer que la fonction $\ln(z)$ est dérivable sur le plan complexe, pour $-\pi \leq \arg(z) < \pi$, et que sa dérivée est $f'(z) = 1/z$.

La fonction est définie par :

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i.\arg(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i.\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.34)$$

Les dérivées partielles des fonctions u et v sont donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2(x^2 + y^2)} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (1.36)$$

Les CCR sont donc vérifiées. Comme on l'a vu, la dérivée d'une fonction holomorphe est donnée, par exemple, par :

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.37)$$

Il vient donc :

$$\frac{d\ln(z)}{dz} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \quad (1.38)$$

Autrement dit, on a généralisé au logarithme népérien complexe la formule de dérivation connue pour le logarithme réel.

En coordonnées polaires, les conditions de Cauchy-Riemann, de la fonction $f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$, où U et V sont deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r_0, \theta_0} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r_0, \theta_0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r_0, \theta_0} = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_{r_0, \theta_0} \quad (1.39)$$

La démonstration peut être faite à titre d'exercice.

Les CCR ont de nombreuses conséquences, on en citera deux sous la forme de propriétés (non démontrées ici).

Propriété 1.1. *Toute fonction holomorphe est infiniment dérivable.*

Propriété 1.2. *Une fonction holomorphe est fonction de la variable z uniquement, et non des variables z et \bar{z}*

Chapitre 2

Intégration des fonctions de la variable complexe

Dans ce chapitre on s'intéressera à l'intégration des fonctions d'une variable complexe. En particulier on commencera par donner une majoration fondamentale d'une intégrale complexe. Puis on étudiera l'influence du chemin suivi lors de l'intégration sur le résultat final avant de présenter le résultat principal de ce chapitre : l'intégrale de Cauchy et ses différentes applications.

2.1 Préliminaires

La notion d'intégrale se généralise au cas complexe en utilisant les intégrales de Riemann. En effet dans le cas des fonctions réelles, l'intégrale de $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ se définit en décomposant l'aire que quantifie l'intégrale en N rectangles élémentaires, dont l'aire est le produit de la largeur du rectangle par la valeur de la fonction en ce point. Autrement dit on a :

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(x_{j+1} - x_j) \quad (2.1)$$

où $x_j = a + \frac{(b-a)}{N}j$ (donc $x_0 = a$ et $x_N = b$). Si la somme converge lorsque $N \rightarrow \infty$, alors la limite de la somme est appelée intégrale, et est notée :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_a^b f(x)dx \quad (2.2)$$

Dans le cas complexe, on considère un chemin orienté, constitué d'arcs de courbe continûment différentiables, paramétré par $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. On décompose le chemin, noté C , d'extrémités α et β , en arcs élémentaires délimités par les complexes $z_j = \varphi\left(\frac{j}{N}\right)$ (donc $z_0 = \alpha$ et $z_N = \beta$). On peut alors définir la somme de Riemann suivante :

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} f(z_j)(z_{j+1} - z_j) \quad (2.3)$$

L'intégrale est alors définie par :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_C f(z)dz \quad (2.4)$$

dz désigne alors une variation infinitésimale de z autour de la valeur z . La limite existe lorsque f est une fonction bornée continue (ou continue par morceaux). En posant $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $z = x + iy$, l'intégrale devient :

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x, y) + iv(x, y)) (dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx) \quad (2.5)$$

De cette manière l'intégrale complexe peut s'exprimer comme deux intégrales réelles. Les variables x et y pouvant s'interpréter comme les coordonnées cartésiennes de z dans le plan complexe, on parle parfois d'intégrale curviligne.

Les propriétés usuelles des intégrales s'étendent au cas des intégrales complexes :

Propriété 2.1 (linéarité).

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz \quad (2.6)$$

où α et β sont des constantes (complexes).

Propriété 2.2 (addition des chemins).

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \quad (2.7)$$

où C_1 et C_2 désignent deux chemins d'un domaine où f est continue.

Propriété 2.3 (influence du sens de parcours).

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz \quad (2.8)$$

où $-C$ désigne le chemin C parcouru en sens inverse.

2.2 Inégalité fondamentale

Dans un premier temps, on cherche à majorer le module de l'intégrale, sur un chemin C , de longueur L . Étant donné que l'intégrale se définit par la limite d'une somme de Riemann, en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)dz| = \int_C |f(z)||dz| \quad (2.9)$$

La fonction étant intégrable, elle est bornée, autrement dit, il existe un réel M tel que

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in C \quad (2.10)$$

Il est donc possible d'écrire

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)dz| = \int_C |f(z)||dz| \leq M \int_C |dz| \quad (2.11)$$

La quantité $|dz|$ définit la longueur de l'arc que parcourt z lors d'une variation élémentaire. L'intégrale donne donc :

$$\int_C |dz| = L \quad (2.12)$$

On a donc finalement la propriété suivante.

Propriété 2.4. *L'intégrale d'une fonction continue et bornée en module par un réel positif M sur un contour C de longueur L , vérifie l'inégalité suivante :*

$$\boxed{\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML} \quad (2.13)$$

Cette propriété est utilisée pour majorer des intégrales simplement, comme le démontrent les exemples suivants. En particulier, si on arrive à montrer que le module d'une intégrale est majoré par une quantité qui tend vers 0, on montre que l'intégrale elle-même tend vers 0.

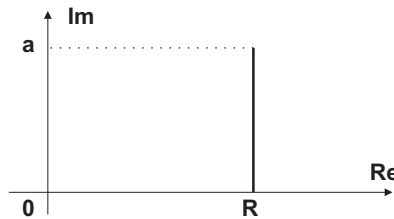


FIGURE 2.1 – Chemin d'intégration défini par $z(t) = R + it$, avec $0 \leq t \leq a$

Exemple 2.1. On considère le segment $S = [R, R + ia]$ parallèle à l'axe des imaginaires purs, défini par $z(t) = R + it$, avec $0 \leq t \leq a$, représenté à la figure 2.2. Montrer que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_S e^{-z^2} dz = 0 \quad (2.14)$$

La longueur de l'arc est évidemment : $L = a$. Il convient de trouver le majorant de la fonction sur C

$$\sup_{z \in S} |e^{-z^2}| = \sup_{t \in [0, a]} |e^{-(R+it)^2}| = \sup_{t \in [0, a]} (e^{-R^2+t^2} |e^{-i2Rt}|) = e^{-R^2+a^2} \quad (2.15)$$

On a donc :

$$\left| \int_S e^{-z^2} dz \right| \leq a e^{-R^2+a^2} \quad (2.16)$$

L'abscisse a étant finie, la limite, lorsque $R \rightarrow \infty$, est :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_S e^{-z^2} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} a e^{-R^2+a^2} = 0 \quad (2.17)$$

Exemple 2.2. Montrer que la valeur de l'intégrale suivante est :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(0,R)} \frac{dz}{1+z^2} = 0 \quad (2.18)$$

où $C(0, R)$ désigne le cercle centré en l'origine, de rayon R , avec $R > 1$.

La longueur de la courbe est $L = 2\pi R$. La majoration de la fonction, pour z décrivant le cercle C , donne :

$$\sup_{z \in C} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \frac{1}{\inf_{z \in C} |z^2+1|} = \frac{1}{R^2-1} \quad (2.19)$$

L'inégalité fondamentale permet alors d'écrire :

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{2\pi R}{R^2-1} \quad (2.20)$$

Finalement, en passant à la limite, il vient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C(0,R)} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi R}{R^2-1} = 0 \quad (2.21)$$

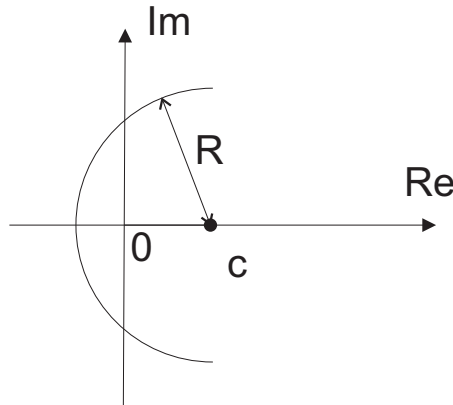


FIGURE 2.2 – Chemin d'intégration défini par le demi-cercle gauche ouvert, de centre $c \in \mathbb{R}^+$, de rayon R , avec $R > c$.

Exemple 2.3. Montrer que :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} dz = 0 \quad (2.22)$$

où $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, et où C désigne le demi-cercle gauche ouvert, de centre $c \in \mathbb{R}^+$, de rayon R , avec $R > c$, représenté à la figure 2.2 .

La longueur de l'arc C est $L = \pi R$. L'arc peut être paramétré par $z = c + Re^{i\theta}$ où $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$. Calculons un majorant du module de la fonction intégrée.

$$\sup_{z \in C} \left| \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{\sup_{\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]} |e^{t(c+R\cos\theta)}| |e^{itR\sin\theta}|}{\inf_{\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]} |c + R\cos\theta + iR\sin\theta|^{n+1}} = \frac{e^{ct}}{(R-c)^{n+1}} \quad (2.23)$$

En effet, on a : $\sup_{\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]} \cos\theta = 0$, et

$$\inf_{\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]} |c + R\cos\theta + iR\sin\theta| = \inf_{\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]} |(c + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2|^{1/2} \quad (2.24)$$

$$= \inf_{\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]} |c^2 + R^2 + 2cR\cos\theta|^{1/2} \quad (2.25)$$

$$= (c^2 + R^2 - 2cR)^{1/2} = R - c \quad (2.26)$$

Finalement il vient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_C \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{ct}\pi R}{(R-c)^{n+1}} = 0 \quad (2.27)$$

La limite cherchée est donc nulle.

2.3 Intégration indépendante du chemin

Dans le cas des fonctions de la variable réelle, le chemin d'intégration de $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ est unique : il s'agit du segment $[t_1 t_2]$. Dans le cas des fonctions de la variable complexe, il existe une infinité de chemins pour aller de z_1 à z_2 . Dans le cas général, la valeur de l'intégrale dépend du chemin. Nonobstant, il est naturel de se demander s'il est possible de caractériser la classe des fonctions pour lesquelles la valeur de l'intégrale ne dépend que des extrémités et non du chemin suivi entre ces extrémités z_1 et z_2

Avant de rechercher un résultat général, étudions deux exemples.

Exemple 2.4. Considérons la fonction $f(z) = \Im(z)$ à intégrer entre $z = 0$ et $z = 1 + i$, selon deux chemins différents : $C_1 = \{[0 i] \cup [i 1 + i]\}$ et $C_2 = \{[0 1] \cup [1 1 + i]\}$. On peut montrer que pour $f(z) = \Im(z)$ l'intégrale dépend du chemin d'intégration, en effet on trouve : $\int_{C_1} \Im(z)dz = 1 + i/2$ et $\int_{C_2} \Im(z)dz = i/2$.

Exemple 2.5. Considérons la fonction $f(z) = z^2$, à intégrer entre $z = 0$ et $z = a + ib$, sur différents chemins S_3 et $\{S_1 \cup S_2\}$, représentés à la figure 2.3.

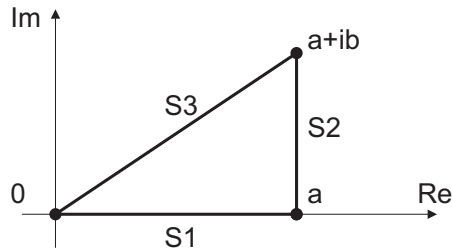


FIGURE 2.3 – Exemple de chemins d'intégration de la fonction $f(z) = z^2$, entre 0 et $a + ib$.

On peut montrer que pour ces deux chemins, l'intégrale vaut : $\int_0^{a+ib} z^2 dz = \frac{(a+ib)^3}{3}$.

On pourrait aussi vérifier que l'intégrale a la même valeur si on la calcule sur les segments $[0 ib]$ et $[ib a + ib]$.

On constate sur ces deux exemples que l'intégrale peut dépendre du chemin suivi. Par la suite, on caractérise plus rigoureusement les fonctions telles que l'intégrale est indépendante du chemin suivi.

On considère l'intégrale de la fonction f sur une chemin C d'extrémités z_1 et z_2 . En séparant parties réelles et imaginaires de $f(z)$ et de dz , l'intégrale peut s'écrire :

$$\int_C f(z)dz = \left(\int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy \right) + i \left(\int_C u(x, y)dy + v(x, y)dx \right) \quad (2.28)$$

Pour que l'intégrale soit indépendante du chemin suivi, il faut qu'il existe une fonction $F(z)$ telle que

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} dF(z) = F(z_1) - F(z_2)$$

En séparant partie réelle et imaginaire de F , on peut écrire $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ et l'intégrale devient

$$\int_C f(z)dz = \int_C dU(x, y) + idV(x, y) = \left(\int_C \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) + i \left(\int_C \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right)$$

Par identification avec (2.28), on a établi le résultat suivant.

Théorème 2.1. *La valeur de $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ est indépendante du chemin suivi s'il existe deux fonctions $U(x, y)$ et $V(x, y)$ vérifiant les relations :*

$$\boxed{u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}} \quad (2.29)$$

Dans ce cas, la valeur de l'intégrale est donnée par

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = (U(z_2) + iV(z_2)) - (U(z_1) + iV(z_1)) \quad (2.30)$$

D'après le théorème de Schwarz, si les dérivées partielles d'ordre 2 de $U(x, y)$ et $V(x, y)$ existent et sont continues, l'ordre de dérivation n'influe pas sur le résultat. Les conditions (2.29) donnent donc

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.31)$$

On retrouve donc les conditions de Cauchy-Riemann portant sur la fonction $f(z)$. Autrement dit, on peut énoncer le résultat précédent sous une forme plus simple (mais ne permettant pas de trouver la primitive de $f(z)$).

Théorème 2.2. *Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} , alors l'intégrale $\int_C f(z)dz$ prend la même valeur sur tous les chemins C de \mathcal{D} ayant les mêmes extrémités.*

Illustrons ces résultats avec la poursuite de l'exemple précédent.

Exemple 2.6. Montrer que l'intégrale de $f(z) = z^2$ est indépendante du chemin suivi (constatée sur deux chemins, mais non justifiée de manière générale) et montrer que $F(z) = 2z$.

On trouve les fonctions vérifiant les relations (2.29) : $U(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$ et $V(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$ et on en déduit $F(z) = \frac{z^3}{3}$.

Exemple 2.7. Montrer que l'intégrale de $f(z) = 1/z$ sur un chemin C , allant de z_1 à z_2 , et ne passant pas par l'origine est indépendante du chemin choisi et est donnée par

$$\int_C \frac{dz}{z} = \ln(z_2) - \ln(z_1) \quad (2.32)$$

On peut vérifier que les fonctions $U(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(|z|)$ et $V(x, y) = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arg}(z)$ vérifient les conditions d'indépendance du chemin. On déduit alors la primitive $F(z) = \ln(z)$.

2.4 Intégrales de Cauchy

Dans cette partie, sont exposés différents résultats permettant de calculer l'intégrale d'une fonction sur un circuit fermé. Différents cas seront étudiés selon le nombre et la nature des singularités de la fonction, comprises dans le circuit d'intégration. Pour cela il est d'abord nécessaire de définir ce qu'est une singularité.

Définition 2.1 (Singularité). *La fonction $f(z)$ admet une singularité d'ordre n en z_0 si $f(z)$ n'est pas définie en z_0 , mais peut s'écrire sous la forme*

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - z_0)^n}$$

où $f_h(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 .

2.4.1 Intégrale de fonctions sans singularité

Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine \mathcal{D} simplement connexe. On a vu dans la section précédente que l'intégrale de cette fonction entre deux points ne dépend pas du chemin suivi. Considérons deux arcs d'un circuit C , notés C_1 et C_2 , ayant les mêmes extrémités, comme le montre la figure 2.4.

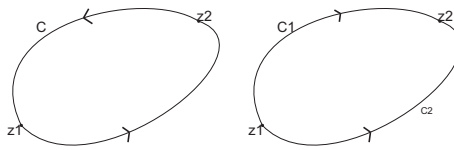


FIGURE 2.4 – Un circuit C (à gauche), décomposé en deux circuits C_1 et C_2 de mêmes extrémités (à droite).

D'après le résultat précédent, on a :

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \tag{2.33}$$

De plus on a $C = -C_1 \cup C_2$, donc il vient :

$$\int_C f(z)dz = - \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0 \tag{2.34}$$

On a donc démontré le résultat suivant :

Théorème 2.3 (théorème de Cauchy). *Si une fonction $f(z)$ est holomorphe sur un domaine \mathcal{D} simplement connexe, son intégrale sur tout circuit C de \mathcal{D} est nulle :*

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0} \tag{2.35}$$

Le domaine \mathcal{D} est simplement connexe si tous les circuits fermés contenus dans \mathcal{D} sont homotopes à zéros (peuvent se réduire à zéro par une déformation continue, sans sortir de \mathcal{D}).

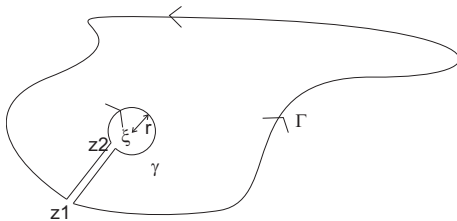
À titre d'exercice, on peut montrer que l'intégrale suivante ne dépend pas de la constante réelle a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx \tag{2.36}$$

Pour cela, on peut considérer le contour homotope à zéro, constitué par le rectangle de sommets : $-R$, R , $R + ia$ et $-R + ia$, parcouru dans le sens positif¹.

1. le sens positif correspond au sens anti-horaire. On peut aussi dire qu'un circuit est parcouru dans le sens positif si un bonhomme le parcourant dans ce sens garde l'intérieur du domaine à sa gauche

2.4.2 Intégrale de fonctions ayant des singularités


 FIGURE 2.5 – Un circuit Γ décomposé autour d'un point ξ .

Considérons à présent une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine \mathcal{D} simplement connexe excepté en la singularité ξ . Soit Γ un circuit de \mathcal{D} entourant ξ . L'objectif est de calculer $\int_{\Gamma} f(z)dz$. Il est possible de définir un circuit $\bar{\Gamma}$ inclus dans un domaine $\bar{\mathcal{D}}$ simplement connexe où la fonction $f(z)$ est holomorphe. Il suffit pour cela que $\bar{\Gamma}$ n'entoure pas le point ξ . Soit γ le cercle de centre ξ et de rayon r , soit z_1 un point de Γ et z_2 un point de γ . Le circuit $\bar{\Gamma}$, représenté par la figure 2.5 et défini par :

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup [z_1 z_2] \cup -\gamma \cup [z_2 z_1]$$

est homotope à zéro dans \mathcal{D} . On notera que si le contour Γ est parcouru dans le sens positif, alors le contour γ l'est dans le sens négatif. Par ailleurs, $\bar{\Gamma}$ est inclus dans un domaine simplement connexe de frontière $\bar{\Gamma}$, où $f(z)$ est holomorphe. On a donc :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{z_2}^{z_1} f(z)dz = 0 \quad (2.37)$$

Le segment $[z_1 z_2]$ étant parcouru dans les deux sens, il vient :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz \quad (2.38)$$

Le résultat se généralise très simplement au cas où $f(z)$ est holomorphe sauf en un nombre fini de points ξ_i . En effet, comme l'illustre la figure 2.6, on peut définir le contour $\underline{\Gamma}$, simplement connexe, par :

$$\underline{\Gamma} = \Gamma \cup [z_1 z'_1] \cup -\gamma_1 \cup [z'_1 z_1] \cup [z_2 z'_2] \cup -\gamma_2 \cup [z'_2 z_2] \cup [z_3 z'_3] \cup -\gamma_3 \cup [z'_3 z_3] \cup \dots \quad (2.39)$$

Dans ce cas, le théorème de Cauchy donne :

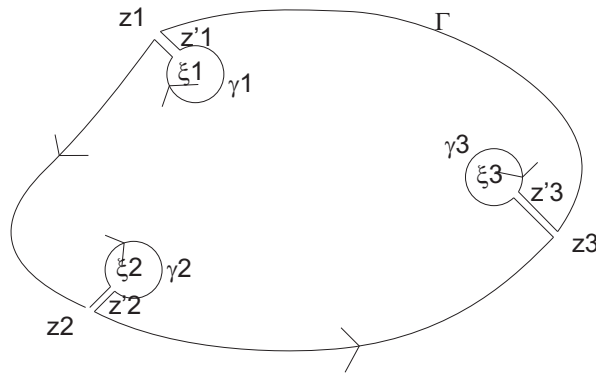
$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{z_1}^{z'_1} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{z'_1}^{z_1} f(z)dz + \int_{z_2}^{z'_2} f(z)dz \\ & - \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{z'_2}^{z_2} f(z)dz + \int_{z_3}^{z'_3} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{z'_3}^{z_3} f(z)dz = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Autrement dit on a démontré le résultat suivant :

Lemme 2.1. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur \mathcal{D} sauf en certains points ξ_i , $i = 1, \dots, N$. L'intégrale de $f(z)$ sur un circuit C de \mathcal{D} entourant les points ξ_i est donnée par :*

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} f(z)dz} \quad (2.41)$$

où les contours γ_i entourent respectivement les points ξ_i .


 FIGURE 2.6 – Un circuit Γ décomposé autour de trois points ξ_i .

Reste alors à calculer les intégrales de $f(z)$ autour de chacune des singularités.

2.4.2.1 Intégrale d'une fonction autour d'une singularité simple

Une fonction $f(z)$ ayant une singularité simple en ξ sur \mathcal{D} peut s'écrire sous la forme :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{z - \xi} \quad (2.42)$$

où la fonction $f_h(z)$ est holomorphe sur \mathcal{D} . Pour calculer l'intégrale $\int_C f(z) dz$ où C entoure la singularité ξ on définit la fonction $g(z)$ par :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f_h(z) - f_h(\xi)}{z - \xi} & \text{si } z \neq \xi \\ f'_h(\xi) & \text{si } z = \xi \end{cases} \quad (2.43)$$

La fonction $g(z)$ ainsi définie est holomorphe sur \mathcal{D} car f_h est holomorphe donc dérivable. D'après (2.38), on a :

$$\int_C g(z) dz = 0 \quad (2.44)$$

Il vient donc :

$$\int_C \frac{f_h(z)}{z - \xi} dz = \int_C \frac{f_h(\xi)}{z - \xi} dz = \int_\gamma \frac{f_h(\xi)}{z - \xi} dz \quad (2.45)$$

où γ est le cercle de centre ξ et de rayon r (se souvenir de la figure 2.5). On peut donc poser le changement de variable : $z = \xi + re^{i\theta}$, il vient $dz = rie^{i\theta} d\theta$, donc :

$$\int_C \frac{f_h(z)}{z - \xi} dz = f_h(\xi) \int_\gamma \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = 2i\pi f_h(\xi) \quad (2.46)$$

On a donc démontré le résultat, connu sous le nom de formule de Cauchy.

Théorème 2.4 (formule de Cauchy). *Soit f_h une fonction holomorphe dans un domaine \mathcal{D} simplement connexe, alors pour tout $\xi \in \mathcal{D}$, et pour tout contour γ entourant ξ , on a*

$$\boxed{\int_\gamma \frac{f_h(z)}{z - \xi} dz = 2i\pi f_h(\xi)} \quad (2.47)$$

Une forme particulière de ce résultat est connu sous le nom de la *formule de moyenne*.

Théorème 2.5 (formule de la moyenne). Soit f_h une fonction holomorphe dans \mathcal{D} , et ξ un point de \mathcal{D} . On a, pour $r > 0$:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f_h(\xi + re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f_h(\xi)} \quad (2.48)$$

Démonstration. Pour obtenir ce résultat, il suffit d'utiliser la formule de Cauchy sur $\gamma = C(\xi, r)$. \square

2.4.2.2 Intégrale d'une fonction autour d'une singularité multiple

Une fonction $f(z)$ ayant une singularité d'ordre $n + 1$ en ξ sur \mathcal{D} peut s'écrire sous la forme :

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z - \xi)^{n+1}} \quad (2.49)$$

où la fonction $f_h(z)$ est holomorphe sur \mathcal{D} . Pour calculer l'intégrale $\int_C f(z) dz$ où C entoure la singularité ξ on est amené à généraliser le résultat précédent.

Théorème 2.6 (formule de Cauchy à l'ordre n). Soit f_h une fonction holomorphe dans un domaine \mathcal{D} simplement connexe, alors pour tout $\xi \in \mathcal{D}$ et tout circuit γ de \mathcal{D} entourant ξ , on a

$$\boxed{\int_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f_h^{(n)}(\xi)} \quad (2.50)$$

Démonstration. Pour $n = 0$ on retrouve le résultat précédent. Ensuite la preuve est faite par récurrence en admettant le résultat pour $n - 1$ et en montrant que cela l'implique pour n . Pour cela, écrivons la définition de la dérivée de $f_h(z)$ à l'ordre n :

$$f_h^{(n)}(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_h^{(n-1)}(\xi + h) - f_h^{(n-1)}(\xi)}{h} \quad (2.51)$$

En supposant vrai le résultat à l'ordre $n - 1$, et en l'appliquant aux termes de droite, il vient :

$$f_h^{(n)}(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2i\pi h} \left[\int_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - \xi - h)^n} dz - \int_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - \xi)^n} dz \right] \quad (2.52)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2i\pi h} \int_{\gamma} \frac{f_h(z) [(z - \xi)^n - (z - \xi - h)^n]}{(z - \xi - h)^n (z - \xi)^n} dz \quad (2.53)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2i\pi h} \int_{\gamma} \frac{f_h(z) [(z - \xi)^n - (z - \xi)^n + nh(z - \xi)^{n-1} - h^2 \dots]}{(z - \xi - h)^n (z - \xi)^n} dz \quad (2.54)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2i\pi h} \int_{\gamma} \frac{f_h(z) [nh(z - \xi)^{n-1} - h^2 \dots]}{(z - \xi - h)^n (z - \xi)^n} dz \quad (2.55)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, la quantité $1/(z - \xi - h)^n (z - \xi)^n$ converge uniformément vers $(z - \xi)^{2n}$, on a donc :

$$f_h^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz \quad (2.56)$$

On a donc établi la propriété (2.50) à l'ordre n , en supposant qu'elle est vérifiée à l'ordre $n - 1$. À l'ordre $n = 0$ on obtient la formule de Cauchy qui a déjà été prouvée. Il apparaît donc, par récurrence, que la propriété est prouvée pour tout ordre n . \square

2.5 Quelques exemples d'application

Exemple 2.8. On considère l'intégrale :

$$\int_C \frac{\cos(z\pi)}{z(z-1)} dz \quad (2.57)$$

où le circuit C peut prendre trois formes (voir figure 2.7) :

1. C est le cercle de centre -1 , de rayon R_1 , avec $R_1 < 1$
2. C est le cercle de centre -1 , de rayon R_2 , avec $1 < R_2 < 2$
3. C est le cercle de centre -1 , de rayon R_3 , avec $2 < R_3$

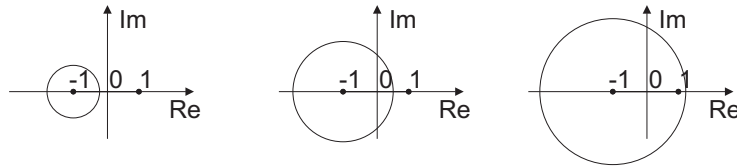


FIGURE 2.7 – Circuit C défini par le cercle de centre -1 , de rayon R avec (à gauche) $R_1 < 1$; (au milieu) $1 < R_2 < 2$; (à droite) $R_3 > 2$.

La fonction $f(z) = \cos(z\pi)/(z(z-1))$ est holomorphe sur \mathbb{C} sauf en 0 et en 1.

Dans le premier cas, aucune singularité n'est dans C , on a donc :

$$\int_{C(-1,R_1)} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 0 \quad (2.58)$$

Dans le second cas, seule la singularité en $z = 0$ est intérieure au cercle $C(-1, R_2)$, on a alors :

$$\int_{C(-1,R_2)} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 2i\pi \frac{\cos(0)}{-1} = -2i\pi \quad (2.59)$$

Dans le troisième cas, les singularités en $z = 0$ et $z = 1$ sont intérieures au cercle $C(-1, R_3)$, on a alors :

$$\int_{C(-1,R_3)} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 2i\pi \left(\frac{\cos(0)}{-1} + \frac{\cos(\pi)}{1} \right) = -4i\pi \quad (2.60)$$

Exemple 2.9. Montrer que :

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz = 2i\pi \quad (2.61)$$

Chapitre 3

Séries entières et résidus

Dans les deux premières parties de ce chapitre nous étudierons deux méthodes pour représenter une fonction par des séries entières, c'est à dire une somme de polynômes ou de fractions rationnelles de la variable complexe : le développement en série de Taylor, et le développement en série de Laurent. Ensuite, on détaillera le résultat principal de ce chapitre, à savoir : le théorème des résidus, avant de donner quelques applications de ce résultat.

3.1 Séries de Taylor

L'intérêt des séries de Taylor est de pouvoir exprimer la valeur d'une fonction en un point, comme une somme de polynômes en z . Ce développement est valide dans un domaine simplement connexe où la fonction f est holomorphe. On s'appuie sur les égalités suivantes (pour $x \neq 1$) :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \frac{1}{1-x}x^{n+1} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \left(\frac{1}{\xi - a} \right) \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)} \right) \quad (3.2)$$

En utilisant (3.1), (3.2) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - a} \left(1 + \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right) + \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)^n + \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)} \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\xi - a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} + \frac{(z-a)^{n+1}}{(\xi-z)(\xi-a)^{n+1}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine D contenant z et a , et soit C un contour inclus dans ce domaine. D'après la formule de Cauchy on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.4)$$

En multipliant (3.3) par $f(\xi)/(2i\pi)$, et en intégrant par rapport à ξ , sur C on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a} \left(1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n} + \frac{(z-a)^{n+1}}{(\xi-z)(\xi-a)^n} \right) d\xi \quad (3.5)$$

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^N \left[(z-a)^n \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \right] + \frac{(z-a)^{N+1}}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-a)^{N+1}} d\xi \quad (3.6)$$

En se souvenant de la formule de Cauchy au rang n :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad (3.7)$$

l'équation (3.6) devient :

$$f(z) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (z-a)^n f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(z-a)^{N+1}}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-a)^{N+1}} d\xi}_{R_N} \quad (3.8)$$

Montrons à présent que le terme R_N s'annule quand $N \rightarrow \infty$. La variable ξ décrit le contour $C = C(a, R)$ le cercle de centre a et de rayon R , et la variable z est intérieure à C . Autrement dit, on a : $|z-a| < R$, et il existe un réel $0 < k < 1$ tel que $|z-a| = kR$. De plus on a $|\xi-z| \geq (1-k)R$, comme on peut le constater sur la figure 3.1.

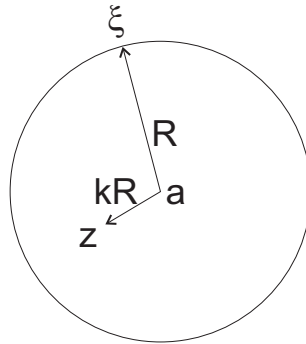


FIGURE 3.1 – Positions de z , a , et ξ

La fonction $f(z)$ est holomorphe dans C qui est un compact, donc il existe un majorant M tel que, pour tout z de C , on a $|f(z)| \leq M$. En utilisant l'inégalité fondamentale, il vient :

$$|R_N| = \left| \frac{(z-a)^{N+1}}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-a)^{N+1}} d\xi \right| \quad (3.9)$$

$$\leq \frac{(kR)^{N+1}}{2\pi} 2\pi R \frac{\sup_{z \in C} |f(z)|}{\inf_{z \in C} |\xi-z| |\xi-a|^{N+1}} \quad (3.10)$$

$$\leq \frac{(kR)^{N+1}}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{(1-k)R R^{N+1}} \quad (3.11)$$

$$\leq \frac{k^{N+1}M}{1-k} \rightarrow 0 \quad \text{pour } N \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

Autrement dit, on a établi que $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$, ce qui nous permet de conclure par le résultat suivant.

Théorème 3.1 (développement en série de Taylor). *La fonction $f(z)$ peut être représentée par sa série de Taylor (3.13) dans tout disque ouvert de centre a dans lequel elle est holomorphe. Dans tout domaine fermé inclus dans ce disque, la série (3.13) converge uniformément vers $f(z)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - a)^n f^{(n)}(a) \tag{3.13}$$

Exemple 3.1. À titre d'exemple, on peut retrouver le développement en série entière de la fonction exponentielle à partir de sa série de Taylor. Le développement de Taylor centré en $a = 0$ donne :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.14}$$

La fonction exponentielle étant holomorphe pour tout $z \in \mathbb{C}$, le rayon de convergence du développement est infini et le développement est valable pour tout complexe. Le développement de la fonction exponentielle permet de retrouver les développements des fonctions sinus et cosinus complexes

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.15}$$

3.2 Séries de Laurent

Le développement de Taylor d'une fonction permet d'exprimer la valeur de la fonction sur un domaine simplement connexe (un disque) où la fonction est holomorphe. Néanmoins il serait intéressant d'obtenir un résultat analogue lorsque le domaine n'est pas simplement connexe. Dans ce cas il deviendrait possible de représenter une fonction même au voisinage d'un domaine (ou d'un point) où elle n'est pas holomorphe. On va montrer que les séries de Laurent permettent cela.

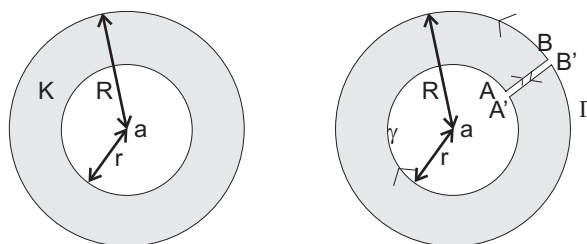


FIGURE 3.2 – Positions de z , a , et ξ

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans D sauf au voisinage d'une singularité a . Définissons une couronne comprise entre les cercles intérieur $\gamma = C(a, r)$ et extérieur $\Gamma = C(a, R)$. Soit A et A' deux points de γ , et B et B' deux points de Γ . On peut alors définir un domaine simplement connexe intérieur au circuit défini par :

$$\underline{\Gamma} = \Gamma \cup [A B] \cup -\gamma \cup [B' A'] \tag{3.16}$$

La fonction $f(z)$ est donc holomorphe sur la surface intérieure au contour $\underline{\Gamma}$. Les deux segments $[A B]$ et $[A' B']$ sont infiniment proches, de ce fait le domaine coïncide avec la

couronne. La formule de Cauchy nous permet d'écrire :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_A^B \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{A'}^{B'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right) \quad (3.17)$$

Les deux segments étant confondus la fonction prend les mêmes valeurs, comme ils sont parcourus en sens contraires l'un de l'autre, les deux intégrales s'annulent, il vient alors :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \left(\underbrace{\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{f_1(z)} + \underbrace{- \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{f_2(z)} \right) \quad (3.18)$$

Explicitons maintenant chaque terme de l'intégrale.

Le premier terme, noté $f_1(z)$, peut se développer en suivant le même raisonnement que pour la série de Taylor, grâce à l'égalité :

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a} + \frac{z - a}{(\xi - a)^2} + \frac{(z - a)^2}{(\xi - a)^3} + \cdots + \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} + \frac{(z - a)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - a)^{n+1}} \quad (3.19)$$

En multipliant par $f(\xi)/(2i\pi)$ et en intégrant sur Γ , on obtient la somme infinie suivante (la convergence vers 0 du reste est prouvée de manière identique au paragraphe précédent) :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z - a)^n, \quad \text{où } c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad (3.20)$$

Attention : cette somme ne fait pas apparaître de dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(z)$ car f est holomorphe dans la couronne, mais pas nécessairement en a , il se peut donc que les dérivées n'existent pas.

Un raisonnement analogue permet de calculer le second terme $f_2(z)$. Pour cela, il suffit de remarquer que $|z - a| > |\xi - a|$, autrement dit on peut développer $1/(\xi - z)$ par :

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z - a} \left(\frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} \right) \quad (3.21)$$

$$= -\frac{1}{z - a} \left(1 + \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right) + \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^n + \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^{n+1} \right) \quad (3.22)$$

$$= - \left(\frac{1}{z - a} + \frac{\xi - a}{(z - a)^2} + \frac{(\xi - a)^2}{(z - a)^3} + \cdots + \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}} + \frac{(\xi - a)^{n+1}}{(z - \xi)(z - a)^n} \right) \quad (3.23)$$

Il vient donc :

$$f_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{f(\xi)}{z - a} + \frac{f(\xi)(\xi - a)}{(z - a)^2} + \frac{f(\xi)(\xi - a)^2}{(z - a)^3} + \cdots + \frac{f(\xi)(\xi - a)^N}{(z - a)^{N+1}} \right] d\xi + R_N \quad (3.24)$$

où R_N est défini par :

$$R_N = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)(\xi - a)^{N+1}}{(z - \xi)(z - a)^N} d\xi \quad (3.25)$$

La variable ξ décrit le cercle $\gamma = C(a, r)$, donc on a : $|\xi - a| = r$, $|z - a| = Kr$, avec $K > 1$, et $|z - \xi| \geq (K - 1)r$. De plus f est borné dans la couronne, donc il existe un M , tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout z de la couronne. L'inégalité fondamentale permet alors d'effectuer la majoration suivante :

$$|R_N| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{Mr^{N+1}}{K^N r^N (K-1)r} = \frac{Mr}{K^N (K-1)} \quad (3.26)$$

Autrement dit $R_N \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$. On peut donc écrire :

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z-a)^{-n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}} d\xi \quad (3.27)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad (3.28)$$

On peut alors regrouper les termes $f_1(z)$ et $f_2(z)$ pour finalement obtenir le résultat suivant, connu sous le nom de série de Laurent.

Théorème 3.2 (développement en série de Laurent). *Dans toute couronne D centrée en a , définie par $r < |z - a| < R$, une fonction holomorphe en D peut être représentée par sa série de Laurent (3.29), uniformément convergente sur tout domaine fermé de D .*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-a)^n c_n, \quad \text{où } c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad (3.29)$$

Dans le cas, où la couronne est centrée en l'origine, la série de Laurent s'exprime plus simplement par

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n c_n, \quad \text{où } c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \quad (3.30)$$

où Γ est un cercle de rayon compris entre r et R , ou plus généralement n'importe quel cycle homotope à Γ dans D .

On peut noter que si $f(z)$ est holomorphe dans tout l'espace délimité par le cercle intérieur γ , alors la fonction $f(z)(z-a)^n$ est holomorphe. De ce fait l'intégrale de $f(z)(z-a)^n$ sur γ , soit $f_2(z)$, est nulle. Dans ce cas, tous les termes c_n avec $n < 0$ sont nuls et la série de Laurent se réduit à la série de Taylor.

La présence de p termes en puissance négative de $(z-a)$ indique que la fonction n'est pas bornée pour $z = a$, autrement dit indique la présence d'une singularité en a . Le nombre de termes en puissance négative permet de donner l'ordre de la singularité. On dit ainsi que le pôle (ou la singularité) en a est d'ordre p .

Dans le cas d'une somme infinie de termes en puissance négative de $(z-a)$, on parle de singularité essentielle.

On peut remarquer que pour $n = -1$, le coefficient de la série de Laurent donne l'intégrale de la fonction, ainsi pour un circuit C entourant l'origine on a :

$$\int_C f(z) dz = 2i\pi c_{-1} \quad (3.31)$$

Exemple 3.2. Développons en série de Laurent la fonction $f(z)$ ci-dessous, dans la couronne centrée en l'origine définie par $a < |z| < b$.

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (3.32)$$

où a et b sont des réels, tels que $a < b$.

On peut¹ écrire $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} + \frac{1}{b} \frac{1}{1-\frac{z}{b}} \right) \quad (3.33)$$

Comme $|z/b| < 1$ et $|a/z| < 1$, il vient :

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a^{-n-1}}{(a-b)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n-1}}{(a-b)} z^n \quad (3.34)$$

on a donc obtenu la série de Laurent avec les coefficients c_n :

$$c_n = \begin{cases} \frac{a^{-n-1}}{(a-b)} & n < 0 \\ \frac{b^{-n-1}}{(a-b)} & n \geq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

3.3 Théorème des résidus

Les résidus d'une fonction en un point permettent grâce au théorème du même nom de calculer simplement des intégrales sur un contour, en ne considérant que les singularités contenues dans ce contour.

Définition 3.1 (résidu). *Soit une fonction $f(z)$ holomorphe, ayant un point singulier isolé z_0 . Le résidu de f en z_0 , noté $Res(f, z_0)$ est défini par :*

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (3.36)$$

où γ est un circuit entourant z_0 , et n'entourant pas d'autres singularités éventuelles de $f(z)$

D'après le théorème de Cauchy, la taille et la forme du contour n'importent pas tant que la seule singularité présente dans γ soit z_0 . De plus, on reconnaît immédiatement le coefficient c_{-1} du développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ au voisinage de z_0 . On a donc :

$$Res(f, z_0) = c_{-1} \quad (3.37)$$

Toujours d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale d'une fonction $f(z)$ sur un circuit C entourant les singularités z_1, \dots, z_N est donnée par

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

où γ_k est un circuit entourant la singularité z_k . Chacune de ces intégrales peut être définie à partir du résidu de $f(z)$ en la singularité z_k . On trouve alors le résultat suivant.

1. par décomposition en éléments simples (voir annexe)

Théorème 3.3 (théorème des résidus). *Soit $f(z)$ une fonction continue sur la frontière C d'un domaine D et holomorphe dans le domaine D sauf en un nombre fini de points z_1, z_2, \dots, z_N . Alors :*

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 2i\pi \sum_{n=1}^N Res(f, z_n)} \quad (3.38)$$

où la frontière C est parcourue dans le sens positif².

Ce résultat est vrai quelle que soit la nature des singularités intérieures au contour, seule change la manière de calculer chaque résidu suivant le type de singularité. Il existe plusieurs *recettes* pour calculer le résidu d'une fonction en un point singulier. On peut en particulier donner des méthodes de calcul pour les trois cas suivants.

• **Cas d'un pôle simple.**

Si z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z)$, alors son développement en série de Laurent est de la forme :

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + (z - z_0)c_1 + (z - z_0)^2c_2 + \dots \quad (3.39)$$

Dans ce cas, il est facile d'obtenir c_{-1} , il suffit de multiplier par $(z - z_0)$ et de prendre la valeur en z_0 . Autrement dit, il vient :

$$\boxed{Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)} \quad (3.40)$$

• **Cas d'un pôle d'ordre n .**

Si z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z)$, alors son développement en série de Laurent est de la forme :

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + (z - z_0)c_1 + \dots \quad (3.41)$$

Dans ce cas, on peut multiplier cette égalité par $(z - z_0)^n$, pour obtenir :

$$(z - z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \dots \quad (3.42)$$

En dérivant $(n - 1)$ fois on a :

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z - z_0)^n f(z) = (n - 1)!c_{-1} + \frac{n!}{1!}c_0(z - z_0) + \frac{(n + 1)!}{2!}c_1(z - z_0)^2 + \dots \quad (3.43)$$

En faisant tendre z vers z_0 , on obtient c_{-1} . Autrement dit, on obtient le résidu par :

$$\boxed{Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n - 1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]} \quad (3.44)$$

• **Cas d'une fonction de la forme $f(z) = \Phi(z)/\Psi(z)$ où $\Psi(z)$ a un zéro simple en z_0 , et où $\Phi(z)$ est holomorphe en z_0 .**

On a alors :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) \frac{\Phi(z)}{\Psi(z) - \Psi(z_0)} \right) \quad (3.45)$$

On voit apparaître au dénominateur la dérivée de Ψ en z_0 , il vient donc :

$$\boxed{Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi(z)}{\Psi'(z)}} \quad (3.46)$$

2. de sorte que le domaine soit à gauche de la frontière

Exemple 3.3. Calculer les résidus de $f(z) = \frac{e^z}{z(z-a)^3}$, en $z = 0$ et en $z = a$.

Le calcul du résidu en $z = 0$ est immédiat avec (3.40) :

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z}{z(z-a)^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-a)^3} = \frac{-1}{a^3} \quad (3.47)$$

Le pôle en $z = a$ est un pôle triple, donc le calcul du résidu en $z = a$ se fait en appliquant (3.44) :

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow a} \left[\left((z-a)^3 \frac{e^z}{z(z-a)^3} \right)^{(2)} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow a} \left[\left(\frac{e^z}{z} \right)^{(2)} \right] \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow a} \frac{e^z(z^2 - 2z + 2)}{z^3} = \frac{e^a(a^2 - 2a + 2)}{2a^3} \quad (3.49)$$

Exemple 3.4. Calculer les résidus de $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ en ses singularités : $z = ia$ et $z = -ia$.

En posant $\Phi(z) = 1$, et $\Psi(z) = z^2 + a^2$, on vérifie être dans le cadre du troisième cas, avec $\Psi'(z) = 2z$, il vient alors :

$$\text{Res}(f, ia) = \frac{1}{2ia} \quad \text{et} \quad \text{Res}(f, -ia) = -\frac{1}{2ia} \quad (3.50)$$

Exemple 3.5. Montrer que :

$$\int_{C(0,2a)} \frac{e^z}{z(z-a)^3} dz = 2i\pi \frac{2 + e^a(a^2 - 2a + 2)}{2a^3} \quad (3.51)$$

3.4 Quelques applications du calcul de résidus

Dans cette section on détaille quelques exemples de calculs d'intégrales effectués en utilisant le théorème des résidus. On se bornera à des exemples, l'important étant de voir les différentes techniques (voire recettes) mises en œuvre.

3.4.1 Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

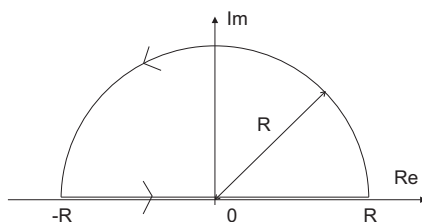


FIGURE 3.3 – Contour d'intégration

Le but est de calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (3.52)$$

Pour pouvoir appliquer les théorèmes de Cauchy et des résidus, il faut fermer le contour d'intégration. On peut, par exemple, choisir le demi-cercle supérieur centré en 0 et de

rayon R (voir figure 3.4.1). L'intégration sur le diamètre du cercle donnera le résultat cherché.

Les pôles de la fonction $(z^4 + 1)^{-1}$ sont les racines quatrièmes de -1 , autrement dit les complexes $z_k = e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$, avec $k = 0, 1, 2, 3$. Seules les racines $z_0 = (1 + i)/\sqrt{2}$ et $z_1 = (-1 + i)/\sqrt{2}$ sont dans le contour d'intégration. Le théorème des résidus donne :

$$\int_C \frac{1}{1+x^4} dx = 2i\pi ((Res(f, z_0) + Res(f, z_1))) \quad (3.53)$$

La règle de calcul des résidus (3.46) donne : $Res(f, z) = 1/(4z^3)$, donc :

$$\int_C \frac{1}{1+x^4} dx = 2i\pi \left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (3.54)$$

Reste maintenant à déterminer la contribution du demi cercle ouvert dans l'intégrale. On peut se douter qu'en faisant tendre le rayon vers l'infini, la fonction se comporte en $\sim 1/x^4$ sur un contour de longueur πR , ce qui devrait se traduire par une contribution nulle. Établissons-le plus rigoureusement en utilisant l'inégalité fondamentale. Pour cela trouvons un majorant de $f(z)$ sur le demi cercle ouvert C' . Sur le demi cercle, z est défini par $z = Re^{i\theta}$, on a donc :

$$\inf_{z \in C'} |R^4 e^{i4\theta} + 1| = \inf_{z \in C'} |R^4 \cos(4\theta) + iR^4 \sin(4\theta) + 1| \quad (3.55)$$

$$= \inf_{z \in C'} ((R^4 \cos(4\theta) + 1)^2 + R^8 \sin^2(4\theta))^{1/2} \quad (3.56)$$

$$= \inf_{z \in C'} (R^8 + 2R^4 \cos(4\theta) + 1)^{1/2} \quad (3.57)$$

$$= |R^4 - 1| = R^4 - 1 \quad (3.58)$$

On a donc la majoration suivante

$$\left| \int_{C'} \frac{dz}{z^4 + 1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0, \quad \text{pour } R \rightarrow \infty \quad (3.59)$$

On avait établi précédemment :

$$\int_C \frac{dz}{z^4 + 1} = \int_{-R}^{+R} \frac{dz}{z^4 + 1} + \int_{C'} \frac{dz}{z^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (3.60)$$

En passant à la limite : $R \rightarrow \infty$, la contribution de la deuxième intégrale s'annule, et on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^4 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (3.61)$$

3.4.2 Calcul d'intégrales de fonctions trigonométriques

Il s'agit des intégrales du type :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (3.62)$$

où la fonction R est une fraction rationnelle. Dans ce cas, il est souvent judicieux de poser le changement de variable : $z = e^{i\theta}$ et $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, en effet les fonctions *cosinus* et *sinus* sont les parties réelle et imaginaire de z (avec $\bar{z} = z^{-1}$) et on a alors :

$$\int_{C(0,1)} R \left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i} \right) \frac{1}{iz} dz \quad (3.63)$$

il est alors possible de transformer l'expression en une fraction de polynômes en puissance positives de z et de se ramener au cas précédent. Seules les racines du dénominateur à l'intérieur du cercle unité sont à prendre en compte pour le calcul de résidu.

Exemple 3.6. Prouver l'égalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (3.64)$$

On opère le changement de variable $z = e^{i\theta}$ et $dz = izd\theta$, l'intégrale devient alors :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = \int_{C(0,R)} \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{C(0,R)} \frac{dz}{4z + z^2 + 1} \quad (3.65)$$

Les racines du polynôme du dénominateur sont $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $z_2 = -2 + \sqrt{3}$. Seule z_2 est dans $C(0, 1)$, donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + 2 \cos \theta} = \frac{2}{i} 2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{4z + z^2 + 1}, z_2 \right) = 4\pi \frac{1}{4 + 2z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (3.66)$$

3.4.3 Calcul de sommes de séries

Pour calculer la somme de la série u_n , on cherche à exprimer cette somme comme étant la somme des résidus d'une fonction en différents points. Pour chaque entier n , on cherchera à exprimer le terme u_n comme étant le résidu en $z = n$ d'une fonction liée à u_n . Pour cela on utilise la fonction $\pi \cotg(\pi z) f(z)$ où $f(z)$ est définie comme u_n en remplaçant la variable entière n par la variable complexe z ($f(n) = u_n$). Cette méthode peut paraître parachutée³ mais son intérêt repose sur le fait que les singularités de la fonction sont tous les entiers relatifs $n \in \mathbb{Z}$ (car $\sin(n\pi) = 0$), et sur la propriété suivante :

$$\operatorname{Res} (\pi \cotg(\pi z) f(z), n) = \operatorname{Res} \left(\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} f(z), n \right) = \frac{\pi \cos(\pi n) f(n)}{\pi \cos(\pi n)} = f(n) = u_n \quad (3.67)$$

De ce fait, la somme des résidus est égale à la somme de la série u_n . Reste alors à définir un contour englobant tous les points $z = n$, et à calculer la valeur de l'intégrale.

Exemple 3.7. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} \quad (3.68)$$

Pour calculer cette somme, on considère l'intégrale suivante :

$$\int_C \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1 + z^2)} dz \quad (3.69)$$

où le contour C est le carré de sommets $\pm(N + 1/2) \pm i(N + 1/2)$. Les pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1 + z^2)} \quad (3.70)$$

3. d'ailleurs elle l'est

sont tous les entiers n tels que $-N \leq n \leq N$, et les racines carrées de -1 , soit i et $-i$. Le théorème des résidus nous permet de calculer l'intégrale par :

$$\int_C \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1+z^2)} dz = 2i\pi \left(\sum_{n=-N}^N \text{Res}(f, n) + \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, i) \right) \quad (3.71)$$

Les différents résidus sont donnés par :

$$\text{Res}(f, n) = \frac{\pi \cos(n\pi)}{\pi \cos(n\pi)(1+n^2) + \sin(n\pi)2n} = \frac{1}{1+n^2} \quad (3.72)$$

$$\text{Res}(f, i) = \frac{\pi \cos(i\pi)}{2i \sin(i\pi)} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right) \quad (3.73)$$

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{\pi \cos(-i\pi)}{-2i \sin(-i\pi)} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right) \quad (3.74)$$

On a donc :

$$\int_C \frac{\pi \cos(z\pi)}{\sin(z\pi)(1+z^2)} dz = 2i\pi \left(2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+n^2} + 1 + \pi \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \right) \quad (3.75)$$

Reste à calculer l'intégrale, pour cela on tente d'utiliser l'inégalité fondamentale sur le carré C de sommets $\pm(N+1/2) \pm i(N+1/2)$, où N est un entier. Ce contour, parcouru dans le sens positif entoure les points $z = n$, pour $-N \leq n \leq N$. On admet l'égalité suivante :

$$\left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|^2 = \frac{\cosh(2\pi y) + \cos(2\pi x)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)} \quad (3.76)$$

Sur les cotés verticaux du carré, notés V_- et V_+ , on a $x = \pm(N+1/2)$, autrement dit il vient : $\cos(2\pi x) = -1$, et :

$$\left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|^2 = \frac{\cosh(2\pi y) - 1}{\cosh(2\pi y) + 1} < 1 \quad (3.77)$$

De plus on a la majoration suivante :

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| < \frac{1}{(N-1/2)^2} \quad (3.78)$$

En utilisant l'inégalité fondamentale, il vient :

$$\left| \int_{V_{\pm}} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)(1+z^2)} dz \right| \leq \frac{2N+1}{(N-1/2)^2} \rightarrow 0, \text{ pour } N \rightarrow \infty \quad (3.79)$$

Sur les cotés horizontaux du carré, notés H_+ et H_- , on a $y = \pm(N+1/2)$. On a donc :

$$\left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|^2 = \frac{\cosh(2\pi y) + \cos(2\pi x)}{\cosh(2\pi y) - \cos(2\pi x)} \leq \frac{\cosh(2N\pi + \pi) + 1}{\cosh(2N\pi + \pi) - 1} = K(N) \rightarrow 1, \text{ pour } N \rightarrow \infty \quad (3.80)$$

En utilisant l'inégalité fondamentale, on a :

$$\left| \int_{H_{\pm}} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)(1+z^2)} dz \right| \leq \frac{(2N+1)K(N)}{N^2} \rightarrow 0, \text{ pour } N \rightarrow \infty \quad (3.81)$$

On a donc établi que l'intégrale de $\int_C f(z)\pi \cotan(\pi z) dz \rightarrow 0$, lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui permet de conclure pour la somme recherchée par :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \right) - \frac{1}{2} \quad (3.82)$$

3.4.4 Calcul d'intégrales réelles sur un axe

On utilise les intégrale de fonctions complexes pour calculer certaines intégrales réelles, sur l'axe réel (ou un demi axe réel). Pour cela on définit un contour longeant l'axe réel, fermé par un contour, par exemple un demi cercle dont le rayon tend vers l'infini. Le théorème des résidus permet de calculer l'intégrale sur le contour fermé en étudiant les résidus correspondant aux pôles intérieurs au contour. Soit l'inégalité fondamentale permet de majorer la contribution de l'arc infini par un terme nul, soit ce terme peut se calculer explicitement (par un changement de variable par exemple). On peut alors conclure sur la valeur de l'intégrale sur l'axe réel.

Dans le cas du calcul sur le demi axe réel réel, deux cas de figure se présentent généralement. Si la fonction est paire, on est ramené au cas précédent car l'intégrale sur \mathbb{R} est égale à 2 fois l'intégrale sur \mathbb{R}^+ . Dans le cas d'une fonction impaire ou quelconque, il faudra choisir un autre contour, par exemple un quart de cercle dont le rayon tend vers l'infini, un carré, etc.

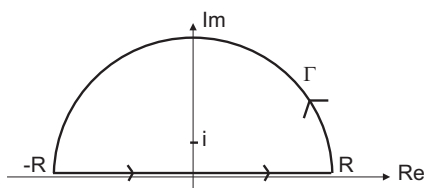


FIGURE 3.4 – Contour d'intégration C

Exemple 3.8. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e} \quad (3.83)$$

On considère un contour fermé $\bar{\Gamma}$ défini par le demi-cercle fermé supérieur centré en $z = 0$ et de rayon $R > 1$. La seule singularité présente dans le contour d'intégration est $z_1 = i$ et le théorème des résidus permet d'obtenir $\int_{\bar{\Gamma}} f(z) dz = \frac{\pi}{e}$. L'inégalité fondamentale permet de majorer le module de l'intégrale sur le demi cercle ouvert par $\frac{\pi R}{R^2-1}$. En faisant tendre R vers $+\infty$ on montre que l'intégrale sur le demi cercle ouvert s'annule et on obtient le résultat demandé.

3.4.5 Calcul d'intégrales de fonctions multivalentes

La difficulté dans le cas des fonctions multivalentes réside dans la possibilité qu'ont ces fonctions de *sauter* d'une branche à l'autre, suivant le parcours effectué. Par exemple si la variable z à décrit un cercle $C(0, R)$ dans le sens positif, son argument augmente de 2π et la fonction change de branche. De ce fait elle change de valeur et les deux intégrales le long de parcours infiniment proches ne se compenseront pas forcément, comme nous allons le constater dans l'exemple suivant.

Exemple 3.9. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x} dx \quad \text{pour} \quad -1 < \alpha < 0 \quad (3.84)$$

La fonction x^α est clairement multivalente car :

$$z = r e^{i(\theta+2k\pi)} \quad \Rightarrow \quad z^\alpha = r^\alpha e^{i(\theta\alpha+2k\pi\alpha)} \quad (3.85)$$

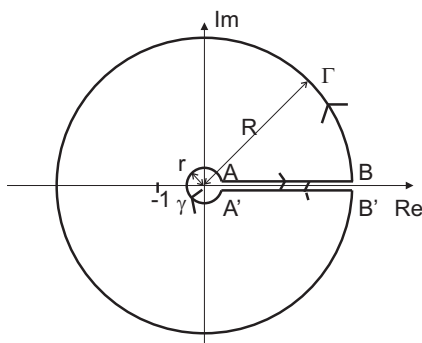


FIGURE 3.5 – Contour d'intégration

Donc z^α n'a pas la même valeur suivant la réalisation de z (c'est à dire suivant k). Pour rendre cette fonction univalente, on peut choisir la coupure de Riemann définie par le demi axe réel positif. Dans ce cas on choisit un contour d'intégration longeant le demi axe réel sur lequel on cherche à calculer l'intégrale. Pour fermer le contour on parcourt dans le sens horaire le cercle $\Gamma = C(0, R)$, avec $R > 1$, puis le demi axe réel positif parcouru dans le sens décroissant et, dans le sens anti-horaire le cercle $\gamma = C(0, r)$, avec $r < 1$. Ce contour est représenté par la figure 3.4.5. On note $C = [A B] \cup \Gamma \cup -[A' B'] \cup -\gamma$.

La fonction intégrée a deux pôles en $z = 0$ et en $z = -1$. Seul le pôle en $z = -1$ est dans le contour d'intégration. Le théorème des résidus donne donc :

$$\int_C \frac{z^\alpha}{1+z} dz = 2i\pi \text{Res}(f, -1) = 2i\pi e^{i\pi\alpha} \quad (3.86)$$

Sur le segment $[A B]$, on a $z = x$ et $dz = dx$. Sur le segment $[A' B']$, on a $z = x e^{i2\theta}$ et $dz = dx$. On a donc :

$$\int_C \frac{x^\alpha}{1+x} dx = \int_r^R \frac{x^\alpha}{1+x} dx + \int_\Gamma \frac{x^\alpha}{1+x} dx - \int_r^R \frac{x^\alpha e^{i2\pi\alpha}}{1+x} dx - \int_\gamma \frac{x^\alpha}{1+x} dx \quad (3.87)$$

$$= (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_r^R \frac{x^\alpha}{1+x} dx + \int_\Gamma \frac{x^\alpha}{1+x} dx - \int_\gamma \frac{x^\alpha}{1+x} dx \quad (3.88)$$

On cherche alors à évaluer la contribution des deux cercles, pour cela on utilise l'inégalité fondamentale pour majorer ces intégrales.

Sur le cercle $\gamma = C(0, r)$, on a :

$$\left| \frac{r^\alpha e^{i\theta\alpha}}{1 + r e^{i\theta}} \right| \leq \frac{r^\alpha}{1 - r} \quad (3.89)$$

L'inégalité fondamentale donne donc :

$$\left| \int_{C(0,r)} \frac{x^\alpha}{1+x} dx \right| \leq \frac{2\pi r^{\alpha+1}}{1-r} \rightarrow 0 \quad \text{pour } r \rightarrow 0 \quad (3.90)$$

Autrement dit, l'intégrale sur γ est nulle lorsque r tend vers 0.

Sur le cercle $\Gamma = C(0, R)$, on a :

$$\left| \frac{R^\alpha e^{i\theta\alpha}}{1 + R e^{i\theta}} \right| \leq \frac{R^\alpha}{R - 1} \quad (3.91)$$

L'inégalité fondamentale donne donc :

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{x^\alpha}{1+x} dx \right| \leq \frac{2\pi R^{\alpha+1}}{R-1} \rightarrow 0 \quad \text{pour } R \rightarrow \infty \quad (3.92)$$

Autrement dit, l'intégrale sur Γ est nulle lorsque R tend vers ∞ .

Finalement, en passant aux limites : $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, l'intégrale sur C devient :

$$\int_C \frac{x^\alpha}{1+x} dx = (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_r^R \frac{x^\alpha}{1+x} dx = 2i\pi e^{i\pi\alpha} \quad (3.93)$$

Ce qui donne le résultat final :

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x} dx = \frac{2i\pi e^{i\pi\alpha}}{1 - e^{2i\pi\alpha}} = \frac{2i\pi}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} = -\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (3.94)$$

Chapitre 4

Sujets de travaux dirigés

On trouvera dans ce chapitre les différents sujets des séances de TD. Les TD ont respectivement trait à :

- séance 1. Limite, Dérivation, Intégrales de Cauchy.
- séance 2. Intégrales de Cauchy (suite) et Résidus.
- séance 3. Résidus, Séries de Laurent et de Taylor.

Travaux dirigés de mathématiques

Séance 1

LIMITE, DÉRIVATION ET INTÉGRALES DE CAUCHY

1. Les fonctions suivantes ont-elles une limite lorsque $z \rightarrow 0$

(a) $f(z) = \frac{z^3}{x^2+y^4}$

(b) $f(z) = \frac{xy}{x+iy}$

2. Déterminer, et représenter dans le plan complexe les racines cubiques de $z = -1 + i$. En déduire le point de branchement de $f(z) = z^{1/3}$ ainsi qu'une coupure de Riemann.

3. On considère la fonction $f(z) = (z^2 + 1)^{1/2}$

(a) Montrer que $z = \pm i$ sont des points de branchement de $f(z)$.

(b) Montrer qu'un tour complet autour des deux points de branchement à la fois n'entraîne pas de changement de branche de $f(z)$.

(c) Déterminer des coupures de Riemann rendant la fonction $f(z)$ univalente.

4. Montrer que, en coordonnées polaires, les équations de Cauchy-Riemann prennent la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

En déduire que la dérivée s'écrit

$$\frac{df(z)}{dz} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + i \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \right)$$

En déduire la dérivée de la fonction $f(z) = z^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{Z}$

5. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz$, de $z_1 = 0$, à $z_2 = 4 + 2i$, le long de la courbe \mathcal{C} , si :

(a) \mathcal{C} est définie par $z = t^2 + it$.

(b) \mathcal{C} est formée des segments $[0 \ 2i]$, et $[2i \ 4 + 2i]$.

6. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} |z| dz$, de $z_1 = -R$, à $z_2 = R$, le long de la courbe \mathcal{C} , si :

(a) \mathcal{C} est définie par le demi cercle supérieur.

(b) \mathcal{C} est définie par le demi cercle inférieur.

(c) \mathcal{C} est définie par le $[-R \ R]$.

7. On considère une fonction $f(z)$ holomorphe sur le disque $\mathcal{D}(0, R)$, avec $R > 1$. Soient deux nombres complexes a et b distincts appartenant au disque \mathcal{D} .

(a) Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

(b) Que se passe-t-il lorsque $a \rightarrow b$?

8. Montrer que $\int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{\cos z}{z^5} dz = \frac{i\pi}{12}$

9. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$, où \mathcal{C} est un cercle de centre $z_0 = -1$, et de rayon R :

(a) avec $R < 1$

(b) avec $1 < R < 2$

(c) avec $2 < R$

10. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$, où \mathcal{C} est le cercle de centre 0, et de rayon $R > 1$

11. Calculer $\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$, où Γ est le demi-cercle fermé supérieur de rayon $R > 1$, et de centre 0. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx$.

Travaux dirigés de mathématiques
Séance 2
INTÉGRALES DE CAUCHY (SUITE) ET RÉSIDUS

1. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$, et $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$, où \mathcal{C} est le cercle défini par $|z| = 3$.
2. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\rho-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\rho\pi)}$, pour $0 < \rho < 1$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Ce résultat sera établi en calculant l'intégrale de la fonction complexe $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, sur un contour à déterminer.
4. On considère la fonction de la variable complexe $f(z) = \frac{\sqrt{z} \ln(z)}{(1+z)^2}$.
 - (a) Déterminer la coupure de Riemann telle que $f(z)$ soit univalente.
 - (b) Définir un contour \mathcal{C} ne franchissant pas cette coupure, et calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{\sqrt{z} \ln(z)}{(1+z)^2} dz$.
 - (c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} dx$.
5. Effet Magnus sur un ballon (Extrait de la colle 2009-2010)
On modélise en 2D l'écoulement de l'air autour d'un ballon de football (ou autre) de rayon R centré en 0, autour duquel un fluide (l'air) s'écoule avec une vitesse $\mathbf{v} = v_x + iv_y$. On note f le potentiel complexe du champ de vitesse défini par :

$$\frac{df(z)}{dz} = v_x - iv_y$$

On peut montrer que la force $\mathbf{F} = F_x + iF_y$ exercée sur le ballon est donnée par :

$$\bar{\mathbf{F}} = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{df(z)}{dz} \right)^2 dz$$

où \mathcal{C} est le contour du ballon.

- (a) Si le ballon ne tourne pas sur lui même et que l'écoulement de l'air est uniforme, alors le potentiel $f(z)$ est donné par :

$$f(z) = V_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$$

Montrer que dans ce cas, la force exercée par le fluide sur le ballon est nulle (on n'a pas pris en compte la viscosité du fluide).

- (b) Dans le cas où le ballon tourne sur lui même, le potentiel est donné par :

$$f(z) = V_{\infty} \left(z + \frac{R^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$$

où Γ est la circulation de l'air autour du ballon (supposée être une fonction connue de la vitesse de rotation du ballon). Montrer que le ballon subit une force selon l'axe vertical et donner son expression en fonction de Γ , ρ et V_{∞} .

Travaux dirigés de mathématiques
Séance 3
RÉSIDUS, SÉRIES DE LAURENT ET DE TAYLOR

1. Évaluer $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} dz$, où \mathcal{C} est le cercle défini par $|z| = 4$, de deux manières différentes :
 - (a) par un calcul d'intégrales de Cauchy,
 - (b) par un calcul de résidus
2. Développer en série de Taylor les fonctions suivantes en z_0
 - (a) $f(z) = \ln(z)$, en $z_0 = 1$
 - (b) $f(z) = z^\alpha$, en $z_0 = 1$.
3. Développer en séries de Laurent les fonctions $f(z)$ suivantes en z_0 en précisant leur domaine de convergence et en déduire les résidus $Res(f, z_0)$.
 - (a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, en $z_0 = 1$
 - (b) $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, en $z_0 = -2$
 - (c) $f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^3}$, en $z_0 = 0$
 - (d) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, en $z_0 = -2$
 - (e) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, pour $z_0 = 0$
 - (f) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, pour $z_0 = 1$
4. Évaluer $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$, après avoir choisi un contour d'intégration pour la fonction complexe correspondante (pour cela observer si la fonction intégrée est univalente ou multivalente, si elle est paire ou impaire, si le point $z = 0$ pose problème ou non, ...).
5. Montrer que :
 - (a) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12}$
 - (b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin\theta)^2} d\theta = \frac{5\pi}{32}$
 - (c) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(7\theta)}{2+\sin(\theta)} d\theta = \frac{-2\pi(\sqrt{3}-2)^7}{\sqrt{3}}$

Ce support de cours est à destination exclusive des étudiants inscrits à l'ENSG-INPL.

La reproduction à des fins pédagogiques hors ENSG en est interdite

Toute demande devra être adressée à l'ENSG, qui transmettra à l'auteur