

Contrôle de Systèmes Linéaires et Continus

...

Approches temporelle et fréquentielle

...

IS2 – Ingénierie Système

Benoît Marx

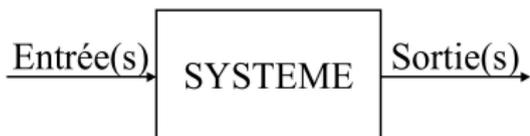
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)

disponible sur : arche.univ-lorraine.fr > L-INP > ENSGSI > 2AI > Automatique IS2

- 1 Outils théoriques
 - Signaux et systèmes
 - Transformation de Laplace
 - Fonction de transfert
 - Réponse temporelle
- 2 Étude des systèmes du 1^{er} ordre
 - Définition et présentation
 - Réponses temporelles
- 3 Systèmes du 2^{ème} ordre
 - Définition et présentation
 - Réponses temporelles
- 4 Approche fréquentielle
 - Diagrammes de Bode
 - Réponse fréquentielle d'un système du 1er ordre
 - Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2
 - Réponse fréquentielle de système d'ordre supérieur à 2
- 5 Régulation en boucle fermée
 - Introduction
 - Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre
 - Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2
 - Schémas de régulation BO/BF
- 6 Analyse d'un système en BF
 - Stabilité
 - Précision
 - Robustesse
- 7 Quelques correcteurs élémentaires
 - Objectifs
 - Proportionnel
 - Retard de phase
 - Proportionnel intégral
 - Avance de phase
 - Proportionnel intégral dérivé
 - RST

1.1 Signaux et systèmes

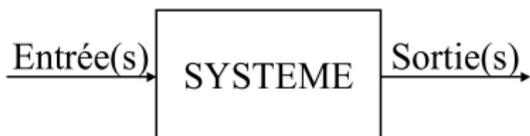
Qu'est ce qu'un système (physique, chimique, ...) ?



- un objet défini par une frontière, des variables d'entrée et de sortie
- un ensemble d'éléments reliés par des liens fonctionnels

1.1 Signaux et systèmes

Qu'est ce qu'un système (physique, chimique, ...) ?



- un objet défini par une frontière, des variables d'entrée et de sortie
- un ensemble d'éléments reliés par des liens fonctionnels

On représente un système par un modèle ...

- qui est un ensemble de relations mathématiques entre des grandeurs physiques,
- qui **approche** le comportement réel du système,
- dont la complexité dépend de l'utilisation.

1.1 Signaux et systèmes

Signal

Grandeur physique mesurable porteuse d'une information

→ position, vitesse, température, ...

1.1 Signaux et systèmes

Signal

Grandeur physique mesurable porteuse d'une information

→ position, vitesse, température, ...

Quelques caractéristiques de signaux :

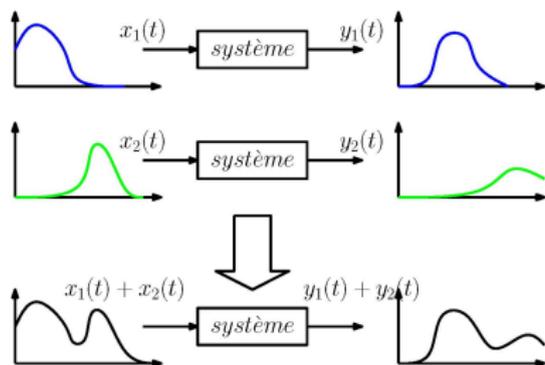
- monodimensionnel / vecteur
- entrée / sortie du système
- mesuré / non mesuré
- contrôlable / incontrôlable
- dépendant du temps, de l'espace, de la fréquence, ...
- temps continu ($x(t)$ connu $\forall t$) ou discret ($x(t)$ connu pour $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$)

1.2 Systèmes linéaires

Système linéaire

Le système Σ est linéaire si, pour toutes constantes α et β , et tous signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a la propriété suivante :

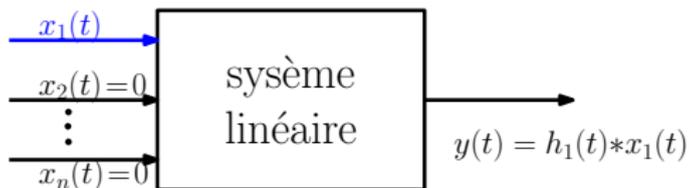
- si le signal $x_1(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y_1(t)$
- si le signal $x_2(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y_2(t)$
- alors le signal $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$



1.2 Systèmes linéaires (à plusieurs entrées)

Principe de superposition

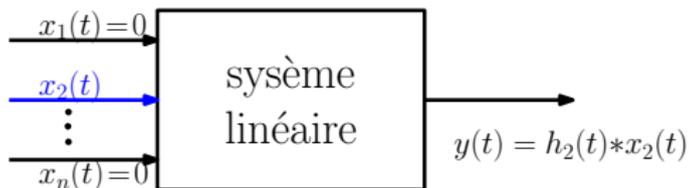
Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.



1.2 Systèmes linéaires (à plusieurs entrées)

Principe de superposition

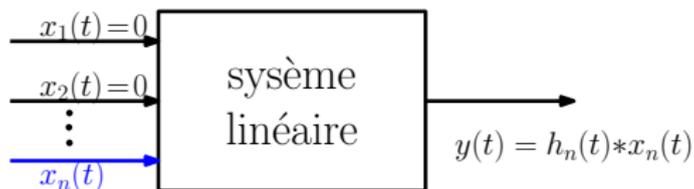
Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.



1.2 Systèmes linéaires (à plusieurs entrées)

Principe de superposition

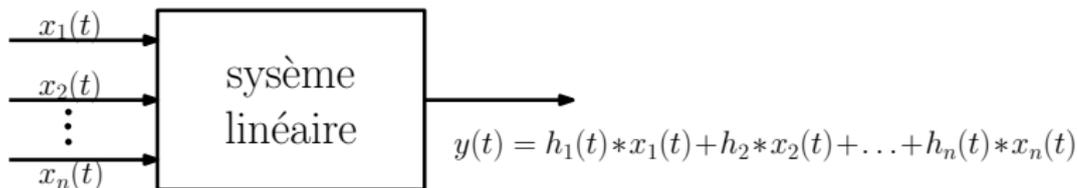
Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.



1.2 Systèmes linéaires (à plusieurs entrées)

Principe de superposition

Si un système linéaire a plusieurs entrées, la réponse à toutes les entrées est la somme des réponses à chaque entrée, où la réponse à une entrée est obtenue en annulant les autres entrées.

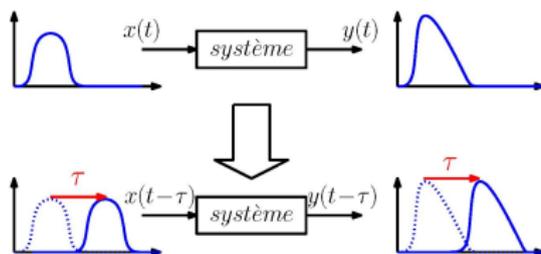


1.2 Systèmes invariants dans le temps

Système invariant dans le temps

Le système Σ est invariant dans le temps si :

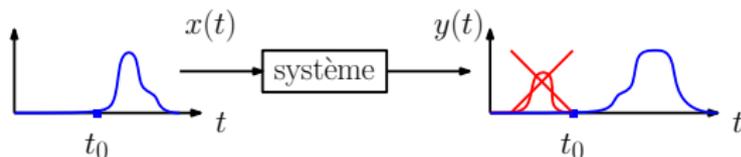
- le signal $x(t)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t)$
- le signal $x(t - \tau)$ appliqué au système Σ provoque la sortie $y(t - \tau)$, pour tout τ



1.2 Systèmes causaux

Système causal

L'effet (variation de la sortie) suit la cause (variation de l'entrée) dans le temps



Globalement, l'entrée doit être dérivée moins de fois que la sortie car :

- $\int_0^t x(\tau) d\tau$ dépend du passé
- $\dot{x}(t)$ dépend de l'avenir

1.2 Systèmes linéaires, invariants dans le temps et causaux

Eq. diff. linéaire à coeff. constants \leftrightarrow syst. linéaire invariant et causal

Un système d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec $n \geq m$:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

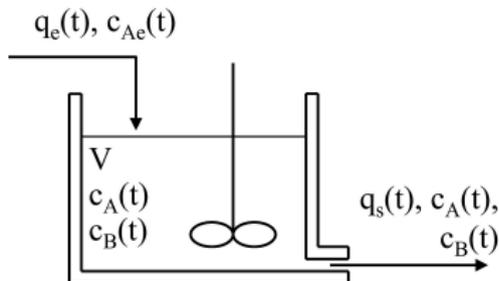
est linéaire, invariant dans le temps et causal.

- Linéaire : pas de terme en $x^2(t)$, $\sqrt{y'(t)}$, $x(t)/y^3(t)$, etc
- Invariant dans le temps : pas de coeff variant $a_1(t)$, etc.
- Causal : y plus dérivé que x soit $n \geq m$

1.2 Exemple : un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant



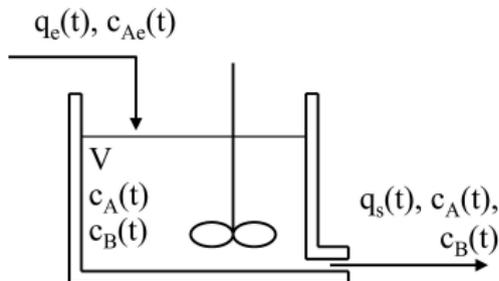
- Mettre en équation le système

- Quelle hypothèse faire avoir un modèle linéaire, invariant et causal ?

1.2 Exemple : un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant



- Mettre en équation le système

$$V\dot{c}_A(t) = q_e(t)c_{Ae}(t) - (q_s(t) + Vk)c_A(t)$$

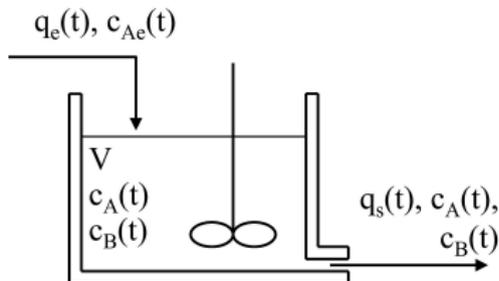
$$V\dot{c}_B(t) = -q_s(t)c_B(t) + Vkc_A(t)$$

- Quelle hypothèse faire avoir un modèle linéaire, invariant et causal ?

1.2 Exemple : un réacteur chimique

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant



- Mettre en équation le système

$$V\dot{c}_A(t) = q_e(t)c_{Ae}(t) - (q_s(t) + Vk)c_A(t)$$

$$V\dot{c}_B(t) = -q_s(t)c_B(t) + Vkc_A(t)$$

- Quelle hypothèse faire avoir un modèle linéaire, invariant et causal ?
Pour V , $q_e = q_s$ constants

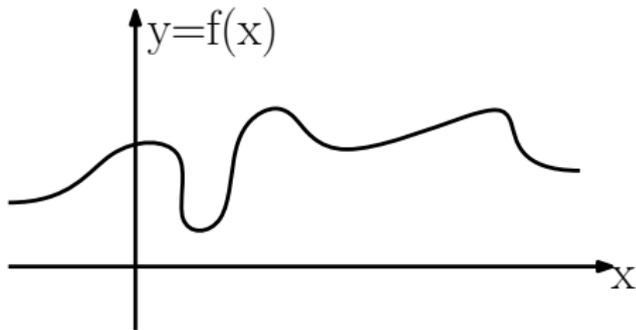
$$V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) = q_e c_{Ae}(t)$$

$$V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) = Vkc_A(t)$$

1.2 Linéarisation de systèmes dynamiques

Malheureusement ...

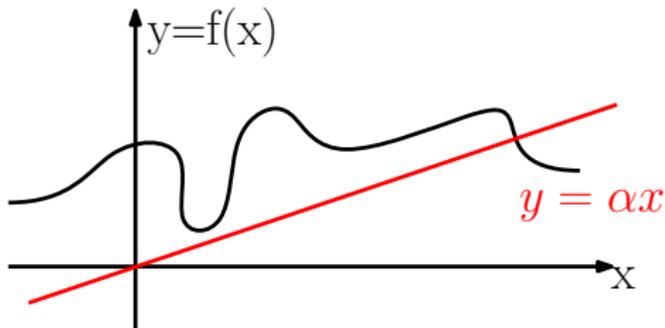
... aucun système n'est réellement linéaire



1.2 Linéarisation de systèmes dynamiques

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



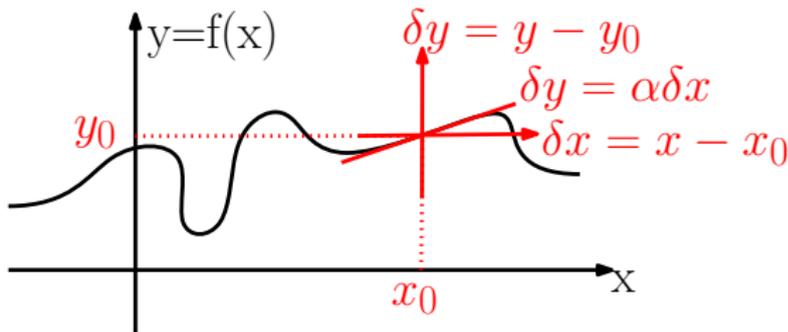
Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

- est globalement faux

1.2 Linéarisation de systèmes dynamiques

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



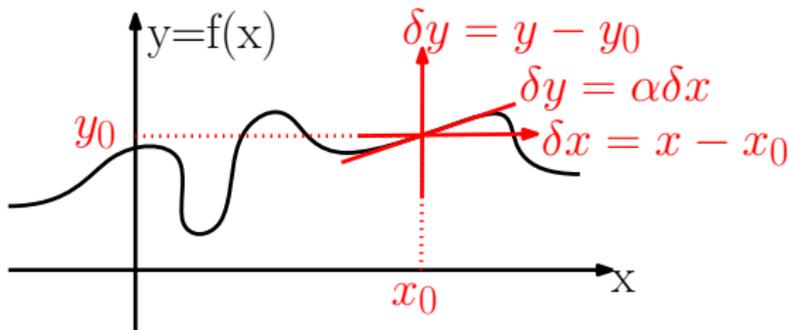
Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

- est globalement faux
- est une approximation **valable localement** autour d'un point de fonctionnement (x_0, y_0)

1.2 Linéarisation de systèmes dynamiques

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

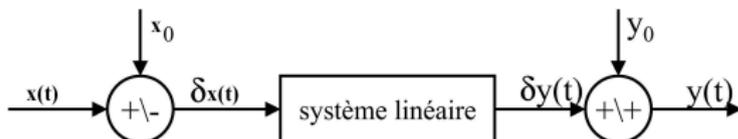
- est globalement faux
- est une approximation **valable localement** autour d'un point de fonctionnement (x_0, y_0)
- peut se déduire par linéarisation (developpement de Taylor)

$$y(x) = y(x_0) + \frac{dy(x_0)}{dx}(x - x_0) + o(x - x_0)$$

1.2 Linéarisation de systèmes dynamiques

Malheureusement ...

... aucun système n'est réellement linéaire



Un modèle linéaire d'un système non linéaire :

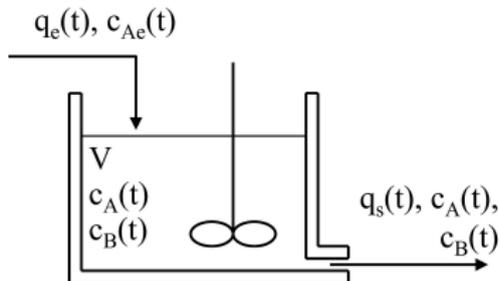
- est globalement faux
- est une approximation **valable localement** autour d'un point de fonctionnement (x_0, y_0)
- peut se déduire par linéarisation (developpement de Taylor)

$$\delta y \approx \left(\frac{df}{dx}(x) \right)_{x=x_0} \delta x$$

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$

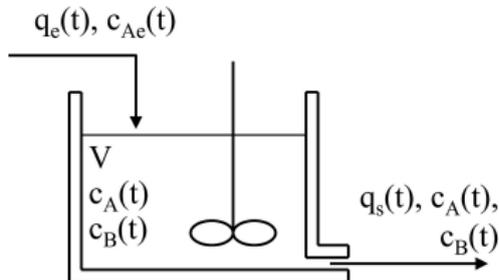


Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$



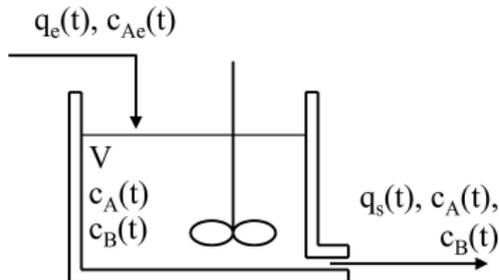
Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

• On suppose :
$$\begin{cases} q_e(t) \approx q_{e0} \\ c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_A(t) \approx \frac{q_{e0}}{q_{e0} + kV} c_{Ae0} \\ c_B(t) \approx \frac{kV}{q_{e0} + kV} c_{Ae0} \end{cases}$$

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$



Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

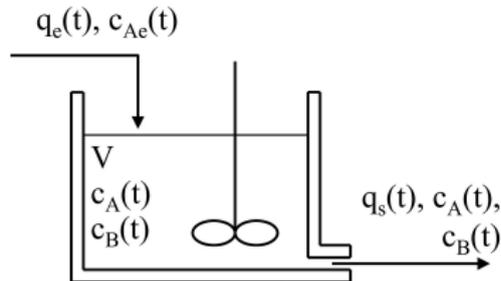
- On suppose :
$$\begin{cases} q_e(t) \approx q_{e0} \\ c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_A(t) \approx \frac{q_{e0}}{q_{e0} + kV} c_{Ae0} \\ c_B(t) \approx \frac{kV}{q_{e0} + kV} c_{Ae0} \end{cases}$$
- Faire le développement de Taylor autour de $c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0}$, $q_e(t) \approx q_{e0}$, $c_A(t) \approx c_{A0}$ et $c_B(t) \approx c_{B0}$ de :

$$\begin{cases} \dot{c}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V} (c_{Ae}(t) - c_A(t)) - k c_A(t) \\ \dot{c}_B(t) = -\frac{q_e(t) c_B(t)}{V} + k c_A(t) \end{cases}$$

1.2 Exemple : un réacteur chimique (suite)

On considère un réacteur chimique :

- réaction $A \rightarrow B$
- vitesse de réaction : $k = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
- volume V constant
- $q_e(t) = q_s(t)$



Comment obtenir un modèle linéaire dans le cas où $q_s(t) = q_e(t)$?

- On suppose :
$$\begin{cases} q_e(t) \approx q_{e0} \\ c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_A(t) \approx \frac{q_{e0}}{q_{e0} + kV} c_{Ae0} \\ c_B(t) \approx \frac{kV}{q_{e0} + kV} c_{Ae0} \end{cases}$$
- Faire le développement de Taylor autour de $c_{Ae}(t) \approx c_{Ae0}$, $q_e(t) \approx q_{e0}$, $c_A(t) \approx c_{A0}$ et $c_B(t) \approx c_{B0}$ de :

$$\begin{cases} \dot{c}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V} (c_{Ae}(t) - c_A(t)) - k c_A(t) \\ \dot{c}_B(t) = -\frac{q_e(t) c_B(t)}{V} + k c_A(t) \end{cases}$$

- Pour avoir :

$$\begin{cases} \dot{\delta c}_A(t) = \frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{V} \delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V} \delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k \right) \delta c_A(t) \\ \dot{\delta c}_B(t) = -\frac{c_{B0}}{V} \delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V} \delta c_B(t) + k \delta c_A(t) \end{cases}$$

1.3 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt, p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0$

1.3 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p) > 0$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$

1.3 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p) > 0$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$

1.3 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt, p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$
- convolution : $\mathcal{L}(x(t) \star y(t)) = X(p)Y(p)$

1.3 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt, p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$
- convolution : $\mathcal{L}(x(t) \star y(t)) = X(p)Y(p)$
- valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$
- valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$

1.3 Transformation de Laplace

Rappels. Définition et propriétés de la transformation de Laplace:

- définition : $\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt$, $p \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(p) > 0$
- linéarité : $\mathcal{L}(x_1(t) + x_2(t)) = X_1(p) + X_2(p)$
- dérivation : $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - x(0)$
- intégration : $\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}X(p)$
- convolution : $\mathcal{L}(x(t) \star y(t)) = X(p)Y(p)$
- valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)$
- valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)$

principal intérêt

La transformation de Laplace convertit une eq. diff. linéaire à coefficients constants en une équation polynômiale en p .

→ dans l'exemple du réacteur on peut écrire :

$$\Delta C_B(p) = \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)} \Delta C_A(p) + \dots$$

→ autour d'une position d'équilibre on peut écrire : $\Delta Y(p) = \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)} \Delta X(p)$

1.3 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

1.3 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

1.3 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
- échelon : $\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$
- exponentielle : $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$

1.3 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
- échelon : $\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$
- exponentielle : $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$
- rampe : $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$

1.3 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
- échelon : $\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$
- exponentielle : $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$
- rampe : $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$
- cosinus : $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$
- sinus : $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

1.3 Transformation de Laplace (suite)

Rappels. Quelques transformées utiles :

- dirac : $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$
- échelon : $\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}$
- exponentielle : $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$
- rampe : $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$
- cosinus : $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$
- sinus : $\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
- puissance : $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
- puissance x exponentiel : $\mathcal{L}(t^n e^{-at}) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

1.4 Fonction de transfert : exemple (suite du réacteur)

Pour V , q_e et q_s constants

- Equations différentielles

$$\begin{cases} V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) & = q_e c_{Ae}(t) \\ V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) & = Vk c_A(t) \end{cases}$$

1.4 Fonction de transfert : exemple (suite du réacteur)

Pour V , q_e et q_s constants

- Equations différentielles

$$\begin{cases} V\dot{c}_A(t) + (q_s + Vk)c_A(t) & = q_e c_{Ae}(t) \\ V\dot{c}_B(t) + q_s c_B(t) & = Vk c_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} C_A(p) = \left(\frac{q_e}{Vp + q_e + kV} \right) C_{Ae}(p) + \left(\frac{Vc_A(0)}{Vp + q_e + kV} \right) \\ C_B(p) = \left(\frac{kV}{Vp + q_e} \right) C_A(p) + \left(\frac{Vc_B(0)}{Vp + q_e} \right) \end{cases}$$

(on peut aussi se débarrasser des C.I. en considérant des variations autour d'un point d'équilibre coïncidant avec l'état à $t = 0$)

1.4 Fonction de transfert : exemple (suite du réacteur)

Pour V , q_e et q_s constants

- Equations différentielles

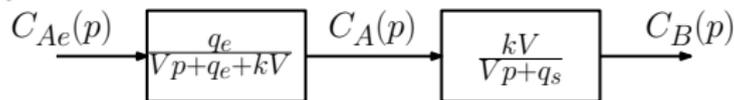
$$\begin{cases} V\dot{C}_A(t) + (q_s + Vk)C_A(t) &= q_e C_{Ae}(t) \\ V\dot{C}_B(t) + q_s C_B(t) &= V k C_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} C_A(p) = \left(\frac{q_e}{Vp + q_e + kV} \right) C_{Ae}(p) + \left(\frac{V C_{A}(0)}{Vp + q_e + kV} \right) \\ C_B(p) = \left(\frac{kV}{Vp + q_e} \right) C_A(p) + \left(\frac{V C_{B}(0)}{Vp + q_e} \right) \end{cases}$$

(on peut aussi se débarrasser des C.I. en considérant des variations autour d'un point d'équilibre coïncidant avec l'état à $t = 0$)

- Schéma bloc



1.4 Fonction de transfert : exemple (suite du réacteur)

Pour V constant et $q_e(t) = q_s(t)$, on définit $\delta * (t) = *(t) - *_0$

- Equations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\delta c}_A(t) = \frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{V} \delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V} \delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k \right) \delta c_A(t) \\ \dot{\delta c}_B(t) = \frac{-c_{B0}}{V} \delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V} \delta c_B(t) + k \delta c_A(t) \end{cases}$$

1.4 Fonction de transfert : exemple (suite du réacteur)

Pour V constant et $q_e(t) = q_s(t)$, on définit $\delta * (t) = *(t) - *_0$

- Equations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\delta C}_A(t) = \frac{C_{Ae0} - C_{A0}}{V} \delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V} \delta C_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k\right) \delta C_A(t) \\ \dot{\delta C}_B(t) = \frac{-C_{B0}}{V} \delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V} \delta C_B(t) + k \delta C_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} \Delta C_A(p) = \left(\frac{C_{Ae0} - C_{A0}}{Vp + q_{e0} + kV}\right) \Delta Q_e(p) + \left(\frac{q_{e0}}{Vp + q_{e0} + kV}\right) \Delta C_{Ae}(p) \\ \Delta C_B(p) = \left(\frac{-C_{B0}}{Vp + q_{e0}}\right) \Delta Q_e(p) + \left(\frac{kV}{Vp + q_{e0}}\right) \Delta C_A(p) \end{cases}$$

1.4 Fonction de transfert : exemple (suite du réacteur)

Pour V constant et $q_e(t) = q_s(t)$, on définit $\delta * (t) = *(t) - *_0$

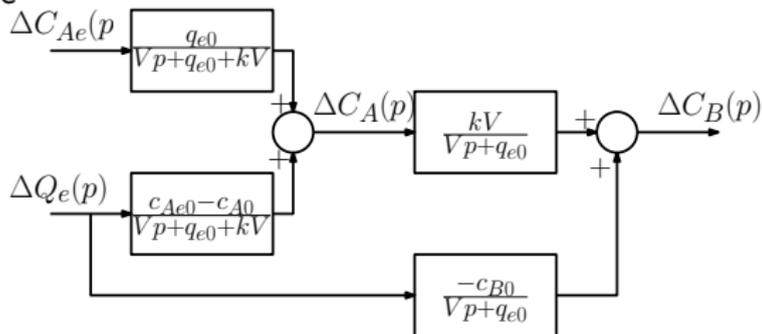
- Equations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\delta C}_A(t) = \frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{V} \delta q_e(t) + \frac{q_{e0}}{V} \delta c_{Ae}(t) - \left(\frac{q_{e0}}{V} + k\right) \delta C_A(t) \\ \dot{\delta C}_B(t) = \frac{-c_{B0}}{V} \delta q_e(t) - \frac{q_{e0}}{V} \delta C_B(t) + k \delta C_A(t) \end{cases}$$

- Transformée de Laplace

$$\begin{cases} \Delta C_A(p) = \left(\frac{c_{Ae0} - c_{A0}}{Vp + q_{e0} + kV}\right) \Delta Q_e(p) + \left(\frac{q_{e0}}{Vp + q_{e0} + kV}\right) \Delta C_{Ae}(p) \\ \Delta C_B(p) = \left(\frac{-c_{B0}}{Vp + q_{e0}}\right) \Delta Q_e(p) + \left(\frac{kV}{Vp + q_{e0}}\right) \Delta C_A(p) \end{cases}$$

- Schéma bloc



1.4 Fonction de transfert

Dans l'exemple précédent :

$$C_A(p) = \underbrace{\left(\frac{q_e}{Vp + q_e + kV} \right)}_{\text{entrée/sortie}} C_{Ae}(p) + \underbrace{\left(\frac{Vc_A(0)}{Vp + q_e + kV} \right)}_{\text{conditions initiales}}$$

Plus généralement:

La fonction de transfert...

- est le lien entrée / sortie, sans les conditions initiales
- est une fraction rationnelle en p
- s'obtient à partir de l'équation différentielle
- est définie par la T.L. de la réponse à $x(t) = \delta(t)$

1.4 Définition d'une fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient également à partir de l'équation différentielle entrée/sortie :

1.4 Définition d'une fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient également à partir de l'équation différentielle entrée/sortie :

- On considère l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

1.4 Définition d'une fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient également à partir de l'équation différentielle entrée/sortie :

- On considère l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^m b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

1.4 Définition d'une fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient également à partir de l'équation différentielle entrée/sortie :

- On considère l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^m b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

- autrement dit :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{H(p)} X(p) + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{j-1} b_j p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{C.I. \text{ sur } y(t) \text{ et } x(t)}$$

1.4 Définition d'une fonction de transfert

La fonction de transfert s'obtient également à partir de l'équation différentielle entrée/sortie :

- On considère l'équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- après transformation de Laplace, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^m b_j \left(p^j X(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+) \right)$$

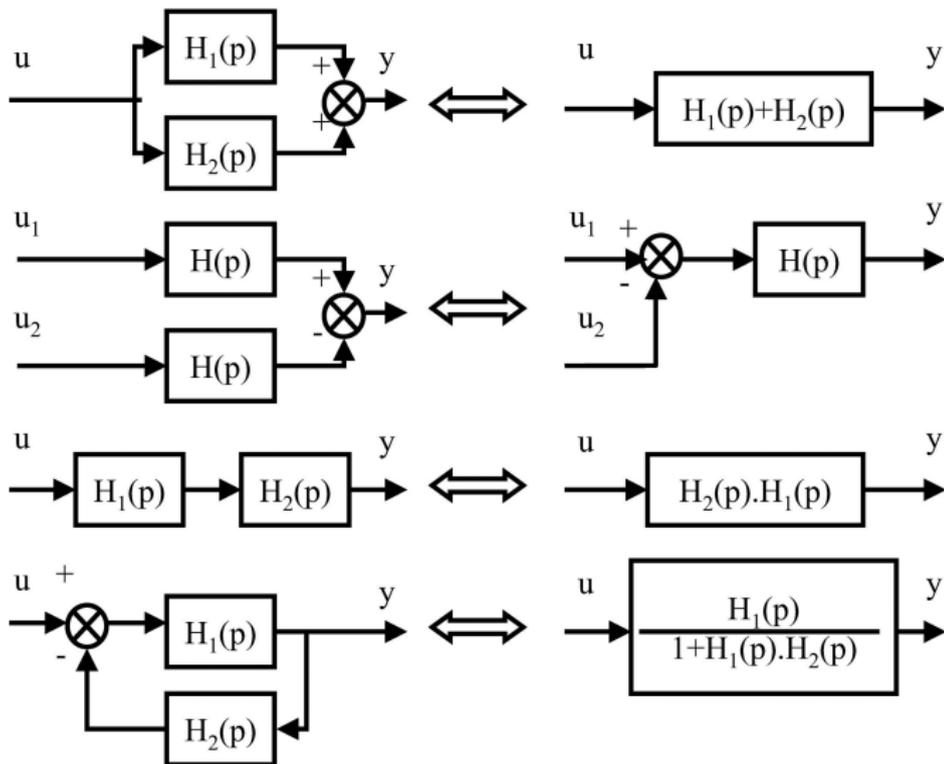
- autrement dit :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{H(p)} X(p) + \underbrace{\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{j-1} b_j p^{j-1-k} x^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{C.I. \text{ sur } y(t) \text{ et } x(t)}$$

- pour des conditions initiales nulles, il vient :

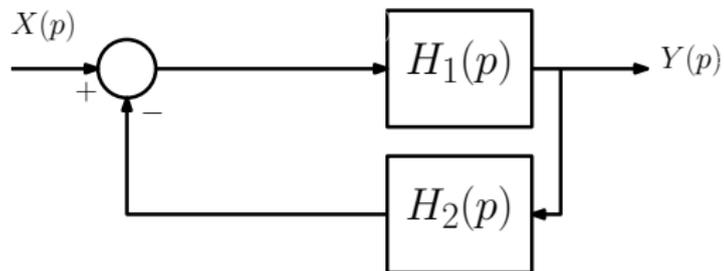
$$Y(p) = H(p)X(p) \quad \text{avec} \quad H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs



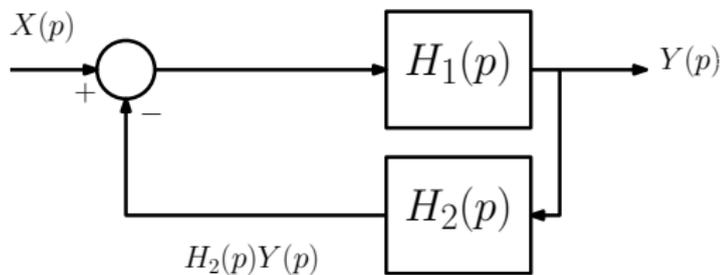
1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

Fonction de transfert en boucle fermée :



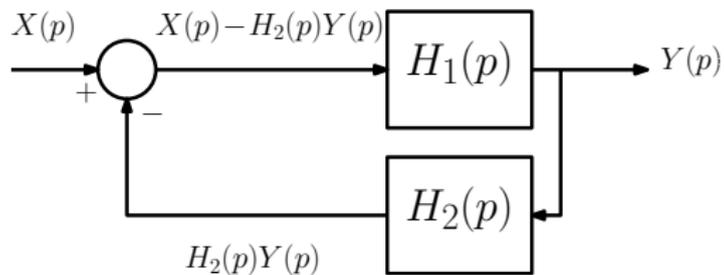
1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

Fonction de transfert en boucle fermée :



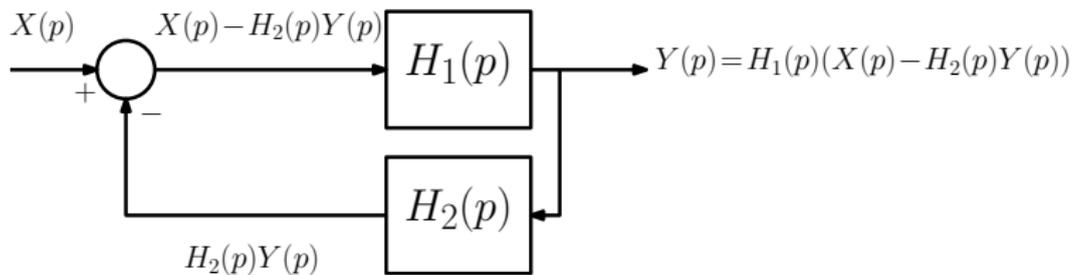
1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

Fonction de transfert en boucle fermée :



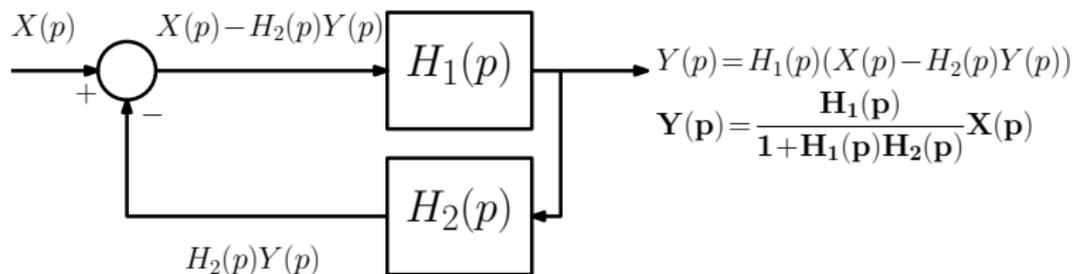
1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

Fonction de transfert en boucle fermée :



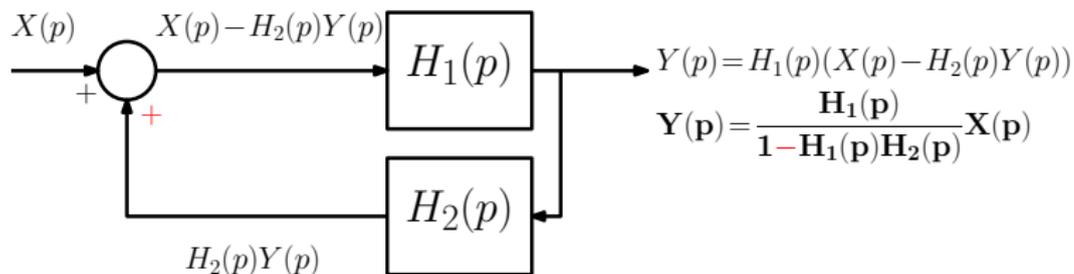
1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

Fonction de transfert en boucle fermée :



1.4 Fonction de transfert et algèbre des blocs

Fonction de transfert en boucle fermée :



1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = H(p)X(p) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Num_{k1}(p)}{Den(p)} y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Num_{k2}(p)}{Den(p)} x^{(k)}(0)$$

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct : $Y(p) = \frac{1}{p-p_0} + \dots$
 - réponse en exponentielle : $y(t) = e^{p_0 t} + \dots$
 - convergent si le pôle est négatif

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct : $Y(p) = \frac{1}{p-p_0} + \dots$
 - réponse en exponentielle : $y(t) = e^{p_0 t} + \dots$
 - convergent si le pôle est négatif
- pôle réel multiple : $Y(p) = \frac{1}{(p-p_0)^k} + \dots$
 - réponse en exponentielle * puissance de t : $y(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_0 t} + \dots$
 - convergent si le pôle est négatif

1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La sortie d'un système linéaire peut s'écrire :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}$$

Après décomposition en éléments simples, trois cas sont à distinguer :

- pôle simple réel distinct : $Y(p) = \frac{1}{p-p_0} + \dots$
 - réponse en exponentielle : $y(t) = e^{p_0 t} + \dots$
 - convergent si le pôle est négatif
- pôle réel multiple : $Y(p) = \frac{1}{(p-p_0)^k} + \dots$
 - réponse en exponentielle * puissance de t : $y(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_0 t} + \dots$
 - convergent si le pôle est négatif
- pôles complexes conjugués : $Y(p) = \frac{z}{p-p_0} + \frac{\bar{z}}{p-\bar{p}_0} + \dots$ (où $p_0 = \alpha + i\beta$)
 - réponse sinusoïdale * exponentielle : $y(t) = 2|z| e^{\alpha t} \cos(\arg(z) + \beta t) + \dots$
 - convergent si le pôle est à partie réelle négative

2.1 Définition et intérêt des systèmes du 1^{er} ordre

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Vocabulaire :

- T est appelé *constante de temps* (unité : s)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

2.1 Définition et intérêt des systèmes du 1^{er} ordre

Définition

Un système du 1^{er} ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

Vocabulaire :

- T est appelé *constante de temps* (unité : s)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse, quantifié par T
- ... amplifie l'entrée en régime permanent ($K = y(\infty)/x(\infty)$)

2.2 Réponses temporelles d'un système du 1^{er} ordre

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? ($X(p) = 1$) (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? ($X(p) = \frac{1}{p}$) (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? ($X(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$) (réponse fréquentielle)

2.2 Réponses temporelles d'un système du 1^{er} ordre

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? ($X(p) = 1$) (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? ($X(p) = \frac{1}{p}$) (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? ($X(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$) (réponse fréquentielle)

Méthode :

Calculs de $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{1+T_p p} X(p) \right)$ pour les différentes entrées possibles.

2.2 Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + Tp} 1 = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

2.2 Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + Tp} 1 = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

2.2 Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

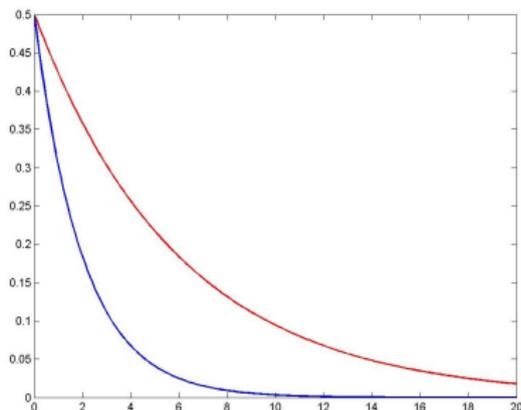
On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + Tp} \mathbf{1} = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$



en rouge : $K = 3$, $T = 6$

en bleu : $K = 1$, $T = 2$

2.2 Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

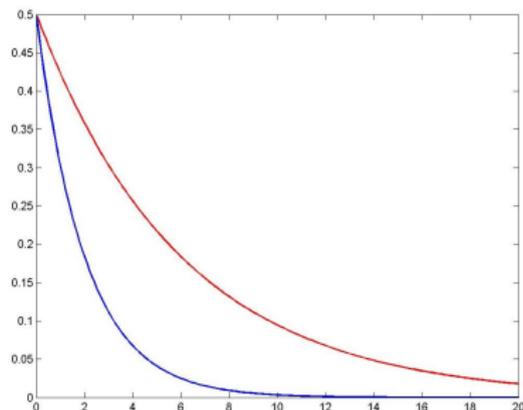
On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + Tp} \mathbf{1} = \frac{K/T}{p + 1/T}$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$



en rouge : $K = 3$, $T = 6$

en bleu : $K = 1$, $T = 2$

À noter : discontinuité en $t = 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^-} = 0 \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} = K/T$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p} = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T} \right)$$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée échelon unitaire : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + Tp)p} = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T} \right)$$

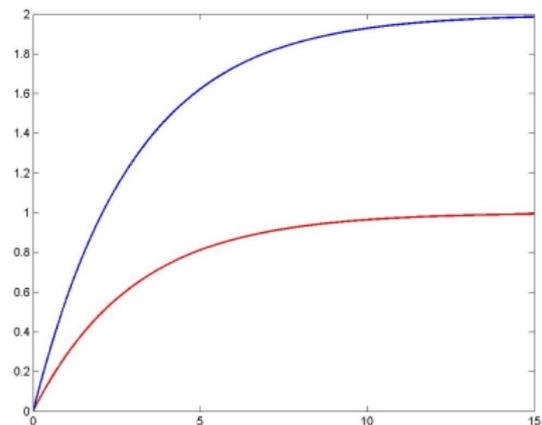
La réponse indicielle d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = K \left(1 - e^{-t/T} \right)$$

- K donne le gain statique (rapport des signaux en régime permanent)
- T quantifie la vitesse du système

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Influence du gain statique K

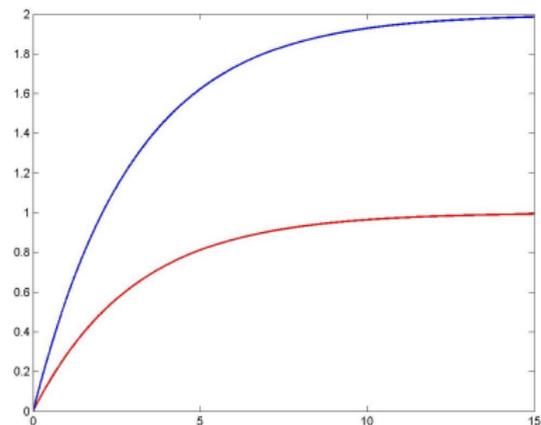


en rouge : $K = 1$, $T = 3$

en bleu : $K = 2$, $T = 3$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

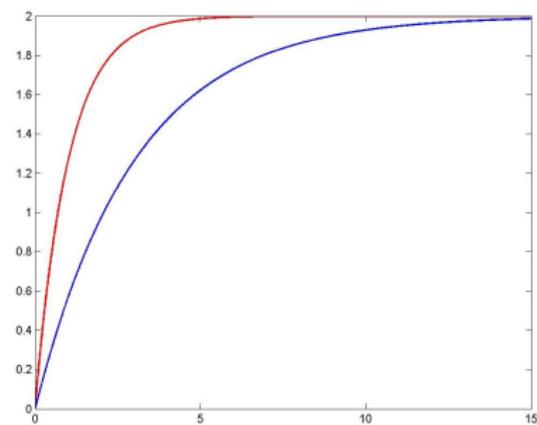
Influence du gain statique K



en rouge : $K = 1$, $T = 3$

en bleu : $K = 2$, $T = 3$

Influence du temps de réponse T



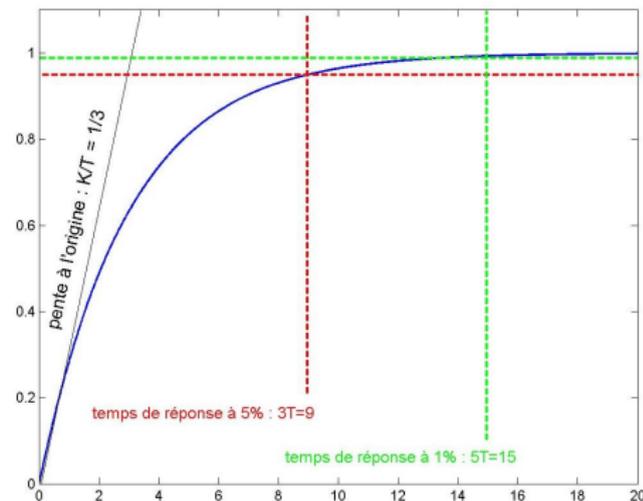
en rouge : $K = 2$, $T = 1$

en bleu : $K = 2$, $T = 3$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Quelques données à retenir :

- temps de réponse à 5% :
 $t_{5\%} \approx 3T$
- temps de réponse à 2% :
 $t_{2\%} \approx 4T$
- temps de réponse à 1% :
 $t_{1\%} \approx 5T$

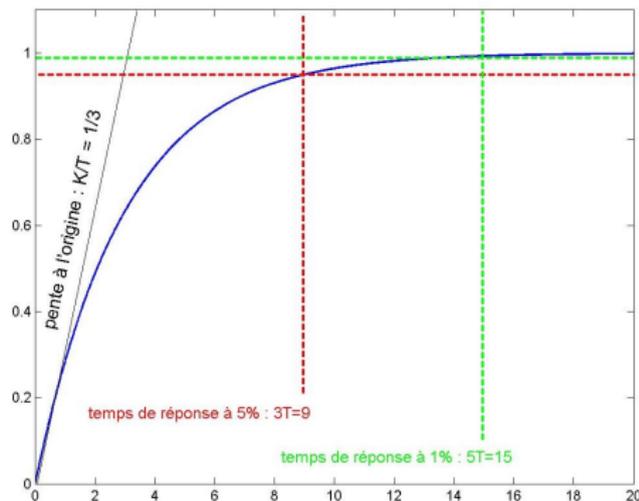


exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

2.2 Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Quelques données à retenir :

- temps de réponse à 5% :
 $t_{5\%} \approx 3T$
- temps de réponse à 2% :
 $t_{2\%} \approx 4T$
- temps de réponse à 1% :
 $t_{1\%} \approx 5T$
- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- valeur initiale de la pente :
 $\dot{y}(0) = K/T$



exemple pour $K = 1$ et $T = 3$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K}{1 + Tp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left(\frac{T\omega}{p + 1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{sinus}} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} \right) \end{aligned}$$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K}{1 + Tp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left(\frac{T\omega}{p + 1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{sinus}} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} \right) \end{aligned}$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T}}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - A \tan(\omega T))}_{\text{permanent}}$$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K}{1 + Tp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left(\frac{T\omega}{p + 1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{sinus}} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} \right) \end{aligned}$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T}}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - A \tan(\omega T))}_{\text{permanent}}$$

- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée

2.2 Réponse sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{K}{1 + Tp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left(\frac{T\omega}{p + 1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{sinus}} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} \right) \end{aligned}$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T}}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - A \tan(\omega T))}_{\text{permanent}}$$

- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée
- le signal d'entrée est amplifié de $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$

2.2 Réponse sinusoïdale d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée sinusoïdale : $x(t) = \sin(\omega t)$

- Pour $y(0) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{1 + Tp} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$
$$= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left(\frac{T\omega}{p + 1/T} + \underbrace{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{sinus}} - \underbrace{\frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2}}_{\text{cosinus}} \right)$$

La réponse sinusoïdale d'un syst. du 1^{er} ordre est :

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T}}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - A \tan(\omega T))}_{\text{permanent}}$$

- la sortie oscille à la même fréquence ω que l'entrée
- le signal d'entrée est amplifié de $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$
- le signal d'entrée est déphasé de $Arg(H(j\omega)) = -A \tan(\omega T)$

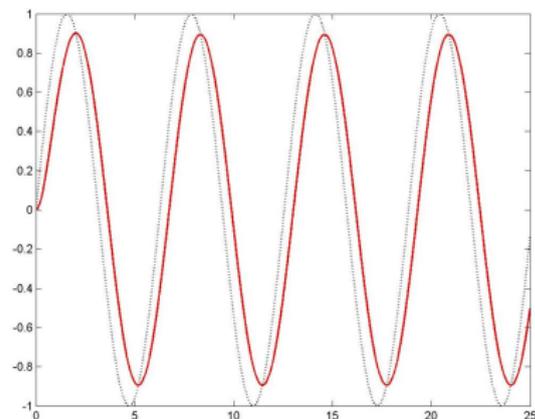
2.2 Exemples de réponses sinusoïdales d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée de la forme : $u(t) = \sin(\omega t)$

Rappel :

$$y(t) = \frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T} + \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - A \tan(\omega T))$$

Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ et $\omega=1$



en noir : entrée

en rouge : sortie

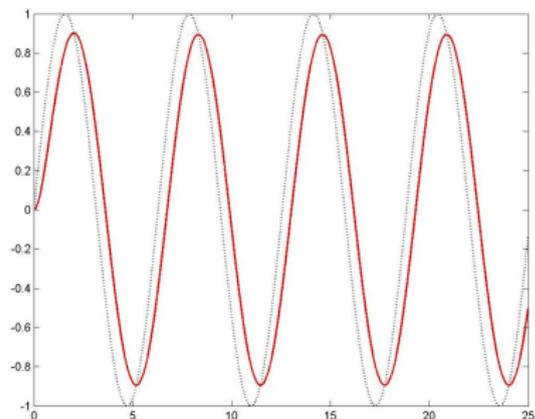
2.2 Exemples de réponses sinusoïdales d'un système du 1^{er} ordre

On considère une entrée de la forme : $u(t) = \sin(\omega t)$

Rappel :

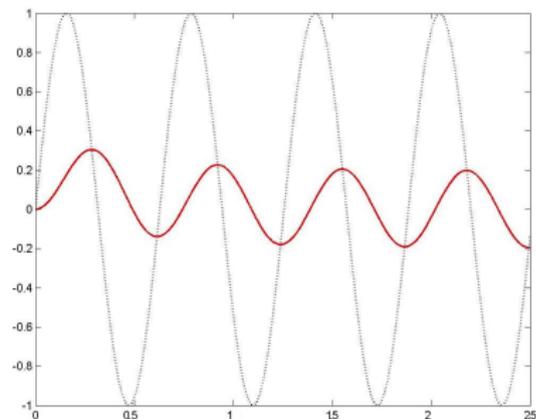
$$y(t) = \frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T} + \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - A \tan(\omega T))$$

Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ et $\omega=1$



en noir : entrée
en rouge : sortie

Réponse pour $K=1$, $T=0.5$ et $\omega=10$



en noir : entrée
en rouge : sortie

3.1 Définition et intérêt des systèmes d'ordre 2

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$

3.1 Définition et intérêt des systèmes d'ordre 2

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$

Vocabulaire :

- ω_0 est appelé *pulsation propre* (unité : rad/s)
- z est appelé *coefficient d'amortissement* (sans unité)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

3.1 Définition et intérêt des systèmes d'ordre 2

Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

sa fonction de transfert est : $H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_0} p + 1}$

Vocabulaire :

- ω_0 est appelé *pulsation propre* (unité : rad/s)
- z est appelé *coefficient d'amortissement* (sans unité)
- K est appelé *gain statique*, (unité : ça dépend)

Permet de modéliser un système dont la sortie :

- ... suit l'entrée avec un temps de réponse
- ... oscille éventuellement avant de se stabiliser ($\neq 1^{\text{er}}$ ordre)
- ... varie peu au début de la réponse ($\neq 1^{\text{er}}$ ordre)

3.2 Réponses temporelles d'un système d'ordre 2

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? (réponse fréquentielle)

3.2 Réponses temporelles d'un système d'ordre 2

Quelle est la sortie $y(t)$ lorsque :

- $x(t)$ est une impulsion? (réponse impulsionnelle)
- $x(t)$ est un échelon? (réponse indicielle)
- $x(t)$ est une sinusoïde? (réponse fréquentielle)

Méthode :

Calculs de $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_0} p + 1} X(p) \right)$ pour les différentes entrées possibles.

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :
 - $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t} \left(e^{\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} - e^{-\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} \right)$$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :
 - $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t} \left(e^{\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} - e^{-\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} \right)$$

- $z = 1 \Rightarrow$ exponentielle $\times t$:

$$y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée impulsionnelle : $x(t) = \delta(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} 1 = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

- Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de z :
 - $z > 1 \Rightarrow$ combinaison linéaire d'exponentielles :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t} \left(e^{\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} - e^{-\omega_0 \sqrt{z^2 - 1} t} \right)$$

- $z = 1 \Rightarrow$ exponentielle $\times t$:

$$y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

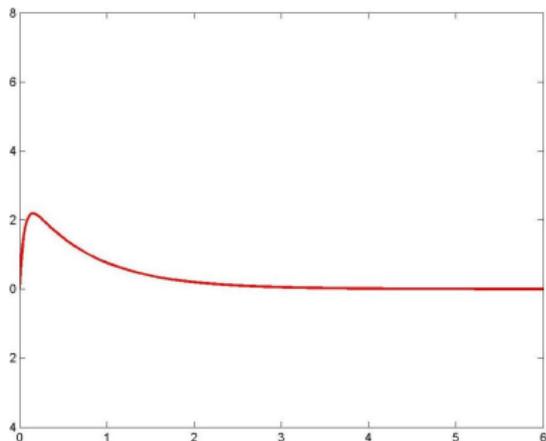
- $z < 1 \Rightarrow$ oscillations amorties :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - z^2} t)$$

3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 :

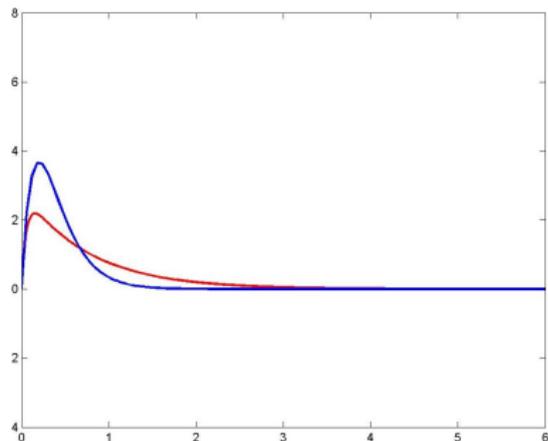
- en rouge :
 $z = 2$, $K = 2$ et $\omega_0 = 5$



3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 :

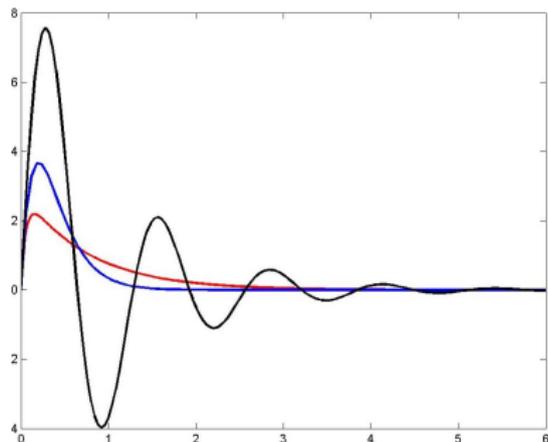
- en rouge :
 $z = 2, K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en bleu :
 $z = 1, K = 2$ et $\omega_0 = 5$



3.2 Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses impulsionnelles d'un système d'ordre 2 :

- en rouge :
 $z = 2, K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en bleu :
 $z = 1, K = 2$ et $\omega_0 = 5$
- en noir :
 $z = 0.2, K = 2$ et $\omega_0 = 5$



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K \left(1 + \frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left((-z - \sqrt{z^2 - 1})e^{\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} - (\sqrt{z^2 - 1} - z)e^{-\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} \right) \right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

On considère une entrée indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$

- Pour $y(0^-) = 0$, la T.L. de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$$

- Pour $z > 1 \Rightarrow$ racines réelles simples

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + \omega_0\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \omega_0\sqrt{z^2 - 1}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K \left(1 + \frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left((-z - \sqrt{z^2 - 1})e^{\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} - (\sqrt{z^2 - 1} - z)e^{-\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} \right) \right)$$

- La valeur finale est K (le gain statique), atteinte par valeurs inférieures

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
 - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- Pour $z = 1 \Rightarrow$ **racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
 - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2} \right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- Pour $z = 1 \Rightarrow$ **racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
 - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2} \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K (1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t})$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2+2z\omega_0p+\omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z = 1 \Rightarrow$ racine simple en $p = 0$ et double en $p = -\omega_0$**
 - La T.L. de $y(t)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2} \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K (1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t})$$

- idem cas précédent : la valeur finale est K (le gain statique), atteinte par valeurs inférieures

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
 - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
 - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**
 - Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2} t + \phi) \right), \quad \text{pour } \phi = \text{Atan} \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right)$$

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

- $Y(p)$ est donnée par : $Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \frac{1}{p}$
- **Pour $z < 1 \Rightarrow$ racines complexes conjuguées**

- Les 3 racines simples sont :

$$p_0 = 0 \quad , \quad p_1 = -z\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

- La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right)$$

- La réponse temporelle est donc :

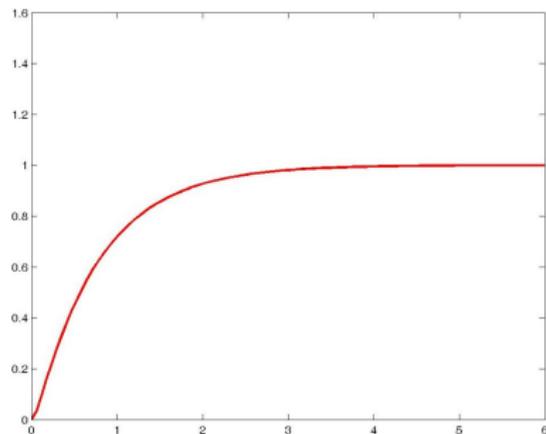
$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-z^2} t + \phi) \right), \quad \text{pour } \phi = \text{Atan} \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right)$$

- La valeur finale est K (le gain statique), atteinte après des oscillations amorties

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

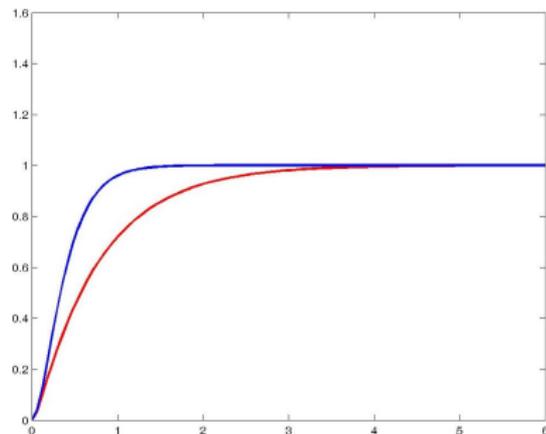
- en rouge :
 $z = 2$, $K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses indicelles d'un système d'ordre 2 :

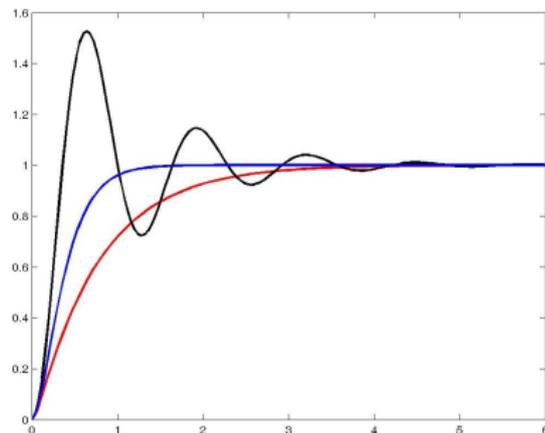
- en rouge :
 $z = 2, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en bleu :
 $z = 1, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Exemples de réponses indicielles d'un système d'ordre 2 :

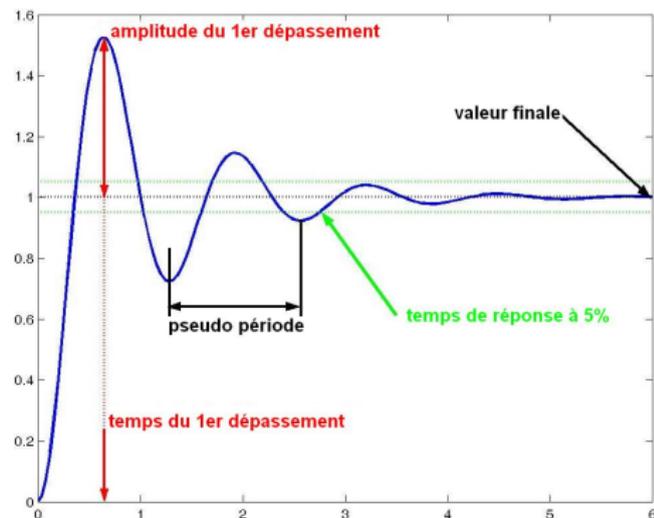
- en rouge :
 $z = 2, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en bleu :
 $z = 1, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s
- en noir :
 $z = 0.2, K = 1$ et $\omega_0 = 5$ rad/s



3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Quelques données à retenir pour le cas $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$

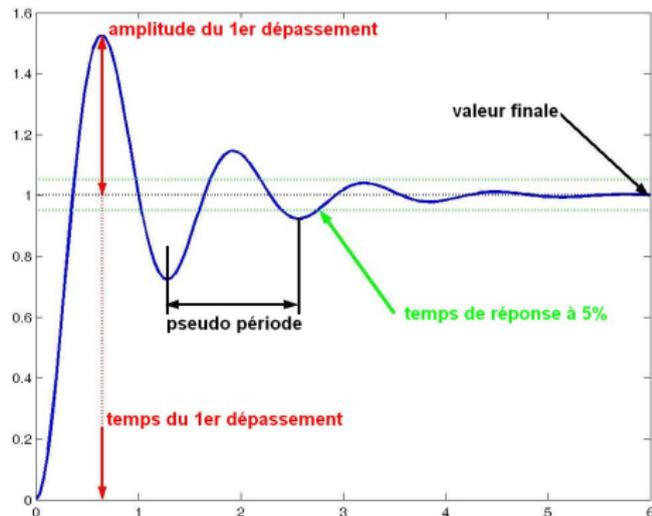


$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Quelques données à retenir pour le cas $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- pseudo-période des oscillations :
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$



$K = 1, z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

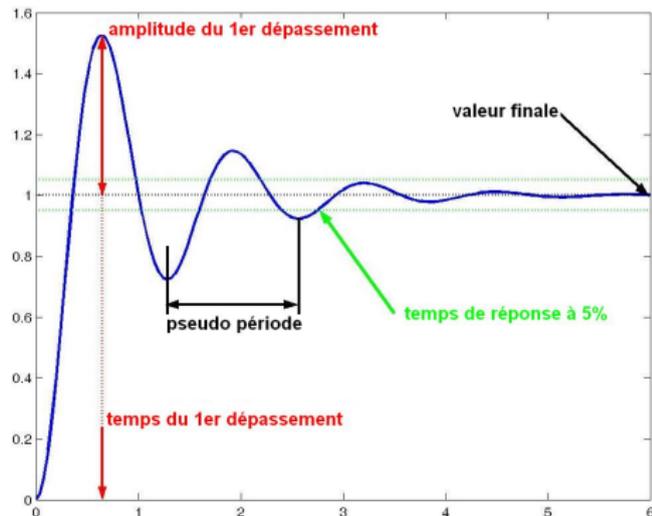
Quelques données à retenir pour le cas $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- pseudo-période des oscillations :

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

- temps de réponse à $x\%$:

$$t_{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$$

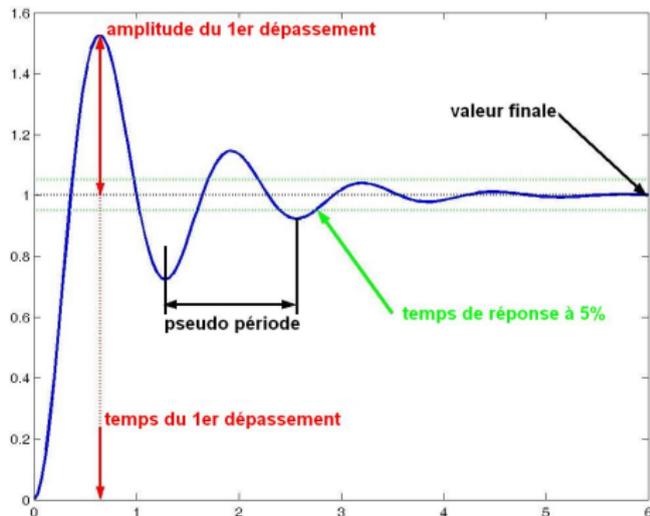


$K = 1, z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Quelques données à retenir pour le cas $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- pseudo-période des oscillations :
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$
- temps de réponse à $x\%$:
$$t_{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$$
- temps de réponse à 5% :
$$t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$$

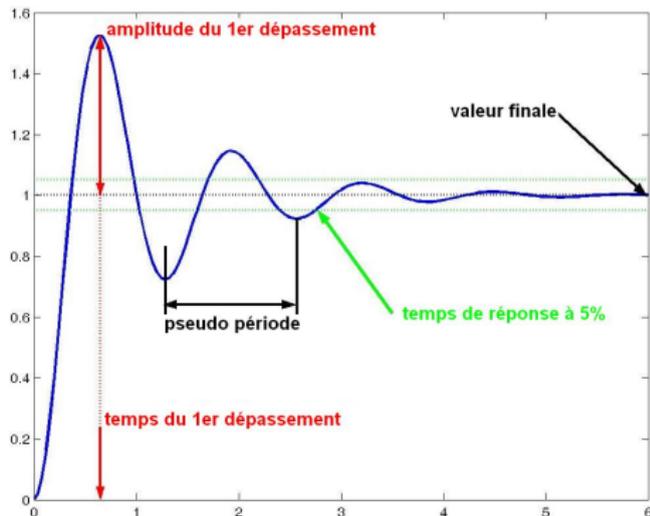


$K = 1$, $z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Quelques données à retenir pour le cas $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- pseudo-période des oscillations :
 $T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$
- temps de réponse à $x\%$:
 $t_{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$
- temps de réponse à 5% :
 $t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$
- amplitude du 1^{er} dépassement :
 $X_p = Ke^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$

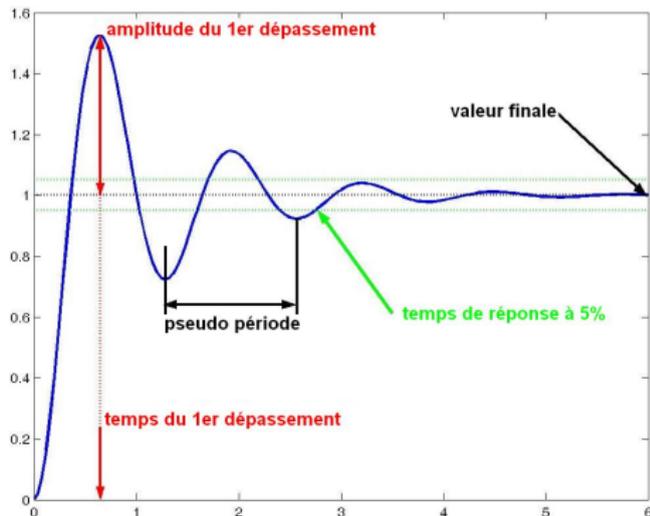


$K = 1, z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.2 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

Quelques données à retenir pour le cas $z < 1$:

- valeur finale pour $x(t) = \Gamma(t)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$
- pseudo-période des oscillations :
 $T_n = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$
- temps de réponse à $x\%$:
 $t_{x\%} = \frac{\ln\left(\frac{100}{x\sqrt{1-z^2}}\right)}{z\omega_0}$
- temps de réponse à 5% :
 $t_{5\%} \approx \frac{3}{z\omega_0}$
- amplitude du 1^{er} dépassement :
 $X_p = Ke^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$
- instant du 1^{er} dépassement :
 $t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$



$K = 1, z = 0.2$ et $\omega_0 = 5$ rad/s

3.2 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

3.2 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = \sin(\omega t)$ il vient :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} \right) d\tau$$

3.2 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = \sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) \left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} \right) d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i} \right) \left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right) - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right) \left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \right)\end{aligned}$$

3.2 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = \sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) \left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} \right) d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i} \right) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right)}_{H(p=i\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \right)}_{H(p=-i\omega)=\overline{H(p=i\omega)}}\end{aligned}$$

3.2 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = \sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) \left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} \right) d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i} \right) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right)}_{H(p=i\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \right)}_{H(p=-i\omega)=\overline{H(p=i\omega)}} \end{aligned}$$

- En posant $|H(i\omega)| = G(\omega)$ et $\text{Arg}(H(i\omega)) = \phi(\omega)$, on a :

$$y(t) = \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i} \right) G(\omega)e^{i\phi(\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right) G(\omega)e^{-i\phi(\omega)}$$

3.2 Réponse fréquentielle d'un système (d'ordre 2)

- Réponse de $H(p)$ à $X(p)$: $Y(p) = H(p)X(p)$
- En temporel : produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$ défini par :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Dans le cas $x(t) = \sin(\omega t)$ il vient :

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) \left(\frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{-i\omega(t-\tau)}}{2i} \right) d\tau \\ &= \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i} \right) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right)}_{H(p=i\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right) \underbrace{\left(\int_0^{\infty} h(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau \right)}_{H(p=-i\omega)=\overline{H(p=i\omega)}}\end{aligned}$$

- En posant $|H(i\omega)| = G(\omega)$ et $\text{Arg}(H(i\omega)) = \phi(\omega)$, on a :

$$y(t) = \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i} \right) G(\omega)e^{i\phi(\omega)} - \left(\frac{e^{-i\omega t}}{2i} \right) G(\omega)e^{-i\phi(\omega)}$$

- Finalement, **sans hypothèse sur l'ordre de $H(p)$** , on a :

$$y(t) = G(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$$

3.2 Réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2

La réponse sinusoïdale d'un système linéaire est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))$$

3.2 Réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2

La réponse sinusoïdale d'un système linéaire est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω
- le signal d'entrée est amplifié de $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- le signal d'entrée est déphasé de $\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$

3.2 Réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2

La réponse sinusoïdale d'un système linéaire est :

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))$$

- la sortie oscille à la même fréquence que l'entrée : ω
- le signal d'entrée est amplifié de $G(\omega) = |H(j\omega)|$
- le signal d'entrée est déphasé de $\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$

La réponse sinusoïdale d'un système d'ordre 2 est :

$$y(t) = G(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

avec : $G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et $\phi(\omega) = -\text{Atan}\left(\frac{2z \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

4.1. Approche fréquentielle des systèmes linéaires

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système en fonction de la *fréquence* du signal d'entrée.

Exemples :

- filtres : box/téléphone, box/ordinateurs
- oreilles : homme/chien/baleine
- amortisseurs automobiles

4.1. Approche fréquentielle des systèmes linéaires

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système en fonction de la *fréquence* du signal d'entrée.

Exemples :

- filtres : box/téléphone, box/ordinateurs
- oreilles : homme/chien/baleine
- amortisseurs automobiles

Justification :

- Tout signal peut se décomposer en somme pondérée de sinus (Fourier)
- Linéarité : $y(\sum_i x_i(t)) = \sum_i y(x_i(t))$

4.1. Approche fréquentielle des systèmes linéaires

Étude fréquentielle

Caractériser la réponse du système en fonction de la *fréquence* du signal d'entrée.

Exemples :

- filtres : box/téléphone, box/ordinateurs
- oreilles : homme/chien/baleine
- amortisseurs automobiles

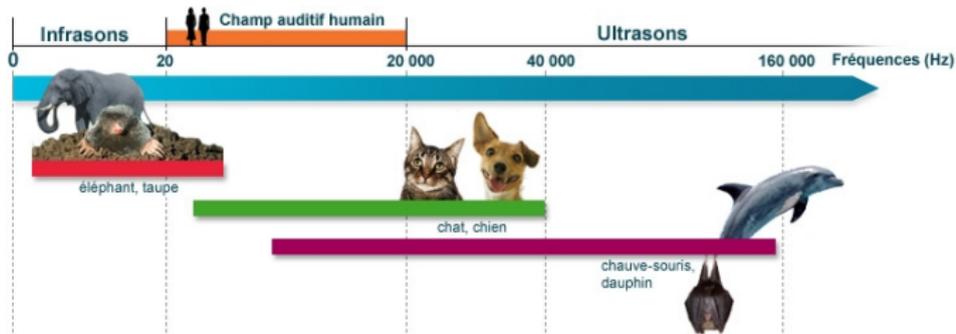
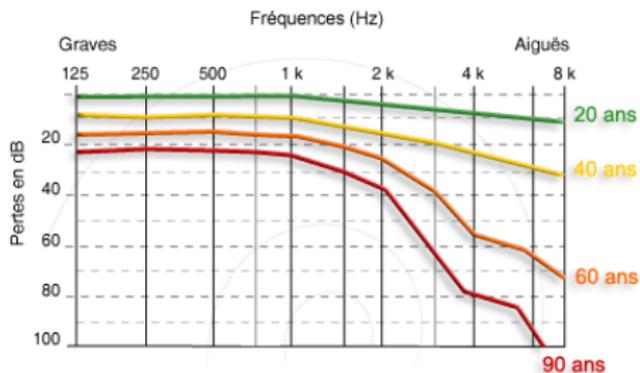
Justification :

- Tout signal peut se décomposer en somme pondérée de sinus (Fourier)
- Linéarité : $y(\sum_i x_i(t)) = \sum_i y(x_i(t))$

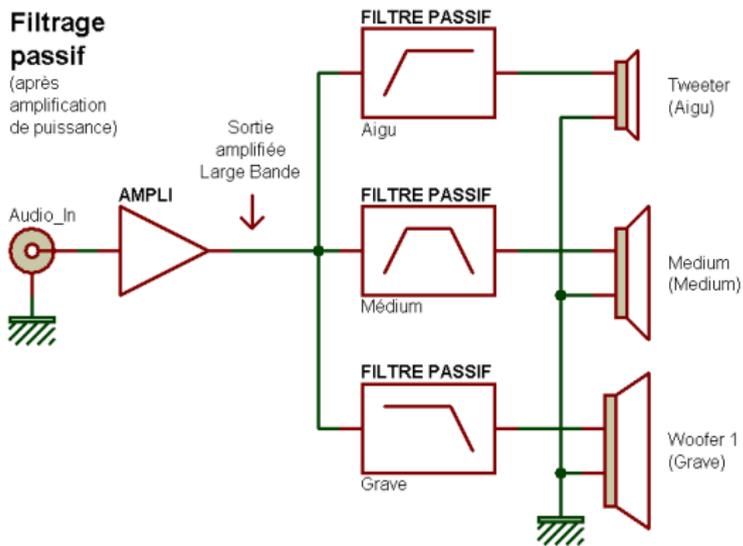
Réponse fréquentielle d'un système linéaire $H(p)$ à $x(t) = \sin(\omega t)$

$$y(t) = \underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{amplification } G(\omega)} \sin(\omega t + \underbrace{\text{Arg}(H(j\omega))}_{\text{déphasage } \phi(\omega)})$$

4.1 Exemple de l'approche fréquentielle : une oreille



4.1 Exemple de l'approche fréquentielle : une enceinte



4.1(2.3) Diagrammes de Bode

Construction d'un diagramme de Bode

- tracé du gain en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(|H(j\omega)|)$$

- tracé de la phase :

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$$

- en fonction de ω , en échelle logarithmique (1 graduation $\sim 10 \times \omega$)

4.1(2.3) Diagrammes de Bode

Construction d'un diagramme de Bode

- tracé du gain en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega)) = 20\log(|H(j\omega)|)$$

- tracé de la phase :

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$$

- en fonction de ω , en échelle logarithmique (1 graduation $\sim 10 \times \omega$)

Intérêts du diagramme de Bode :

- synthétique (grande échelle de variation de ω)
- lorsque deux systèmes sont mis en série :
 - les gains en décibels s'ajoutent
 - les déphasages s'ajoutent

4.2(2.3) Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{j\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

4.2(2.3) Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

Fonction de transfert :

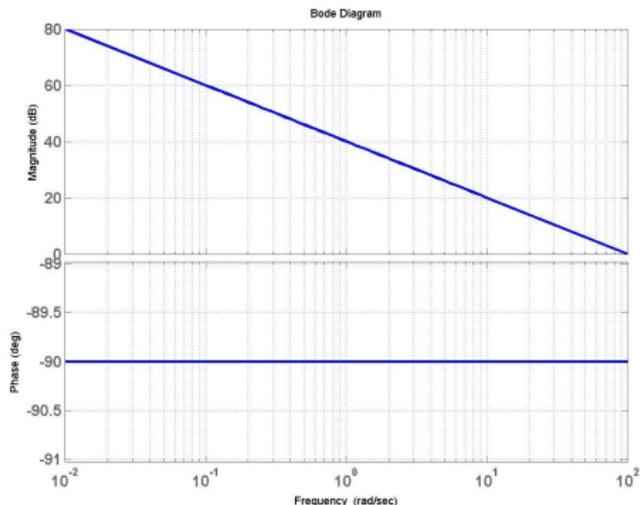
$$H(p) = \frac{K}{p}$$

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{j\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Exemple : $H(p) = \frac{100}{p}$

- pente du gain : -20 dB/dec
- gain nul pour : $\omega = K$
- déphasage constant
 $\phi(\omega) = -90^\circ$



4.3(2.3) Réponse fréquentielle d'un système du 1er ordre

diagramme de Bode :

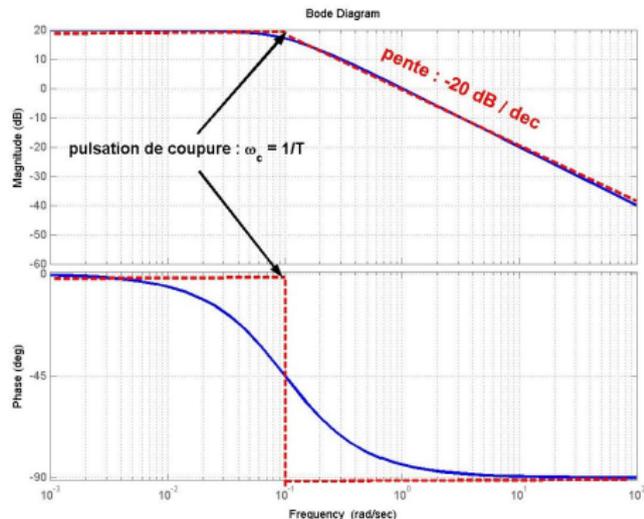
- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A \tan(\omega T)$

4.3(2.3) Réponse fréquentielle d'un système du 1er ordre

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A \tan(\omega T)$

Exemple : $H(p) = \frac{10}{1+10p}$



4.3(2.3) Réponse fréquentielle d'un système du 1er ordre

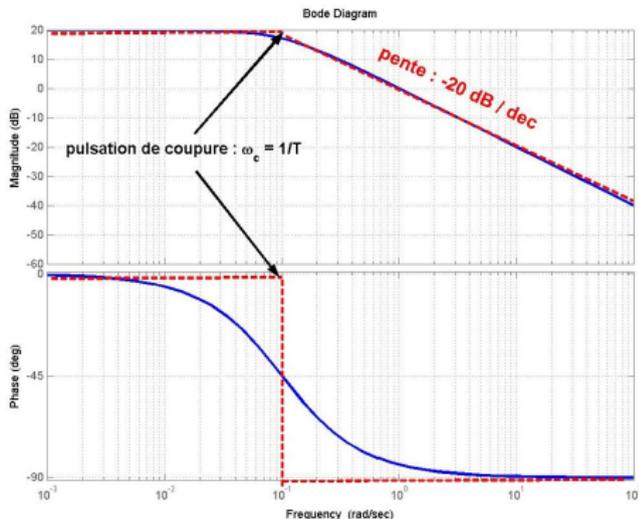
diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -\text{Atan}(\omega T)$

Exemple : $H(p) = \frac{10}{1+10p}$

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20 \log K \\ \phi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$



4.3(2.3) Réponse fréquentielle d'un système du 1er ordre

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\left| \frac{K}{1+jT\omega} \right| \right) = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T^2\omega^2)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A \tan(\omega T)$

Exemple : $H(p) = \frac{10}{1+10p}$

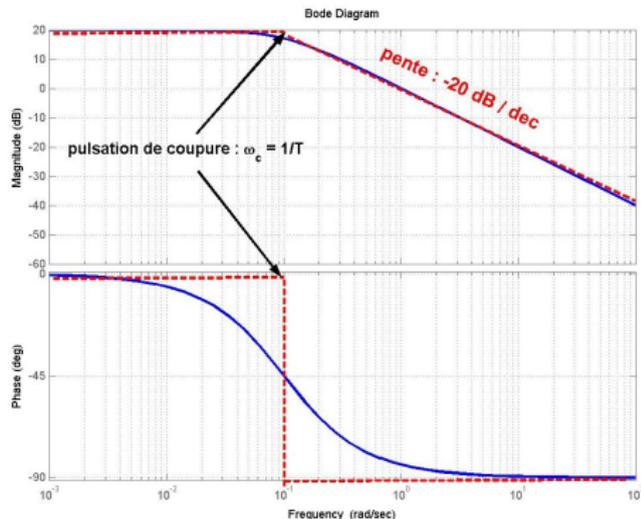
- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20 \log K \\ \phi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20 \log K - 20 \log(\omega T) \\ \phi(\omega) \approx -90^\circ \end{cases}$$

- Bande passante
ex. BP à -3 dB $\omega \in \left[0, \frac{1}{T}\right]$



4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

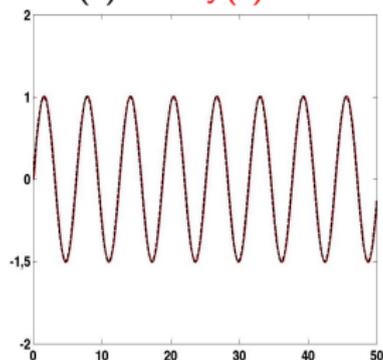
$$K = 1 \quad , \quad z = 0.3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.06p + 1}$$

Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pour $\omega = 1 \text{ rad/s}$

- - $x(t)$ et $-y(t)$



- gain unitaire
- pas de déphasage

4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

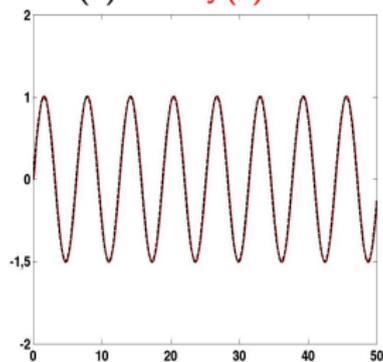
$$K = 1 \quad , \quad z = 0.3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.06p + 1}$$

Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pour $\omega = 1 \text{ rad/s}$

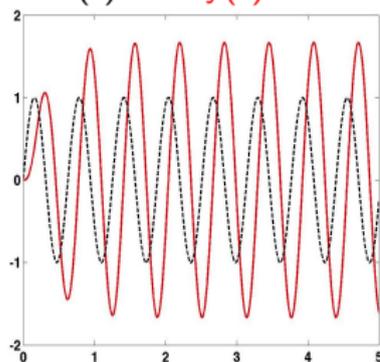
- - $x(t)$ et $-y(t)$



- gain unitaire
- pas de déphasage

- pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$

- - $x(t)$ et $-y(t)$



- amplification
- déphasage faible

4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

On considère le système du deuxième ordre défini par :

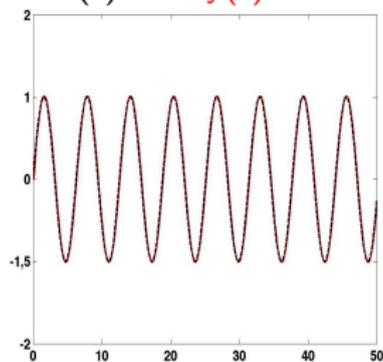
$$K = 1 \quad , \quad z = 0.3 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$H(p) = \frac{1}{0.01p^2 + 0.06p + 1}$$

Influence de la pulsation du signal d'entrée sur la réponse :

- pour $\omega = 1 \text{ rad/s}$

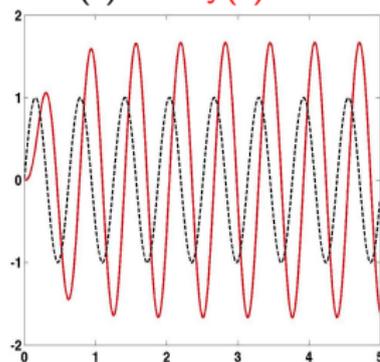
- - $x(t)$ et $-y(t)$



- gain unitaire
- pas de déphasage

- pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$

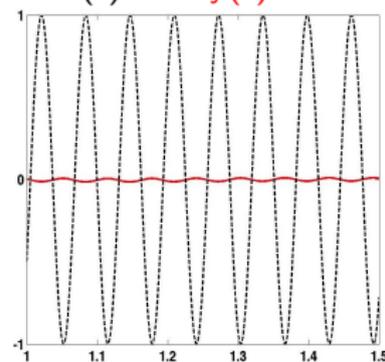
- - $x(t)$ et $-y(t)$



- amplification
- déphasage faible

- pour $\omega = 100 \text{ rad/s}$

- - $x(t)$ et $-y(t)$



- atténuation
- déphasage fort

4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

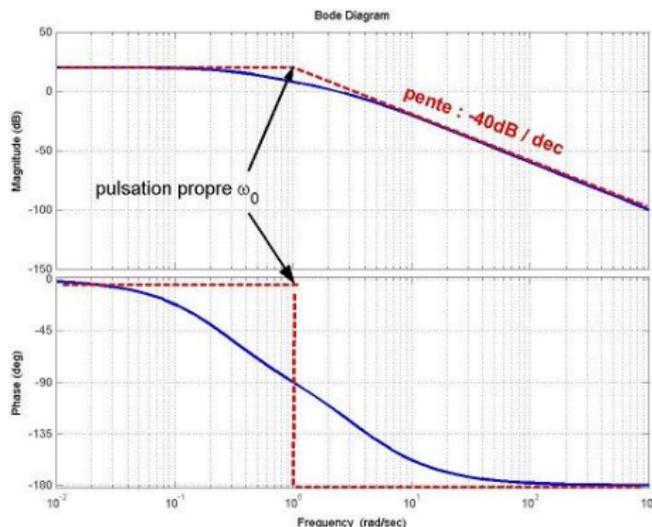
- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20\log(K) - 10\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A\text{atan}\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20\log(K) - 10\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A\text{atan}\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Exemple : $H(p) = \frac{10}{p^2 + 4p + 1}$



4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

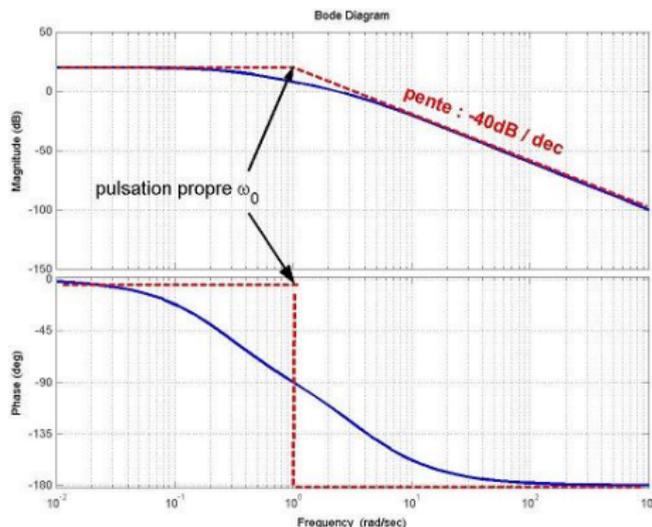
diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20\log(K) - 10\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A\text{atan}\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

Exemple : $H(p) = \frac{10}{p^2 + 4p + 1}$

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20\log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$



4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

diagramme de Bode :

- gain en dB : $G_{dB}(\omega) = 20\log(K) - 10\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- déphasage : $\phi(\omega) = -A\text{atan}\left(\frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$

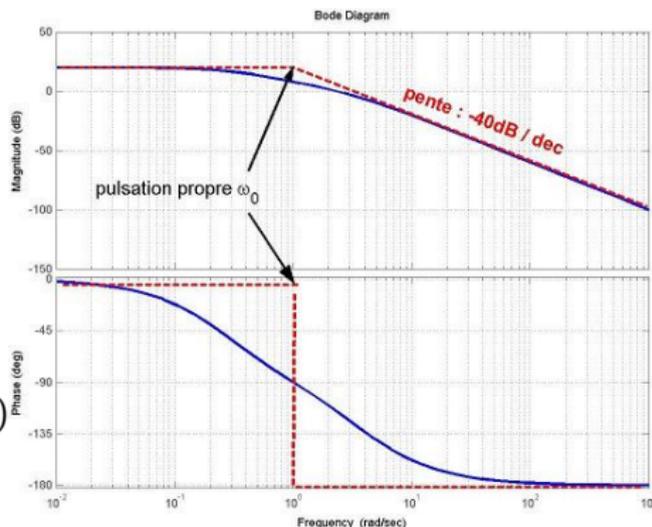
Exemple : $H(p) = \frac{10}{p^2 + 4p + 1}$

- Basses fréquences : $H(j\omega) \approx K$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20\log(K) \\ \phi(\omega) \approx 0^\circ \end{cases}$$

- Hautes fréquences : $H(j\omega) \approx \frac{K\omega_0^2}{-\omega^2}$

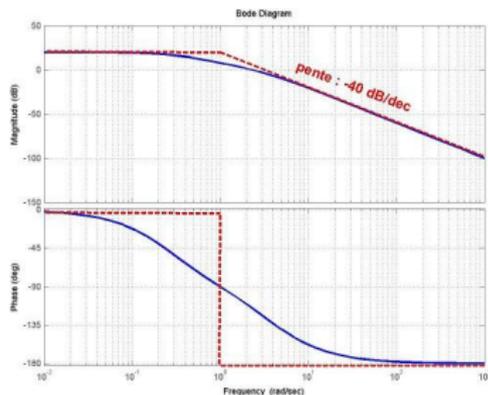
$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) \approx 20\log(K\omega_0^2) - 40\log(\omega) \\ \phi(\omega) \approx -180^\circ \end{cases}$$



4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

Phénomène de résonance :

- si $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - le gain décroît pour tout ω
 - exemple : $z = 2$, $K = 10$ et $\omega_0 = 1$ rad/s



4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

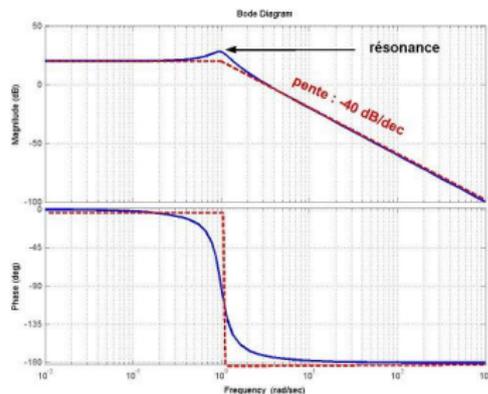
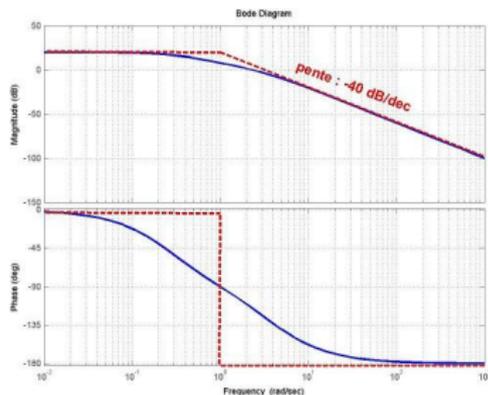
Phénomène de résonance :

- si $z > \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - le gain décroît pour tout ω
 - exemple : $z = 2$, $K = 10$ et $\omega_0 = 1$ rad/s
- si $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - le gain présente un maximum ou **résonance**
 - le maximum est atteint en

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

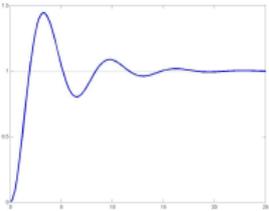
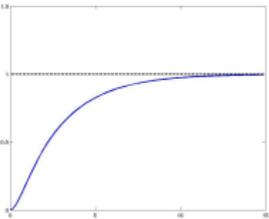
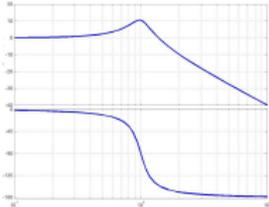
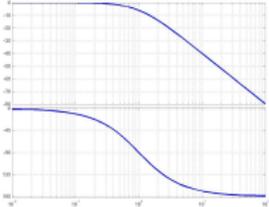
ω_r : **pulsation de résonance**

- exemple : $z = 0.2$, $K = 10$ et $\omega_0 = 1$ rad/s



4.4(3.3) Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2

Pour résumer :

z	$z < 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2} < z < 1$	$z > 1$
temporel	<p>oscillant</p> 		<p>amorti</p> 
fréquentiel	<p>résonance</p> 	<p>gain monotone décroissant</p> 	

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk}p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk}p + 1)}$$

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk}p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk}p + 1)}$$

Le terme K_0

- gain constant $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 \log(K_0)$
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk}p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk}p + 1)}$$

Le terme K_0

- gain constant $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 \log(K_0)$
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

Le terme p^α

- gain de pente constante $\rightarrow \frac{dG_{dB}(\omega)}{d\omega} = 20\alpha \text{ dB/dec}$
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 90\alpha^\circ$

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk} p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (\mathbf{T}_{pk} p + \mathbf{1})}$$

Le terme K_0

- gain constant $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 \log(K_0)$
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

Le terme p^α

- gain de pente constante $\rightarrow \frac{dG_{dB}(\omega)}{d\omega} = 20\alpha$ dB/dec
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 90\alpha^\circ$

Chaque terme $\frac{1}{T_{pk} p + 1}$ provoque, en $\omega = 1/T_{pk}$:

- gain : une variation de la pente de -20 dB/dec
- phase : une variation de la valeur de -90°

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

On peut factoriser $H(p)$ par ses pôles/zéros :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n} = K_0 p^\alpha \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk}p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk}p + 1)}$$

Le terme K_0

- gain constant $\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 \log(K_0)$
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 0$

Le terme p^α

- gain de pente constante $\rightarrow \frac{dG_{dB}(\omega)}{d\omega} = 20\alpha$ dB/dec
- phase constante $\rightarrow \varphi(\omega) = 90\alpha^\circ$

Chaque terme $\frac{1}{T_{pk}p+1}$ provoque, en $\omega = 1/T_{pk}$:

- gain : une variation de la pente de -20 dB/dec
- phase : une variation de la valeur de -90°

Chaque terme $T_{zk}p + 1$ provoque, en $\omega = 1/T_{zk}$:

- gain : une variation de la pente de $+20$ dB/dec
- phase : une variation de la valeur de $+90^\circ$

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

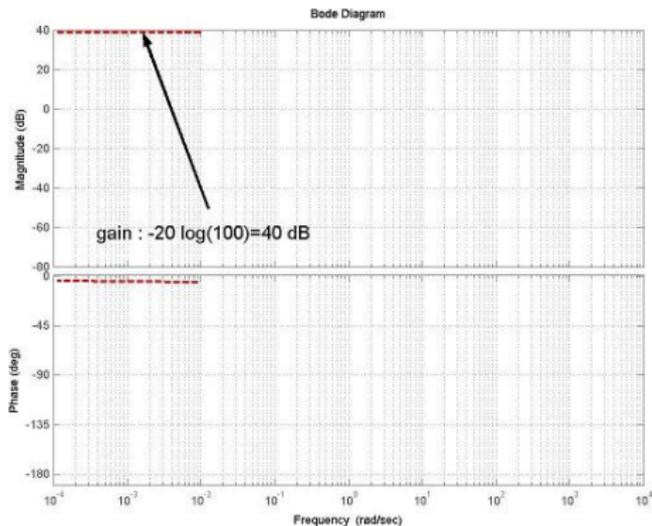
$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

- gain statique $K = 100$

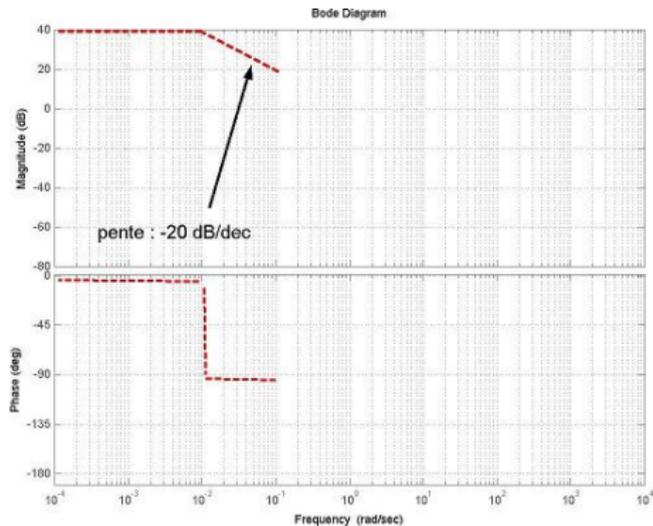


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture ↘ en $\omega = 0.01$

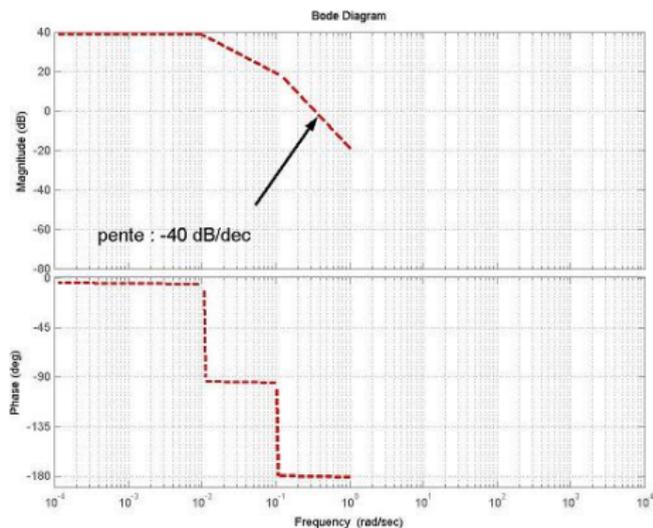


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture ↘ en $\omega = 0.01$
- rupture ↘ en $\omega = 0.1$

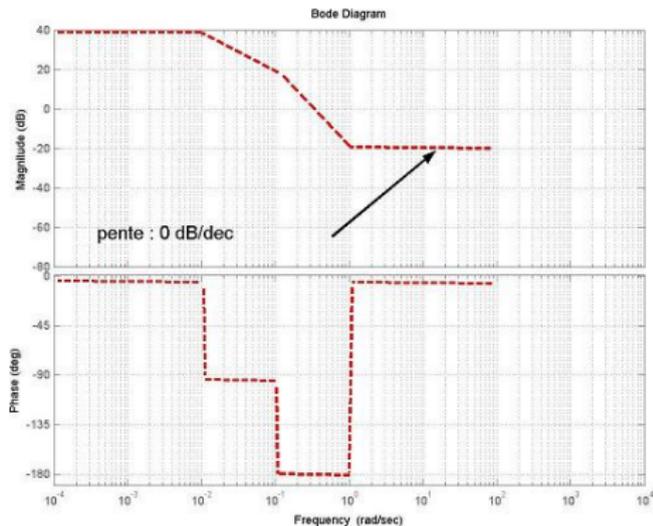


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture ↘ en $\omega = 0.01$
- rupture ↘ en $\omega = 0.1$
- double rupture ↗ en $\omega = 1$

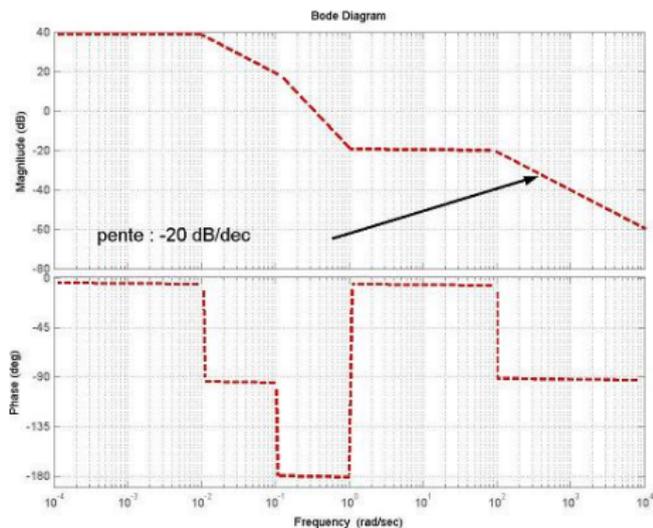


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture ↘ en $\omega = 0.01$
- rupture ↘ en $\omega = 0.1$
- double rupture ↗ en $\omega = 1$
- rupture ↘ en $\omega = 100$

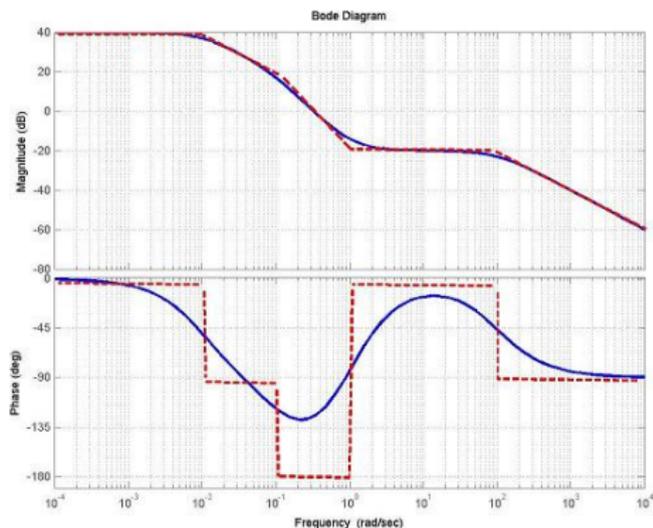


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)}$$

- gain statique $K = 100$
- rupture ↘ en $\omega = 0.01$
- rupture ↘ en $\omega = 0.1$
- double rupture ↗ en $\omega = 1$
- rupture ↘ en $\omega = 100$



4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

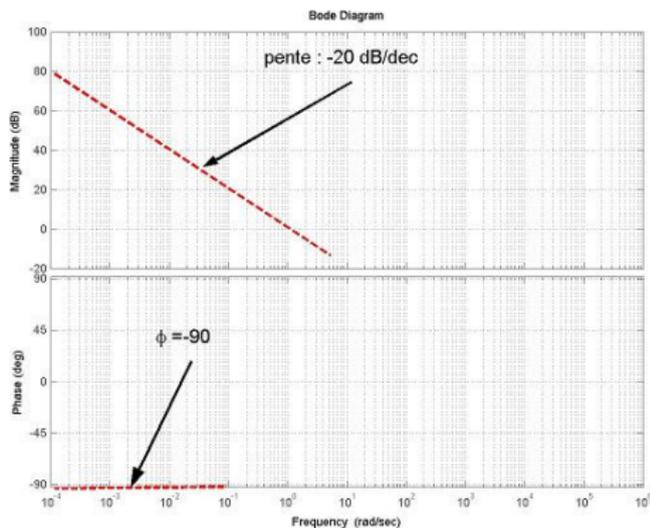
$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$

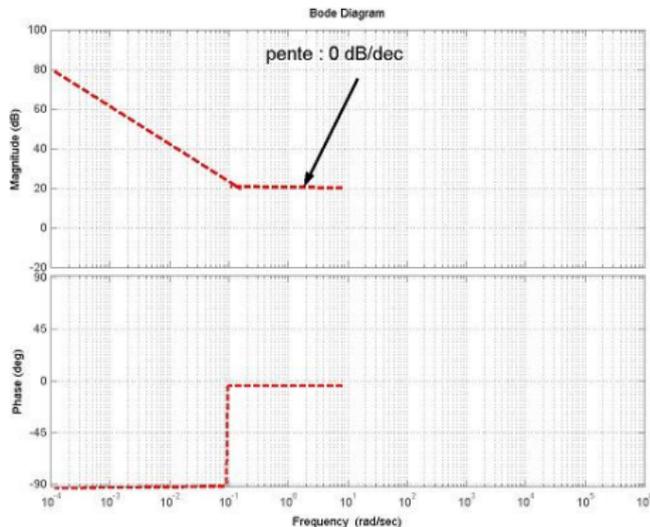


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture ↗ en $\omega = 0.1$

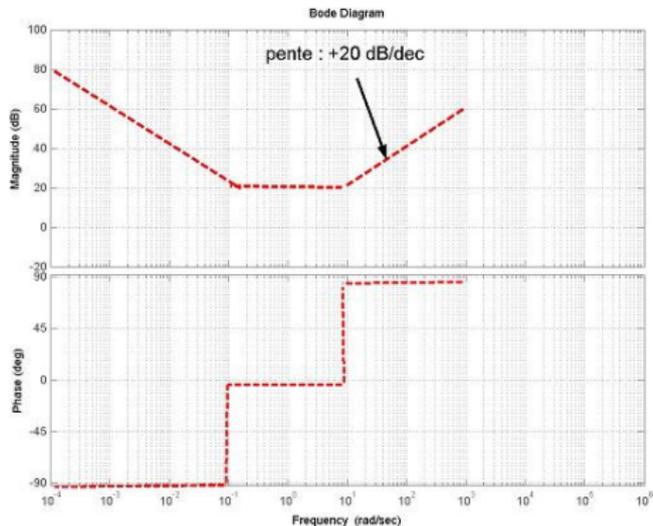


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture ↗ en $\omega = 0.1$
- rupture ↘ en $\omega = 10$

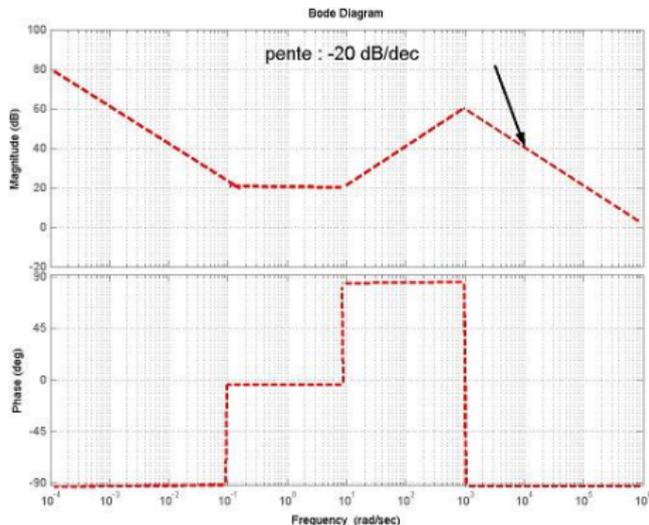


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture ↗ en $\omega = 0.1$
- rupture ↗ en $\omega = 10$
- double rupture ↘ en $\omega = 1000$

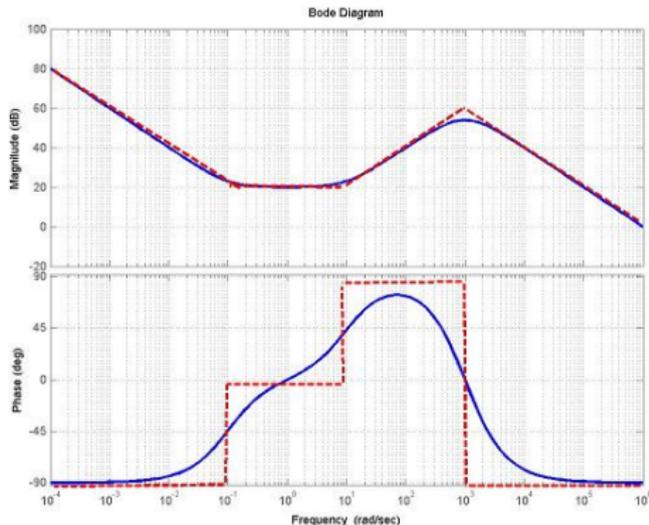


4.5(4.3) Diagramme de Bode d'un système d'ordre $n > 2$

- On considère le système :

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

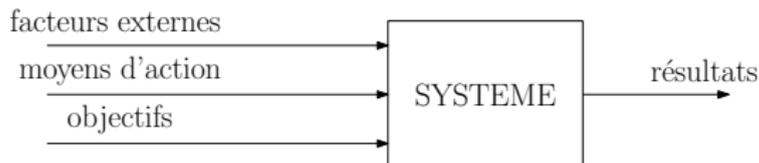
- intégrateur $\frac{1}{p}$
- rupture ↗ en $\omega = 0.1$
- rupture ↗ en $\omega = 10$
- double rupture ↘ en $\omega = 1000$



5.1 Introduction : pourquoi la boucle fermée (BF) ?

Pour améliorer les performances d'un système il faut :

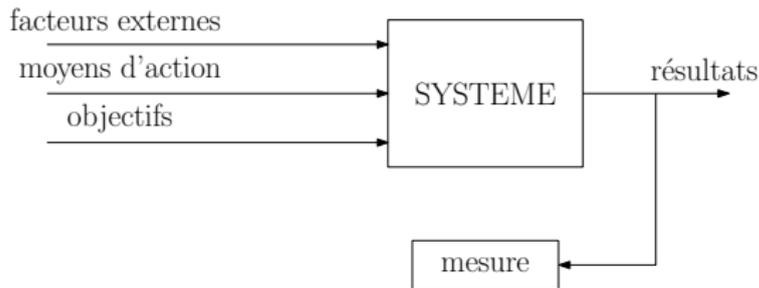
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre



5.1 Introduction : pourquoi la boucle fermée (BF) ?

Pour améliorer les performances d'un système il faut :

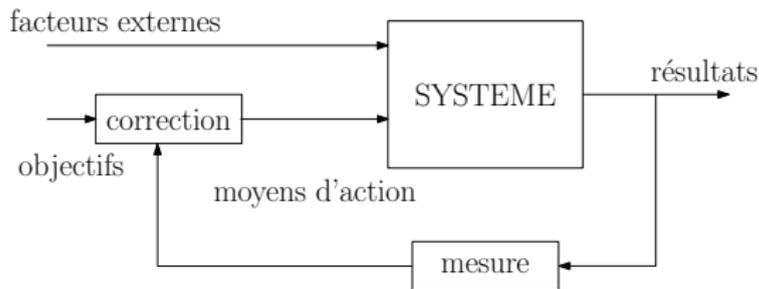
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus



5.1 Introduction : pourquoi la boucle fermée (BF) ?

Pour améliorer les performances d'un système il faut :

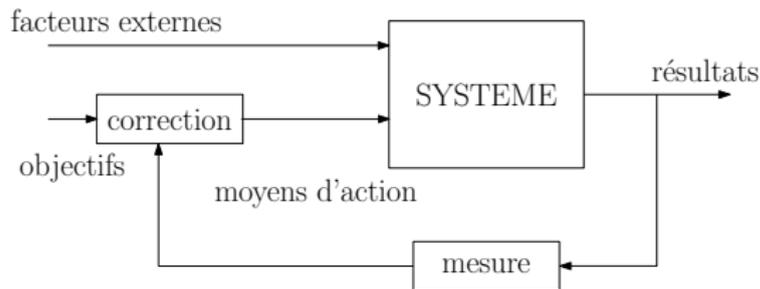
- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus
- comparer résultats et objectifs
- adapter son action aux objectifs



5.1 Introduction : pourquoi la boucle fermée (BF) ?

Pour améliorer les performances d'un système il faut :

- identifier les moyens d'action de l'opérateur
- identifier les facteurs externes
- définir les objectifs à atteindre
- mesurer les résultats obtenus
- comparer résultats et objectifs
- adapter son action aux objectifs

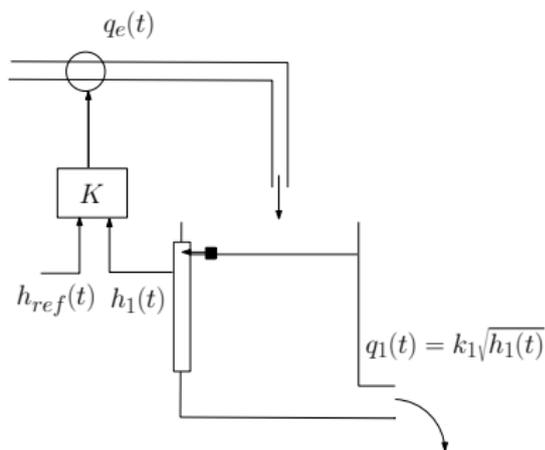


L'automatisation reproduit le comportement humain normal :

observation → réflexion → action

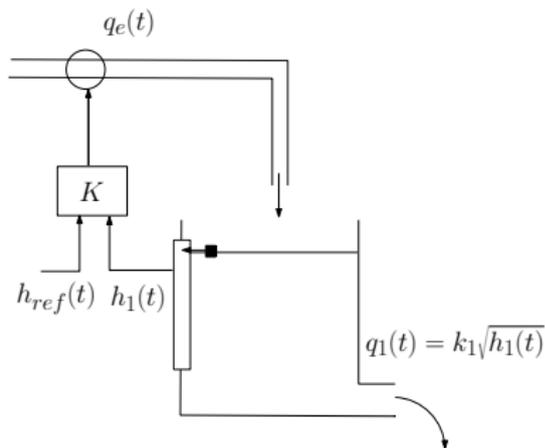
5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- On veut réguler la hauteur d'un réservoir en contrôlant le débit d'entrée :
 - action : débit $q_e(t)$
 - objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
 - mesure : hauteur $h_1(t)$



5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- On veut réguler la hauteur d'un réservoir en contrôlant le débit d'entrée :
 - action : débit $q_e(t)$
 - objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
 - mesure : hauteur $h_1(t)$



- **Boucle fermée** : on adapte la commande à la mesure:
 - $\begin{cases} \text{si } h_1(t) > h_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } q_e(t) \\ \text{si } h_1(t) < h_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } q_e(t) \end{cases} \Rightarrow q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_1(t))$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$S\dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_1(t))$$

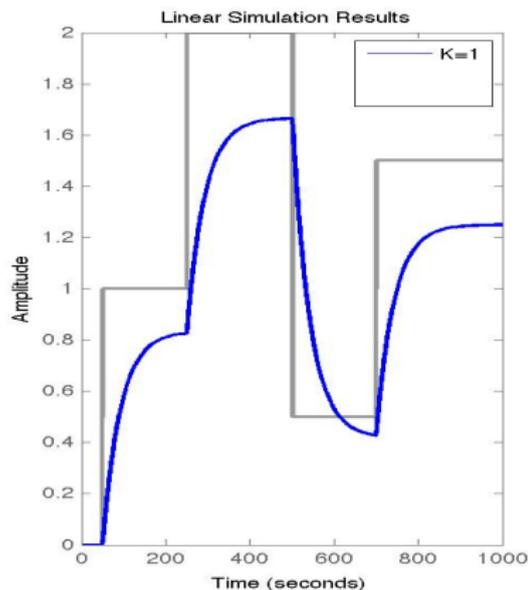
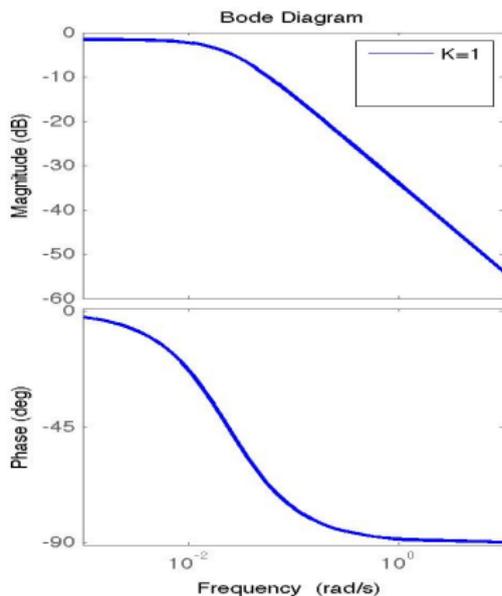
5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$S\dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_1(t))$$

- Influence de **K** sur les diagrammes de Bode et la réponse temporelle

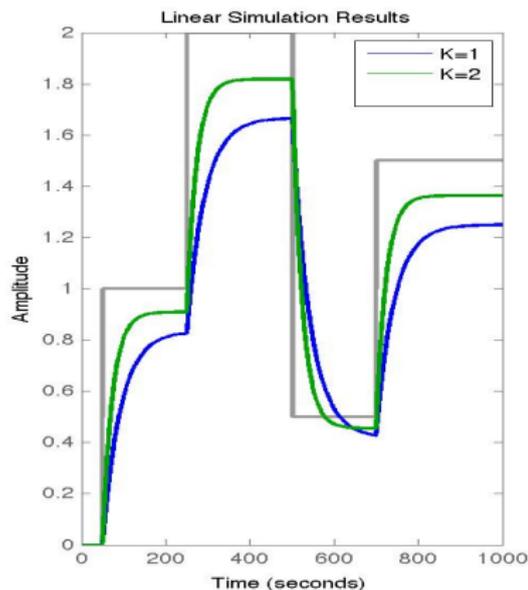
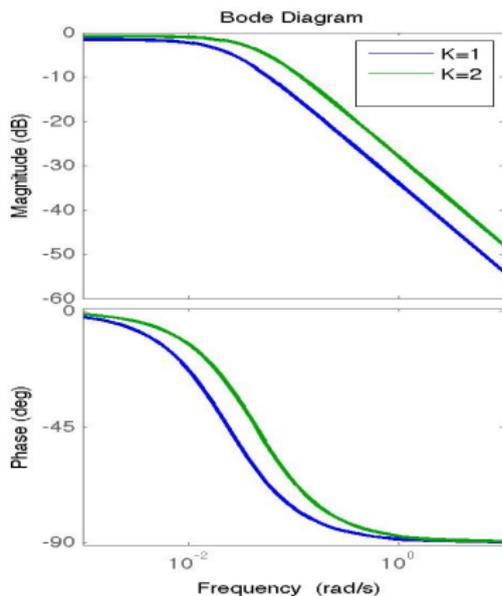


5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$\begin{aligned}S\dot{h}_1(t) &= q_e(t) - k_1 h_1(t) \\ q_e(t) &= K(h_{ref}(t) - h_1(t))\end{aligned}$$

- Influence de **K** sur les diagrammes de Bode et la réponse temporelle

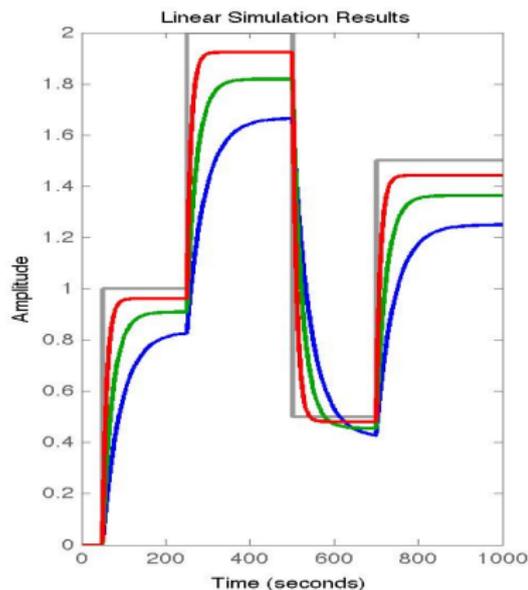
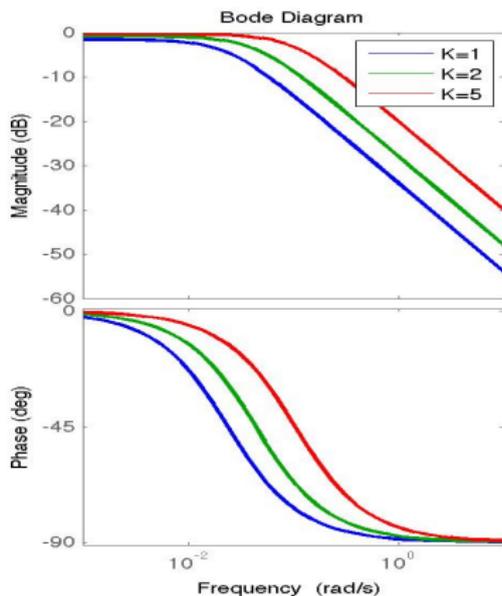


5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- Le système en boucle fermée est décrit par :

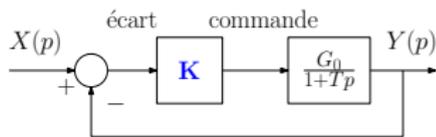
$$\begin{aligned}S\dot{h}_1(t) &= q_e(t) - k_1 h_1(t) \\ q_e(t) &= K(h_{ref}(t) - h_1(t))\end{aligned}$$

- Influence de **K** sur les diagrammes de Bode et la réponse temporelle



5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

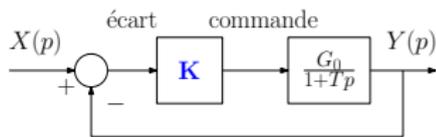
- Système du 1^{er} ordre en boucle fermée avec un correcteur proportionnel



$$\begin{cases} \text{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1+T_p p} U(p) \\ \text{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- Système du 1^{er} ordre en boucle fermée avec un correcteur proportionnel



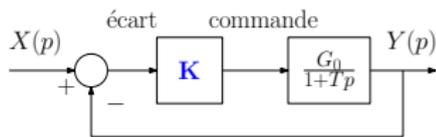
$$\begin{cases} \text{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1+Tp} U(p) \\ \text{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un premier ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + T_{BF}p} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} \xrightarrow{K \gg 1} 1 \\ T_{BF} = \frac{T}{1+KG_0} \xrightarrow{K \gg 1} 0 \end{cases}$$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système du 1er ordre

- Système du 1^{er} ordre en boucle fermée avec un correcteur proportionnel



$$\begin{cases} \text{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1+T_p} U(p) \\ \text{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un premier ordre :

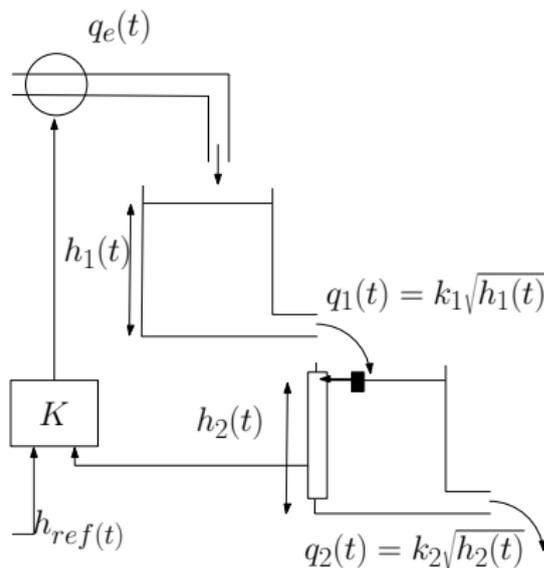
$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + T_{BF}p} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} \xrightarrow{K \gg 1} 1 \\ T_{BF} = \frac{T}{1+KG_0} \xrightarrow{K \gg 1} 0 \end{cases}$$

- Pour K grand :

- + suivi unitaire de $x(t)$ par $y(t)$
- + suivi rapide de $x(t)$ par $y(t)$
- commande grande : coûteuse, bruit amplifié

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

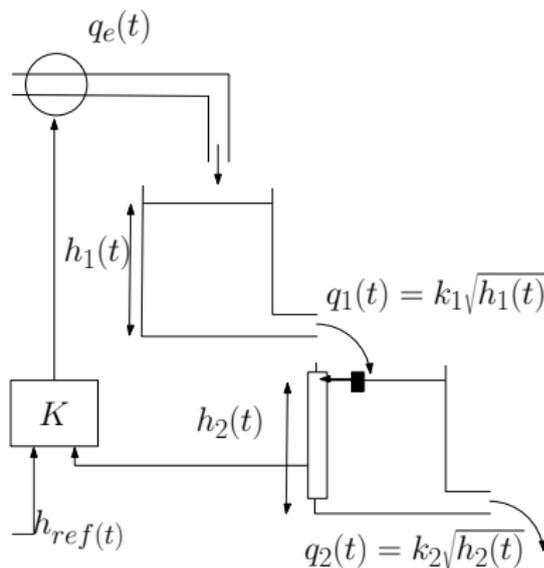
- On veut réguler $h_2(t)$ la hauteur du deuxième réservoir en contrôlant le débit d'entrée :
- action : débit $q_e(t)$
- objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
- mesure : hauteur $h_2(t)$



5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

- On veut réguler $h_2(t)$ la hauteur du deuxième réservoir en contrôlant le débit d'entrée :

- action : débit $q_e(t)$
- objectif : hauteur voulue $h_{ref}(t)$
- mesure : hauteur $h_2(t)$



- Boucle fermée :** on adapte la commande à la mesure:

- $\begin{cases} \text{si } h_2(t) > h_{ref}(t) \rightarrow \text{diminuer } q_e(t) \\ \text{si } h_2(t) < h_{ref}(t) \rightarrow \text{augmenter } q_e(t) \end{cases} \Rightarrow q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$S_1 \dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$S_2 \dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 h_2(t)$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

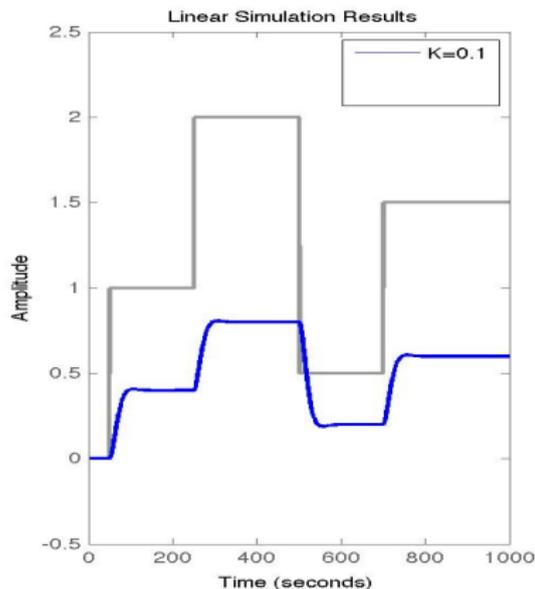
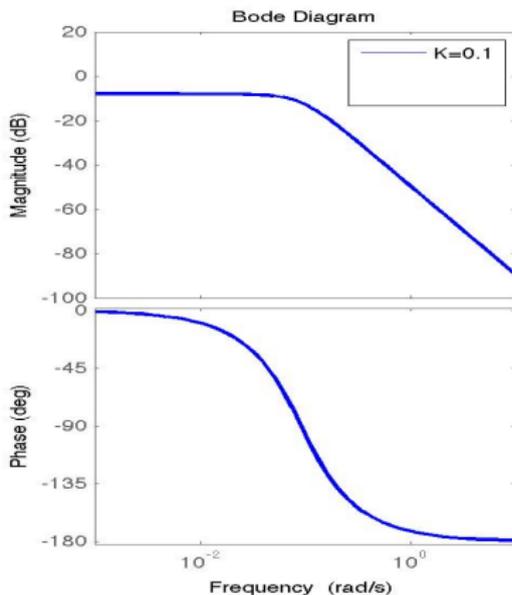
- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$S_1 \dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$S_2 \dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 h_2(t)$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$

- Influence de **K** sur les diagrammes de Bode et la réponse temporelle



5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

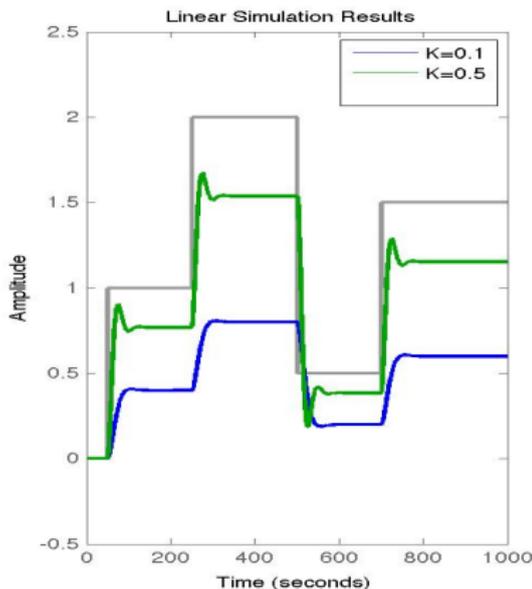
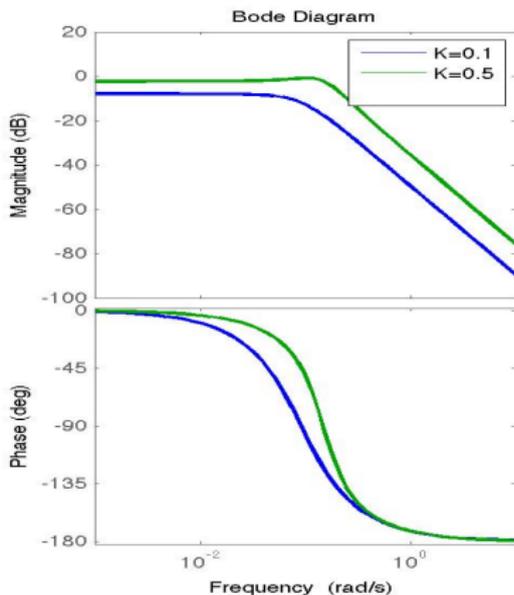
- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$S_1 \dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$S_2 \dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 h_2(t)$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$

- Influence de **K** sur les diagrammes de Bode et la réponse temporelle



5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

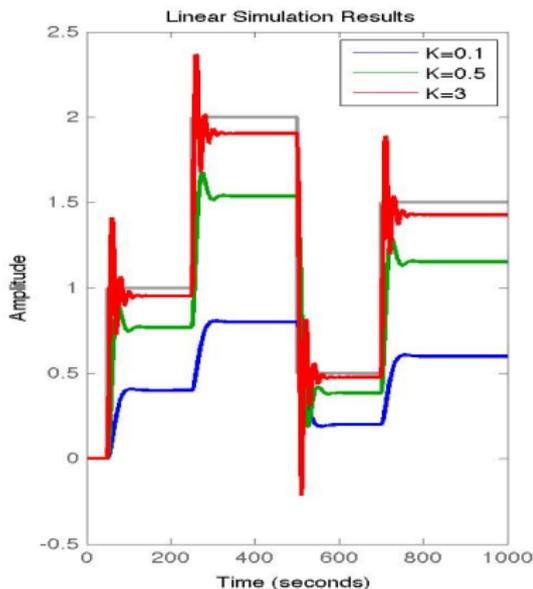
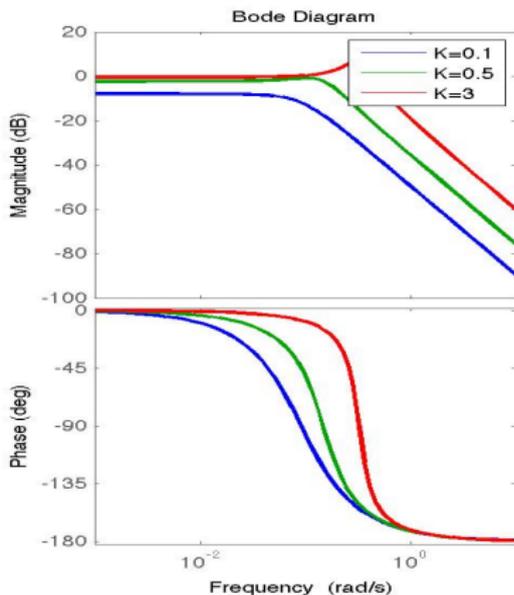
- Le système en boucle fermée est décrit par :

$$S_1 \dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 h_1(t)$$

$$S_2 \dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_2 h_2(t)$$

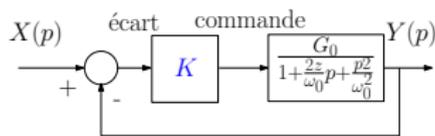
$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t))$$

- Influence de **K** sur les diagrammes de Bode et la réponse temporelle



5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

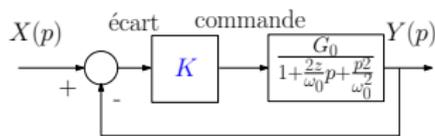
- Le résultat précédent se généralise à tout système du 2^{ème} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\begin{cases} \text{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \text{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 2^{ème} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



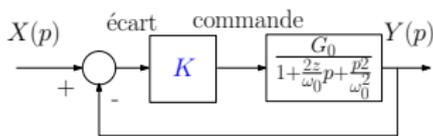
$$\begin{cases} \text{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \text{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un second ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{BF}^2}} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} & \xrightarrow{K \gg 1} 1 \\ \omega_{BF} = \omega_0 \sqrt{1 + KG_0} & \xrightarrow{K \gg 1} \gg 1 \\ z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KG_0}} & \xrightarrow{K \gg 1} 0 \end{cases}$$

5.2 Effet de la boucle fermée sur un système d'ordre 2

- Le résultat précédent se généralise à tout système du 2^{ème} ordre, régulé avec un correcteur proportionnel K :



$$\begin{cases} \text{système :} & Y(p) = \frac{G_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} U(p) \\ \text{correcteur :} & U(p) = K(X(p) - Y(p)) \end{cases}$$

- Le système en BF est un second ordre :

$$Y(p) = \frac{G_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{BF}^2}} X(p) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_{BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0} & \xrightarrow{K \gg 1} 1 \\ \omega_{BF} = \omega_0 \sqrt{1 + KG_0} & \xrightarrow{K \gg 1} \gg 1 \\ z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1+KG_0}} & \xrightarrow{K \gg 1} 0 \end{cases}$$

- Pour K grand :

- + suivi unitaire de $x(t)$ par $y(t)$
- + suivi rapide de $x(t)$ par $y(t)$
- risque d'oscillations rapides (ω_{BF} grand) et importantes (z_{BF} petit)
- commande grande : coûteuse, bruit amplifié

5.3 Structures de commande en boucle ouverte

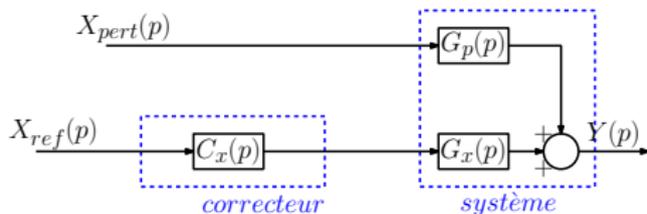
Hypothèse : une entrée de référence x_{ref} et une entrée de perturbation x_{pert}

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

- **Si aucune mesure n'est disponible**

→ boucle ouverte :

$$C_x \approx G_x^{-1}$$



5.3 Structures de commande en boucle ouverte

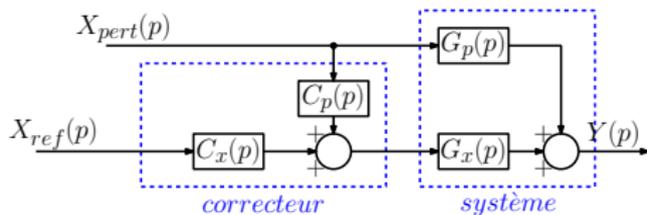
Hypothèse : une entrée de référence x_{ref} et une entrée de perturbation x_{pert}

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

- **Si la perturbation est mesurable**

→ BO avec anticipation :

$$C_x \approx G_x^{-1} \text{ et } C_p \approx -G_p G_x^{-1}$$



5.3 Structures de commande en boucle fermée

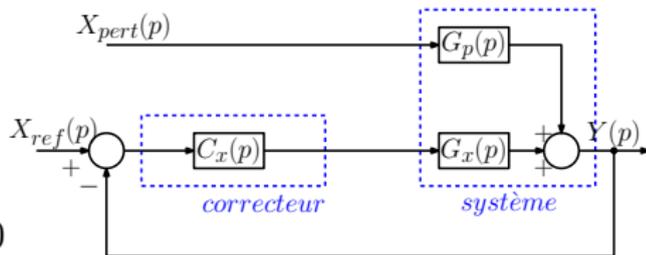
Hypothèse : une entrée de référence x_{ref} et une entrée de perturbation x_{pert}

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

- **Si la sortie est mesurable**

→ boucle fermée :

$$\frac{C_x G_x}{1 + C_x G_x} \approx 1 \text{ et } \frac{G_p}{1 + C_x G_x} \approx 0$$



5.3 Structures de commande en boucle fermée

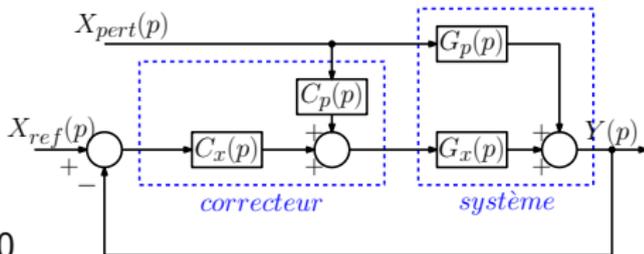
Hypothèse : une entrée de référence x_{ref} et une entrée de perturbation x_{pert}

Objectif : suivre la référence x_{ref} malgré la perturbation x_{pert}

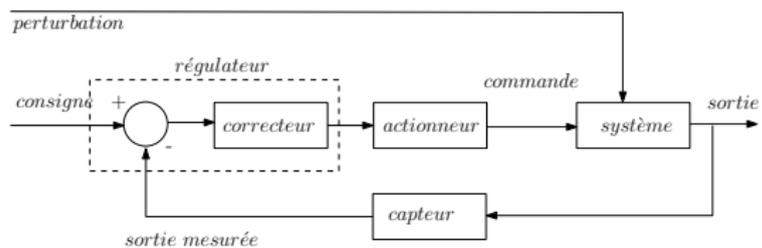
- **Si sortie et perturbation sont mesurables**

→ BF avec anticipation :

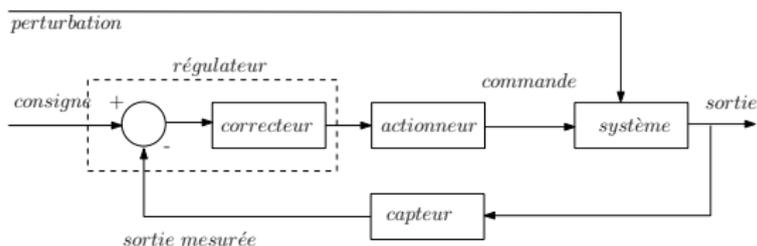
$$\frac{C_x G_x}{1 + C_x G_x} \approx 1 \text{ et } \frac{G_p + G_x C_p}{1 + C_x G_x} \approx 0$$



5.3 Schéma standard de régulation en BF



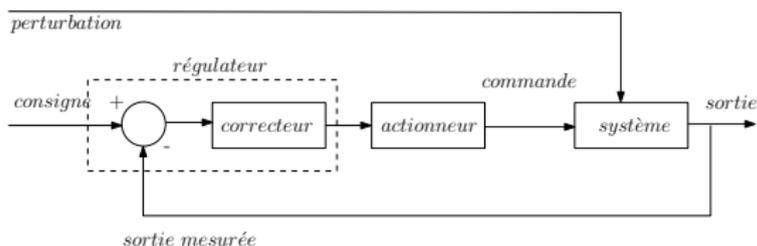
5.3 Schéma standard de régulation en BF



● Objectifs :

- suivi de consigne par la sortie
- limiter l'influence des perturbations
- être robuste à des erreurs de modélisation

5.3 Schéma standard de régulation en BF



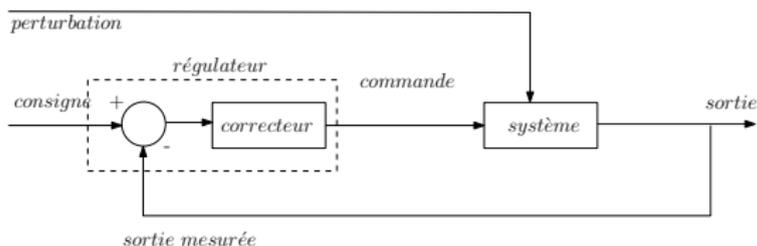
● Objectifs :

- suivi de consigne par la sortie
- limiter l'influence des perturbations
- être robuste à des erreurs de modélisation

● Hypothèses :

- capteur rapide (/ au système) → dynamique négligée

5.3 Schéma standard de régulation en BF



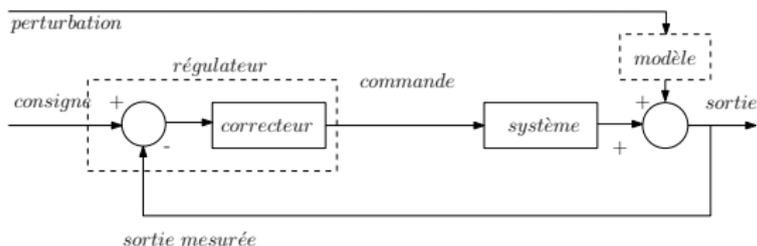
● Objectifs :

- suivi de consigne par la sortie
- limiter l'influence des perturbations
- être robuste à des erreurs de modélisation

● Hypothèses :

- capteur rapide (/ au système) → dynamique négligée
- actionneur rapide (/ au système) → dynamique négligée (ou intégrée)

5.3 Schéma standard de régulation en BF



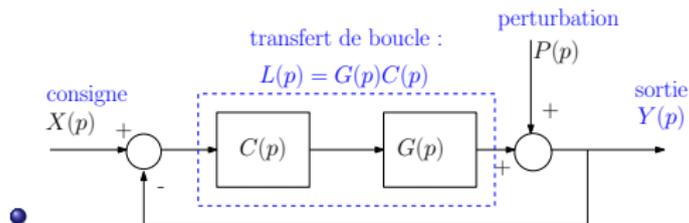
● Objectifs :

- suivi de consigne par la sortie
- limiter l'influence des perturbations
- être robuste à des erreurs de modélisation

● Hypothèses :

- capteur rapide (/ au système) → dynamique négligée
- actionneur rapide (/ au système) → dynamique négligée (ou intégrée)
- perturbations en sortie (entrée oubliée), parfois modélisées

6.1 Performances et robustesse en BF



- Le système en BF est décrit par :

$$Y(p) = \underbrace{\frac{L(p)}{1 + L(p)}}_{=F_{BF}, \text{ suivi de } X} X(p) + \underbrace{\frac{1}{1 + L(p)}}_{=S(p), \text{ sensibilité à } P} P(p)$$

- Connaissant $L(p) = G(p)C(p)$, peut-on savoir si le système en BF...
 - est stable ?
 - suit précisément $X(p)$?
 - reste stable si le gain statique de $G(p)$ varie ?
 - reste stable si la phase de $G(p)$ varie ?
 - atténue les perturbations $P(p)$?

6.2 Stabilité d'un système

Définition.

Un système est **stable**

- ⇔ sa réponse impulsionnelle tend vers 0, quand $t \rightarrow \infty$
- ⇔ toute entrée bornée provoque une sortie bornée
- ⇔ les pôles de la fonction de transfert sont tous à **partie réelle strictement négative**

Exemple :

$$G(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} \Rightarrow y(t) = a_1 e^{-2t} + \underbrace{a_2 e^t}_{\text{instable!}} + \underbrace{\dots}_{\text{entrée}}$$

6.2 Stabilité d'un système

Définition.

Un système est **stable**

- ⇔ sa réponse impulsionnelle tend vers 0, quand $t \rightarrow \infty$
- ⇔ toute entrée bornée provoque une sortie bornée
- ⇔ les pôles de la fonction de transfert sont tous à **partie réelle strictement négative**

Exemple :

$$G(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)} \Rightarrow y(t) = a_1 e^{-2t} + \underbrace{a_2 e^t}_{\text{instable!}} + \underbrace{\dots}_{\text{entrée}}$$

D'autres critères existent :

- pour tester la stabilité sans calculer les pôles en BF ?
→ critère de Routh
- pour tester la stabilité en **BF** en connaissant la **BO** ?
→ critère du revers

6.3 Précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

6.3 Précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Pour une entrée constante, $x(t) = x_0$, l'erreur statique est

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(p)} x_0 \end{aligned}$$

6.3 Précision statique en BF

- La réponse à $X(p)$, l'entrée de référence, est :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p)$$

- L'erreur de régulation, $e(t) = x(t) - y(t)$, est donnée par :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Pour une entrée constante, $x(t) = x_0$, l'erreur statique est

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(p)} x_0 \end{aligned}$$

- **Pour avoir e_∞ faible, il faut $|L(p)| \gg 1$ en basses fréquences**
- Si $L(p)$ contient un (ou plusieurs) intégrateur(s) $\Rightarrow e_\infty = 0$

6.3 Précision dynamique en BF

- Que devient l'erreur si $x(t)$ n'est pas constant ?
- L'erreur de poursuite est toujours définie par $e(t) = x(t) - y(t)$, donc :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$
$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

6.3 Précision dynamique en BF

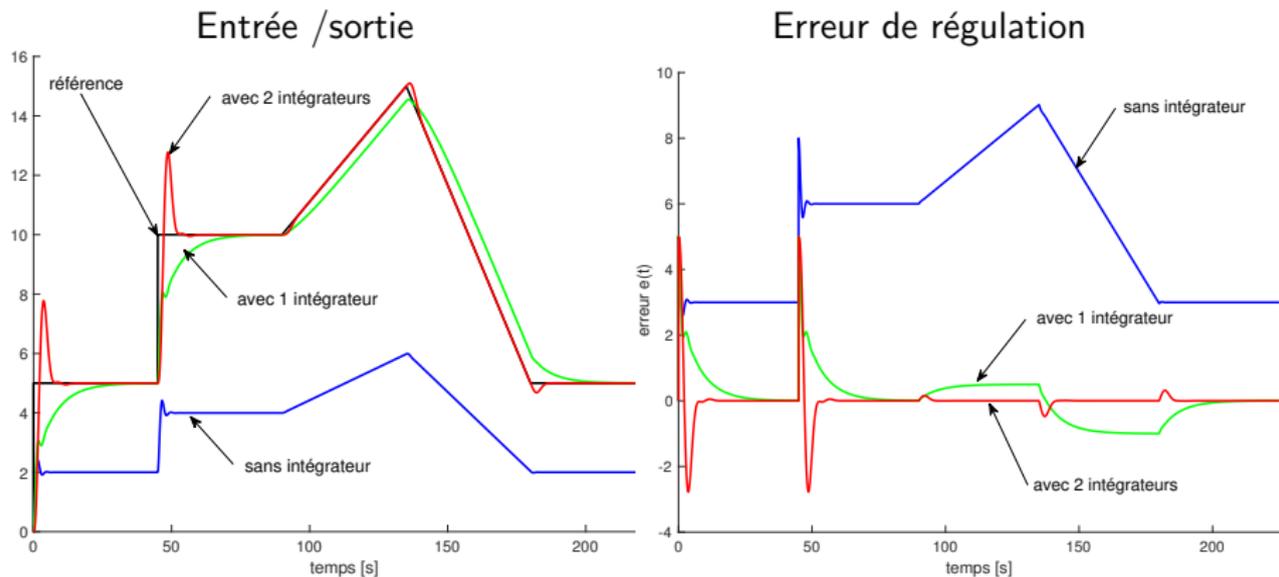
- Que devient l'erreur si $x(t)$ n'est pas constant ?
- L'erreur de poursuite est toujours définie par $e(t) = x(t) - y(t)$, donc :

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$
$$e_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + L(p)} X(p)$$

- Quand $x(t) = x_0 + \dots + x_n t^n$, il faut au moins $(n + 1)$ intégrateurs dans $L(p)$ pour annuler e_{∞}

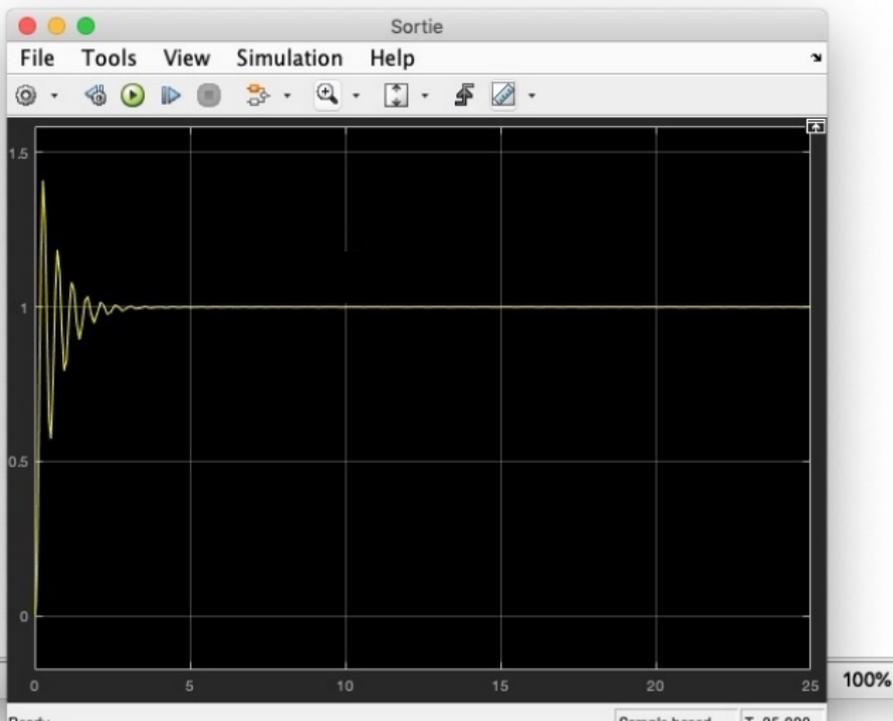
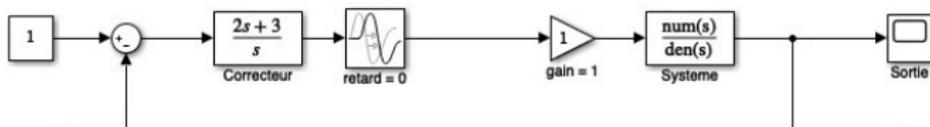
	$x(t) = x_0$	$x(t) = x_0 + x_1 t$	$x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$
$L(p) = \tilde{L}(p)$	$e_{\infty} = \frac{x_0}{1 + \tilde{L}(0)}$	$e_{\infty} = \infty$	$e_{\infty} = \infty$
$L(p) = \frac{1}{p} \tilde{L}(p)$	$e_{\infty} = 0$	$e_{\infty} = \frac{x_1}{\tilde{L}(0)}$	$e_{\infty} = \infty$
$L(p) = \frac{1}{p^2} \tilde{L}(p)$	$e_{\infty} = 0$	$e_{\infty} = 0$	$e_{\infty} = \frac{x_2}{\tilde{L}(0)}$
$L(p) = \frac{1}{p^3} \tilde{L}(p)$	$e_{\infty} = 0$	$e_{\infty} = 0$	$e_{\infty} = 0$

6.3 Suivi de référence variable : précision dynamique en BF



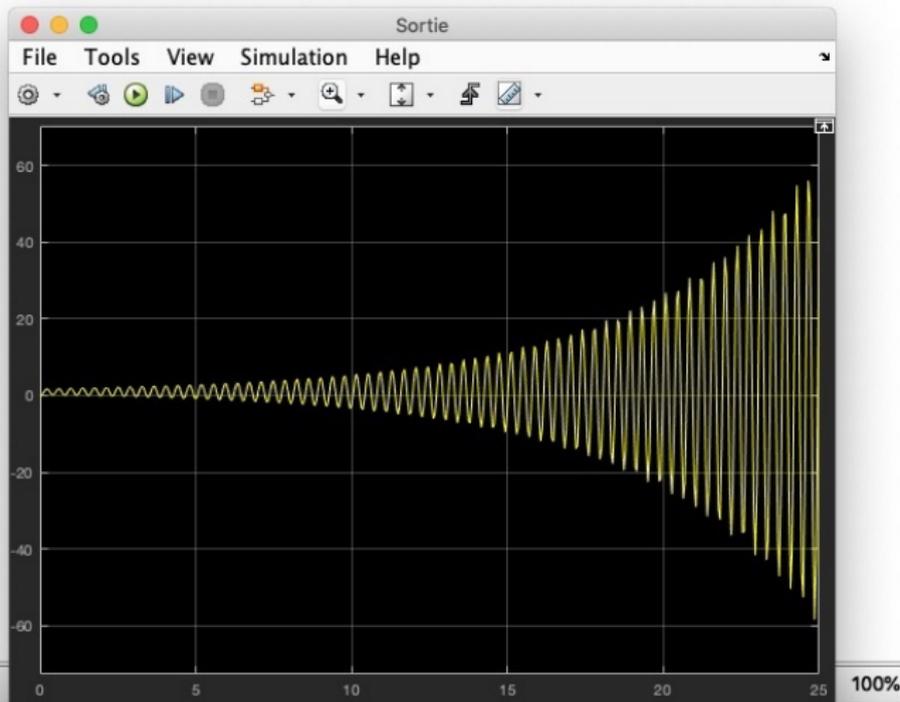
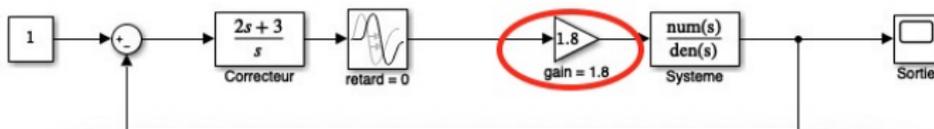
6.4 Marges de robustesse en BF

Réglage du correcteur sur un modèle du système => stabilité



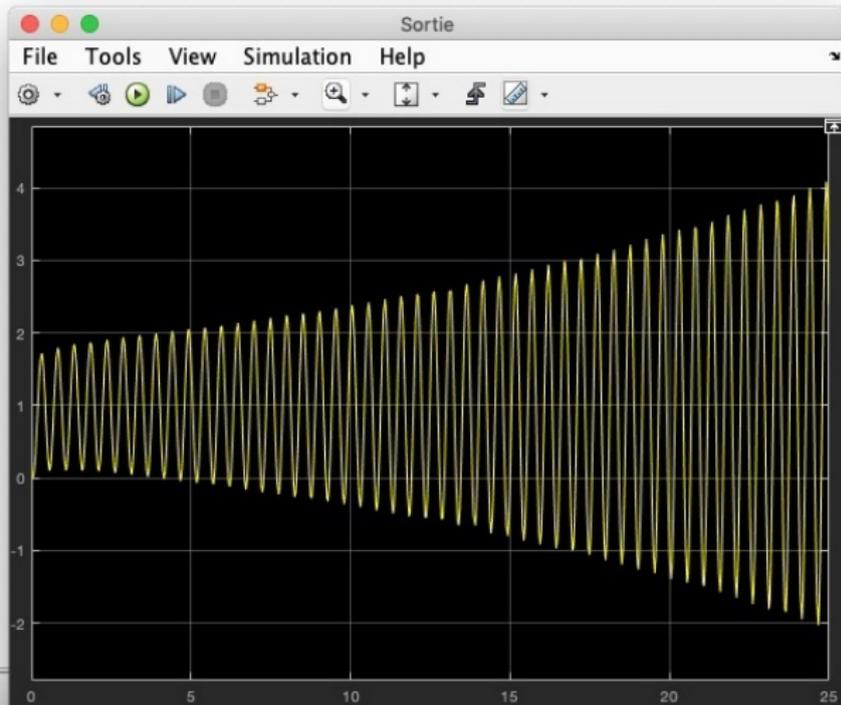
6.4 Marges de robustesse en BF

Si le gain système est différent du modèle => instabilité



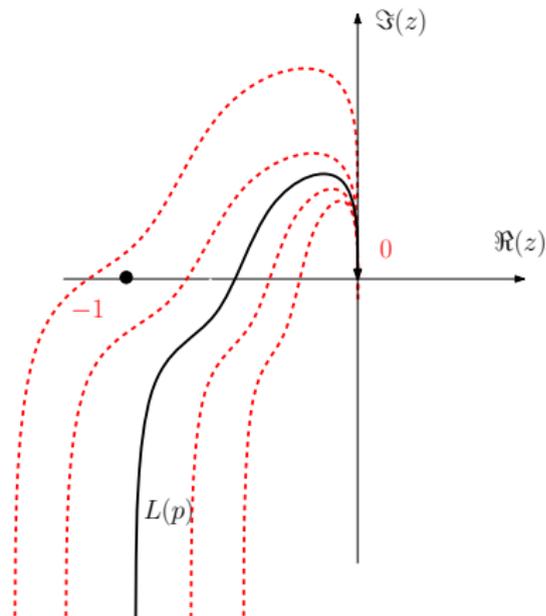
6.4 Marges de robustesse en BF

Si un retard de 0,03s apparaît => instabilité



6.4 Robustesse aux incertitudes

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
 $\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1



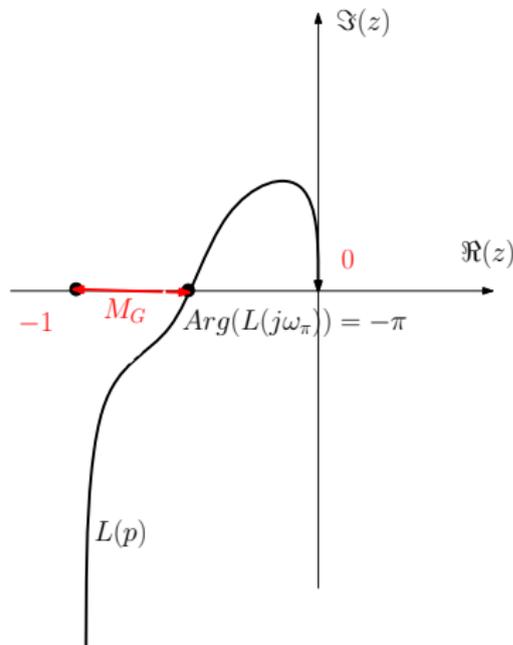
6.4 Robustesse aux incertitudes

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
 $\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- **Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

où $\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$



6.4 Robustesse aux incertitudes

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
 $\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- **Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

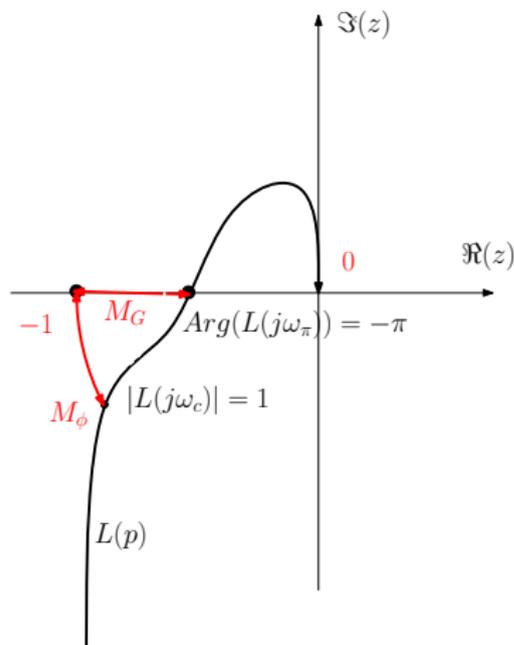
$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

où $\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$

- **Marge de phase** : déphasage max qu'on peut ajouter à $L(p)$ sans passer par -1

$$M_\phi = \text{Arg}(L(j\omega_c)) + 180$$

où $|L(j\omega_c)| = 1$



6.4 Robustesse aux incertitudes

On ne connaît pas **exactement** $L(p) \Rightarrow L(p) \neq -1$ ne suffit pas
 $\Rightarrow L(p)$ ne doit pas passer près de -1

- **Marge de gain** : gain max par lequel on peut multiplier $L(p)$ sans passer par -1

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

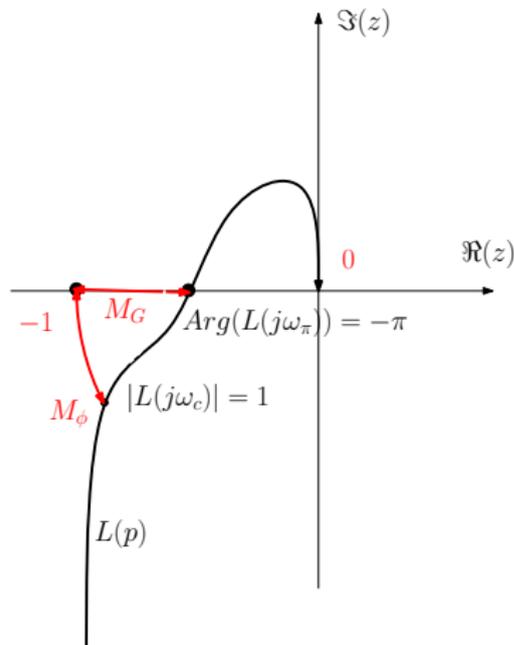
où $\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$

- **Marge de phase** : déphasage max qu'on peut ajouter à $L(p)$ sans passer par -1

$$M_\phi = \text{Arg}(L(j\omega_c)) + 180$$

où $|L(j\omega_c)| = 1$

- **stabilité en BF** \Leftrightarrow
stabilité en BO et $M_\phi > 0$



6.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

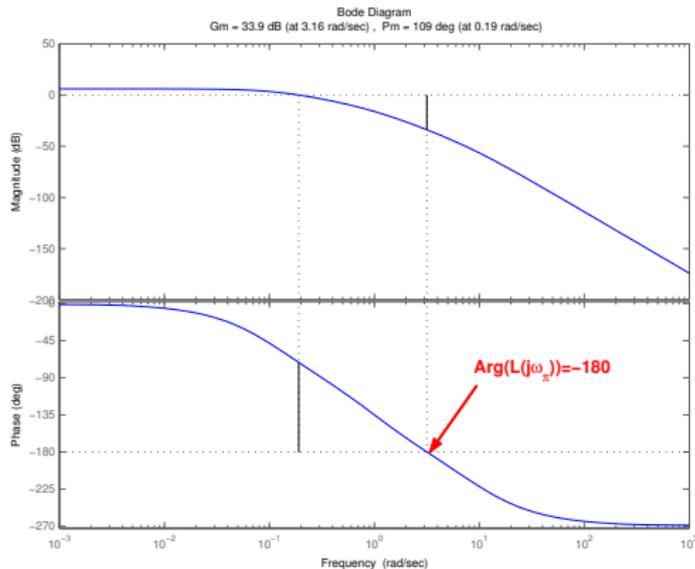
Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de $L(p)$

- **Marge de gain :**

trouver ω_π tel que :

$$\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$



6.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

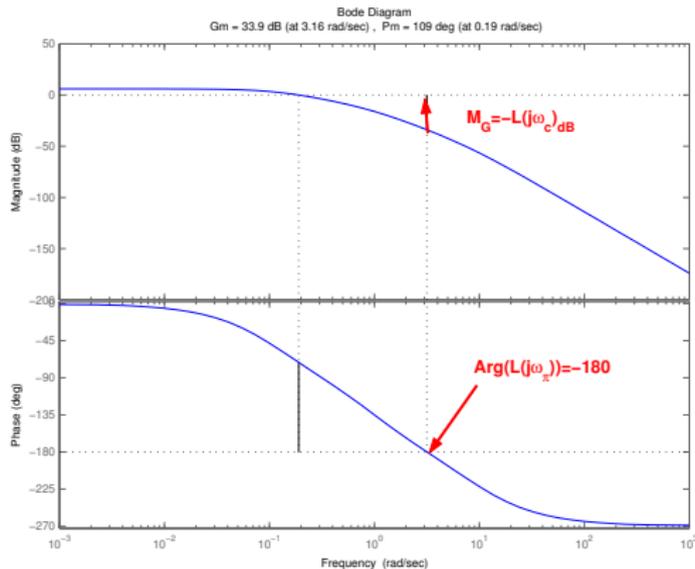
Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de $L(p)$

- **Marge de gain :**

trouver ω_π tel que :

$$\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$



6.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de $L(p)$

- **Marge de gain :**

trouver ω_π tel que :

$$\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$

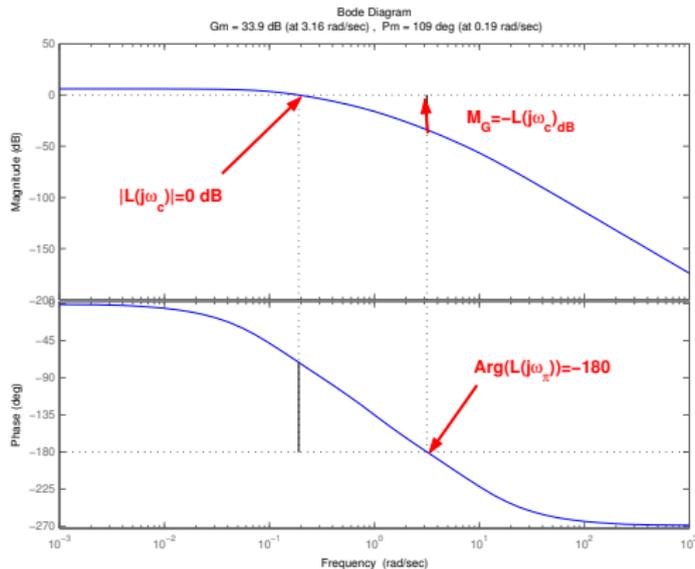
$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

- **Marge de phase :**

trouver ω_c tel que :

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

$$M_\phi = \text{Arg}(L(j\omega_c)) + 180$$



6.4 Marges de robustesse et diagramme de Bode

Les marges de robustesse se retrouvent sur le diagramme de Bode de $L(p)$

- **Marge de gain :**

trouver ω_π tel que :

$$\text{Arg}(L(j\omega_\pi)) = -\pi$$

$$M_G = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

- **Marge de phase :**

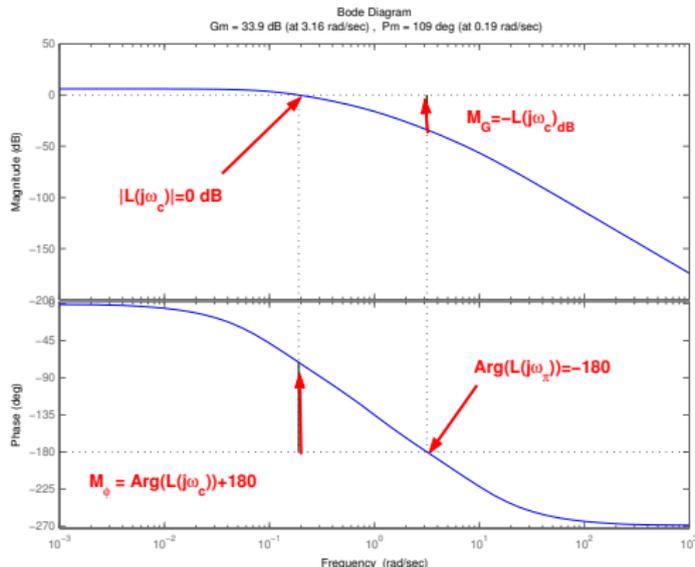
trouver ω_c tel que :

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

$$M_\phi = \text{Arg}(L(j\omega_c)) + 180$$

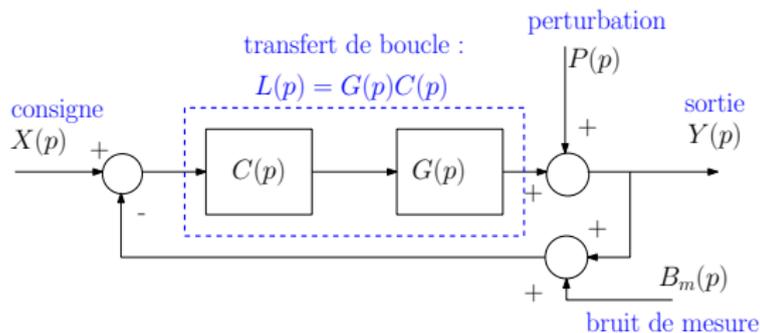
- **Valeurs indicatives :**

$M_G \approx 6 \text{ dB}$ et $M_\phi \approx 45^\circ$
(commande margin sous Matlab)



6.4 Robustesse aux bruits de mesure / perturbations

- Si on différencie *bruits de mesure* $B_m(p)$ et *perturbations* $P(p)$ on a :

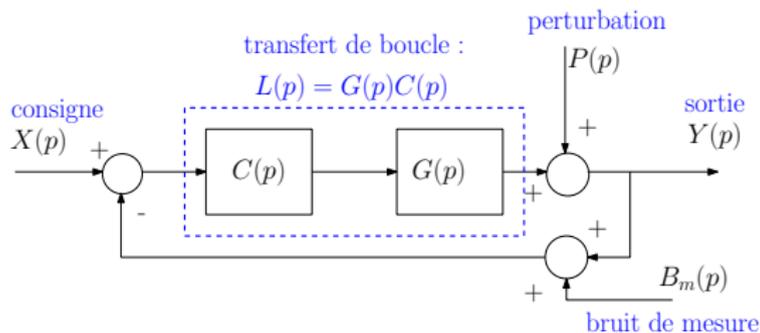


- La réponse $Y(p)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p) + \frac{1}{1 + L(p)} P(p) - \frac{L(p)}{1 + L(p)} B_m(p)$$

6.4 Robustesse aux bruits de mesure / perturbations

- Si on différencie *bruits de mesure* $B_m(p)$ et *perturbations* $P(p)$ on a :



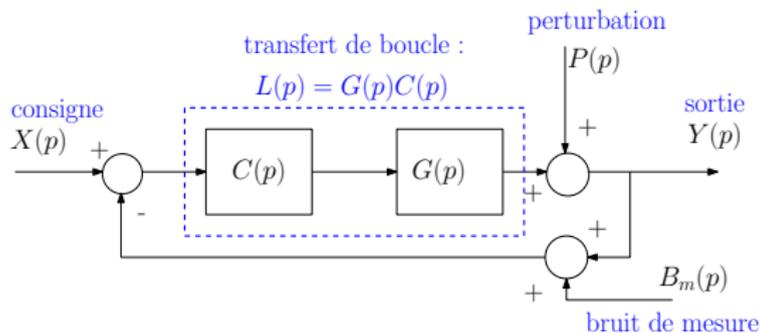
- La réponse $Y(p)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p) + \frac{1}{1 + L(p)} P(p) - \frac{L(p)}{1 + L(p)} B_m(p)$$

- Pour rejeter des perturbations en **basses fréquences** (lentes)
→ il faut $|L(j\omega)| \gg 1$, **quand ω petit**

6.4 Robustesse aux bruits de mesure / perturbations

- Si on différencie *bruits de mesure* $B_m(p)$ et *perturbations* $P(p)$ on a :



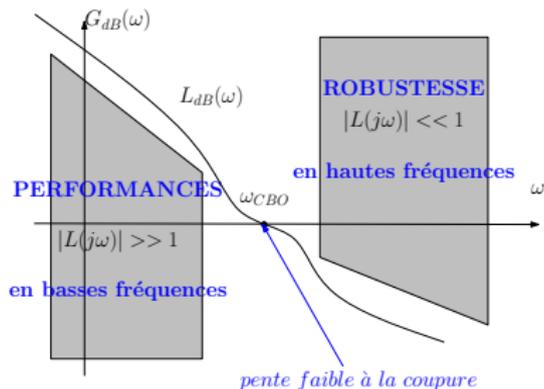
- La réponse $Y(p)$ est alors :

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p) + \frac{1}{1 + L(p)} P(p) - \frac{L(p)}{1 + L(p)} B_m(p)$$

- Pour rejeter des perturbations en **basses fréquences** (lentes)
→ il faut $|L(j\omega)| \gg 1$, quand ω petit
- Pour rejeter des bruits en **hautes fréquences** :
→ il faut $|L(j\omega)| \ll 1$, quand ω grand

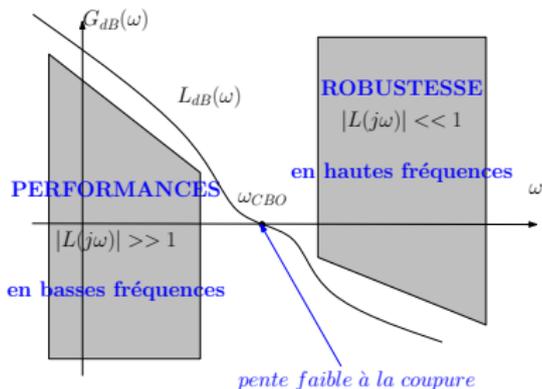
7.1 Objectifs de synthèse du correcteur

- On peut résumer les différents objectifs de synthèse d'un correcteur :
→ trouver $C(p)$, tel que $L(p) = G(p)C(p)$



7.1 Objectifs de synthèse du correcteur

- On peut résumer les différents objectifs de synthèse d'un correcteur :
→ trouver $C(p)$, tel que $L(p) = G(p)C(p)$



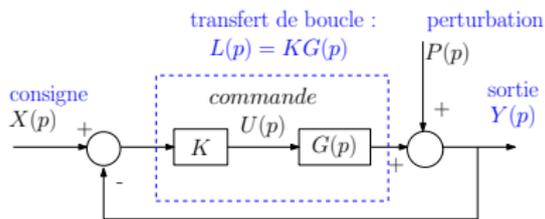
- Si le système en BF est proche d'un système d'ordre 2, on peut utiliser ces **relations empiriques** :

$$z_{BF} \approx \frac{M_{\phi}^o}{100} \quad \omega_{0BF} \approx \omega_{CBO} \quad 2 \leq \omega_{0BF} t_{rBF} \leq 3$$

z_{BF} : coeff. d'amort. en BF
 ω_{0BF} : puls. propre en BF
 t_{rBF} : temps de montée en BF

M_{ϕ}^o : marge de phase en degré
 ω_{CBO} : puls. de coupure en BO

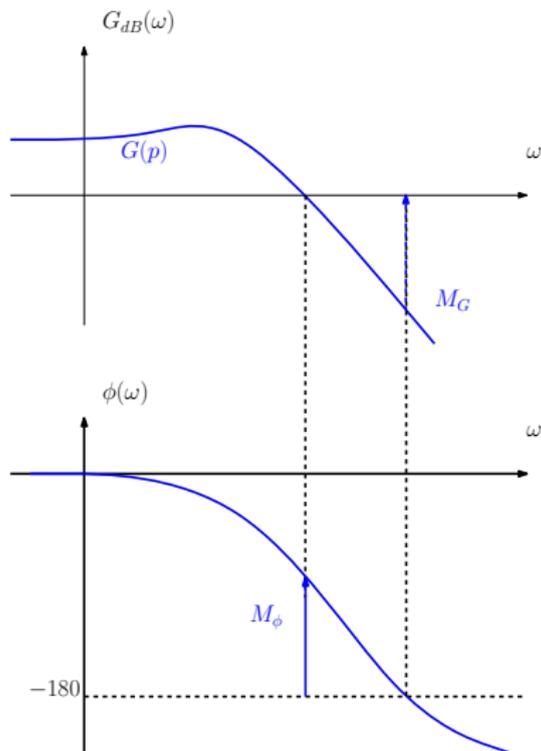
7.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)



- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

7.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)

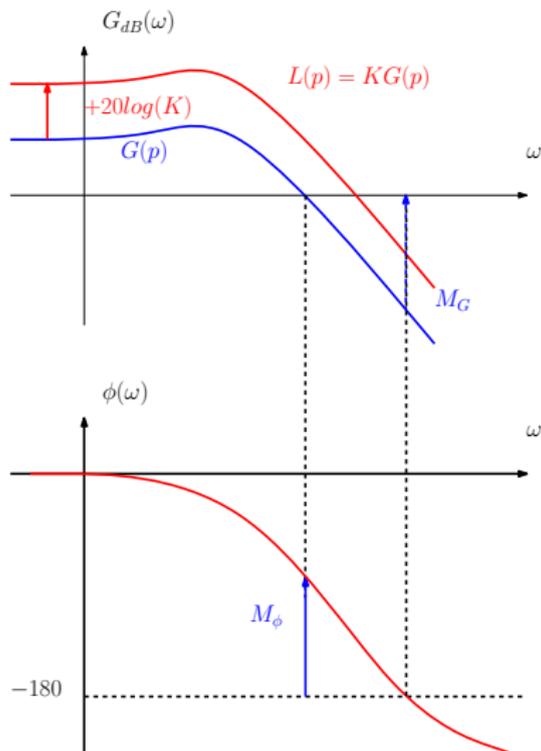


- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :

7.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)

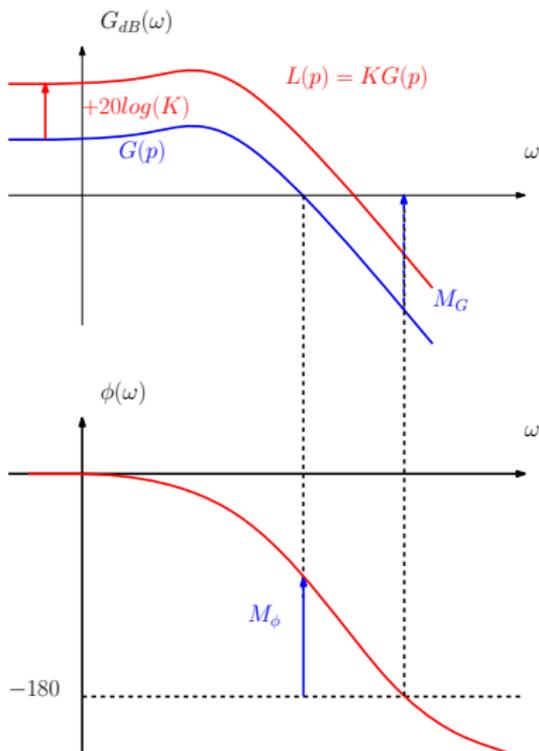


- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ dB
 - phase de $L(p)$ inchangée

7.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)

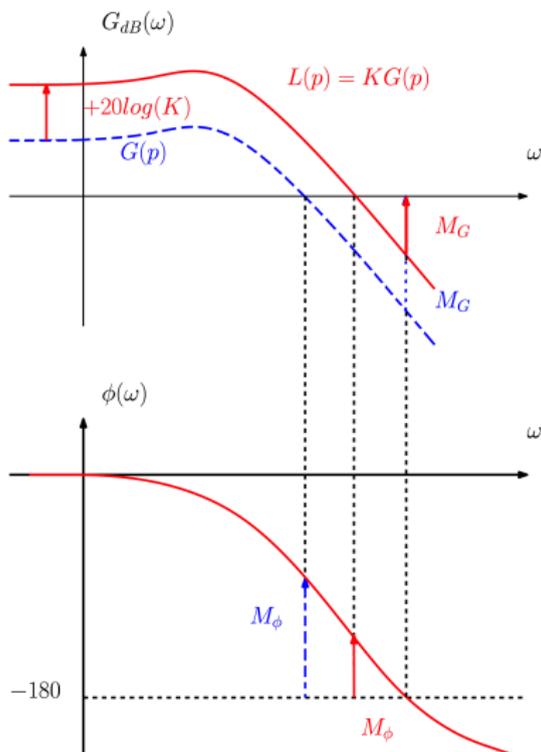


- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ dB
 - phase de $L(p)$ inchangée
- Pour $K \gg 1$
 - **précision meilleure**
 - car $|L(\omega)| \gg 1$ en BF

7.2 Augmenter le gain : correcteur proportionnel (P)



- Correcteur **P**roportionnel

$$C(p) = K$$
$$u(t) = K(x(t) - y(t))$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ dB
 - phase de $L(p)$ inchangée
- Pour $K \gg 1$
 - **précision meilleure**
 - car $|L(\omega)| \gg 1$ en BF
- Pour $K \gg 1$
 - **robustesse diminuée**
 - car M_ϕ et $M_G \searrow$

7.2 Réglage du correcteur P

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)

7.2 Réglage du correcteur P

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- On augmente **K**
 - pour augmenter le gain statique : **précision**
 - pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**

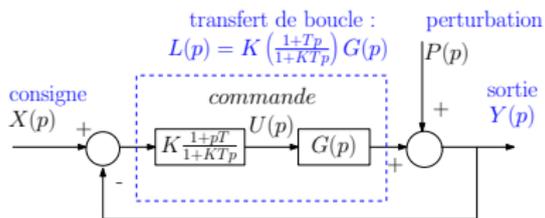
7.2 Réglage du correcteur P

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- On augmente **K**
 - pour augmenter le gain statique : **précision**
 - pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**
- On limite **K**
 - pour garder une marge de phase positive : **stabilité**
 - pour garder une marge de phase suffisante : **dépassement**

7.2 Réglage du correcteur P

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- On augmente **K**
 - pour augmenter le gain statique : **précision**
 - pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**
- On limite **K**
 - pour garder une marge de phase positive : **stabilité**
 - pour garder une marge de phase suffisante : **dépassement**
- Les spécifications sont souvent contradictoires :
 - **compromis performance / robustesse**

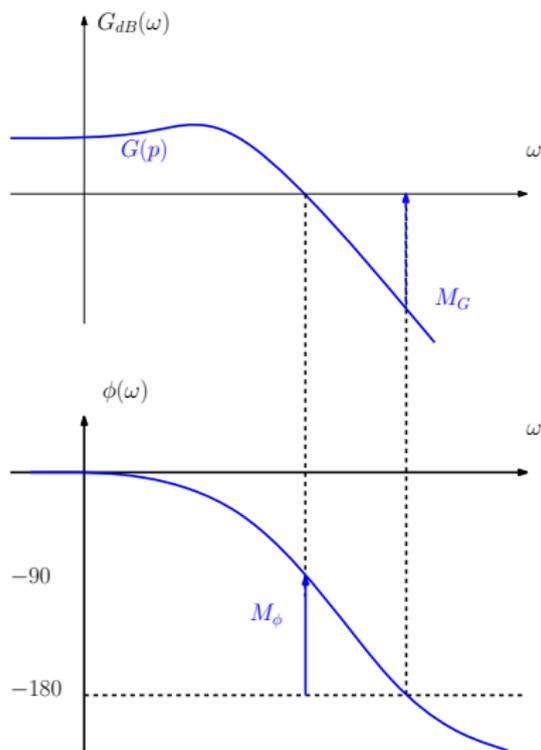
7.3 Augmenter le gain en BF : retard de phase



- Correcteur à retard de phase

$$C(p) = K \frac{1+T_p}{1+KT_p}, \quad K > 1$$

7.3 Augmenter le gain en BF : retard de phase

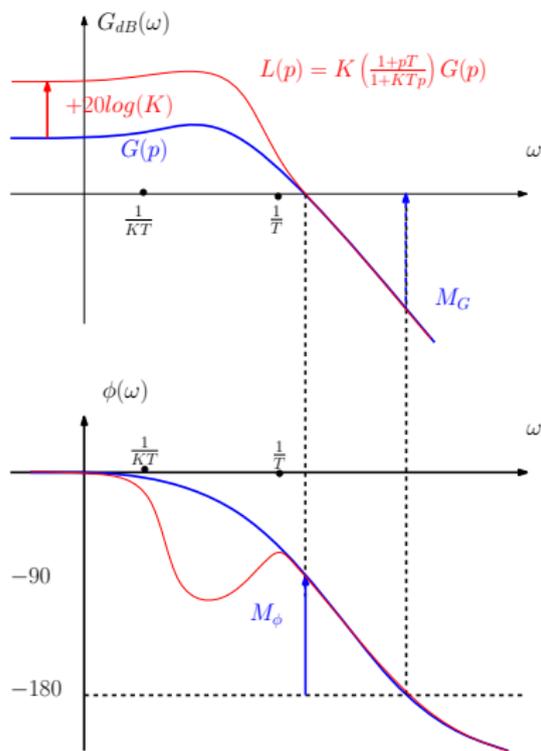


- Correcteur à retard de phase

$$C(p) = K \frac{1+T_p p}{1+K T_p p}, \quad K > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :

7.3 Augmenter le gain en BF : retard de phase

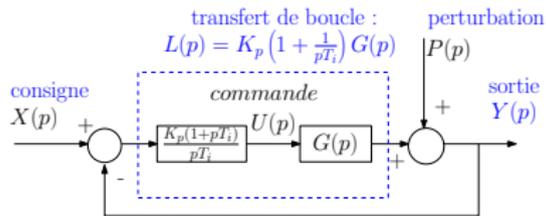


- Correcteur à retard de phase

$$C(p) = K \frac{1+Tp}{1+KTp}, \quad K > 1$$

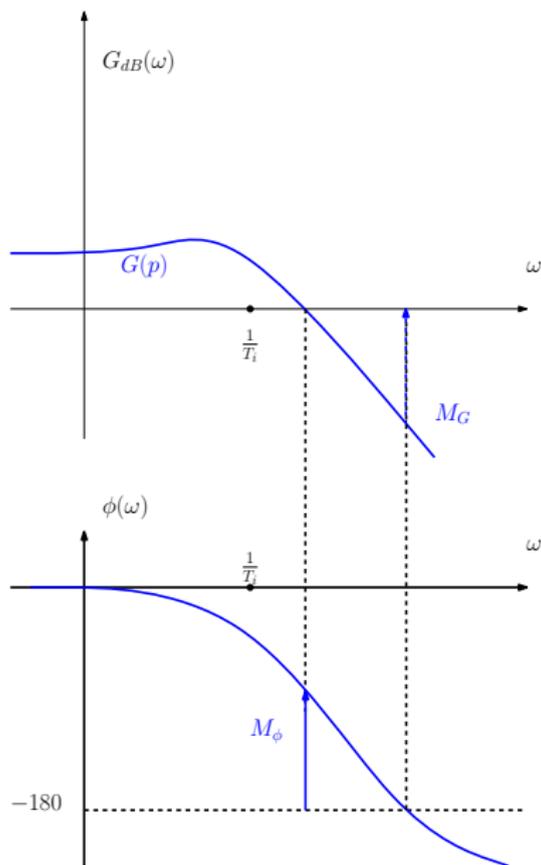
- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$, pour $\omega < 1/(KT)$
 - phase de $L(p)$ diminuée, pour $1/(KT) < \omega < 1/T$
- Pour $K \gg 1$
 - **précision meilleure**
 - car $|L(\omega)| \gg 1$ en BF
- **robustesse peu changée**
si $1/T < \omega_{CBO}$
(sinon : risque d'instabilité)

7.4 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)



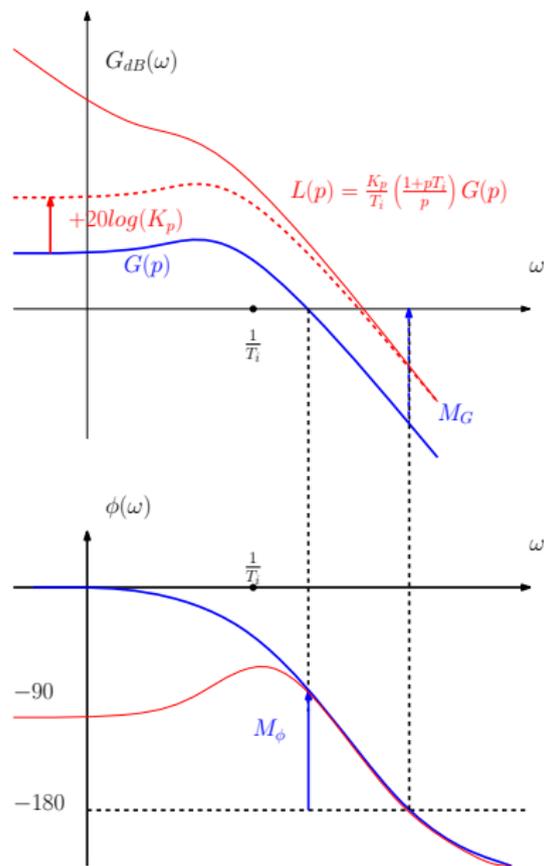
- Correct. **Proportionnel-Intégral**
 $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i}\right)$
 $u(t) = K_p(x - y) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x - y)$

7.4 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)



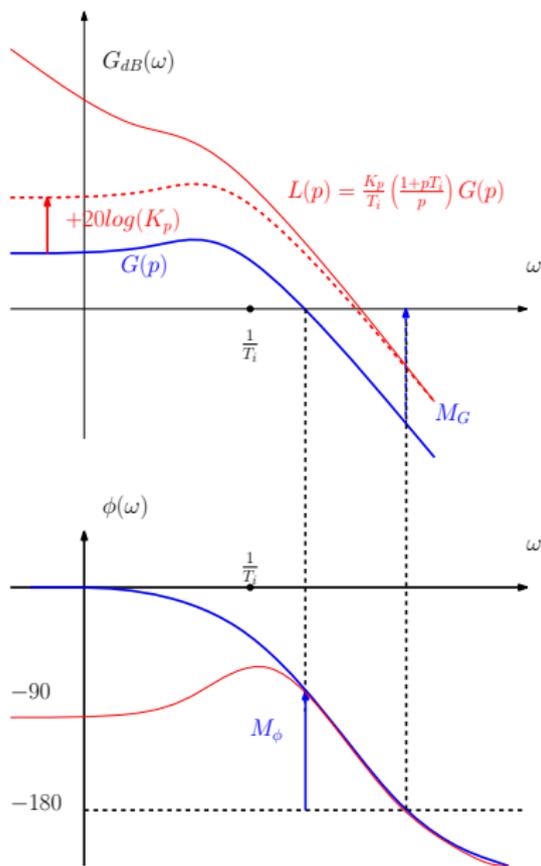
- Correct. Proportionnel-Intégral
 $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} \right)$
 $u(t) = K_p(x - y) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x - y)$
- Effets sur le transfert de boucle :

7.4 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)



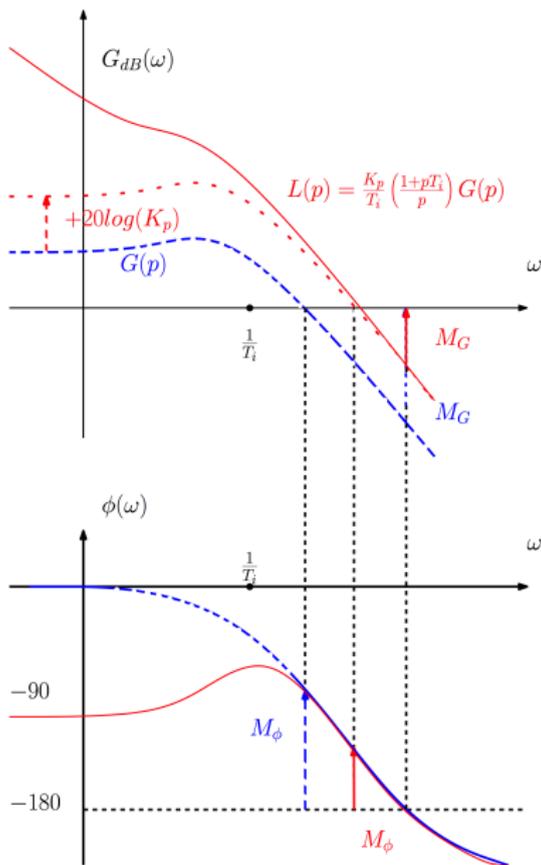
- Correct. Proportionnel-Intégral
$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} \right)$$
$$u(t) = K_p(x - y) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x - y)$$
- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ translaté vers le haut, surtout en BF
 - phase de $L(p)$ diminuée de 90° en BF

7.4 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)



- Correct. **Proportionnel-Intégral**
 $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} \right)$
 $u(t) = K_p(x - y) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x - y)$
- Effets sur le transfert de boucle :
→ **gain de $L(p)$ translaté** vers le haut, surtout en BF
→ **phase de $L(p)$ diminuée de 90°** en BF
- **précision meilleure**
 $(|L(0)| \rightarrow \infty)$
rejet de perturbation constantes
suivi de référence constante

7.4 Précision statique parfaite : proportionnel intégral (PI)



- Correct. Proportionnel-Intégral
$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} \right)$$
$$u(t) = K_p(x - y) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t (x - y)$$
- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ translaté vers le haut, surtout en BF
 - phase de $L(p)$ diminuée de 90° en BF
- **précision meilleure**
($|L(0)| \rightarrow \infty$)
rejet de perturbation constantes
suivi de référence constante
- **robustesse diminuée**
- réponse parfois lente

7.4 Réglage des correcteurs PI

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)

7.4 Réglage des correcteurs PI

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq w_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- Par construction on a $|L(0)| \rightarrow \infty$
→ **précision parfaite** sans augmenter **K**

7.4 Réglage des correcteurs PI

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq \omega_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- Par construction on a $|L(0)| \rightarrow \infty$
→ **précision parfaite** sans augmenter **K**
- On augmente **K**
→ pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**

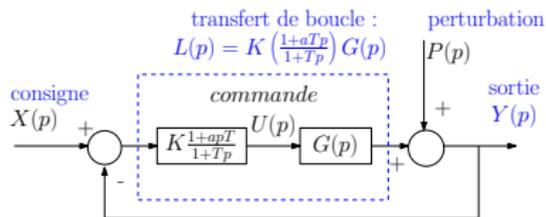
7.4 Réglage des correcteurs PI

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^o}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq \omega_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- Par construction on a $|L(0)| \rightarrow \infty$
→ **précision parfaite** sans augmenter **K**
- On augmente **K**
→ pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**
- On augmente T_i et on limite **K**
→ pour ne pas dégrader la marge de phase : **stabilité et dépassement**

7.4 Réglage des correcteurs PI

- Généralement, les spécifications en BF sont :
 - stabilité ($M_\phi > 0$)
 - précision ($e_\infty = \frac{1}{1+L(0)}$)
 - dépassement limité ($X_p = \exp^{-\pi z / \sqrt{1-z^2}}$ et $z_{BF} \approx \frac{M_\phi^0}{100}$)
 - temps de réponse limité ($2 \leq \omega_{0BF} t_{rBF} \leq 3$)
- Par construction on a $|L(0)| \rightarrow \infty$
→ **précision parfaite** sans augmenter **K**
- On augmente **K**
→ pour augmenter ω_{CBO} : **rapidité**
- On augmente T_i et on limite **K**
→ pour ne pas dégrader la marge de phase : **stabilité et dépassement**
- La précision parfaite se paye par une réponse lente

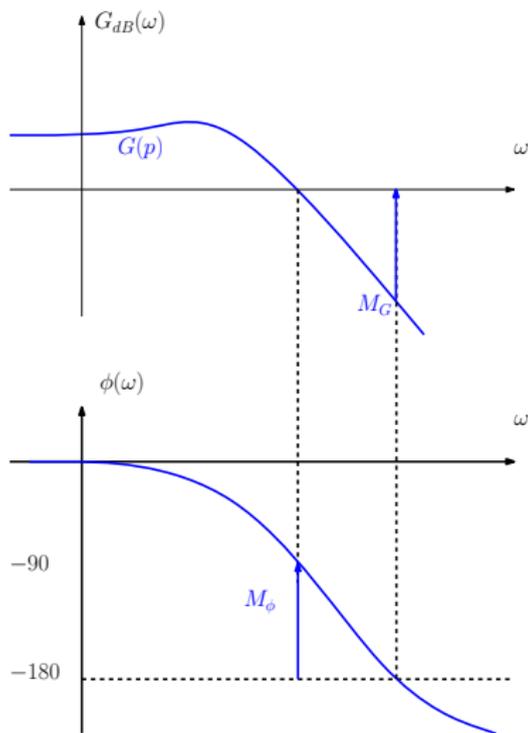
7.5 Améliorer la robustesse : avance de phase



- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K \frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a > 1$$

7.5 Améliorer la robustesse : avance de phase

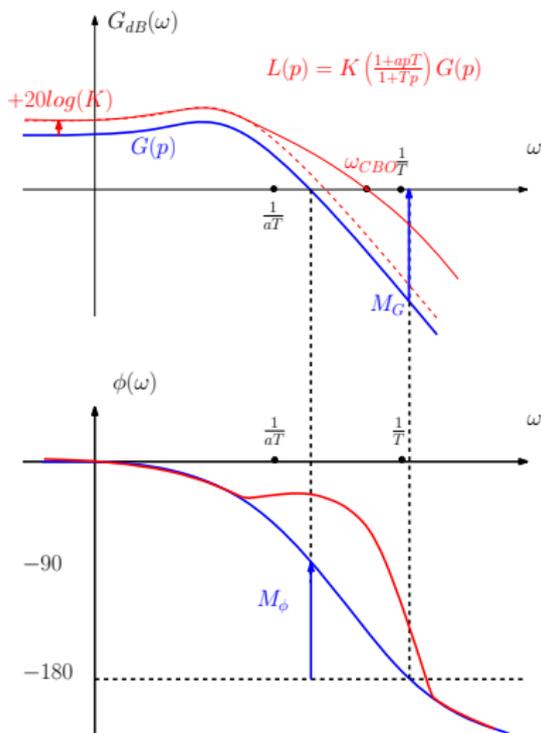


- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K \frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :

7.5 Améliorer la robustesse : avance de phase

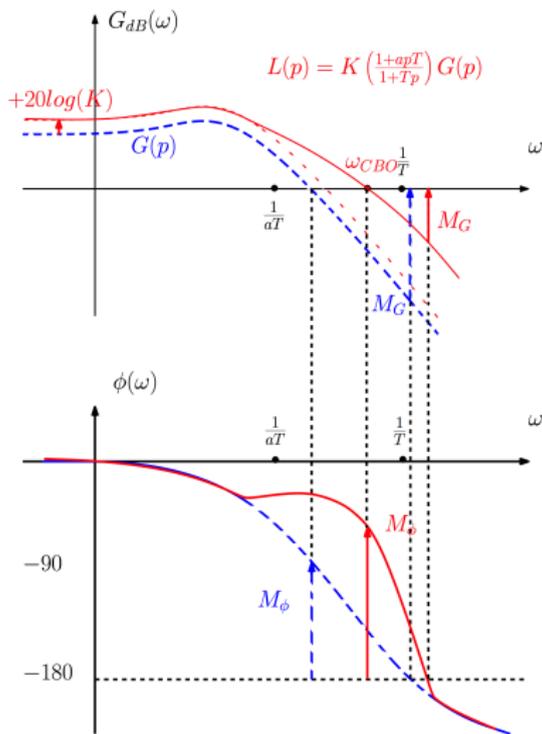


- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K \frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ en BF et plus en HF
 - phase de $L(p)$ augmentée, pour $1/(aT) < \omega < 1/T$
- Pour $K \gg 1$
 - **précision** car $|L(0)| \nearrow$
 - **rapidité** car $\omega_{CBO} \nearrow$

7.5 Améliorer la robustesse : avance de phase



- Correcteur à avance de phase

$$C(p) = K \frac{1+aTp}{1+Tp}, \quad a > 1$$

- Effets sur le transfert de boucle :
 - gain de $L(p)$ augmenté de $20\log(K)$ en BF et plus en HF
 - phase de $L(p)$ augmentée, pour $1/(aT) < \omega < 1/T$
- Pour $K \gg 1$
 - précision car $|L(0)| \nearrow$
 - rapidité car $\omega_{CBO} \nearrow$
- robustesse
 - $M_\phi \nearrow$ car phase \nearrow pour $\omega \approx \omega_{CBO}$
 - possible détérioration de M_G

7.6 PI + av. phase : proportionnel intégral dérivé (PID)

- Pour accélérer le transitoire du **PI** on ajoute un terme **Dérivé** :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right)$$

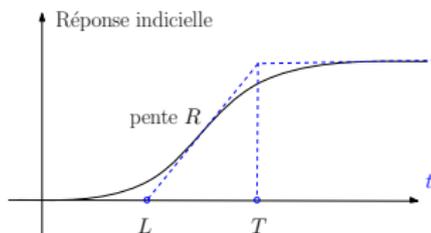
- Le régulateur obtenu cumule les effets d'un PI (en basses fréquences) et d'un avance de phase (en hautes fréquences)

7.6 PI + av. phase : proportionnel intégral dérivé (PID)

- Pour accélérer le transitoire du **PI** on ajoute un terme **Dérivé** :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right)$$

- Le régulateur obtenu cumule les effets d'un PI (en basses fréquences) et d'un avance de phase (en hautes fréquences)
- La méthode de Ziegler-Nichols permet d'avoir des valeurs des gains à partir de la réponse indicielle de $G(p)$ (stable)



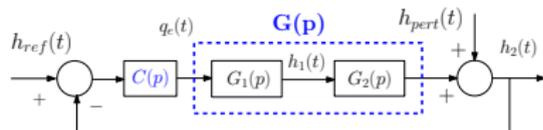
$C(p)$	P	PI	PID
K_p	$\frac{1}{LR}$	$\frac{0.9}{LR}$	$\frac{1.2}{LR}$
T_i		$3.3L$	$2L$
T_d			$0.5L$

- Les valeurs obtenues sont approximatives, il faut ensuite affiner

7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —



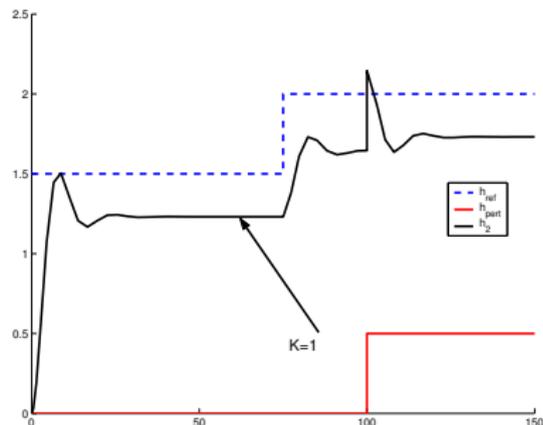
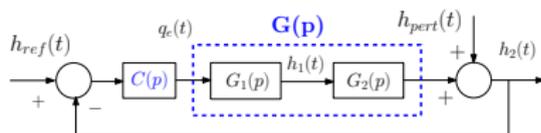
7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —

Correcteurs :

- avec $C(p) = 1 \rightarrow$ suivi médiocre



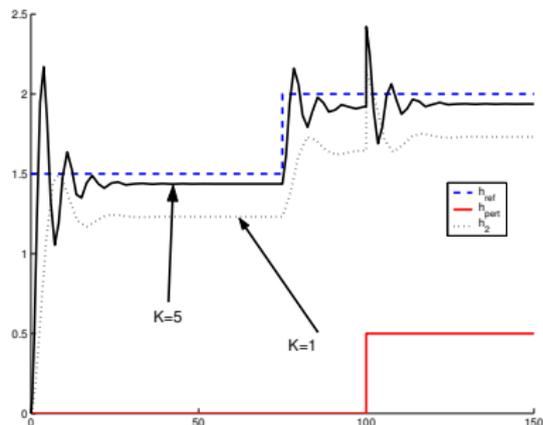
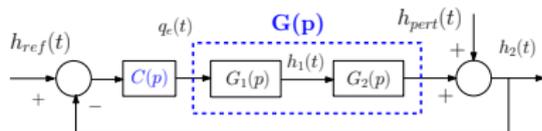
7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —

Correcteurs :

- avec $C(p) = 1$ → suivi médiocre
- avec $C(p) = 5$ → peu précis



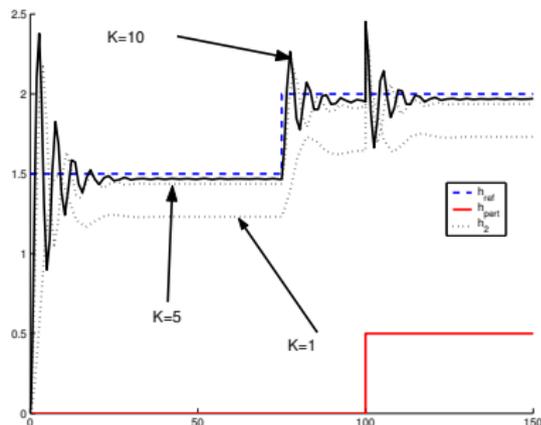
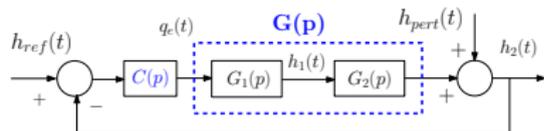
7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —

Correcteurs :

- avec $C(p) = 1$ → suivi médiocre
- avec $C(p) = 5$ → peu précis
- avec $C(p) = 10$ → assez précis



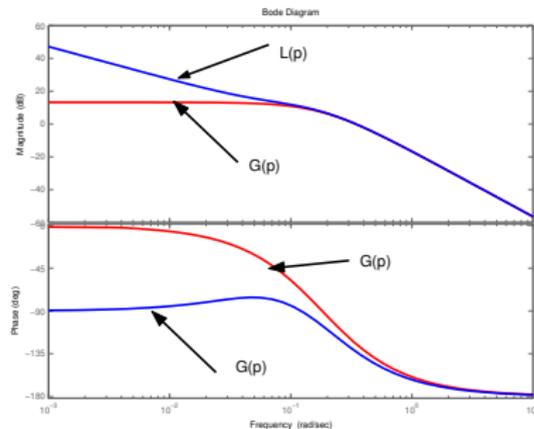
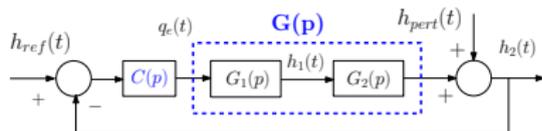
7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —

Correcteurs :

- avec $C(p) = 1$ → suivi médiocre
- avec $C(p) = 5$ → peu précis
- avec $C(p) = 10$ → assez précis
- avec $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
→ suivi et rejet corrects



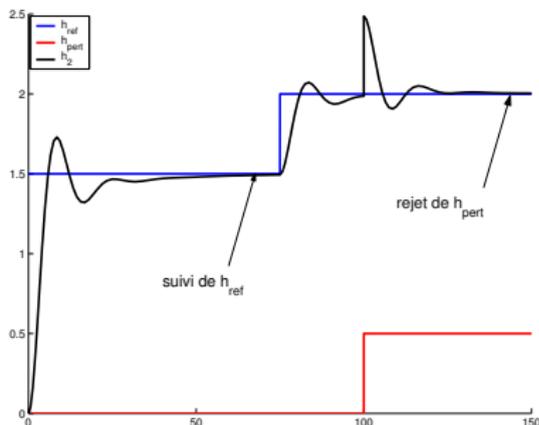
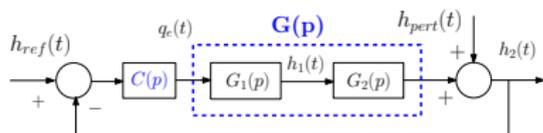
7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —

Correcteurs :

- avec $C(p) = 1$ → suivi médiocre
- avec $C(p) = 5$ → peu précis
- avec $C(p) = 10$ → assez précis
- avec $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
→ suivi et rejet corrects



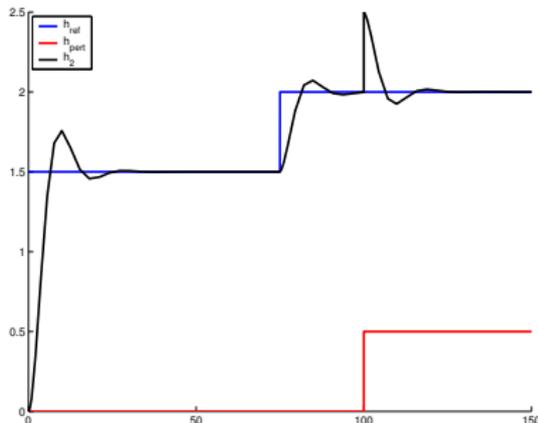
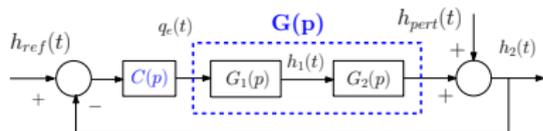
7.7 Exemple de corrections P, PI, PID

Système : 2 réservoirs avec une perturbation

- suivi de référence h_{ref} - - -
- rejet de perturbation h_{pert} —

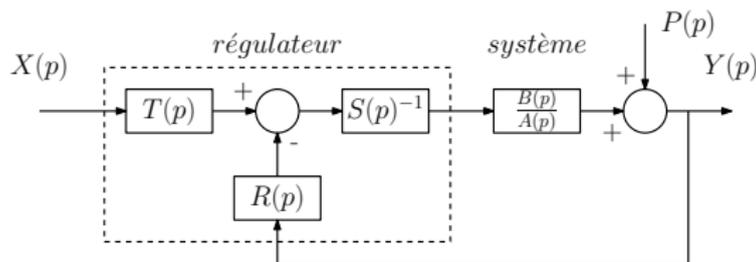
Correcteurs :

- avec $C(p) = 1$ → suivi médiocre
- avec $C(p) = 5$ → peu précis
- avec $C(p) = 10$ → assez précis
- avec $C(p) = \frac{p+0.05}{p}$
→ suivi et rejet corrects
- avec $C(p) = 0.9(1 + \frac{1}{12p} + 0.5p)$
→ transitoire amélioré



7.8 Correcteur RST

- Structure du correcteur **RST** :

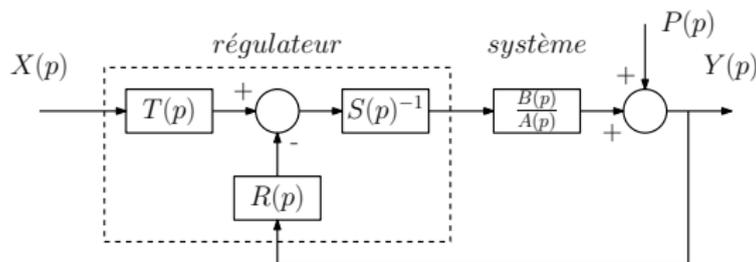


- **Objectifs** :

- rejet parfait de perturbations constantes
- assurer des marges de robustesse minimales
- suivi de $X(p)$ par $Y(p)$ unitaire et défini par $\frac{B(p)}{M(p)}$

7.8 Correcteur RST

- Structure du correcteur **RST** :



- **Objectifs** :

- rejet parfait de perturbations constantes
 - assurer des marges de robustesse minimales
 - suivi de $X(p)$ par $Y(p)$ unitaire et défini par $\frac{B(p)}{M(p)}$
- La réponse du système est donnée par :

$$Y(p) = \frac{B(p)T(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)}X(p) + \frac{A(p)S(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)}P(p)$$

7.8 Correcteur RST

- Rejet de perturbations constantes $\Leftrightarrow S(0) = 0$
- Suivi unitaire de $X(p)$ par $Y(p) \Leftrightarrow T(0) = R(0)$

7.8 Correcteur RST

- Rejet de perturbations constantes $\Leftrightarrow S(0) = 0$
- Suivi unitaire de $X(p)$ par $Y(p)$ $\Leftrightarrow T(0) = R(0)$
- Factoriser le dénominateur du système en BF par :

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p) = M(p)F(p)$$

- $M(p)$: dénominateur de la G_{BF} entre $X(p)$ et $Y(p)$
- $F(p)$: fixé pour filtrer $D(p)$ et assurer la robustesse

7.8 Correcteur RST

- Rejet de perturbations constantes $\Leftrightarrow S(0) = 0$
- Suivi unitaire de $X(p)$ par $Y(p)$ $\Leftrightarrow T(0) = R(0)$
- Factoriser le dénominateur du système en BF par :

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p) = M(p)F(p)$$

- $M(p)$: dénominateur de la G_{BF} entre $X(p)$ et $Y(p)$
 - $F(p)$: fixé pour filtrer $D(p)$ et assurer la robustesse
- Il faut ensuite résoudre en **S(p)** et **R(p)** l'équation de Bezout

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p)$$

qui a une solution unique pour :
$$\begin{cases} deg(R) = deg(A) \\ deg(S) = deg(A) + 1 \end{cases}$$

7.8 Correcteur RST

- Rejet de perturbations constantes $\Leftrightarrow S(0) = 0$
- Suivi unitaire de $X(p)$ par $Y(p)$ $\Leftrightarrow T(0) = R(0)$
- Factoriser le dénominateur du système en BF par :

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p) = M(p)F(p)$$

- $M(p)$: dénominateur de la G_{BF} entre $X(p)$ et $Y(p)$
 - $F(p)$: fixé pour filtrer $D(p)$ et assurer la robustesse
- Il faut ensuite résoudre en **S(p)** et **R(p)** l'équation de Bezout

$$Den(p) = A(p)S(p) + B(p)R(p)$$

qui a une solution unique pour :
$$\begin{cases} deg(R) = deg(A) \\ deg(S) = deg(A) + 1 \end{cases}$$

- Si on fixe $T(p) = F(p) \frac{R(0)}{F(0)}$, on a :

$$Y(p) = \frac{B(p) \frac{R(0)}{F(0)}}{M(p)} X(p) + \frac{A(p)S(p)}{F(p)M(p)} P(p)$$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On cherche à réguler le système $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p+1}{p^3+3p^2+3p+1.4}$ pour
 - rejeter les perturbations constantes
 - suivre $X(p)$ avec un temps de réponse à 5% de 0.5 s et un dépassement max de 10%
 - avoir des marges $M_G > 6$ dB, $M_\phi > 50$ et $M_M > 0.5$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On cherche à réguler le système $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p+1}{p^3+3p^2+3p+1.4}$ pour
 - rejeter les perturbations constantes
 - suivre $X(p)$ avec un temps de réponse à 5% de 0.5 s et un dépassement max de 10%
 - avoir des marges $M_G > 6$ dB, $M_\phi > 50$ et $M_M > 0.5$
- Pour pouvoir résoudre $Den = AS + BR$ il faut :

$$R(p) = r_0 + r_1p + r_2p^2 + r_3p^3$$

$$S(p) = s_1p + s_2p^2 + s_3p^3 + s_4p^4$$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On cherche à réguler le système $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p+1}{p^3+3p^2+3p+1.4}$ pour
 - rejeter les perturbations constantes
 - suivre $X(p)$ avec un temps de réponse à 5% de 0.5 s et un dépassement max de 10%
 - avoir des marges $M_G > 6$ dB, $M_\phi > 50$ et $M_M > 0.5$
- Pour pouvoir résoudre $Den = AS + BR$ il faut :

$$R(p) = r_0 + r_1p + r_2p^2 + r_3p^3$$

$$S(p) = s_1p + s_2p^2 + s_3p^3 + s_4p^4$$

- les spécifications de suivi de $X(p)$ donnent :

$$\begin{cases} z & = 0.59 \\ \omega_0 & = 10.86 \end{cases} \Rightarrow M(p) = 0.0085p^2 + 0.11p + 1$$

- comme $B(p)$ est stable, on peut intégrer $B(p)$ dans $M(p)$

$$M(p) = (p + 1)(0.0085p^2 + 0.11p + 1)$$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On cherche à réguler le système $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{p+1}{p^3+3p^2+3p+1.4}$ pour
 - rejeter les perturbations constantes
 - suivre $X(p)$ avec un temps de réponse à 5% de 0.5 s et un dépassement max de 10%
 - avoir des marges $M_G > 6$ dB, $M_\phi > 50$ et $M_M > 0.5$
- Pour pouvoir résoudre $Den = AS + BR$ il faut :

$$R(p) = r_0 + r_1p + r_2p^2 + r_3p^3$$

$$S(p) = s_1p + s_2p^2 + s_3p^3 + s_4p^4$$

- les spécifications de suivi de $X(p)$ donnent :

$$\begin{cases} z &= 0.59 \\ \omega_0 &= 10.86 \end{cases} \Rightarrow M(p) = 0.0085p^2 + 0.11p + 1$$

- comme $B(p)$ est stable, on peut intégrer $B(p)$ dans $M(p)$

$$M(p) = (p + 1)(0.0085p^2 + 0.11p + 1)$$

- on fixe le polynôme de filtrage à $F(p) = (p + 2.1)^4$ et on a $Den(p)$:

$$Den(p) = (p + 2.1)^4(p + 1)(0.0085p^2 + 0.11p + 1)$$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On résout l'équation de Bézout : $A(p)S(p) + B(p)R(p) = Den(p)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} s_4 \\ s_2 \\ s_2 \\ s_1 \\ \hline r_3 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{eq. en } p^7 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^6 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^5 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^4 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^3 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^2 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^1 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^0 \end{array}$$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On résout l'équation de Bézout : $A(p)S(p) + B(p)R(p) = Den(p)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} s_4 \\ s_2 \\ s_2 \\ s_1 \\ \hline r_3 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{eq. en } p^7 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^6 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^5 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^4 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^3 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^2 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^1 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^0 \end{array}$$

- pour obtenir

$$R(p) = 6.1704p^3 + 25.4925p^2 + 36.8518p + 19.4481$$

$$S(p) = 0.0085p^4 + 0.1631p^3 + 1.8039p^2 + 1.6493p$$

7.8 Exemple de réglage d'un RST

- On résout l'équation de Bézout : $A(p)S(p) + B(p)R(p) = Den(p)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} s_4 \\ s_2 \\ s_2 \\ s_1 \\ \hline r_3 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{eq. en } p^7 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^6 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^5 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^4 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^3 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^2 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^1 \\ \leftarrow \text{eq. en } p^0 \end{array}$$

- pour obtenir

$$R(p) = 6.1704p^3 + 25.4925p^2 + 36.8518p + 19.4481$$

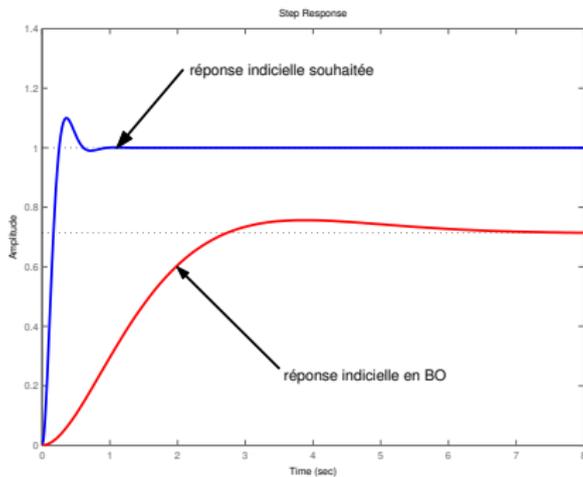
$$S(p) = 0.0085p^4 + 0.1631p^3 + 1.8039p^2 + 1.6493p$$

- enfin $T(p) = F(p) \frac{r_0}{r_0}$ donne :

$$T(p) = p^4 + 8.4p^3 + 26.46p^2 + 37.044p + 19.4481$$

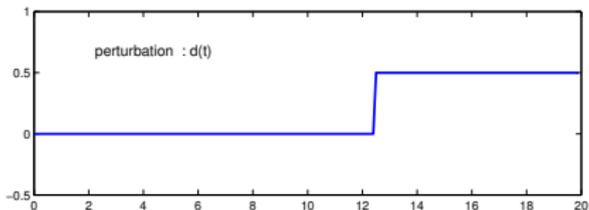
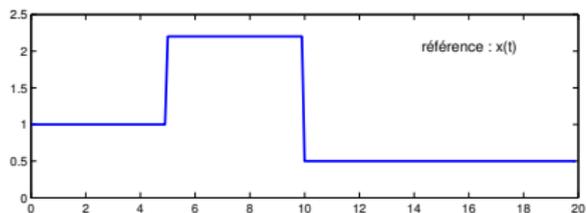
7.8 Exemple de réglage d'un RST

- Réponses indicielles du système en BO et du modèle à suivre



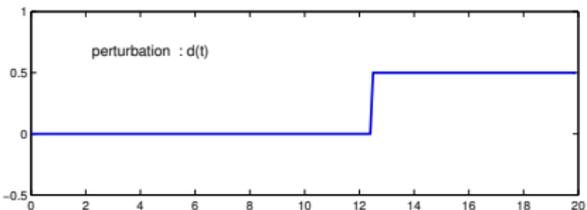
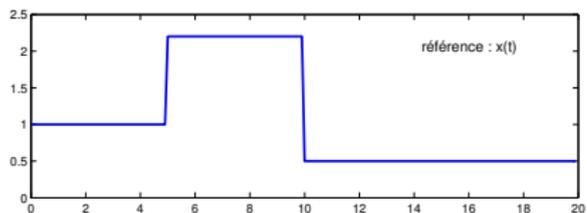
7.8 Exemple de réglage d'un RST

- Entrée de référence $x(t)$ et entrée de perturbation $p(t)$

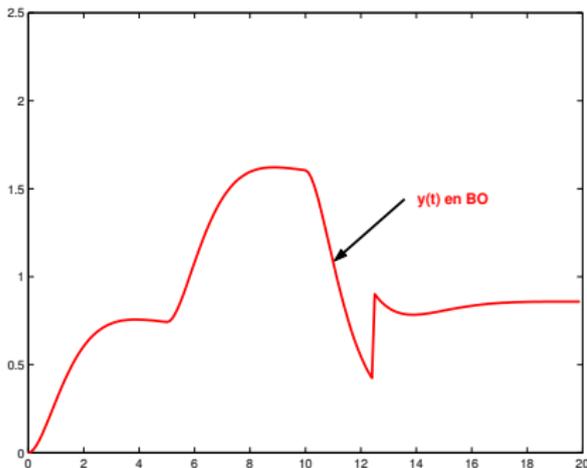


7.8 Exemple de réglage d'un RST

- Entrée de référence $x(t)$ et entrée de perturbation $p(t)$

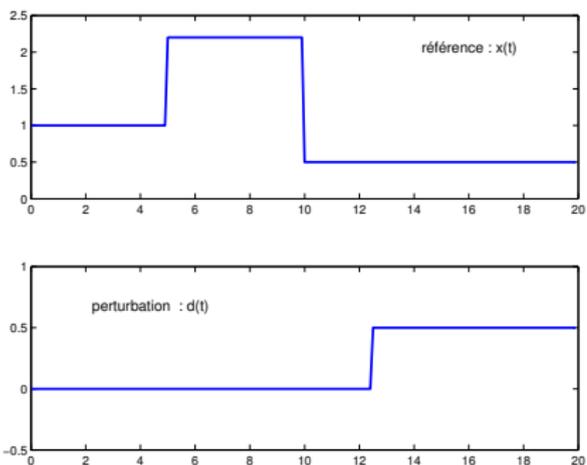


- résultats de la régulation

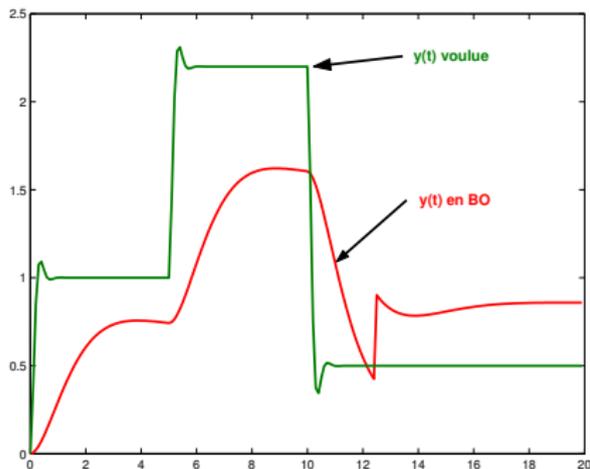


7.8 Exemple de réglage d'un RST

- Entrée de référence $x(t)$ et entrée de perturbation $p(t)$

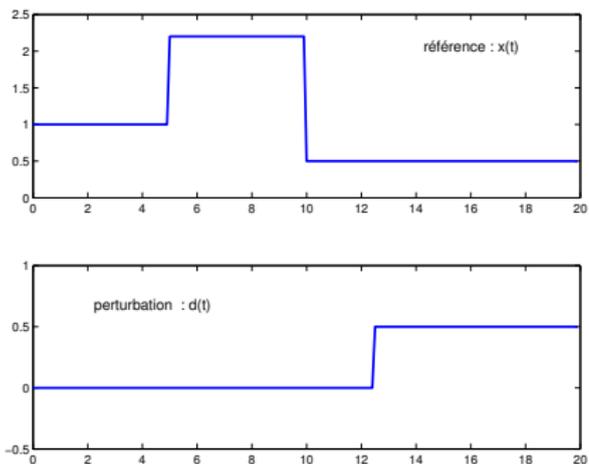


- résultats de la régulation



7.8 Exemple de réglage d'un RST

- Entrée de référence $x(t)$ et entrée de perturbation $p(t)$



- résultats de la régulation

