

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE EN GÉNIE DES SYSTÈMES ET DE L'INNOVATION



– Cours de deuxième année ingénieur –

# CONTRÔLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES



Benoît MARX, Maître de Conférences HDR à l'Université de Lorraine



# Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION ET OUTILS THÉORIQUES</b>	<b>1</b>
1.1	Signaux et systèmes . . . . .	1
1.1.1	Systèmes . . . . .	1
1.1.2	Signaux . . . . .	2
1.2	Systèmes linéaires et équations différentielles . . . . .	2
1.2.1	Équations différentielles . . . . .	2
1.2.2	Systèmes décrits par des équations différentielles linéaires, invariantes	3
1.3	Transformée de Laplace . . . . .	6
1.3.1	Définitions . . . . .	7
1.3.2	Propriétés des transformées de Laplace . . . . .	7
1.3.3	Exemples d'application . . . . .	10
1.4	Fonction de transfert . . . . .	12
1.4.1	Détermination de la fonction de transfert . . . . .	12
1.4.2	Schémas fonctionnels et algèbre des blocs . . . . .	13
1.4.3	Exemple . . . . .	13
1.5	Réponse temporelle d'un système linéaire . . . . .	14
1.5.1	Pôles simples distincts réels . . . . .	15
1.5.2	Pôles multiples réels . . . . .	16
1.5.3	Pôles complexes conjugués . . . . .	17
1.6	Annexe : table de transformées de Laplace . . . . .	17
<b>2</b>	<b>ÉTUDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE</b>	<b>18</b>
2.1	Intérêt des systèmes du premier ordre . . . . .	18
2.2	Réponses temporelles . . . . .	18
2.2.1	Réponse impulsionnelle d'un premier ordre . . . . .	19
2.2.2	Réponse Indicielle d'un premier ordre . . . . .	19
2.2.3	Réponse à une rampe . . . . .	20
2.2.4	Réponse à une sinusoïde . . . . .	21
2.3	Réponse fréquentielle . . . . .	22
2.3.1	Étude d'un intégrateur pur . . . . .	23
2.3.2	Étude du premier ordre . . . . .	24
<b>3</b>	<b>ÉTUDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE</b>	<b>25</b>
3.1	Intérêt des systèmes du deuxième ordre . . . . .	25
3.2	Réponses temporelles . . . . .	25
3.2.1	Réponse impulsionnelle d'un second ordre . . . . .	25
3.2.2	Réponse indicielle d'un second ordre . . . . .	27
3.3	Réponses fréquentielles . . . . .	29
3.4	Résumé . . . . .	31

<b>4</b>	<b>ÉTUDE DES SYSTÈMES LINÉAIRES D'ORDRE QUELCONQUE</b>	<b>32</b>
4.1	Introduction . . . . .	32
4.2	Réponse temporelle d'un système linéaire d'ordre quelconque . . . . .	32
4.3	Analyse fréquentielle . . . . .	33
<b>5</b>	<b>SYSTÈMES EN BOUCLE FERMÉE</b>	<b>35</b>
5.1	Introduction . . . . .	35
5.2	Effet de la boucle fermée sur un système simple . . . . .	36
5.2.1	Effet de la boucle fermée sur un système du premier ordre . . . . .	37
5.2.2	Effet de la boucle fermée sur un système du second ordre . . . . .	39
5.3	Structures classiques de régulation . . . . .	40
5.3.1	Commande en boucle ouverte . . . . .	42
5.3.2	Commande en boucle ouverte avec compensation des perturbations . . . . .	43
5.3.3	Commande en boucle fermée . . . . .	43
5.3.4	Commande en boucle fermée avec compensation des perturbations . . . . .	44
<b>6</b>	<b>ANALYSE D'UN SYSTÈME</b>	<b>46</b>
6.1	Objectifs . . . . .	46
6.2	Stabilité . . . . .	46
6.2.1	Définition . . . . .	46
6.2.2	Critère de Routh . . . . .	47
6.2.3	Critères de Nyquist et du revers . . . . .	49
6.3	Précision . . . . .	51
6.3.1	Précision statique . . . . .	51
6.3.2	Précision dynamique . . . . .	52
6.4	Robustesse . . . . .	53
6.4.1	Robustesse aux incertitudes de modélisation . . . . .	53
6.4.2	Robustesse aux entrées de perturbations . . . . .	55
<b>7</b>	<b>SYNTHÈSE DE QUELQUES CORRECTEURS</b>	<b>57</b>
7.1	Objectifs . . . . .	57
7.2	Augmenter le gain : correcteur P . . . . .	58
7.3	Augmenter le gain en BF : correcteur à retard de phase . . . . .	59
7.4	Précision statique parfaite : correcteur PI . . . . .	60
7.5	Améliorer la robustesse : correcteur à avance de phase . . . . .	60
7.6	Améliorer précision et robustesse : correcteur PID . . . . .	61
7.7	Comparaison des résultats de quelques régulateurs . . . . .	63
7.8	Robustesse et suivi de trajectoire : correcteur RST . . . . .	64
	<b>SUJETS DE TRAVAUX DIRIGÉS</b>	<b>68</b>
	TD1 Approche système . . . . .	68
	TD2 Transformée de Laplace et équations différentielles . . . . .	71
	TD3 Linéarisation et schéma-blocs . . . . .	72
	TD4 Identification . . . . .	73
	TD5 Approche fréquentielle, diagrammes de Bode . . . . .	74
	TD6 Amélioration des performances en boucle fermée . . . . .	75
	TD7 Robustesse et boucle fermée . . . . .	76
	TD8 Réglages de correcteurs . . . . .	77
	<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

# Chapitre 1

## Introduction au traitement du signal, et outils théoriques

### 1.1 Signaux et systèmes

#### 1.1.1 Systèmes

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits au moyen de relations mathématiques reliant les variables d'entrées aux variables de sorties au cours du temps. L'action du système est alors équivalente à un opérateur mathématique de l'espace des entrées, à valeurs dans l'espace des sorties. Par exemple dans un bassin versant on va chercher à exprimer le débit (sortie) en fonction des pluies (entrées) ou dans une station d'épuration on étudie la concentration en polluants rejetés dans le milieu naturel (sorties) en fonction de la composition des eaux usées arrivant (entrées).

Les frontières du système, le nombre et la nature des entrées et des sorties, sont dictés par la physique du système, mais aussi (voire surtout) par la vision qu'on s'en donne. Considérons un vélo, les déplacements sont bien sûr fonction de la vitesse de pédalage, du freinage, et de l'angle du guidon, mais on se rend vite compte qu'il est illusoire de ne pas prendre en compte la vitesse du vent, l'état de surface du sol (relief, adhérence, etc). La complexité du modèle résultera de la précision souhaitée de ce modèle. Ainsi, à un même système physique, plusieurs modèles peuvent donc être associés.

Pour résumer, un système est un ensemble d'éléments reliés par un lien fonctionnel, par exemple des équations mathématiques. Un système physique peut alors être représentés par le schéma fonctionnel de la figure 1.1. En adoptant cette approche système, plusieurs problèmes peuvent se poser :

- **l'identification** : les entrées et les sorties du système étant connues, on cherche un modèle mathématique représentant le comportement entrée/sortie observé ;
- **la commande** : le modèle du système est connu, on cherche les entrées à appliquer au système pour que les sorties aient un comportement donné.

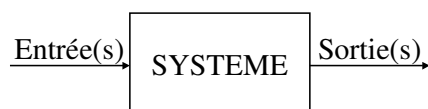


FIGURE 1.1 – Schéma fonctionnel de l'approche système

### 1.1.2 Signaux

On a donc défini un système, comme une entité transformant un signal d'entrée, en un signal de sortie. Un signal est une grandeur contenant une information. On peut classer les signaux de différentes manières.

D'un point de vue pratique, on peut s'intéresser à leur dimension. Dans ce cours nous limiterons notre étude à des signaux à une seule dimension, donc à des systèmes ayant une entrée et une sortie. Les résultats établis ainsi peuvent facilement être étendus aux systèmes à entrées et sorties multiples, en considérant des matrices, dont chaque élément est un système mono-entrée, mono-sortie.

Un signal peut être connu à tout instant, dans ce cas il est possible de tracer continûment son évolution au cours du temps, on parle de *signal continu* (exemple une entrée sinusoïdale :  $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ ). Sinon, le signal peut être connu à certains instants, on parle alors de *signaux à temps discret*, dans ce cas il est défini par une suite de valeurs (l'exemple précédent devient :  $x(t_k) = \{x_0 \sin(\omega t_k), t_k = t_0 + k\tau\}$ ).

On peut classer les signaux selon la (ou les) variable(s) dont ils dépendent. Jusqu'ici la seule variable évoquée a été le temps  $t$ , mais bien d'autres existent, par exemple des variables d'espace lorsqu'une grandeur n'est pas constante dans un volume (comme la température dans une pièce). Dans le cas des systèmes linéaires, on verra qu'il est intéressant d'étudier la réponse d'un système en fonction de la fréquence du signal d'entrée.

## 1.2 Systèmes linéaires et équations différentielles

Dans le cadre de ce cours, on étudie exclusivement les systèmes vérifiant les hypothèses suivantes :

- le système est *linéaire*
- le système est *dynamique*
- le système est *invariant dans le temps*
- le système est *causal*

On montrera que de tels systèmes sont représentés par des équations différentielles linéaires, à coefficients constants, dont l'ordre de dérivation maximal de la sortie est supérieur ou égal à l'ordre de dérivation maximal de l'entrée.

### 1.2.1 Équations différentielles

On appelle équation différentielle, toute équation faisant apparaître des dérivées ou des différentielles des différentes variables. Soient deux variables  $x(t)$  connue, et  $y(t)$  inconnue, dépendantes de la variable  $t$ , et deux entiers  $m$  et  $n$ , on appelle équation différentielle d'ordre  $n$  (si  $n > m$ ), une équation de la forme :

$$0 = f \left( t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^m x(t)}{dt^m} \right) \quad (1.1)$$

Dans une telle équation, la variable  $t$  est appelée variable *indépendante*, alors que les variables  $x(t)$  et  $y(t)$  sont dites dépendantes (de  $t$ ).

Ce type d'équation est très utilisé dans tous les domaines de la physique pour lier les variations des différentes grandeurs entre elles, par exemple en mécanique des solides ou des fluides : l'accélération, la vitesse et la position sont liées aux forces exercées, pression,

etc. En cinétique chimique, la vitesse de réaction, donc l'évolution des concentrations au cours du temps, dépend de la température par la loi d'Arrhenius, ...

Caractérisons le type de relation différentielles que nous étudierons. Premièrement, il s'agit d'équations différentielles linéaires, autrement dit chaque terme de l'équation est au plus d'ordre 1 en les variables dépendantes (dans les exemples suivants :  $x(t)$  et  $y(t)$ ) et ne fait apparaître qu'une seule variable (pas de terme croisé). Ainsi les équations différentielles  $\sin(x(t)) + 4\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$ ,  $x^2(t) + 4\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$  ou  $2x(t)y(t) + 4\frac{d^2x(t)}{dt^2} = y(t)$  ne sont pas linéaires, respectivement à cause des termes  $\sin(x(t))$ ,  $x^2(t)$ , et  $x(t)y(t)$ .

Deuxièmement, on utilisera exclusivement les équations différentielles à coefficients constants, aussi appelées invariantes. Autrement dit les coefficients pondérant les dérivées de  $x(t)$  et de  $y(t)$ , ne doivent pas dépendre de la variable  $t$ . Par exemple, l'équation  $t\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$  n'est pas invariante à cause du terme  $t\frac{dy(t)}{dt}$ , dont le coefficient  $t$  dépend directement de la variable de dérivation.

Pour résumer, l'équation différentielle, décrivant un système d'entrée  $x(t)$ , et de sortie  $y(t)$ , est de la forme :

$$\boxed{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)} \quad (1.2)$$

## 1.2.2 Systèmes décrits par des équations différentielles linéaires, invariantes

### 1.2.2.1 De la linéarité d'un système

La propriété de linéarité décrite plus haut pour les équations différentielles, s'étend aux systèmes par la définition suivante.

**Définition 1.1** (système linéaire). *Le système  $\Sigma$  est linéaire si, pour toutes constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , et tous signaux d'entrée  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , on a la propriété suivante :*

- si le signal  $x_1(t)$  appliqué au système  $\Sigma$  provoque la sortie  $y_1(t)$
- si le signal  $x_2(t)$  appliqué au système  $\Sigma$  provoque la sortie  $y_2(t)$
- alors le signal  $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  appliqué au système  $\Sigma$  provoque la sortie  $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

La linéarité d'une équation différentielle entraîne la linéarité du système. En effet, dans le cas où le comportement du système est décrit par des équations différentielles linéaires, on peut prouver que le système est linéaire. En effet on montre très facilement que si d'une part  $x_1(t)$  et  $y_1(t)$  vérifient (1.2) et si d'autre part  $x_2(t)$  et  $y_2(t)$  vérifient également (1.2), alors, pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  réels quelconques,  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  et  $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$  vérifient encore (1.2).

**Théorème 1.1.** *Un système d'entrée  $x(t)$ , de sortie  $y(t)$ , décrit par une équation différentielle, linéaire, à coefficients constants (1.2) est un système linéaire.*

L'intérêt de cette propriété, est de pouvoir décomposer la réponse d'un système à une entrée comme la somme des réponses à des entrées élémentaires (plus faciles à calculer), c'est le *principe de superposition*. La réponse d'un système à différentes entrées  $x_i(t)$  appliquées simultanément au système est égale à la somme des réponses  $y_i(t)$  correspondant à chaque entrée, autrement dit la réponse à  $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)$ , est donnée par :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \quad (1.3)$$

Certains systèmes sont linéaires, mais la plupart sont régis par des lois de comportement non linéaires (les énergies font intervenir des carrés, ou des racines carrées, les phénomènes de saturation apparaissent, etc). Il peut sembler abusif de pouvoir approcher n'importe quel système par un système linéaire, néanmoins en considérant cette approche comme locale, cela devient nettement plus réaliste. Dans ce cas, on ne considère plus que toute courbe se ramène à une droite, mais plutôt que, autour d'un point donné, la droite tangente à la courbe en ce point donne une bonne approximation. Cette propriété est mise en évidence en utilisant un développement de Taylor au premier ordre. Pour commencer, considérons un système non linéaire statique de sortie  $y(t)$ , d'entrée  $x(t)$ , décrit par  $y = f(x)$ . Au voisinage du point  $(x_0, y_0)$ , le développement au premier ordre donne :

$$y(x) = y(x_0) + \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0} (x - x_0) \quad (1.4)$$

en notant  $\delta y = y - y_0$ , et  $\delta x = x - x_0$ , il vient :

$$\delta y = \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0} \delta x \quad (1.5)$$

Autrement dit, le changement de variables permet de se ramener à une relation linéaire, valable pour  $x(t)$  suffisamment proche de  $x_0$ , et  $y(t)$  suffisamment proche de  $y_0$ . Le domaine de validité de cette relation est d'autant plus large que la non-linéarité du système est faible. Cette méthode, illustrée par la figure 1.2, peut se généraliser à des systèmes dynamiques non linéaires.

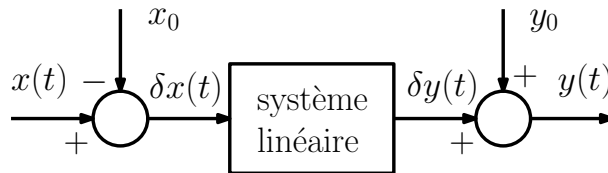


FIGURE 1.2 – Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

*Exemple 1.1.* À titre d'exemple, on considère un solide de masse  $M$ , décrit par sa position  $x(t)$ , relié au référentiel par un ressort, qui exerce sur la masse  $M$ , une force  $f(x)$ . En l'absence de frottement, le mouvement de la masse est déterminé par :

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - f(x(t)) = 0 \quad (1.6)$$

Comme l'illustre la figure 1.3, l'allure de la force, en fonction de l'allongement  $x$  peut être très correctement approximée par une courbe linéaire, pour  $|x| < x_l$ , dans cet intervalle, on a alors  $f(x) = -k.x$ .

Dans ce cas, l'équation du mouvement devient une équation différentielle à coefficients constants, valable pour  $|x| < x_l$  :

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0 \quad (1.7)$$



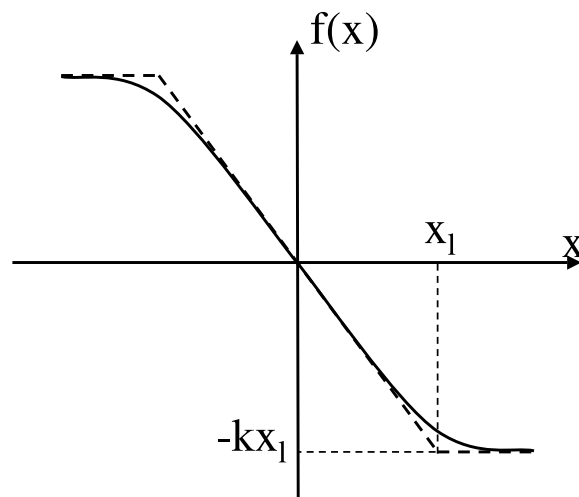


FIGURE 1.3 – Loi de comportement d'un ressort, et son approximation linéaire (pointillés)

### 1.2.2.2 De la causalité d'un système

Un système physique ne permettant pas de prédire l'avenir, sa sortie ne dépend pas des valeurs futures de l'entrée. La sortie du système est un effet, dont la cause en est l'entrée, et logiquement l'effet suit la cause. On parle alors de causalité.

**Définition 1.2** (système causal). *Un système est causal si la sortie, dépend exclusivement des valeurs passées et présentes de l'entrée. À tout instant  $t_0$ , la sortie  $y(t_0)$  est déterminée par  $x(t)$  avec  $t \leq t_0$ .*

La dérivée d'un signal en un point est définie par la variation du signal en ce point, il est donc nécessaire de connaître l'évolution du signal *juste avant* et *juste après* ce point, autrement dit dériver un signal en  $t$ , implique de connaître sa valeur en  $t^+$ . Pour vérifier la causalité, la relation différentielle liant l'entrée et la sortie d'un système doit donc faire apparaître des dérivées de l'entrée d'ordre inférieur (ou égal) à celui des dérivées de la sortie.

**Théorème 1.2.** *Le système linéaire d'entrée  $e(t)$ , et de sortie  $s(t)$ , décrit par l'équation différentielle (1.8) est (strictement) causal si  $m$  est (strictement) inférieur à  $n$ .*

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j e(t)}{dt^j} \quad (1.8)$$

### 1.2.2.3 Un exemple de système dynamique

*Exemple 1.2* (Exemple d'un réacteur chimique). On considère un réacteur chimique de volume constant  $V$ , alimenté par un débit entrant constant  $q_e$ , représenté à la figure 1.4. La température  $T$  au sein du réacteur est supposée homogène et constante. La solution alimentant le réacteur a une concentration (variable) en produit  $A$  notée  $c_{Ae}(t)$ . Le volume étant constant, le débit de sortie  $q_s$  est égal à  $q_e$  et constant.

Au sein du réacteur, se produit la réaction :



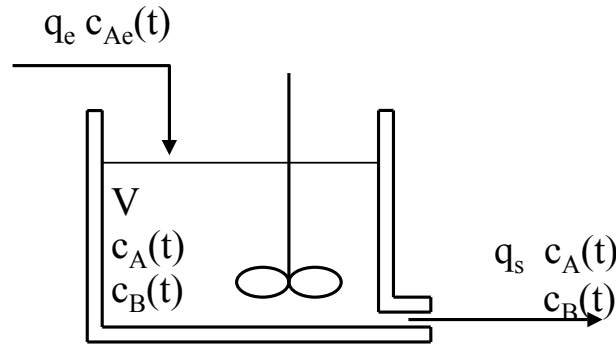


FIGURE 1.4 – Réacteur chimique

On note respectivement  $c_A(t)$  et  $c_B(t)$  les concentrations en produit  $A$  et  $B$  à l'intérieur du réacteur. La réaction est modélisée par la loi d'Arrhenius, donc la cinétique chimique donne la vitesse de réaction :

$$r(t) = k(t)c_A(t) \quad \text{avec} \quad k(T) = k_0 \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \quad (1.10)$$

Le bilan molaire du réactif  $A$ , tenant compte des quantités entrante, sortante et consommée par la réaction, donne :

$$V \frac{dc_A(t)}{dt} = q_e c_{Ae}(t) - (q_e + V k(T) K_r) c_A(t) \quad (1.11)$$

On constate alors que la concentration en réactif  $A$  est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Autrement dit, on peut considérer que  $c_A(t)$  est la sortie d'un système dynamique linéaire, invariant dans le temps, dont l'entrée est  $c_{Ae}(t)$ .

De même, le bilan molaire du produit  $B$  s'écrit :

$$V \frac{dc_B(t)}{dt} = -q_e c_B(t) + V k(T) c_A(t) \quad (1.12)$$

et la concentration en réactif  $B$ , notée  $c_B(t)$ , est la sortie d'un système dynamique linéaire, invariant dans le temps, dont l'entrée est  $c_A(t)$ . On en déduit que  $c_B(t)$  pourrait aussi être décrite par un système dynamique linéaire invariant dans le temps, d'entrée  $c_{Ae}(t)$  (il suffit de mettre en série les deux systèmes).

### 1.3 Transformée de Laplace

Comme il a été vu plus haut, beaucoup de systèmes physiques sont représentés, ou peuvent être approchés, par un modèle linéaire. Autrement dit la recherche du comportement d'un système pour une entrée donnée, revient à l'étude de relations différentielles linéaires d'ordre  $n$ , généralement à second membre non nul. Cette étude, sauf pour  $n$  très faible, n'est pas triviale. Pour simplifier cette tâche, on utilise un outil mathématique, qui à une équation différentielle en la variable  $t$ , fait correspondre un polynôme en une variable  $p$ , appelée variable de Laplace<sup>1</sup>, et réciproquement. Il s'agit de la transformation de Laplace, et de son inverse.

1. du nom du Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Laplace participa, pendant la révolution, à la mise en place du système métrique, et étudia de nombreux domaines : thermodynamique, mécanique céleste, probabilité, électromagnétisme... Quand Napoléon lui fit remarquer que Dieu n'apparaissait pas dans son traité *Mécanique Céleste*, il rétorqua : "Je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse".

### 1.3.1 Définitions

La transformée de Laplace d'un signal  $x(t)$  nul pour  $t < 0$ , est notée  $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ , et est définie ci-dessous.

**Définition 1.3.** La transformée de Laplace du signal  $x(t)$  est donnée par :

$$\boxed{X(p) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt} \quad (1.13)$$

où  $p \in \mathbb{C}$ , tel que l'intégrale converge.

Pour que l'intégrale (1.13) converge il faut qu'il existe deux constantes  $M$  et  $a$ , telles que le signal soit majoré en amplitude par une exponentielle décroissante :

$$|f(t)| < Me^{at}, \text{ pour tout } t \quad (1.14)$$

On peut alors définir la transformée de Laplace inverse, notée  $\mathcal{L}^{-1}(X(p))$ .

**Définition 1.4.** La transformée de Laplace inverse du signal  $X(p)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}^{-1}(X(p)) = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p)e^{pt} dp, \text{ avec } \sigma > a \quad (1.15)$$

Cette formule est rarement utilisée car il existe des tables de transformées de Laplace. On tente donc généralement de se ramener à une somme de termes élémentaires dont les transformées inverses sont connues.

On utilise fréquemment l'équivalence  $p = j\omega$ , où  $\omega$  est la fréquence du signal d'entrée, de ce fait, par abus de langage on dit que la transformée de Laplace d'un signal se situe dans le *domaine fréquentiel*, tandis que le signal appartient au *domaine temporel*.

### 1.3.2 Propriétés des transformées de Laplace

Étudions quelques propriétés de la transformée de Laplace. Une fois exhibées quelques propriétés pratiques de la transformée de Laplace, on établira les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation et d'intégration par rapport au temps  $t$ , à la multiplication et la division par la variable  $p$ .

#### 1.3.2.1 Linéarité

De par la linéarité de l'intégration, la transformée de Laplace est linéaire, autrement dit, pour tout couple de signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  tels que leur transformée de Laplace converge, et pour tout couple de constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , on vérifie :

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \mathcal{L}(x_1(t)) + \beta \mathcal{L}(x_2(t))} \quad (1.16)$$

#### 1.3.2.2 Dilatation ou contraction du temps

Pour un réel positif  $k$ , on a :

$$\boxed{\mathcal{L}(x(kt)) = \frac{1}{k} X\left(\frac{p}{k}\right)} \quad (1.17)$$

Cette égalité se prouve en posant le changement de variable  $u = kt$ ,  $du = kdt$ , dans le calcul de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(x(kt)) = \int_0^{\infty} x(kt)e^{-pt} dt \quad (1.18)$$

$$= \int_0^{\infty} x(u)e^{-pu/k} \frac{1}{k} du \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{\infty} x(u)e^{-\frac{p}{k}u} du \quad (1.20)$$

### 1.3.2.3 Transformée de Laplace d'un signal retardé

La transformée de Laplace du signal  $x(t)$  retardé de  $\tau$  est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}(x(t - \tau)) = e^{-p\tau} \mathcal{L}(x(t)) = e^{-p\tau} X(p)} \quad (1.21)$$

Cette égalité se prouve en posant le changement de variable  $u = t - \tau$ ,  $du = dt$ , dans le calcul de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(x(t - \tau)) = \int_0^{\infty} x(t - \tau)e^{-pt} dt \quad (1.22)$$

$$= \int_0^{\infty} x(u)e^{-p(u+\tau)} du \quad (1.23)$$

$$= e^{-p\tau} \underbrace{\int_0^{\infty} x(u)e^{-pu} du}_{X(p)} \quad (1.24)$$

### 1.3.2.4 Transformée de Laplace d'un signal modulé

La transformée de Laplace du signal  $x(t)$ , modulé par  $e^{-at}$  est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}x(t)) = X(p + a)} \quad (1.25)$$

Cette égalité se prouve en rentrant le terme de modulation dans l'intégrale.

### 1.3.2.5 Transformée de Laplace de la dérivée temporelle d'un signal

Si on note  $x(0^+)$  la valeur initiale du signal  $x(t)$ , la transformée de Laplace de la dérivée  $\frac{dx(t)}{dt}$  est donnée par la relation :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = pX(p) - x(0^+)} \quad (1.26)$$

Cette relation se prouve en intégrant par parties le premier terme :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt} dt = [x(t)e^{-pt}]_0^{\infty} + p \underbrace{\int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}(x(t))} \quad (1.27)$$

$$= 0 - x(0^+) + pX(p) \quad (1.28)$$

### 1.3.2.6 Transformée de Laplace de la primitive d'un signal

La transformée de Laplace de l'intégrale d'un signal est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{p}X(p)} \quad (1.29)$$

Pour prouver cette relation, notons  $y(t)$ , la primitive de  $x(t)$  nulle en l'origine (i.e.  $\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$ ), et  $y(0) = 0$ , en intégrant par parties il vient :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x(u)du\right) = \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt \quad (1.30)$$

$$= \left[-y(t)\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{x(t)} e^{-pt}dt \quad (1.31)$$

$$= -0 + \underbrace{\frac{y(0)}{p}}_{=0} + \frac{1}{p}\mathcal{L}(x(t)) \quad (1.32)$$

### 1.3.2.7 Détermination de la valeur initiale d'un signal

La valeur initiale d'un signal peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace du signal à partir de la relation :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p)} \quad (1.33)$$

pour prouver cette relation on utilise la transformée de Laplace de la dérivée de  $x(t)$  :

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt}dt = pX(p) - x(0^+) \quad (1.34)$$

Pour prouver cette relation, il faut faire tendre  $p$  vers  $\infty$  dans l'équation (1.34), il vient :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt}dt = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) - x(0^+) \quad (1.35)$$

Il vient alors  $0 = \lim_{p \rightarrow \infty} pX(p) - x(0^+)$ , d'où le résultat.

### 1.3.2.8 Détermination de la valeur finale d'un signal

La valeur finale d'un signal peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace du signal à partir de la relation :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p)} \quad (1.36)$$

En prenant la limite pour  $p \rightarrow 0$  de l'équation (1.34), il vient :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-pt}dt = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) - x(0^+) \quad (1.37)$$

autrement dit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^+) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) - x(0^+) \quad (1.38)$$

d'où le résultat.

### 1.3.2.9 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux signaux  $h(t)$  et  $u(t)$  est noté  $h(t) * u(t)$  et est défini par :

$$\boxed{h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau} \quad (1.39)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux signaux est égale au produit usuel des transformées de Laplace des signaux :

$$\mathcal{L}(h(t) * u(t)) = \mathcal{L}(h(t))\mathcal{L}(u(t)) \quad (1.40)$$

En effet on peut calculer :

$$\mathcal{L}(h(t) * u(t)) = \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau \right) e^{-pt} dt \quad (1.41)$$

en posant le changement de variable  $v = t - \tau$  (donc :  $dv = d\tau$ ), on peut séparer les variables des deux intégrales. De plus la causalité de  $u(\tau)$  permet d'obtenir :

$$\mathcal{L}(h(t) * u(t)) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v)u(\tau)e^{-p(v+\tau)}d\tau dv \quad (1.42)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} h(v)e^{-pv}dv}_{\mathcal{L}(h(t))} \underbrace{\int_0^{\infty} u(\tau)e^{-p\tau}d\tau}_{\mathcal{L}(u(t))} \quad (1.43)$$

### 1.3.3 Exemples d'application

À titre d'exemple, calculons les transformées de Laplace des signaux d'excitation les plus utilisés : l'impulsion, l'échelon, et les fonctions cosinus et sinus.

L'impulsion, ou Dirac<sup>2</sup>, notée  $\delta(t)$ , est définie par les propriétés suivantes :

$$\delta(t) = 0, \text{ pour } t \neq 0 \quad (1.44)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (1.45)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \quad (1.46)$$

Pour calculer la transformée de Laplace de l'impulsion, on utilise une approximation de  $\delta(t)$ . Considérons, la fonction  $d_a(t)$  définie par :

$$d_a(t) = \begin{cases} a, & \text{pour } 0 < t < 1/a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.47)$$

---

2. du nom de Paul A.M. Dirac (1902-1986), physicien britannique. Après avoir proposé un formalisme pour la physique quantique, il découvrit l'existence du positron en 1928. En 1933, il partagea le prix Nobel avec E. Schrödinger.

La limite de  $d_a(t)$  pour  $a \rightarrow \infty$  est l'impulsion. Calculons  $\mathcal{L}(d_a(t))$  :

$$\mathcal{L}(d_a(t)) = \int_0^{\infty} d_a(t) e^{-pt} dt = \int_0^{1/a} a e^{-pt} dt \quad (1.48)$$

$$= \left[ -\frac{a}{p} e^{-pt} \right]_0^{1/a} = \frac{a}{p} \left( 1 - e^{-\frac{p}{a}} \right) \quad (1.49)$$

$$= \frac{a}{p} \left( 1 - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( -\frac{p}{a} \right)^k \right) = -\frac{a}{p} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left( -\frac{p}{a} \right)^k \right) \quad (1.50)$$

$$= \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left( -\frac{p}{a} \right)^{k-1} \right) = 1 - \frac{p}{2a} + \frac{p^2}{6a^2} - \dots \quad (1.51)$$

en prenant la limite pour  $a \rightarrow \infty$  de cette expression, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta(t)) = 1} \quad (1.52)$$

Calculons, à présent, la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside<sup>3</sup>. La fonction de Heaviside, notée  $\Gamma(t)$  est définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

La transformée de Laplace est donc donnée par :

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \int_0^{\infty} \Gamma(t) e^{-pt} dt \quad (1.54)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \quad (1.55)$$

$$= \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} \quad (1.56)$$

Il vient donc :

$$\boxed{\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}} \quad (1.57)$$

Pour calculer les transformées de Laplace des fonctions *sinus* et *cosinus*, on utilise la linéarité de la transformation de Laplace, ainsi que la transformée de Laplace d'une exponentielle (rappelons que  $\mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{p+a}$ ) et la définition des fonctions *sinus* et *cosinus* comme les sommes d'exponentielles. Il vient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}} \quad (1.58)$$

On se limitera ici à ces quelques exemples, d'autres transformées de Laplace de signaux usuels sont fournies en annexe, à la fin du présent chapitre.

---

3. du nom d'Oliver Heaviside (1850-1925), physicien anglais et néanmoins autodidacte. Après avoir servi dans les télégraphes, il étudia la transmission des ondes radio, le calcul vectoriel, et les circuits électriques. Nous lui devons les équations de Maxwell (sic!).

## 1.4 Fonction de transfert

### 1.4.1 Détermination de la fonction de transfert

Considérons un système linéaire, invariant dans le temps, soumis à un signal d'entrée  $u(t)$ . Le système est caractérisé par sa réponse à un Dirac, appelée réponse impulsionnelle, notée  $h(t)$ . Tout signal d'entrée peut se décomposer sous la forme d'impulsions de largeur  $\Delta$ , et de hauteur  $u(t_k)$ , apparaissant aux instant  $t_k = k\Delta$ . La réponse du système, notée  $y(t)$  est alors la superposition des réponses à chaque impulsion retardée :

$$y(t_n) = \sum_{k=0}^n \Delta \cdot u(t_k) \cdot h(t_n - t_k) \quad (1.59)$$

Pour  $\Delta \rightarrow 0$ , cette somme correspond à l'intégrale de Riemann suivante :

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (1.60)$$

On reconnaît alors le produit de convolution de l'entrée et de la réponse impulsionnelle. D'après les propriétés de la transformée de Laplace, on obtient la relation suivante reliant  $Y(p)$  et  $U(p)$  les transformées de Laplace de  $y(t)$  et  $u(t)$  respectivement :

$$\boxed{Y(p) = H(p) \cdot U(p)} \quad (1.61)$$

Cette relation est valable pour tout signal d'entrée  $U(p)$ , autrement dit le comportement du système est déterminé par l'opérateur  $H(p)$ , qu'on appelle *fonction de transfert*. Cette opérateur correspond à une multiplication dans le domaine fréquentiel, et à une convolution dans le domaine temporel.

Pour déterminer cet opérateur  $H(p)$ , écrivons l'équation différentielle du système.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad (1.62)$$

avec  $m \leq n$ , pour garantir la causalité du système. Prenons la transformée de Laplace de (1.62), il vient :

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+) \right) = \sum_{j=0}^m b_j \left( p^j U(p) - \sum_{k=0}^{j-1} p^{j-1-k} u^{(k)}(0^+) \right) \quad (1.63)$$

où  $x^{(k)}(0^+)$  représente la valeur en  $t = 0$ , de la dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $x(t)$ . On peut finalement exprimer  $Y(p)$  en fonction des données connues (l'entrée du système et les valeurs initiales des dérivées de l'entrée et de la sortie).

$$Y(p) = \underbrace{\frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}}_{H(p)} U(p) + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-1-k} y^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} - \frac{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{j-1} b_j p^{j-1-k} u^{(k)}(0^+)}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \quad (1.64)$$

Il est souvent supposé que les conditions initiales sont nulles, dans ce cas, la transformée de Laplace de la réponse du système dépend exclusivement de la transformée de Laplace de l'entrée. Le terme de cette dépendance est appelé *fonction de transfert*, on a donc :

$$Y(p) = H(p)U(p) \quad (1.65a)$$

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (1.65b)$$



### 1.4.2 Schémas fonctionnels et algèbre des blocs

Les fonctions de transfert permettent de représenter simplement les systèmes, et surtout les *systèmes de systèmes*, autrement dit les systèmes interconnectés. Pour cela on utilise des blocs représentant chaque système élémentaire. Ces blocs sont reliés par des flèches représentant un signal, l'orientation de la flèche indiquant le sens du signal. Cette représentation est un graphe orienté où un arc représente un signal et où un nœud est un bloc représentant une opération sur les signaux (addition, soustraction, convolution). Les signaux peuvent s'additionner ou se soustraire au moyen de sommateurs : à l'entrée de la flèche dans le sommateur le signe affectant le signal est indiqué. Les principales opérations sont représentées à la figure 1.5. Concernant le diagramme du retour bouclé on peut détailler le résultat : si on exprime la sortie  $Y(p)$  en fonction de ce qui attaque le système  $H_1(p)$ , on obtient :  $Y(p) = H_1(p) (U(p) - H_2(p)Y(p))$ , d'où le résultat.

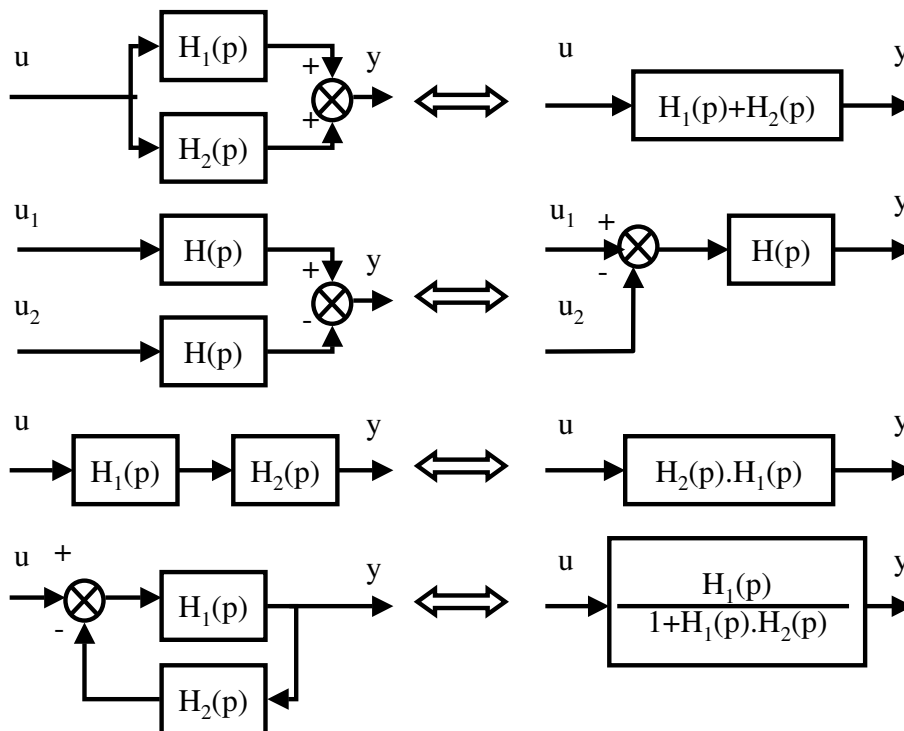


FIGURE 1.5 – Algèbre des blocs

L'intérêt de tels schémas est de pouvoir simplifier les expressions des fonctions de transfert, mais surtout de faire apparaître la structure du système, de mettre en évidence graphiquement l'influence d'un signal sur un autre et de permettre une vision globale et intuitive du système.

### 1.4.3 Exemple

À titre d'exemple, on considère le système de deux masses  $M_1$  et  $M_2$ , évoluant sur un plan horizontal, sans frottement. La force d'excitation  $F$  agit sur le premier solide. La masse  $M_1$  est liée au repère par un ressort de raideur  $k_1$  et un amortisseur fluide  $b$ ; et au deuxième solide par un ressort de raideur  $k_2$ , comme représenté par la figure 1.6. L'objectif est de déterminer le mouvement de la masse  $M_2$  en fonction de la force appliquée  $F$ .

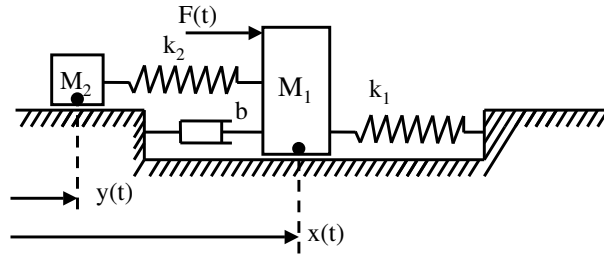


FIGURE 1.6 – Système masses-ressorts

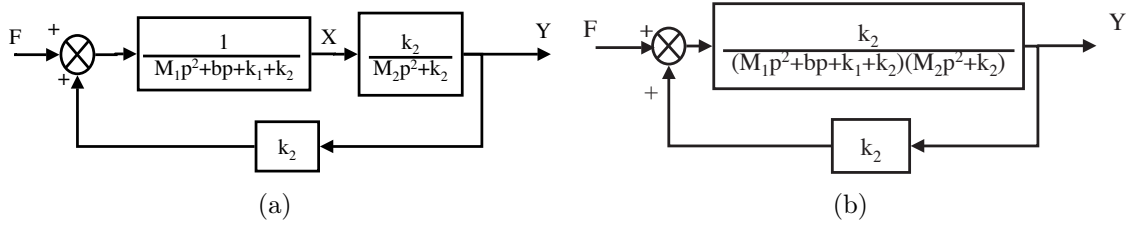


FIGURE 1.7 – Schémas blocs équivalents

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à chaque masse permet d'écrire :

$$M_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k_1 x(t) - b \frac{dx(t)}{dt} + F(t) - k_2(x(t) - y(t)) \quad (1.66)$$

$$M_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k_2(x(t) - y(t)) \quad (1.67)$$

En prenant la transformée de Laplace de ces équations, il vient (en supposant les conditions initiales nulles) :

$$(M_1 p^2 + bp + k_1 + k_2) X(p) = F(p) + k_2 Y(p) \quad (1.68)$$

$$(M_2 p^2 + k_2) Y(p) = k_2 X(p) \quad (1.69)$$

Ces équations se traduisent par le schéma bloc de la figure 1.7(a) qui peut encore se simplifier et se réduire au schéma de la figure 1.7(b). On peut en déduire la fonction de transfert qui lie  $Y(p)$  à  $F(p)$  par  $Y(p) = H(p)F(p)$

$$H(p) = \frac{\frac{k_2}{(M_2 p^2 + k_2)(M_1 p^2 + bp + k_1 + k_2)}}{1 - \frac{k_2^2}{(M_2 p^2 + k_2)(M_1 p^2 + bp + k_1 + k_2)}} \quad (1.70)$$

$$= \frac{k_2}{(M_2 p^2 + k_2)(M_1 p^2 + bp + k_1 + k_2) - k_2^2} \quad (1.71)$$

## 1.5 Réponse temporelle d'un système linéaire

La réponse temporelle d'un système linéaire, solution d'une équation différentielle linéaire peut se calculer de deux manières. Premièrement, on peut résoudre directement l'équation différentielle en cherchant les racines du polynôme caractéristique, et superposer les modes exponentiels correspondants. Deuxièmement, on peut prendre la transformée de Laplace de l'équation différentielle et du signal d'excitation, résoudre en  $p$  pour avoir

la transformée de Laplace de la solution :

$$Y(p) = \frac{Num(p)}{Den(p)}U(p) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Num_{k1}(p)}{Den(p)}y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Num_{k2}(p)}{Den(p)}x^{(k)}(0) \quad (1.72)$$

On prend enfin la transformée inverse de Laplace de la solution après avoir fait une décomposition en éléments simples.

Dans la deuxième méthode les conditions initiales sont prises en compte dès le début de la procédure, tandis que dans la première on les utilise à la fin pour déterminer les coefficients affectant chaque modes dans la réponse temporelle. Mais le principal intérêt du passage dans le domaine fréquentiel est de pouvoir traiter de manière identique les équations différentielles avec ou sans second membre, alors que la résolution d'équation différentielle avec second membre est parfois ardue.

Éxaminons la réponse temporelle en fonction de la nature des pôles de la fonction de transfert (ou du polynôme caractéristique).

### 1.5.1 Pôles simples distincts réels

Si  $Y(p) = H(p)U(p)$  a  $n$  pôles simples distincts, notés  $p_i$ , la décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p - p_i} \quad (1.73)$$

La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{p_i t} \quad (1.74)$$

Les modes sont convergents si les pôles sont négatifs.

*Exemple 1.3.* On se propose de résoudre l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad (1.75)$$

avec les conditions initiales :  $y(0) = 1$ , et  $y'(0) = 2$ . Pour cela, on prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = 0 \quad (1.76)$$

On peut en déduire  $Y(p)$  par :

$$Y(p) = \frac{py(0) + y'(0) + 3y(0)}{p^2 + 3p + 2} = \frac{p + 5}{(p + 1)(p + 2)} \quad (1.77)$$

$$= \frac{\left(\frac{p+5}{p+2}\right)_{p=-1}}{p + 1} + \frac{\left(\frac{p+5}{p+1}\right)_{p=-2}}{p + 2} = -\frac{3}{p + 2} + \frac{4}{p + 1} \quad (1.78)$$

On a finalement la solution

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \quad (1.79)$$

### 1.5.2 Pôles multiples réels

Si  $H(p)U(p)$  a  $n$  pôles simples multiples, notés  $p_i$ , de multiplicité  $k_i$ , dans ce cas la décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(p - p_i)^{k_i}} \quad (1.80)$$

La réponse temporelle est donc :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i t^{k_i-1}}{(k_i - 1)!} e^{p_i t} \quad (1.81)$$

Les modes sont convergents si les pôles sont négatifs.

*Exemple 1.4.* On se propose de résoudre l'équation différentielle, avec second membre :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1 \quad (1.82)$$

avec les conditions initiales :  $y(0) = 0$ , et  $\dot{y}(0) = 3$ .

Pour résoudre ce problème, on calcule la transformée de Laplace de l'équation différentielle, en tenant compte des conditions initiales données. On peut en déduire la transformée de Laplace de  $y(t)$ .

$$p^2 Y(p) - \dot{y}(0) - py(0) + 2pY(p) - 2y(0) + Y(p) = \frac{1}{p} \quad (1.83)$$

$$(p+1)^2 Y(p) = \frac{1}{p} + 3 \quad (1.84)$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)^2} \quad (1.85)$$

Une décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \frac{a}{p} + \frac{b+cp}{(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)^2} \quad (1.86)$$

$$= \frac{(a+c)p^2 + (2a+b)p + a}{p(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)^2} \quad (1.87)$$

Par identification, on obtient :  $a = 1$ ,  $b = -2$ , et  $c = -1$ , donc  $Y(p)$  est donné par :

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p+2}{(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)^2} \quad (1.88)$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p+1)^2} \quad (1.89)$$

On obtient finalement l'expression temporelle de  $y(t)$ .

$$y(t) = 1 - e^{-t} + 2te^{-t} \quad (1.90)$$

### 1.5.3 Pôles complexes conjugués

Les coefficients de la fonction de transfert étant réels, les pôles complexes sont conjugués deux à deux. De même, la réponse du système étant réelle, leurs poids dans la réponse temporelle sont conjugués. Pour un pôle complexe  $p_i = a + ib$ , de poids  $\alpha$ , on a donc :

$$y(t) = \dots + \alpha e^{(a+ib)t} + \bar{\alpha} e^{(a-ib)t} \quad (1.91)$$

$$= \dots + e^{at} |\alpha| (e^{i \arg(\alpha) + ibt} + e^{-i \arg(\alpha) - ibt}) \quad (1.92)$$

$$= \dots + 2|\alpha| e^{-at} \cos(bt + \arg(\alpha)) \quad (1.93)$$

Les deux modes conjugués induisent un comportement oscillatoire, amorti si le pôle est à partie réelle strictement négative, divergent si le pôle est à partie réelle strictement positive, et oscillatoire non amortie pour un pôle imaginaire pur.

Enfin, on distingue deux types de réponses. En régime libre, c'est à dire sans second membre, l'équation du système est :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0 \quad (1.94)$$

Et en régime forcé, où le système est soumis à une entrée  $x(t)$ , non identiquement nulle.

## 1.6 Annexe : table de transformées de Laplace

$x(t)$	$\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$
$\delta(t)$ impulsion unitaire	1
$\Gamma(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$
$t$ (rampe unitaire)	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
$x(t - \tau)$ (retard)	$e^{-p\tau} X(p)$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} \left( 1 - \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a} \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{b-a}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$1 - (at + 1)e^{-at}$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$(1 + (b-a)t)e^{-at}$	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$

# Chapitre 2

## Étude des systèmes linéaires du premier ordre

### 2.1 Intérêt des systèmes du premier ordre

Les systèmes du premiers ordres sont largement utilisés, essentiellement du fait de leur simplicité. Ils permettent de modéliser, avec réalisme, un grand nombre de systèmes dont la sortie "suit" l'entrée, avec un certain temps de réponse. Dans ce cas, le système est caractérisé, par le temps de réponse et l'amplification de l'entrée sur la sortie.

Ce type de système correspond aux équations différentielles linéaires du premier ordre. On trouve de nombreux exemples en physique ou en chimie : système hydraulique à un bac de rétention, circuit RC ou RL série, etc. Les relations du premier ordre permettent de prendre en compte un stockage d'énergie ou de matière. En notant  $x(t)$  l'entrée, et  $y(t)$  la sortie du système, on a une relation de la forme :

$$\boxed{T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)} \quad (2.1)$$

Dans(2.1),  $T$  est appelée constante de temps et est homogène à un temps. On verra que la rapidité d'un système du premier ordre est lié à cette constante. Le terme  $K$  est appelé gain statique. En effet, en régime est établi la sortie ne varie plus (donc  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ ) ce qui entraîne :  $y(t) = Kx(t)$  et  $K$  est donc le gain de l'entrée vers la sortie en régime permanent.

### 2.2 Réponses temporelles

Dans cette première section, seront étudiées les réponses temporelles des systèmes du premier ordre aux signaux caractéristiques : impulsion, échelon, rampe, et sinus. Pour ce faire, on considère l'équation différentielle :

$$\boxed{T \frac{y(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)} \quad (2.2)$$

La transformée de Laplace de la relation précédente donne :

$$(Tp + 1)Y(p) - Ty(0) = KX(p) \quad (2.3)$$

Autrement dit, on étudie les fonctions de transfert de la forme :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{Tp + 1}} \quad (2.4)$$

Pour étudier les réponses aux différents signaux d'entrée, il faut multiplier cette fonction de transfert par la transformée de Laplace du signal d'entrée. Les transformées de Laplace des signaux étudiés ont été calculées à titre d'exemple dans la chapitre précédent (exceptée la rampe unitaire, qui se déduit de l'échelon par intégration).

### 2.2.1 Réponse impulsionnelle d'un premier ordre

On appelle *réponse impulsionnelle*, la réponse d'un système linéaire à impulsion. La transformée de Laplace de l'impulsion a été calculée précédemment et est :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad (2.5)$$

La transformée de Laplace de la sortie est donc définie par :

$$Y(p) = H(p).U(p) = \frac{K}{Tp + 1} = \frac{K}{T} \left( \frac{1}{p + \frac{1}{T}} \right) \quad (2.6)$$

D'après les tables de transformées de Laplace, on a  $\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p+a} \right) = e^{-at}$ , on en déduit :

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}} \quad (2.7)$$

La figure 2.1(a), représente deux réponses impulsionnelles de systèmes du premier ordre. Le tracé continu représente  $y(t)$  pour  $K = 3$  et  $T = 6$ . Le tracé en pointillés représente  $y(t)$  pour  $K = 1$  et  $T = 2$ . Le rapport  $K/T$  étant le même, la condition initiale est identique. La décroissance est d'autant plus rapide que la constante de temps est faible.

### 2.2.2 Réponse Indicielle d'un premier ordre

On appelle *réponse indicielle*, la réponse d'un système linéaire à un échelon unitaire. La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside, calculée précédemment, est :

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p} \quad (2.8)$$

La transformée de Laplace de la sortie est donc définie par :

$$Y(p) = H(p).U(p) = \frac{K}{(Tp + 1)p} \quad (2.9)$$

La décomposition en éléments simples de cette expression donne :

$$Y(p) = \frac{\left( \frac{K}{Tp+1} \right)_{p=0}}{p} + \frac{\left( \frac{K}{p} \right)_{p=-1/T}}{Tp + 1} \quad (2.10)$$

$$= K \left( \frac{1}{p} - \frac{T}{Tp + 1} \right) \quad (2.11)$$

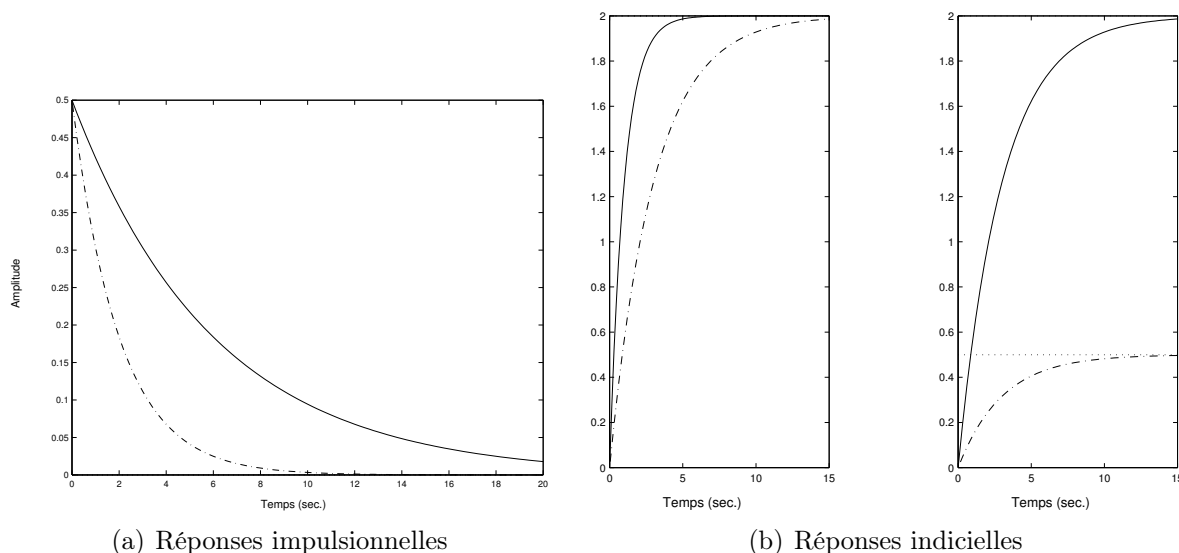


FIGURE 2.1 – Réponses temporelles de systèmes du premier ordre

D'après les tables de transformées de Laplace, on déduit la réponse indicielle  $y(t)$ .

$$\boxed{y(t) = K (1 - e^{-t/T})} \quad (2.12)$$

La figure 2.1(b) donne quelques exemples de réponses indicielles de systèmes du premier ordre, en faisant varier chaque paramètre afin de constater son influence. À gauche, le gain statique est  $K = 2$ , et la constante de temps vaut  $T = 1$  pour la courbe continue et  $T = 3$  pour celle en pointillés. À droite, la constante de temps est  $T = 3$ , et le gain statique vaut  $K = 2$  pour la courbe continue et  $K = 0.5$  pour celle en pointillés. La constante de temps détermine la vitesse de croissance, au début de la réponse. Le gain statique fixe l'amplitude du régime établi.

On peut retenir quelques repères. La valeur initiale de la pente est égale à  $\dot{y}(0) = K/T$ . Pour  $t = 3T$ , la sortie est environ à 95% de sa valeur finale, soit  $y(3T) \simeq 0.95K$ . Pour  $t = 5T$ , la sortie est environ à 99% de sa valeur finale, soit  $y(5T) \simeq 0.99K$ . On parle alors de temps de réponse à 5% et 1% respectivement.

### 2.2.3 Réponse à une rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe unitaire  $u(t) = t$  est :

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2} \quad (2.13)$$

La transformée de Laplace de la sortie est donc définie par :

$$Y(p) = H(p).U(p) = \frac{K}{(Tp + 1)p^2} \quad (2.14)$$

La décomposition en éléments simples de cette expression donne :

$$Y(p) = K \left( \frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T^2}{Tp + 1} \right) \quad (2.15)$$



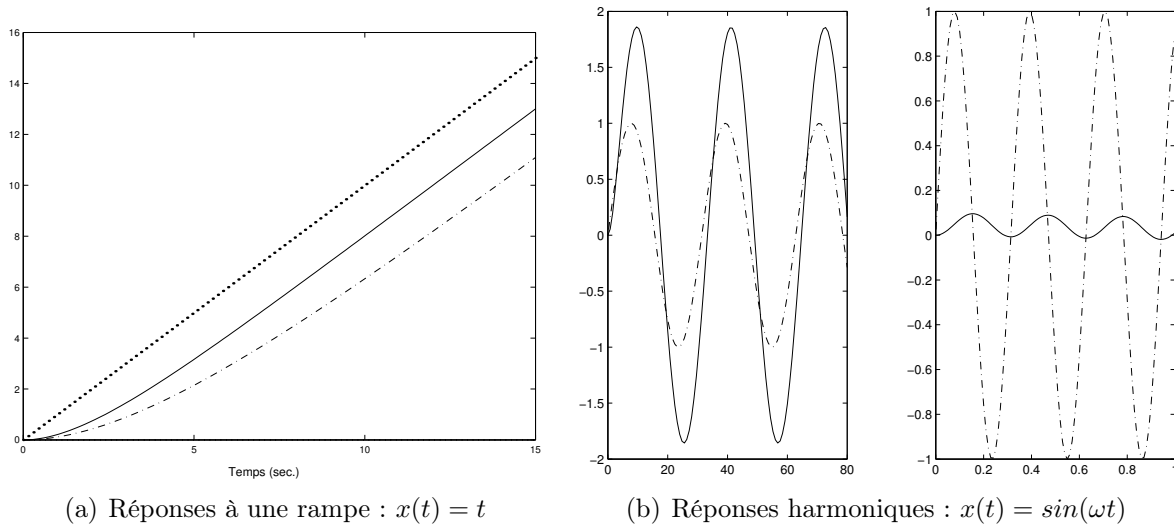


FIGURE 2.2 – Réponses temporelles de systèmes du premier ordre

D'après les tables de transformées de Laplace, on déduit la réponse en vitesse  $y(t)$ .

$$\boxed{y(t) = K(t - T + Te^{-t/T})} \quad (2.16)$$

D'après cette expression, le régime établi correspond à l'asymptote  $y(t) = K(t - T)$ . Autrement dit, une fois éteint le régime transitoire dû au terme  $Ke^{-t/T}$ , la sortie suit l'entrée avec un temps de retard égal à la constante de temps.

La figure 2.2(a) illustre la réponse en rampe (l'entrée est représentée par le tracé en gros points) de systèmes du premier ordre, de gain statique unitaire ( $K = 1$ ), pour différentes constantes de temps, le tracé continu est obtenu pour  $T = 2$ , et le tracé en pointillés est obtenu pour  $T = 4$ . Un gain statique (qui dans ce cas porte mal son nom) différent de 1, introduirait un coefficient multiplicateur sur la pente.

### 2.2.4 Réponse à une sinusoïde

Étudions la réponse d'un système du premier ordre à une entrée du type  $u(t) = \sin(\omega t)$ , dont la transformée de Laplace est :

$$U(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (2.17)$$

La réponse est alors définie par :

$$Y(p) = \frac{K\omega}{(Tp + 1)(p^2 + \omega^2)} \quad (2.18)$$

La décomposition en éléments simples donne

$$Y(p) = K\omega \left( \frac{a}{Tp + 1} + \frac{b + cp}{p^2 + \omega^2} \right) \quad (2.19)$$

Par identification terme à terme des puissances en  $p$ , il vient :

$$0 = a + Tc \quad 0 = c + Tb \quad 1 = b + a\omega^2 \quad (2.20)$$

autrement dit :

$$a = \frac{T^2}{1 + T^2\omega^2} \quad b = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} \quad c = -\frac{T}{1 + T^2\omega^2} \quad (2.21)$$

Finalement la transformée de la sortie est :

$$Y(p) = \frac{K\omega}{1 + T^2\omega^2} \left( \frac{T^2}{Tp + 1} + \frac{1 - Tp}{p^2 + \omega^2} \right) \quad (2.22)$$

$$= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left( \frac{T\omega}{p + 1/T} + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{T\omega p}{p^2 + \omega^2} \right) \quad (2.23)$$

On en déduit, d'après les tables de transformées de Laplace, la réponse temporelle :

$$y(t) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2} (\omega T e^{-t/T} + \sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t)) \quad (2.24)$$

Posons  $-\omega T = \tan\phi$ , il vient alors  $\cos\phi = 1/\sqrt{1 + T^2\omega^2}$  et

$$y(t) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left( \omega T e^{-t/T} + \frac{1}{\cos\phi} (\cos\phi \sin(\omega t) + \sin\phi \cos(\omega t)) \right) \quad (2.25)$$

$$= \frac{K}{1 + T^2\omega^2} \left( \omega T e^{-t/T} + \sqrt{1 + T^2\omega^2} \sin(\omega t + \phi) \right) \quad (2.26)$$

Finalement il vient :

$$\boxed{y(t) = \frac{\omega KT}{1 + T^2\omega^2} e^{-t/T} + \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)} \quad (2.27)$$

où  $\phi = \text{Atan}(-T\omega)$ . Dans cette réponse on peut distinguer le terme transitoire en  $e^{-t/T}$ , qui tend à s'annuler quand  $t \rightarrow \infty$ , quelle que soit la fréquence du signal d'entrée ; et le terme permanent en  $\sin(\omega t + \phi)$ .

Le régime établi en réponse à une sinusoïde de fréquence  $\omega$  est donc une sinusoïde de même fréquence. L'amplification et le déphasage dépendent de la fréquence d'excitation. La figure 2.2(b) illustre ce phénomène, pour un système défini par  $K = 2$  et  $T = 2$  avec deux fréquences d'entrées :  $\omega = 0.2 \text{ rad/s}$  et  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ . Dans le premier cas (à gauche) l'amplification est proche de 2, et le déphasage très faible ; dans le deuxième (à droite), l'amplification est de l'ordre de 0.1 et le déphasage de l'ordre d'un quart de période (soit environ  $-\pi/2$ ). Les tracés continus correspondent aux sorties, et les pointillés aux entrées.

## 2.3 Réponse fréquentielle

L'analyse fréquentielle (ou harmonique) consiste à étudier la réponse d'un système linéaire en fonction de la fréquence du signal d'entrée sinusoïdal. L'intérêt de cette étude, est que tout signal périodique peut se décomposer en une somme pondérée de signaux sinusoïdaux (séries de Fourier). Donc, d'après le principe de superposition, la sortie peut se décomposer en la somme (pareillement pondérée, car le système est linéaire) des réponses à chaque signal sinusoïdal, caractérisé par sa fréquence. Or il a été montré plus haut que le régime établi d'un premier ordre attaqué par une entrée  $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$  est une sortie de même nature, amplifiée et déphasée. En régime permanent on a :

$$y(t) = \frac{K u_0}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega t - \text{Atan}(\omega T)) \quad (2.28)$$

En étudiant la fonction de transfert du système pour  $p = j\omega$ , on constate que

$$\frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = |H(j\omega)| \quad (2.29)$$

$$\text{Atan}(-\omega T) = \text{Arg}(H(j\omega)) \quad (2.30)$$

autrement dit :

$$\boxed{y(t) = u_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))} \quad (2.31)$$

La réponse harmonique est donc amplifiée par le module de la fonction de transfert, et déphasée de son argument, calculés en  $p = j\omega$ . Le module et l'argument sont des fonctions des paramètres du système ( $K$  et  $T$ , fixes pour un système donné), et de la fréquence  $\omega$ , d'où l'appellation d'*analyse fréquentielle*.

Il est alors naturel de chercher à représenter le module, aussi appelé *gain*, et l'argument, aussi appelé *phase*, d'une fonction de transfert en fonction de la fréquence d'entrée. La représentation la plus courante, est donnée par le diagramme de Bode<sup>1</sup>. Le diagramme de Bode comporte deux figures en fonction de la fréquence  $\omega$ . L'axe des fréquences est gradué selon une échelle logarithmique, autrement dit entre deux graduations successives la fréquence est multipliée (ou divisée) par un facteur 10. Cette graduation est appelée *décade*. La première donne le module de la fonction de transfert, généralement exprimé en décibels (noté *dB*) et défini par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(|H(j\omega)|) \quad (2.32)$$

La deuxième figure représente l'argument de  $H(j\omega)$ .

L'intérêt majeur de cette représentation est que le diagramme de Bode de plusieurs filtres mis en série se déduit très rapidement des diagrammes de Bode de chacun des filtres. En effet, la mise en série équivaut à la multiplication des fonctions de transfert, donc à la multiplication des modules et à l'addition des arguments. Le décibel étant défini par un logarithme, la multiplication des gains devient l'addition de ces gains en décibels. Autrement dit, il suffit d'ajouter les gains en décibels et les phases de chaque filtre, pour obtenir le diagramme de Bode de plusieurs filtres mis en série.

### 2.3.1 Étude d'un intégrateur pur

Pour se familiariser avec l'utilisation des diagrammes de Bode, commençons par étudier un système très simple : l'intégrateur pur. La fonction de transfert de l'intégrateur est :

$$H(p) = \frac{K}{p} \quad (2.33)$$

Le diagramme de Bode se compose alors des tracés de :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20(\log(K) - \log(\omega)) \quad (2.34)$$

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} \quad (2.35)$$

Quand  $\omega$  est multiplié par 10, le gain diminue de  $20dB$ , on parle alors d'une pente de  $-20dB$  par décade (ou de  $-6dB$  par octave). Le diagramme de Bode d'un système intégrateur de gain  $K = 5$ , est représenté sur la figure 2.3(a). La courbe de gain est une droite de pente  $-20dB/dec$ , qui coupe l'axe des abscisses pour  $\omega_c = 5$ .

1. du nom d'Hendrik W. Bode (1905-1982). Bode a étudié la conception et la commande de réseaux électriques, leur utilisation dans les transmissions, le contrôle de tir, et le guidage de missiles. Après une carrière dans le Bell Telephone Laboratory, il a enseigné à Harvard.

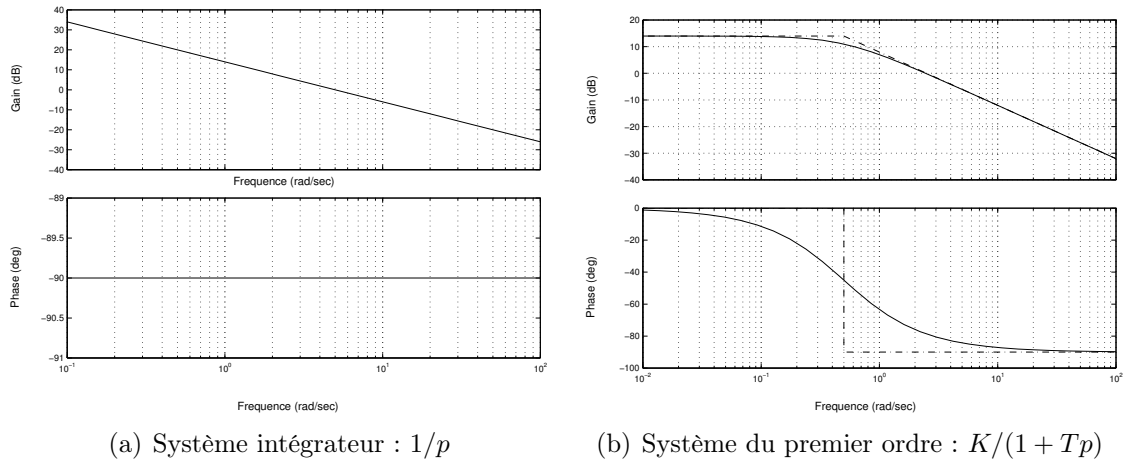


FIGURE 2.3 – Diagrammes de Bode

### 2.3.2 Étude du premier ordre

Revenons aux systèmes du premier ordre :  $H(p) = K/(Tp + 1)$ . Leur module et argument sont donnés par :

$$G(j\omega) = \left| \frac{K}{jT\omega + 1} \right| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \quad (2.36)$$

$$\phi(\omega) = \text{Arg} \left( \frac{K}{jT\omega + 1} \right) = -\text{Atan}(T\omega) \quad (2.37)$$

Autrement dit, le diagramme de Bode se compose des tracés de :

$$G_{dB}(\omega) = |H(j\omega)| = 20\log(K) - 10\log(1 + T^2\omega^2) \quad (2.38)$$

$$\phi(\omega) = -\text{Atan}(T\omega) \quad (2.39)$$

**Tracé asymptotique :** Pour  $\omega \ll 1/T$ , le terme  $j\omega T$  est très petit devant 1. À l'inverse, pour  $\omega \gg 1/T$ , le terme  $j\omega T$  est prépondérant, on a donc

$$|H(j\omega)| \simeq \begin{cases} K, & \text{pour } \omega \ll \frac{1}{T} \\ \frac{K}{\omega T}, & \text{pour } \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases} \quad (2.40)$$

On a alors une asymptote horizontale  $G_{dB} \simeq 20\log(K)$  en basses fréquences, et une asymptote linéaire  $G_{dB} = 20\log(K/T) - 20\log(\omega)$  en hautes fréquences. On retrouve alors le comportement d'un intégrateur : pente de  $-20 \text{ dB par décade}$ . On appelle pulsation de coupure, la pulsation  $\omega_c = 1/T$  où les deux asymptotes se rejoignent. La courbe de phase admet deux asymptotes horizontales en  $0\text{deg}$  et  $-90\text{deg}$  pour  $\omega \ll \omega_c$  et  $\omega \gg \omega_c$  respectivement. La figure 2.3(b) représente le diagramme de Bode de  $H(p)$ , pour  $K = 5$ , et  $T = 2$  (donc  $\omega_0 = 0.5\text{rad/s}$ ).

# Chapitre 3

## Étude des systèmes linéaires du deuxième ordre

### 3.1 Intérêt des systèmes du deuxième ordre

Les systèmes du second ordre, sans être d'une étude beaucoup plus complexe que ceux du premier ordre, permettent de modéliser des systèmes aux comportements plus variés : suivi de consigne avec retard, oscillations entretenues ou amorties. Comme l'étude menée au chapitre précédent le laisse supposer, ce type de systèmes correspond à une description par une équation différentielle linéaire du second ordre. Ce type d'équation apparaît en mécanique par le principe fondamental de la dynamique (l'accélération est une dérivée seconde), en électricité : circuit RLC série ou parallèle, en chimie pour modéliser une réaction à deux corps, quand la constante de réaction obéit à la loi d'Arrhenius, etc. La forme générale d'un système du second ordre est :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \quad (3.1)$$

Sous cette forme, le coefficient  $K$  est appelé gain statique,  $\omega_0$  est la pulsation propre, et  $z$  est le coefficient d'amortissement. On verra, au cours de l'étude de la réponse indicielle, la signification de ces paramètres caractérisant le système.

### 3.2 Réponses temporelles

Comme pour les systèmes du premier ordre, on étudie les réponses aux signaux canoniques, d'un système du second ordre. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle (3.1), nous obtenons la fonction de transfert d'un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (3.2)$$

#### 3.2.1 Réponse impulsionnelle d'un second ordre

Pour obtenir la réponse à une impulsion unitaire ( $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ ), on décompose en éléments simples la fonction de transfert. En notant  $p_1$  et  $p_2$ , les deux pôles du système il

vient :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left( \frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right) \quad (3.3)$$

Il faut à présent distinguer trois cas, selon que le dénominateur admet deux racines réelles, une racine double, ou deux racines complexes conjuguées. Le discriminant du dénominateur est  $\Delta = 4(z^2 - 1)\omega_0^2$ , donc cela revient à comparer  $z$  à 1.

**Cas 1 :**  $z > 1$ . Si  $z$  est strictement supérieur à 1, alors  $\Delta > 0$ , autrement dit : le dénominateur admet deux racines réelles :

$$p_1 = -z\omega_0 + \sqrt{z^2 - 1}\omega_0 \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \sqrt{z^2 - 1}\omega_0 \quad (3.4)$$

Donc la réponse s'écrit sous la forme :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{2\omega_0\sqrt{z^2 - 1}} \left( \frac{1}{p + z\omega_0 - \sqrt{z^2 - 1}\omega_0} - \frac{1}{p + z\omega_0 + \sqrt{z^2 - 1}\omega_0} \right) \quad (3.5)$$

En utilisant les tables de transformées de Laplace, il vient :

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2 - 1}} e^{-z\omega_0 t} \left( e^{\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} - e^{-\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} \right)} \quad (3.6)$$

**Cas 2 :**  $z = 1$ . Dans ce cas, le dénominateur admet une racine double  $p_1 = -\omega_0$ . La réponse est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2} \quad (3.7)$$

Autrement dit la réponse temporelle est définie par :

$$\boxed{y(t) = K\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}} \quad (3.8)$$

**Cas 3 :**  $z < 1$ . Dans ce cas, le dénominateur admet deux racines complexes conjuguées :

$$p_1 = -z\omega_0 + j\sqrt{1 - z^2}\omega_0 \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\sqrt{1 - z^2}\omega_0 \quad (3.9)$$

L'étude est très similaire au cas 1. La transformée de Laplace de la réponse s'écrit sous la forme :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{2j\omega_0\sqrt{1 - z^2}} \left( \frac{1}{p + z\omega_0 - j\sqrt{1 - z^2}\omega_0} - \frac{1}{p + z\omega_0 + j\sqrt{1 - z^2}\omega_0} \right) \quad (3.10)$$

En utilisant les tables de transformées de Laplace, il vient :

$$y(t) = \frac{K\omega_0}{2j\sqrt{1 - z^2}} \left( e^{-(z\omega_0 - j\sqrt{1 - z^2}\omega_0)t} - e^{-(z\omega_0 + j\sqrt{1 - z^2}\omega_0)t} \right) \quad (3.11)$$

Nous avons donc finalement :

$$\boxed{y(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1 - z^2}t)} \quad (3.12)$$

Les deux premiers cas correspondent à des régimes exponentiels décroissants, tandis que le dernier est oscillant (du fait du  $\sin(\omega_0\sqrt{1 - z^2}t)$ ), et amorti (du fait de  $e^{-z\omega_0 t}$ ).

La figure 3.1(a) illustre les différents types de réponses impulsionnelles d'un système du second ordre. Les paramètres sont fixés par  $K = 2$ ,  $\omega_0 = 5$ . Le tracé en pointillés correspond au cas 1 ( $z = 2$ ), le tracé alterné points-tirets représente le cas 2, et le tracé continu illustre le cas 3 ( $z = 0.2$ ).

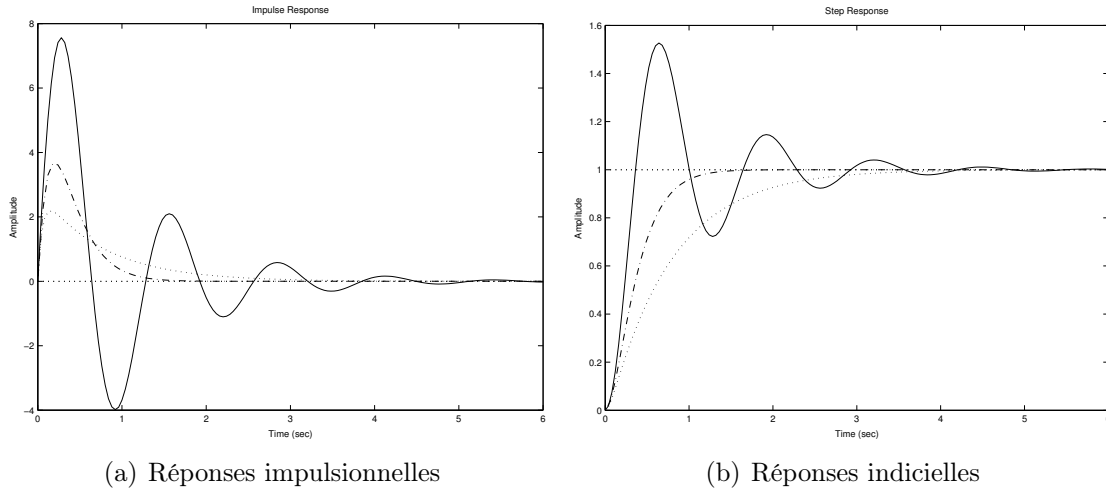


FIGURE 3.1 – Réponses temporelles de systèmes du second ordre

### 3.2.2 Réponse indicielle d'un second ordre

Considérons l'entrée :  $u(t) = U_0\Gamma(t)$ . La réponse indicielle est déterminée par l'étude de la transformée inverse de Laplace de la sortie :

$$Y(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2)} \frac{U_0}{p} \quad (3.13)$$

Comme dans le paragraphe précédent, il faut distinguer trois cas.

**Cas 1 :**  $z > 1$ . Le dénominateur a trois racines : une nulle, et deux autres en :

$$p_1 = -z\omega_0 + \sqrt{z^2 - 1}\omega_0 \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - \sqrt{z^2 - 1}\omega_0 \quad (3.14)$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = U_0 K \omega_0^2 \left( \frac{1}{p - p_1} + \frac{1}{p - p_2} + \frac{1}{p} \right) \quad (3.15)$$

$$= \frac{U_0 K \omega_0^2}{p_1 p_2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left( \frac{p_2}{p - p_1} - \frac{p_1}{p - p_2} \right) \right) \quad (3.16)$$

En observant que  $p_1 p_2 = \omega_0^2$ , et en appliquant la transformation de Laplace inverse, nous obtenons :

$$y(t) = U_0 K + U_0 K \frac{\omega_0(-z - \sqrt{z^2 - 1})e^{(-z\omega_0 + \sqrt{z^2 - 1}\omega_0)t} - \omega_0(-z + \sqrt{z^2 - 1})e^{(-z\omega_0 - \sqrt{z^2 - 1}\omega_0)t}}{2\omega_0\sqrt{z^2 - 1}}$$

donc finalement :

$$\boxed{y(t) = U_0 K \left( 1 + \frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{z^2 - 1}} \left( (-z - \sqrt{z^2 - 1})e^{\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} - (\sqrt{z^2 - 1} - z)e^{-\omega_0\sqrt{z^2 - 1}t} \right) \right)} \quad (3.17)$$

La réponse est composée d'un terme échelon, et de deux modes exponentiels amortis,  $y(t)$  tend vers sa valeur finale  $KU_0$ , par valeurs inférieures.

**Cas 2 :**  $z = 1$ . Le dénominateur a une racine nulle, et une racine double  $p_1 = -\omega_0$ . La transformée de Laplace de la réponse est :

$$Y(p) = \frac{KU_0\omega_0^2}{p(p-p_1)^2} \quad (3.18)$$

La décomposition en éléments simples  $\frac{1}{p}$ ,  $\frac{1}{p+\omega_0}$ , et  $\frac{1}{(p+\omega_0)^2}$ , donne :

$$Y(p) = U_0K \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_0} - \frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2} \right) \quad (3.19)$$

Prenons la transformée inverse de Laplace pour finalement obtenir la réponse temporelle :

$$\boxed{y(t) = KU_0 (1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t})} \quad (3.20)$$

Dans ce cas aussi, la réponse  $y(t)$  tend vers sa valeur finale par valeurs inférieures.

**Cas 3 :**  $z < 1$ . Le dénominateur a deux racines complexes conjuguées :

$$p_1 = -z\omega_0 + j\sqrt{1-z^2}\omega_0 \quad \text{et} \quad p_2 = -z\omega_0 - j\sqrt{1-z^2}\omega_0 \quad (3.21)$$

En reprenant l'expression de  $Y(p)$  du cas 1, nous avons :

$$Y(p) = \frac{U_0K\omega_0^2}{p_1p_2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1-p_2} \left( \frac{p_2}{p-p_1} - \frac{p_1}{p-p_2} \right) \right) \quad (3.22)$$

donc, dans le domaine temporel, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y(t) &= U_0K + \frac{U_0Ke^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{1-z^2}} \left( (-z - j\sqrt{1-z^2})e^{j\omega_0\sqrt{1-z^2}t} - (-z + j\sqrt{1-z^2})e^{-j\omega_0\sqrt{1-z^2}t} \right) \\ &= U_0K \left( 1 + \frac{e^{-z\omega_0 t}}{2\sqrt{1-z^2}} \left( -z \sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}t) - \sqrt{1-z^2} \cos(\omega_0\sqrt{1-z^2}t) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Posons :  $\tan\phi = \sqrt{1-z^2}/z$ , il vient alors :  $\cos\phi = z$ , et  $\sin\phi = \sqrt{1-z^2}$ . En reportant cela dans  $y(t)$ , nous obtenons finalement :

$$\boxed{y(t) = U_0K \left( 1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}t + \phi) \right), \text{ pour } \phi = A \tan \left( \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right)} \quad (3.24)$$

La réponse tend vers la valeur finale  $KU_0$ , mais contrairement aux autres cas, présente des oscillations amorties, de pulsation :  $\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ , appelée *pseudo-pulsation*.

La figure 3.1(b) illustre les différentes réponses indicielles possibles, en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement  $z$ . Les paramètres sont fixés par  $K = 1$ ,  $\omega_0 = 5$ . Le tracé en pointillés correspond au cas 1 ( $z = 2$ ), le tracé alterné point-tirets représente le cas 2, et le tracé continu illustre le cas 3 ( $z = 0.2$ ). Plus le coefficient d'amortissement est important, plus la réponse est lente. Dans le cas de la réponse oscillante, la pulsation d'oscillation est  $\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2} = 4,9 \text{ rad.s}^{-1}$ , autrement dit la *pseudo-période* vaut  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1.28 \text{ s}$ .



### 3.3 Réponses fréquentielles

Tout signal périodique pouvant se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux, il est intéressant d'étudier la réponse à un sinus. Les deux paramètres d'un signal sinusoïdal sont, l'amplitude d'une part, et la fréquence d'autre part. Étant donnée, la linéarité des systèmes étudiées, nous allons surtout étudier l'influence de la fréquence de l'entrée sur la forme de la sortie.

Dans le cas des systèmes du premier ordre, nous avons établi que la réponse à un sinus était un sinus de même fréquence, amplifié par le gain de la fonction de transfert, et déphasé de l'argument de la fonction de transfert. Nous allons maintenant établir que ce résultat est général pour tout système linéaire.

Considérons un système linéaire de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , donc de fonction de transfert  $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$ , attaqué par une entrée sinusoïdale :  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ . La sortie est définie par le produit de convolution de la réponse impulsionnelle et de l'entrée.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (3.25)$$

$$= \frac{U_0}{2j} \int_0^{\infty} h(\tau) (e^{j\omega(t-\tau)} - e^{-j\omega(t-\tau)}) d\tau \quad (3.26)$$

$$= \frac{U_0 e^{j\omega t}}{2j} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \frac{U_0 e^{-j\omega t}}{2j} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \quad (3.27)$$

$$= \frac{U_0}{2j} (H(j\omega)e^{j\omega t} - H(-j\omega)e^{-j\omega t}) \quad (3.28)$$

Notons  $\phi = \text{Arg}(H(j\omega))$ . Il vient alors :  $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi}$ , et  $H(-j\omega) = |H(j\omega)|e^{-j\phi}$ . La réponse du système devient :

$$y(t) = \frac{U_0}{2j} (|H(j\omega)|e^{j\phi}e^{j\omega t} - |H(j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega t}) \quad (3.29)$$

ce qui s'écrit sous la forme suivante

$$\boxed{y(t) = U_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}(H(j\omega)))} \quad (3.30)$$

**Théorème 3.1.** *La réponse d'un système linéaire (quel que soit son ordre) à l'entrée  $x(t) = \sin(\omega t)$  est :  $y(t) = G(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$ , c'est à dire un signal sinusoïdal de même pulsation  $\omega$ , déphasé de  $\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$  et amplifié de  $G(\omega) = |H(j\omega)|$ .*

Ce résultat général, est vrai en particulier pour un système du second ordre. Nous allons donc étudier le gain et la phase de  $H(j\omega)$ , où  $H(p)$  est la fonction de transfert d'un système du second ordre définie par :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0}p + 1} \quad (3.31)$$

Le module  $G = |H(j\omega)|$ , et l'argument  $\phi = \text{Arg}(H(j\omega))$  sont donnés par :

$$G(\omega) = \left| \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2jz\frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (3.32)$$

$$\phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Atan} \left( \frac{2z\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) \quad (3.33)$$

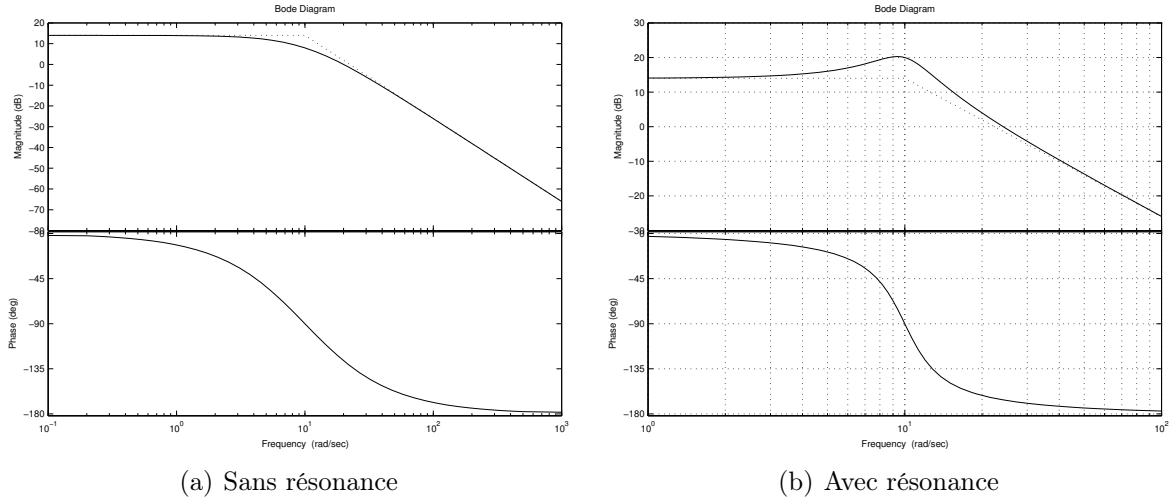


FIGURE 3.2 – Diagrammes de Bode de systèmes du second ordre.

**Tracé asymptotique.** Pour  $\omega$  grand, le terme prépondérant dans le dénominateur de la fonction de transfert est celui en  $p^2$ . Pour  $\omega$  petit, le terme prépondérant est le terme constant.  $H(j\omega)$  peut donc être approchée par :

$$H(j\omega) \simeq \begin{cases} K, & \text{pour } \omega \ll \omega_0 \\ -\frac{K\omega_0^2}{\omega^2}, & \text{pour } \omega \gg \omega_0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Le déphasage admet deux asymptotes horizontales :  $\phi(\omega) = 0$ , et  $\phi(\omega) = -\pi$ , pour  $\omega$  tendant vers 0 et vers  $+\infty$  respectivement. De plus, en  $\omega_0$ , on a  $H(j\omega_0) = -jK/2z$ , donc  $\phi(\omega_0) = -\pi/2$ .

Le gain a une asymptote horizontale  $G_{dB} = 20\log(K)$ , en basses fréquences, et une asymptote oblique de pente  $-40\text{dB/dec}$  en hautes fréquences. On peut montrer que ces deux asymptotes se coupent en  $\omega = \omega_0$ .

La figure 3.2(a) donne le diagramme de Bode du second ordre défini par :

$$H(p) = \frac{5}{0.01p^2 + 0.2p + 1} \quad (3.35)$$

autrement dit, par  $K = 5$ ,  $z = 1$ , et  $\omega_0 = 10\text{rad/s}$ . Le diagramme de Bode est tracé en continu, et les asymptotes en pointillés. Il apparaît sur la figure 3.2(a) que la courbe de gain est monotone décroissante, et reste sous ses asymptotes. Autrement dit, le gain ne dépasse pas le gain statique. Montrons que cette propriété dépend de la valeur du coefficient d'amortissement  $z$ . Pour cela, il faut étudier l'existence d'un maximum, autrement dit chercher un zéro de la dérivée de  $G(\omega)$ .

$$\frac{dG}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \frac{K\omega_0^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2z\omega_0\omega)^2)^{1/2}} = \frac{K\omega_0^2(2\omega_0^2\omega - 2\omega^3 - 4z^2\omega_0^2\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2z\omega_0\omega)^2} \quad (3.36)$$

La dérivée s'annule si et seulement si  $2\omega_0^2\omega - 2\omega^3 - 4z^2\omega_0^2\omega = 0$ . En ne tenant pas compte de la solution nulle qui n'a pas de sens physique, il vient :  $\omega^2 = \omega_0^2(1 - 2z^2)$ . Finalement, si  $z < 1/\sqrt{2}$ , alors  $G(\omega)$  a un maximum en  $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2}$ , appelée pulsation de résonance. À la résonance, le gain vaut :

$$G_{max} = G(\omega_0\sqrt{1 - 2z^2}) = \frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}} \quad (3.37)$$

Pour illustrer ce phénomène, traçons le diagramme de Bode du système défini par :

$$H(p) = \frac{5}{0.01p^2 + 0.05p + 1} \quad (3.38)$$

Le système a donc pour caractéristiques :  $K = 5$ ,  $\omega_0 = 10 \text{rad/s}$ , et  $z = .25 < 1/\sqrt{2}$ . La figure 3.2(b) permet de constater l'existence d'une résonance, d'amplitude :  $G_{max} = 20 \log \left( \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}} \right) = 20.28 \text{dB}$ , à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2z^2} = 9.35 \text{rad/s}$ .

### 3.4 Résumé

Pour conclure, les comportements temporel et fréquentiel d'un système du second ordre sont liés à la valeur du coefficient d'amortissement  $z$ . Suivant  $z$ , le système présente ou non une résonance dans le domaine fréquentiel. Et toujours selon  $z$ , sa réponse temporelle à un indice est oscillante ou amortie.

$z$	$z < 1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2} < z < 1$	$1 < z$
temporel	oscillant		amorti
fréquentiel	résonant	$G$ monotone décroissant	

Le gain  $K$  a pour seul effet de translater la courbe  $G_{dB}$  verticalement (une multiplication, devenant une addition en logarithme).

Dans le domaine temporel, la pulsation propre  $\omega_0$ , détermine (avec  $z$ ) la pulsation des oscillations de la réponse à un indice. Dans le domaine fréquentiel,  $\omega_0$  intervient dans le tracé asymptotique du diagramme de Bode, en effet  $\phi(\omega_0) = -\pi/2$ , et les asymptotes du gain se croisent en  $\omega = \omega_0$ . De plus  $\omega_0$  détermine (avec  $z$ ) la pulsation de résonance.

# Chapitre 4

## Étude des systèmes linéaires d'ordre quelconque

### 4.1 Introduction

Après avoir étudié les fonctions de transfert du premier et deuxième ordre, l'objectif de ce chapitre est de généraliser les résultats obtenus aux systèmes d'ordre quelconque. Il s'agit donc des systèmes obéissant à une équation différentielle linéaire, à coefficients constants telle que :

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (4.1)$$

avec  $m \leq n$ . L'entier  $n$  est appelé ordre du système. La transformée de Laplace de cette équation permet d'obtenir la fonction de transfert  $H(p)$ , reliant  $Y(p)$  à  $X(p)$ , définie par :

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \quad (4.2)$$

Rappelons que la fonction de transfert ne fait apparaître que la dépendance de  $Y(p)$  par rapport à  $X(p)$ , sans tenir compte des conditions initiales sur l'entrée et la sortie.

### 4.2 Réponse temporelle d'un système linéaire d'ordre quelconque

L'expression de la réponse temporelle peut être obtenue de trois manières différentes :

- résoudre directement l'équation différentielle en  $x(t)$  et  $y(t)$  ;
- prendre la transformée de Laplace de l'équation différentielle, puis déterminer  $Y(p)$ , et calculer la solution temporelle en prenant la transformée de Laplace inverse ;
- calculer la convolution de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  (où  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p))$ ) avec l'entrée  $x(t)$  selon :  $y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau$ .

La deuxième méthode peut sembler artificielle, du fait de l'aller-retour temporel / fréquentiel, néanmoins dans bien des cas elle s'avère moins fastidieuse. Entre autre car les conditions initiales sur les dérivées des signaux d'entrée et/ou de sortie sont prises en compte lors du calcul de la transformée de Laplace de l'équation différentielle (tandis que la méthode indirecte mène à calculer une forme générale de la réponse, avec autant d'inconnues que de conditions initiales, puis à déterminer toutes ces constantes d'intégration).

Le calcul de la transformée inverse de Laplace conduit à trois types d'éléments simples :

- des termes  $\frac{1}{p-\alpha}$  avec un pôle réel simple se traduisant par une exponentielle :  $e^{\alpha t}$
- des termes  $\frac{1}{(p-\alpha)^k}$  avec un pôle réel multiple se traduisant par une exponentielle de la forme  $\frac{t^{k-1}e^{\alpha t}}{(k-1)!}$
- des termes  $\frac{a}{p-\alpha} + \frac{\bar{a}}{p-\bar{\alpha}}$  avec des pôles complexes conjugués se traduisent par des oscillations amorties de la forme  $2|a|e^{\Re(\alpha)t} \cos(\Im(\alpha)t + \arg(a))$

### 4.3 Analyse fréquentielle

D'après le théorème 3.1, tout système linéaire, quel que soit son ordre, répond à un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , par un signal sinusoïdal de même fréquence. Le déphasage et l'amplification entre l'entrée et la sortie sont déterminés par l'argument et le module de la fonction de transfert en  $p = j\omega$ . On se contente donc d'étudier le diagramme de Bode, qui représente le gain en décibel et la phase en fonction de la pulsation de l'entrée :

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(|H(j\omega)|) \quad \text{et} \quad \phi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) \quad (4.3)$$

Toute fonction de transfert  $H(p)$ , peut se factoriser par ses pôles et ses zéros, c'est à dire par les racines du dénominateur et du numérateur respectivement :

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n} = K \frac{\prod_{k=1}^{\tilde{m}} (T_{zk}p + 1)}{\prod_{k=1}^{\tilde{n}} (T_{pk}p + 1)} p^\alpha \quad (4.4)$$

avec  $\alpha = m - \tilde{m} - n + \tilde{n}$ . Il apparaît alors, que pour tracer le diagramme de Bode, il suffit d'ajouter les diagrammes des fonctions de la forme  $\frac{1}{Tp+1}$ , et  $Tp+1$  à celui de  $p^\alpha$ . La première forme correspond à un premier ordre de gain statique unitaire. La seconde est l'inverse de la première, de ce fait le gain en dB et la phase sont donnés par :

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(|1 + jT\omega|) = -20\log\left(\left|\frac{1}{1 + jT\omega}\right|\right) \quad (4.5)$$

$$\phi(\omega) = \arg(1 + jT\omega) = -\arg\left(\frac{1}{1 + jT\omega}\right) \quad (4.6)$$

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode est obtenu en faisant varier la pente du tracé du gain et la valeur de la phase à chaque pulsation de coupure  $\omega = 1/T$ .

- Le terme  $Kp^\alpha$  entraîne :
  - pour le gain en dB : une droite  $20\log(K) + 20\alpha\log(\omega)$  (donc  $20\log(K)$  si  $\alpha = 0$ )
  - pour la phase : une valeur constante de  $\pi\alpha/2$  (donc 0 si  $\alpha = 0$ )
- Un pôle  $p_i = -1/T_{pi}$  de la fonction de transfert provoque, en  $\omega = 1/T_{pi}$  :
  - pour le gain en dB : une variation de la pente de  $-20\text{dB}/\text{dec}$ ;
  - pour la phase : une variation de  $-\pi/2$  rad (ou 90 deg).
- Un zéro  $z_i = -1/T_{zi}$  de la fonction de transfert provoque, en  $\omega = 1/T_{zi}$  :
  - pour le gain en dB : une variation de la pente de  $+20\text{dB}/\text{dec}$ ;
  - pour la phase : une variation de  $\pi/2$  rad (ou 90 deg).

En hautes fréquences, la pente de la courbe de gain est donnée par la différence de degré entre les polynômes numérateur et dénominateur. Pour  $\omega \rightarrow \infty$ , la pente de la courbe de gain est  $-20(n - m)\text{dB}/\text{dec}$ . Si les deux polynômes sont de même degré, la

valeur de la limite détermine la valeur de l'asymptote horizontale par :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^{\tilde{m}} T_{zj}}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} T_{pi}} \quad (4.7)$$

La limite de la phase en hautes fréquences est  $-\pi(n - m)/2 \text{ rad}$ .

*Exemple 4.1.* Considérons la fonction de transfert  $H(p)$ , définie par :

$$H_1(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)} \quad (4.8)$$

$H_1(p)$  n'a pas de pôle ni de zéros en  $p = 0$ , le gain statique est  $H(0) = 100$  donc  $G_{dB}(0) = 40dB$ , les pôles sont  $\{-0.01, -0.1, -100\}$ , le zéro est double en  $-1$ . On a donc une asymptote horizontale à  $40dB$  en basses fréquences, puis une pente de  $-20dB/dec$  pour  $0.01 < \omega < 0.1$  (due à  $(100p + 1)$  au dénominateur), une pente de  $-40dB/dec$  pour  $0.1 < \omega < 1$  (due à  $(10p + 1)$  au dénominateur), une pente nulle pour  $0 < \omega < 100$  (due à  $(p + 1)^2$  au numérateur), et une pente de  $-20dB/dec$  pour  $\omega > 100$ .

Pour la phase, l'absence de pôle et de zéros en  $p = 0$  entraîne une asymptote horizontale  $\phi = 0$  en basses fréquences. Le dénominateur est de degré 3, et le numérateur est de degré 2, donc en hautes fréquences, on a :  $\phi = -\pi/2$ . Entre ces deux asymptotes, les pôles entraînent des sauts de  $-\pi/2$ , et le zéro double en  $\omega = 0$  provoque un saut de  $+\pi$ .

La figure 4.1(a) donne le tracé asymptotique suivant en continu, et le diagramme de Bode réel en pointillé.

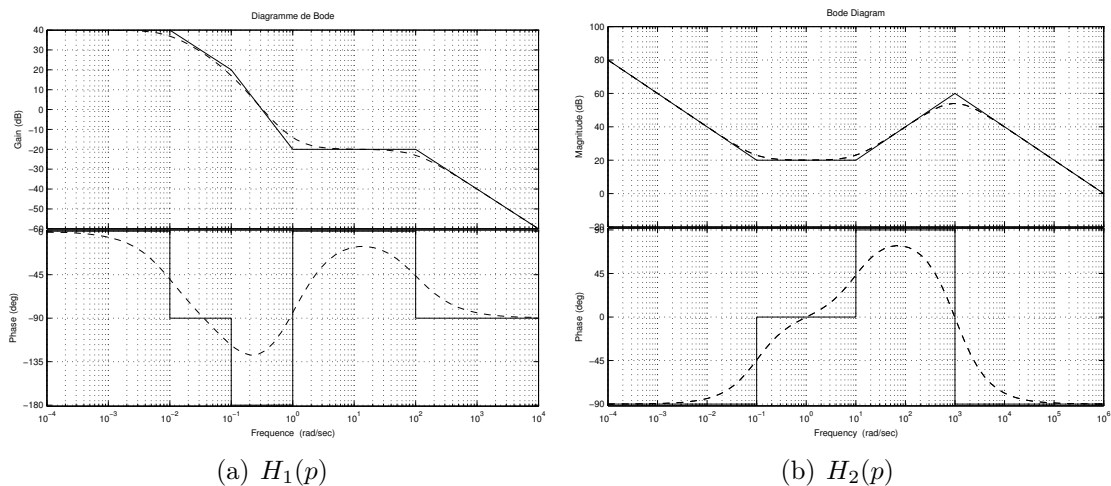


FIGURE 4.1 – Diagrammes de Bode asymptotiques et réels

*Exemple 4.2.* Considérons, à présent, la fonction de transfert  $H(p)$ , définie par :

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2} \quad (4.9)$$

À basses fréquences,  $H(p) \simeq 1/p$  donc le gain a une pente de  $-20dB/dec$ , et la phase a une asymptote horizontale  $\phi = -\pi/2$ . En  $\omega = 0.1rad/s$  et  $\omega = 10rad/s$  la pente se redresse de  $20dB/dec$ , et la phase gagne  $\pi/2rad/s$ . Enfin, en  $\omega = 100rad/s$ , le pôle double fait chuter la pente et la phase de  $-40dB/dec$  et  $-\pi rad/s$  respectivement. Donc en hautes fréquences, la pente du gain est de  $-20dB/dec$ , et la phase vaut  $-\pi/2rad/s$ . La figure 4.1(b) présente le tracé asymptotique en continu, et le diagramme de Bode réel en pointillé.

# Chapitre 5

## Systemes en boucle fermée

### 5.1 Introduction

Afin d'améliorer les performances d'un procédé on a recours à l'automatisation pour :

- réaliser des opérations trop complexes ou dangereuses pour être confiées à un opérateur humain, ou inversement pour remplacer l'opérateur humain lors d'opérations trop répétitives ou élémentaires ;
- traiter rapidement un grand nombre de données éventuellement hétérogènes (sur des systèmes de grandes dimensions avec un nombre importants d'entrées et de sorties de natures différentes) ;

L'automatisation s'appuie sur la notion de boucle fermée. En effet, la commande en boucle ouverte pourrait être faite par inversion du modèle pour obtenir un transfert égal à un, mais cela suppose de connaître parfaitement le modèle du système et que le système ne subisse ni perturbation, ni modification, ce qui est très irréaliste (cela revient à conduire les yeux fermés en se disant qu'on connaît sa voiture et le chemin à parcourir...). Il est préférable de mesurer en temps réel la grandeur contrôlée, la comparer à l'objectif et d'adapter en conséquence son action. La démarche suivie est proche de celle qui est naturelle à l'être humain : observer, réfléchir et enfin agir. Si on détaille un peu plus cette approche on peut lister les étapes suivantes :

- observer pour comprendre le fonctionnement du système (avoir un modèle) ;
- identifier les moyens d'action sur le système : les entrées contrôlées par l'opérateur ;
- identifier les facteurs externes agissant sur le système : les entrées non contrôlées (mais éventuellement mesurables) ;
- définir les objectifs à atteindre : quelle est la nature de la grandeur à contrôler ? doit-on atteindre une valeur donnée ? doit-on atteindre cette valeur en un temps donné ? a-t-on droit à une certaine marge d'erreur ? etc.
- mesurer les résultats obtenus, autrement instrumenter le système avec des capteurs sur les grandeurs à contrôler (lorsque certains capteurs ne sont pas physiquement ou économiquement envisageables il existe des solutions à base d'inversion de modèle pour retrouver les grandeurs d'intérêt en fonction des mesures disponibles, on parle alors de capteurs logiciels ou d'observateurs [1, 2, 4, 6, 7]) ;
- calculer l'écart entre les résultats obtenus mesurés et les objectifs fixés ;
- en fonction de cet écart adapter les moyens d'action sur le système.

On parle alors de boucle fermée car l'information mesurée en sortie est injectée en entrée pour former l'écart utilisé pour adapter les commandes, comme représenté à la figure 5.1. La mesure est effectuée par un capteur et dans ce cours on partira du principe qu'il est de suffisamment bonne qualité pour considérer que la grandeur mesurée et sa mesure sont

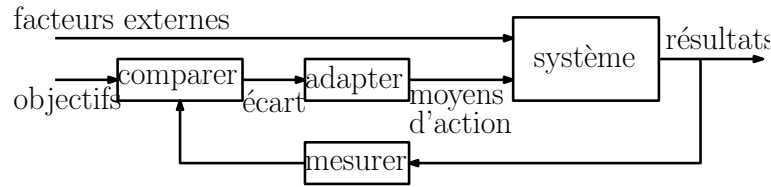


FIGURE 5.1 – Schéma de principe de l'automatisation en boucle fermée.

égales. Les étapes qui retiendront notre attention sont la modélisation et le calcul des entrées commandées en fonction des objectifs et des résultats.

## 5.2 Effet de la boucle fermée sur un système simple

Considérons un réservoir cylindrique de section  $S$  dont on cherche à contrôler la hauteur de liquide, notée  $h_1(t)$ . Ce réservoir est alimenté par un débit volumique  $q_e(t)$  contrôlé par une électrovanne. L'écoulement sortant est gravitaire, autrement dit le débit de sortie est  $\sqrt{2gh_1(t)}$ . L'objectif est de déterminer le débit entrant  $q_e(t)$  afin de maintenir le niveau de liquide  $h_1(t)$  égal à une valeur de référence  $h_{ref}$ , supposée constante pour commencer.

Dans un premier temps, un bilan matière permet d'écrire le modèle du système :

$$S\dot{h}_1(t) = q_e(t) - s_1\sqrt{2gh_1(t)} \quad (5.1)$$

Pour maintenir la hauteur à un niveau constant  $h_{ref0}$ , on peut faire une sorte d'inversion de modèle pour en déduire le débit d'alimentation à fournir au réservoir. La commande en boucle ouverte (BO) la plus simple est de multiplier le niveau souhaité par un gain fixe. Le système commandé en BO est représenté à gauche de la figure 5.2. En résolvant l'équation (5.1) à l'équilibre pour  $h_1(t) = h_{ref0}$  on a :  $q_e(t) = s_1\sqrt{2gh_{ref0}}$ . Autrement dit la commande proportionnelle en boucle ouverte pourrait être appliquée avec :

$$q_e(t) = (s_1\sqrt{2g/h_{ref0}})h_{ref}(t) \quad (5.2)$$

Le schéma bloc correspondant à cette approche est représenté à droite de la figure 5.2. On peut voir sur la gauche de la figure 5.4 que tant que la hauteur de référence reste constante à la valeur  $h_{ref0} = 1.5 \text{ m}$  (jusqu'à l'instant  $t = 50$ ), la commande est efficace puisque la courbe de la hauteur  $h_1(t)$  (en bleu) rejoint celle de  $h_{ref}(t)$  (en pointillés rouges). En revanche, si la valeur de  $h_{ref}(t)$  change (à  $t = 50 \text{ s}$ ), le gain calculé en (5.2) ne correspond

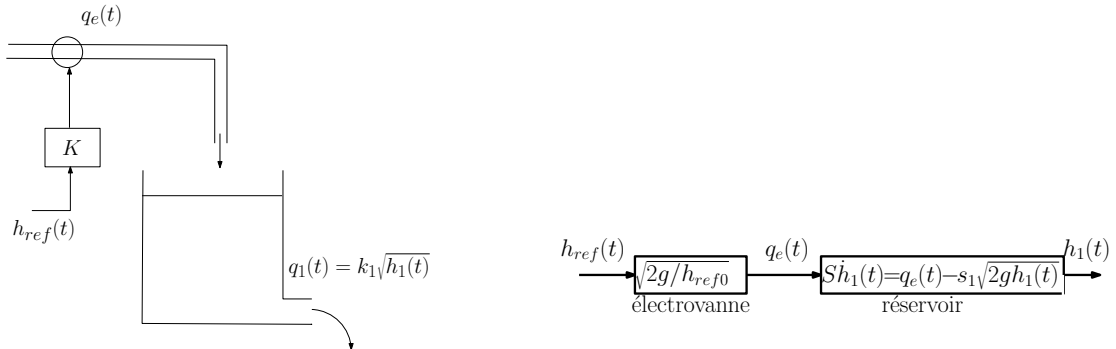


FIGURE 5.2 – Régulation de niveau en boucle ouverte : système physique (à gauche) et schéma bloc (à droite).



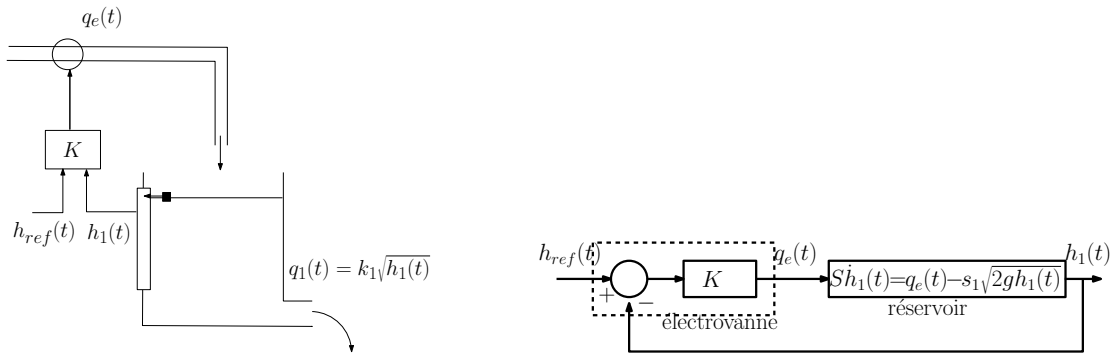


FIGURE 5.3 – Régulation de niveau en boucle fermée : système physique (à gauche) et schéma bloc (à droite).

plus à la référence voulue et la commande n'est plus efficace : pour  $t > 50$  s, la hauteur dans le réservoir s'écarte de la hauteur de référence.

Pour améliorer le suivi de la hauteur de référence, il est utile de mesurer la hauteur de liquide dans le réservoir au moyen d'un capteur de hauteur et d'utiliser cette mesure, comparée à la hauteur à atteindre, pour fixer le débit d'entrée, comme sur la gauche de la figure 5.3. Pour déterminer le débit, le plus simple est d'alimenter le réservoir proportionnellement à la différence entre la hauteur souhaitée et la hauteur obtenue est grande :

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h(t)) \quad (5.3)$$

On parle alors de commande proportionnelle en boucle fermée. Le schéma bloc correspondant est représenté à droite de la figure 5.3. L'application de cette commande en boucle fermée avec un gain  $K = 30$  donne les résultats représentés à droite de la figure 5.4 : la hauteur  $h_1(t)$  suit correctement la référence  $h_{ref}(t)$ , même si la référence change de valeur.

### 5.2.1 Effet de la boucle fermée sur un système du premier ordre

Au-delà du simple exemple précédent, on peut étudier l'effet d'un bouclage proportionnel sur un système linéaire d'ordre 1, défini par

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + T_p p} \quad (5.4)$$

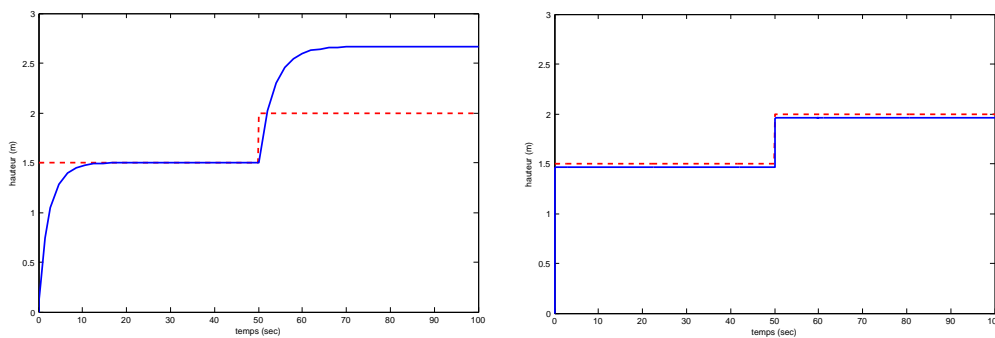


FIGURE 5.4 – Commandes en boucle ouverte (à gauche) et fermée (à droite) : hauteur de référence (en pointillés rouges) et hauteur dans le réservoir (ligne continue bleu).

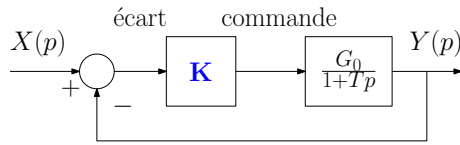


FIGURE 5.5 – Système d’ordre 1 en boucle fermée avec un régulateur proportionnel

où  $G_0$  est le gain statique et  $T$  la constante de temps. En reprenant le schéma de la figure 5.3 pour un système d’ordre 1, on a le schéma bloc de la figure 5.5. D’après les règles de l’algèbre des blocs, la fonction de transfert entre l’entrée  $X(p)$  et la sortie  $Y(p)$  est

$$H_{BF}(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)} = \frac{\frac{KG_0}{1+KG_0}}{1 + \frac{T}{1+KG_0}p} \quad (5.5)$$

Autrement dit, le système en boucle fermée est un système du premier ordre de gain statique  $G_{0BF} = \frac{KG_0}{1+KG_0}$  et de constante de temps  $T_{BF} = \frac{T}{1+KG_0}$ . Dans un objectif de régulation, cela veut dire que le gain  $K$  doit être choisi afin que la sortie évolue comme l’entrée. Le gain statique étant le rapport sortie/entrée en régime établi, il doit être le plus proche de 1 possible. La constante de temps quantifiant le temps de réponse d’un système, doit être la plus petite possible. Pour l’un comme pour l’autre, il suffit de choisir un gain  $K$  élevé. L’effet de l’augmentation du gain  $K$  sur les réponses fréquentielle et temporelle d’un système d’ordre 1 est représenté à la figure 5.6. On constate sur le diagramme de Bode, une augmentation de la bande passante. Sur le tracé entrée / sortie, on constate la diminution du temps de réponse et un meilleur suivi de l’entrée (en gris) par la sortie.

Ce choix pose cependant des problèmes pratiques : un grand gain implique une commande grande donc coûteuse en énergie et requérant un matériel dimensionné en conséquence. Dans l’exemple de la régulation de niveau cela veut dire : être capable d’injecter un débit très important donc une vanne ou une pompe sur-dimensionnée. De plus cela entraîne des grandes variations des entrées, donc si on utilise un modèle linéarisé pour la commande, le système s’éloigne du point de linéarisation et le modèle n’est plus valable... Comme on le verra par la suite, des correcteurs un peu plus évolués permettent d’obtenir de bons résultats en régulation avec des gains raisonnables.

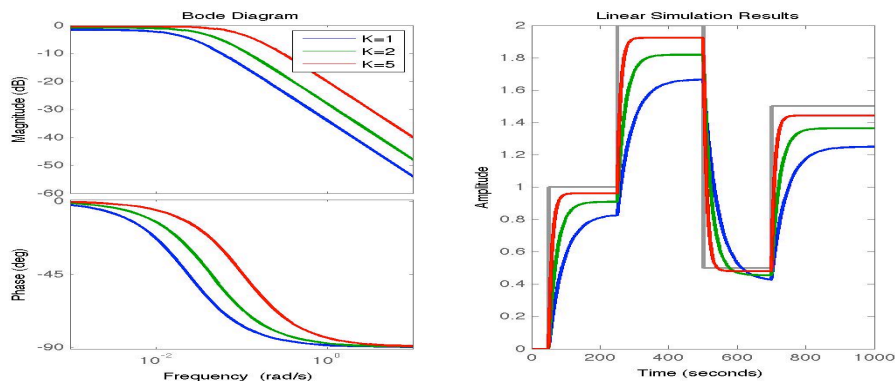


FIGURE 5.6 – À gauche : réponse fréquentielle d’un système d’ordre 1 en boucle fermée pour différentes valeurs du gain :  $K = 1$  (en bleu),  $K = 2$  (en vert) et  $K = 5$  (en rouge). À droite : la hauteur  $h_{ref}(t)$  (en gris) et la hauteur  $h_1(t)$  pour différentes valeurs de  $K$ .

### 5.2.2 Effet de la boucle fermée sur un système du second ordre

Cette structure de commande en boucle fermée peut s'appliquer à des systèmes plus compliqués qu'un simple système du premier ordre. Pour l'illustrer on considère l'exemple d'une régulation de niveau de deux réservoirs en cascade, représenté à gauche de la figure 5.7. L'objectif est de réguler la hauteur dans le deuxième réservoir  $h_2(t)$  autour d'une valeur de référence  $h_{ref}(t)$ , en adaptant le débit d'alimentation  $q_e(t)$  proportionnellement à l'écart entre  $h_2(t)$  et  $h_{ref}(t)$ . Les équations des deux réservoirs et du régulateurs sont :

$$S_1 \dot{h}_1(t) = q_e(t) - k_1 \sqrt{h_1(t)} \quad (5.6a)$$

$$S_2 \dot{h}_2(t) = k_1 \sqrt{h_1(t)} - k_2 \sqrt{h_2(t)} \quad (5.6b)$$

$$q_e(t) = K(h_{ref}(t) - h_2(t)) \quad (5.6c)$$

Si on considère un point d'équilibre défini par une hauteur de référence variant peu, on peut linéariser le système précédent en définissant des petites variations  $\delta x(t) = x(t) - x_0$ , où  $x_0$  est la valeur à l'équilibre de  $x(t)$ . On obtient alors le système d'équation suivant :

$$S_1 \delta \dot{h}_1(t) = \delta q_e(t) - \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \delta h_1(t) \quad (5.7a)$$

$$S_2 \delta \dot{h}_2(t) = \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \delta h_1(t) - \frac{k_2}{2\sqrt{h_{20}}} \delta h_2(t) \quad (5.7b)$$

$$\delta q_e(t) = K(\delta h_{ref}(t) - \delta h_2(t)) \quad (5.7c)$$

et on peut en déduire le schéma bloc à droite de la figure 5.7. Comme précédemment on étudie l'effet d'une variation du gain  $K$  sur les réponses fréquentielle et temporelles du modèle linéarisé du système. Les résultats obtenus sont représentés à la figure 5.8. On constate que l'augmentation du gain semble améliorer la précision (l'écart entre  $h_2$  à l'équilibre et  $h_{ref}$  diminue) et la rapidité. En revanche, l'augmentation de  $K$  fait apparaître des oscillations d'autant plus rapides et de grande amplitude que  $K$  est important.

Cette analyse peut se généraliser à tout système linéaire d'ordre deux en boucle fermée avec un régulateur proportionnel  $K$ . On considère un système d'ordre deux défini par :

$$G(p) = \frac{G_0}{\omega_0^2 + \frac{2z}{\omega_0} p + 1} \quad (5.8)$$

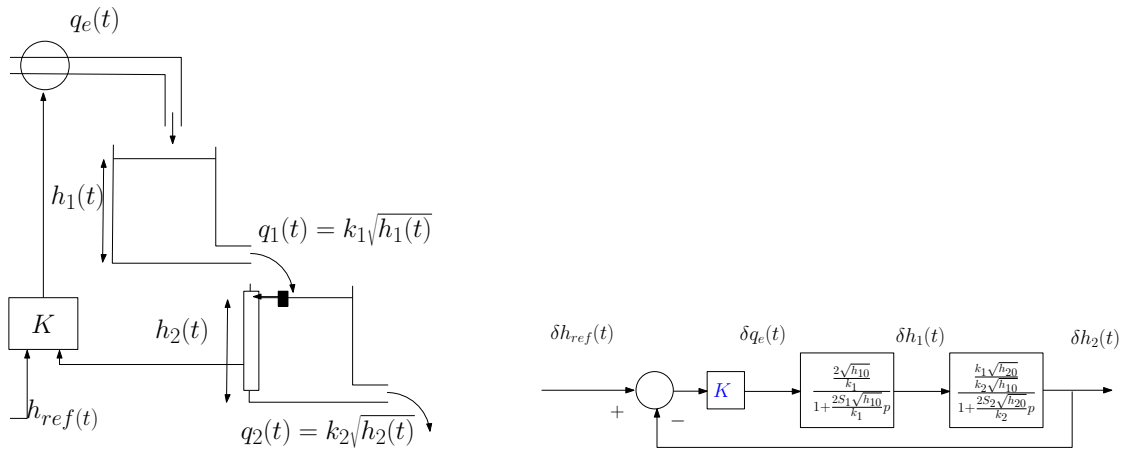


FIGURE 5.7 – Régulation de niveau de deux réservoirs en cascade et en boucle fermée : système physique (à gauche) et schéma bloc (à droite).

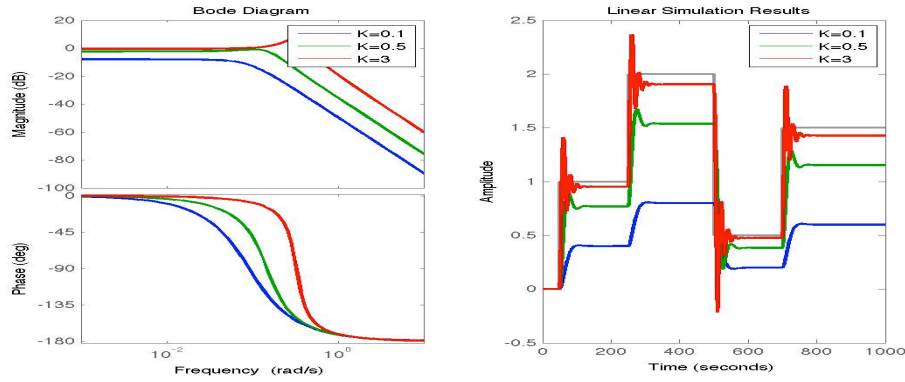


FIGURE 5.8 – À gauche : réponse fréquentielle d'un système d'ordre 2 en boucle fermée pour différentes valeurs du gain :  $K = 0.1$  (en bleu),  $K = 0.3$  (en vert) et  $K = 3$  (en rouge). À droite : la hauteur  $h_{ref}(t)$  (en gris) et la hauteur  $h_2(t)$  pour différents gains  $K$ .

où  $G_0$  est le gain statique,  $z$  le coefficient d'amortissement et  $\omega_0$  la pulsation propre. En boucle fermée avec un correcteur proportionnel  $K$ , la fonction de transfert devient :

$$H_{BF}(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)} = \frac{KG_0}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2z}{\omega_0}p + (1 + KG_0)} \quad (5.9)$$

Le système en boucle fermée est donc encore un système d'ordre deux dont les caractéristiques sont données par  $G_{0BF}$  le gain statique en BF,  $z_{BF}$  le coefficient d'amortissement en BF et  $\omega_{0BF}$  la pulsation propre en BF. La définition (5.9) permet d'obtenir :

$$G_{0BF} = \frac{KG_0}{1 + KG_0} \quad z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{1 + KG_0}} \quad \omega_{0BF} = \omega_0 \sqrt{1 + KG_0} \quad (5.10)$$

On a donc la confirmation que, de manière générale, l'augmentation du gain  $K$  :

- fait tendre le gain statique en BF vers 1, donc la valeur de la sortie à l'équilibre tend vers celle de l'entrée du système ;
- diminue le coefficient d'amortissement en BF, ce qui provoque l'apparition et / ou l'amplification d'oscillations en sortie ;
- augmente la pulsation propre et donc la fréquence des oscillations.

Le gain statique unitaire et l'accélération de la réponse sont des effets recherchés en régulation, en revanche l'apparition, l'accélération et l'amplification des oscillations sont généralement néfastes. Dans le cas de la régulation de niveau, de grandes oscillations seraient synonymes de débordement du réservoir, malgré une bonne valeur finale. Il semble y avoir un compromis à faire entre les résultats en régime statique et ceux en transitoire.

### 5.3 Structures classiques de régulation

Au-delà des exemples présentés plus haut, pour des modèles et des correcteurs éventuellement plus complexes, les stratégies de commandes en boucle ouverte ou fermée présentent les mêmes structures que celles présentées à droite des figures 5.2 et 5.3.

Dans l'ensemble de ce cours on se fixera comme objectifs pour déterminer le correcteur :

- minimiser l'écart entre la sortie du système et l'entrée de référence : même valeur en régime statique et réponse rapide à des variations de la référence ;
- minimiser l'influence des perturbations (entrées non contrôlées) sur la sortie.

Si on reprend l'exemple de la climatisation d'une pièce : la température dans la pièce doit correspondre à celle fixée par l'utilisateur et suivre rapidement d'éventuelles modifications de celle-ci. Les modifications de température dans la pièce dues à la température extérieure, à l'ensoleillement, aux fuites thermiques doivent être minimisées.

Le schéma complet d'un système perturbé en boucle fermée, donné à gauche de la figure 5.9, fait apparaître les deux entrées du système : la commande déterminée par le correcteur et appliquée par l'actionneur ainsi que les perturbations non contrôlées. En boucle fermée un capteur permet de mesurer la sortie. Cette mesure est comparée à la référence fixée par l'utilisateur. Cet écart est l'entrée du correcteur qui adapte en fonction la commande transmise au système. Dans l'exemple d'une climatisation le capteur est un thermocouple, le régulateur est un ordinateur réalisant les opérations de différence et multiplication par un gain (ou par la fonction de transfert d'un correcteur plus complexe). La sortie du correcteur est un courant faible commandant l'actionneur : un radiateur électrique. La commande appliquée au système est une quantité de chaleur.

Afin de simplifier ce schéma, on peut faire quelques hypothèses :

- le capteur est suffisamment précis dans la gamme de valeurs de la sortie mesurée et suffisamment rapide par rapport aux dynamiques du signal mesuré. Sa bande passante est plus grande que celle du système, de ce fait la réponse fréquentielle de l'ensemble {système + capteur} est la même que celle du système. On peut donc considérer que sa fonction de transfert est unitaire, au moins dans la bande de fréquences de la sortie à mesurer.
- comme dans le cas du capteur, on suppose que l'actionneur est précis et rapide de manière à approcher sa fonction de transfert par un modèle unitaire. Si ce n'est pas le cas, il faut modéliser le comportement de l'actionneur et intégrer ce modèle dans celui du système (concrètement : multiplier les deux fonctions de transfert) ;
- les perturbations sont supposées agir sur la sortie du système (bruit ou erreur de mesure), si ce n'est pas le cas on modélise leur action sur la sortie par une fonction de transfert  $G_p(p)$ . Si les perturbations agissent sur l'entrée du système, il suffit alors de prendre  $G_p(p) = G_x(p)$ .

Tenant compte de toutes ces hypothèses, le schéma bloc du système régulé se simplifie pour devenir celui qui est donné à droite de la figure 5.9.

Ce schéma correspond au cas, le plus répandu, où on tente de déterminer la fonction de transfert du correcteur  $C_x(p)$  pour faire suivre la référence  $x_{ref}(t)$  à la sortie  $y(t)$ , malgré la présence des perturbations  $x_{pert}(t)$ , sous l'hypothèse de pouvoir mesurer la sortie. De manière générale, suivant les signaux qu'il est possible de mesurer ou non, quatre structures de régulation sont possibles.

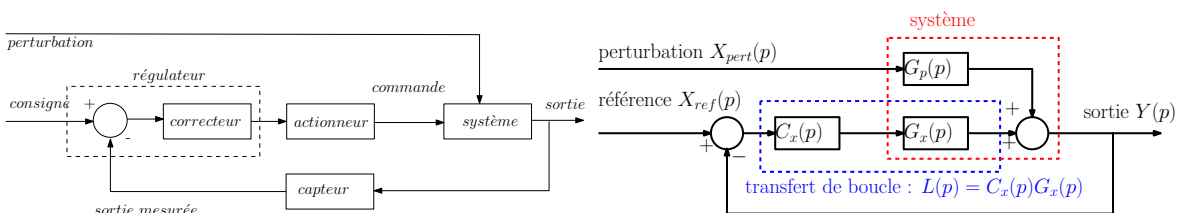


FIGURE 5.9 – Schéma standard de régulation en boucle fermée (à gauche) et schéma simplifié (à droite).

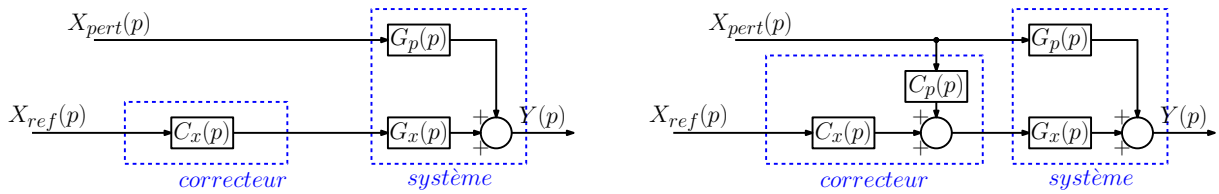


FIGURE 5.10 – Schéma de principe de la commande en boucle ouverte (à gauche) et en boucle ouverte avec pré-compensation des perturbations.

### 5.3.1 Commande en boucle ouverte

Si les perturbations et la sortie ne sont pas mesurables (autrement dit si les capteurs n'existent pas pour des raisons physiques ou économiques) la seule commande possible est la commande en boucle ouverte, telle que représentée à gauche de la figure 5.10. En tenant compte des fonctions de transfert, la sortie du système est donnée par :

$$Y(p) = G_p(p)X_{pert}(p) + G_x(p)C_x(p)X_{ref}(p) \quad (5.11)$$

Dans l'objectif de suivi de référence, la détermination du correcteur est guidée par la spécification :  $G_x(p)C_x(p) \simeq 1$ . Autrement dit, la fonction de transfert du correcteur doit être l'inverse du système :

$$C_x(p) \simeq G_x^{-1}(p) \quad (5.12)$$

Avec cette structure de commande il est impossible d'atténuer l'influence des perturbations sur la sortie car aucun retour d'information ne permet de constater cette influence. De plus, il est impossible de stabiliser un système instable (voir le chapitre suivant).

Si le système  $G_x(p)$  est strictement causal (i.e. si le degré en  $p$  du dénominateur est strictement supérieur à celui du numérateur), son inverse est strictement non causal, donc irréalisable. Néanmoins il est possible de déterminer une fonction de transfert causale qui soit égale à  $G_x^{-1}(p)$  au moins sur la bande de fréquences des signaux. Pour cela il suffit de mettre en série l'inverse de  $G_x(p)$  avec un filtre passe-bas d'ordre suffisant pour obtenir une pente du gain négative ou nulle en hautes fréquences. La pulsation de coupure du filtre passe-bas doit être choisie suffisamment grande pour que l'inversion soit exacte sur la bande de fréquences utile du système. Cette démarche est représentée à la figure 5.11.

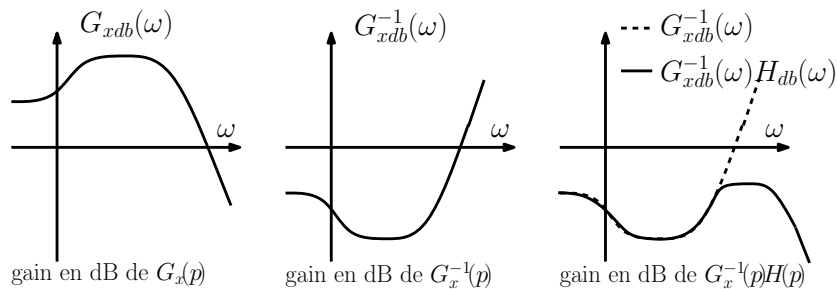


FIGURE 5.11 – Inversion causale d'une fonction de transfert par filtrage passe-bas  $H(p)$ .

### 5.3.2 Commande en boucle ouverte avec compensation des perturbations

Par définition, les entrées de perturbations ne sont pas contrôlées. En revanche, elles sont parfois accessibles à la mesure (dans l'exemple de la climatisation d'une pièce, la température extérieure peut être mesurée par un capteur placé à l'extérieur). Dans ce cas, le correcteur peut être complété afin de tenter de compenser les variations de sortie dues aux perturbations. Pour cela, comme représenté à droite de la figure 5.10, la commande est calculée en fonction des deux entrées de référence et de perturbations selon :

$$U(p) = C_x(p)X_{ref}(p) + C_p X_{pert}(p) \quad (5.13)$$

Avec cette commande, la sortie est donnée par :

$$Y(p) = G_x(p)C_x(p)X_{ref}(p) + (G_x(p)C_p + G_p(p))X_{pert}(p) \quad (5.14)$$

Le suivi de référence et le rejet de perturbation imposent respectivement :

$$C_x(p) \simeq G_x^{-1}(p) \quad C_p(p) \simeq -G_x^{-1}G_p(p) \quad (5.15)$$

Si  $G_x(p)$  est strictement causale, il faudra ajouter un filtre passe-bas pour rendre  $C_x(p)$  (et éventuellement  $C_p(p)$ ) causale(s), comme expliqué avant.

### 5.3.3 Commande en boucle fermée

Si la grandeur de sortie régulée est mesurable, la commande est calculée en fonction de l'écart entre la référence à suivre et la sortie mesurée. Si les perturbations ne sont pas mesurées, il est impossible d'adapter directement la commande à ces perturbations. Néanmoins, leur influence apparaissant sur la sortie, la commande en tiendra compte indirectement. Le schéma bloc correspondant est donné à gauche de la figure 5.12. L'objectif est alors de déterminer la fonction de transfert  $C_x(p)$  du correcteur donnant la commande en fonction de l'écart. La sortie étant alors donnée par :

$$Y(p) = \frac{G_x(p)C_x(p)}{1 + G_x(p)C_x(p)}X_{ref}(p) + \frac{G_p(p)}{1 + G_x(p)C_x(p)}X_{pert}(p) \quad (5.16)$$

Le suivi de référence et le rejet de perturbation imposent respectivement :

$$\frac{G_x(p)C_x(p)}{1 + G_x(p)C_x(p)} \simeq 1 \quad \frac{G_p(p)}{1 + G_x(p)C_x(p)} \simeq 0 \quad (5.17)$$

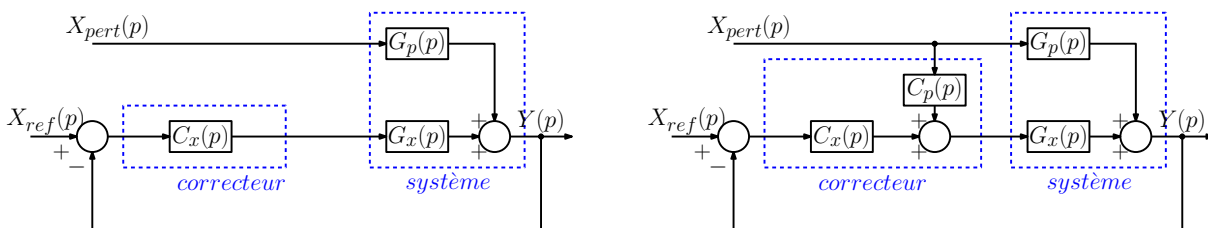


FIGURE 5.12 – Schéma de principe de la commande en boucle fermée (à gauche) et en boucle fermée avec pré-compensation des perturbations.

Ces deux objectifs ne sont pas toujours simultanément réalisables. En effet, un seul paramètre  $C_x(p)$  est disponible pour satisfaire deux objectifs différents. Dans certains cas, il est néanmoins possible de trouver un compromis satisfaisant, en particulier si ces deux spécifications concernent des bandes de fréquences différentes. Par exemple si le spectre de la référence est en basses fréquences et si les perturbations sont des bruits de mesures en hautes fréquences, il est parfois possible de trouver un correcteur assurant la première contrainte de (5.17) en basses fréquences et la deuxième en hautes fréquences. Pour le premier objectif, une solution envisageable peut être de rechercher à assurer le suivi en régime permanent (donc en basses fréquences). Pour cela on peut chercher à introduire un gain important en basses fréquences grâce au correcteur, en effet

$$|C_x(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow |G_x(j\omega)C_x(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow \left| \frac{G_x(j\omega)C_x(j\omega)}{1 + G_x(j\omega)C_x(j\omega)} \right| \simeq 1 \quad (5.18)$$

Dans ce cas, on peut remarquer que le transfert des perturbations sur la sortie sera également faible en basses fréquences, mais ce n'est pas forcément la bande de fréquences des perturbations. Nous étudierons donc plus finement la synthèse du correcteur dans la suite de ce cours.

### 5.3.4 Commande en boucle fermée avec compensation des perturbations

S'il est possible de mesurer à la fois l'entrée de perturbation et la sortie à réguler, ces deux informations sont utilisées pour le calcul de la commande. L'avantage est alors que la commande peut s'adapter rapidement à l'apparition de la perturbation, sans attendre que l'influence de celle-ci se perçoive sur la sortie. Dans ce cas, représenté à droite de la figure 5.12, la commande fournie en entrée de  $G_x(p)$  est définie par :

$$U(p) = C_x(p)(X_{ref}(p) - Y(p)) + C_p(p)X_{pert}(p) \quad (5.19)$$

On peut alors montrer, par application du principe de superposition, que la sortie est alors donnée par :

$$Y(p) = \frac{G_x(p)C_x(p)}{1 + G_x(p)C_x(p)}X_{ref}(p) + \frac{G_p(p) + G_x(p)C_p(p)}{1 + G_x(p)C_x(p)}X_{pert}(p) \quad (5.20)$$

Contrairement au cas précédent, le concepteur du correcteur dispose alors de deux degrés de liberté pour réaliser les deux objectifs de suivi de consigne et de rejet de perturbation. Dans un premier temps, il convient de choisir  $C_x(p)$  pour satisfaire le suivi de consigne, au moins dans la bande de fréquences utile, en respectant la première contrainte de (5.17). Ensuite, le transfert des perturbations mesurées vers la commande  $C_p(p)$  est déterminé pour annuler le transfert en boucle fermée de  $X_{pert}(p)$  vers  $Y(p)$ . Il suffit, pour cela, de prendre :

$$C_p(p) \simeq -G_x^{-1}(p)G_p(p) \quad (5.21)$$

Encore une fois si  $G_x(p)$  n'est pas causale, l'inversion peut nécessiter l'ajout d'un filtre passe bas pour rendre l'inverse causale, et donc réalisable.

Reprenons l'exemple des deux réservoirs en série présenté à la section 5.2.2 avec une perturbation étant la pluie ruisselant et tombant dans le deuxième réservoir. On suppose qu'un pluviomètre permet de mesurer ce débit entrant  $p(t)$ . L'objectif de la commande



reste de contrôler la hauteur d'eau dans le deuxième réservoir en adaptant le débit entrant du premier, malgré la présence du ruissellement et de la pluie. La seule différence est donc que l'équation (5.6b) devient

$$S_2 \dot{h}_2(t) = k_1 \sqrt{h_1(t)} - k_2 \sqrt{h_2(t)} + p(t) \quad (5.22)$$

La commande peut donc être composée de deux termes, comme indiqué dans (5.19), où le premier utilise l'erreur de régulation et le deuxième la mesure de la perturbation. Le schéma bloc du système linéarisé en boucle fermée est donné à la figure 5.13. Pour faire le lien avec la figure 5.12, on a ici  $G_x(p) = G_1(p)G_2(p)$  et  $G_p(p) = G_2(p)$ . Le premier correcteur est choisi purement proportionnel. Le deuxième est déterminé par (5.19), mais  $G_p(p)G_x^{-1} = G_1^{-1}(p)$  étant strictement non causal il faut ajouter un filtre passe bas pour obtenir un correcteur  $C_p(p)$  réalisable. Ici nous avons pris :

$$C_x(p) = 10 \quad \text{et} \quad C_p(p) = -G_1^{-1}(p) \frac{1}{0.01p + 1} \quad (5.23)$$

La figure de droite permet d'illustrer l'apport du terme de compensation de la perturbation. On peut constater qu'en l'absence de perturbation (jusqu'à  $t = 600$  s), le suivi de référence est relativement correct. En l'absence de compensation, la courbe  $h_2$  en BF sans FFC<sup>1</sup> obtenue en prenant  $C_p(p) = 0$ , montre que le suivi est dégradé par l'apparition de la perturbation à  $t = 600$  s. Cette dégradation disparaît avec l'utilisation de la compensation, comme l'illustre la courbe  $h_2$  en BF avec FFC.

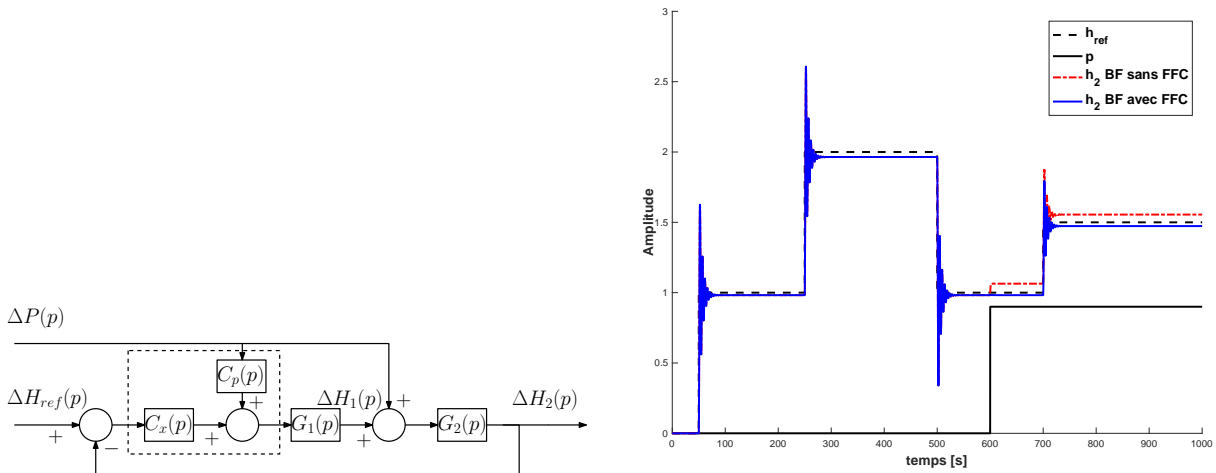


FIGURE 5.13 – Schéma bloc de la régulation de niveau de deux réservoirs avec perturbation (à gauche) et résultats de simulation (à droite).

1. FFC : pour **feedforward control**, ou contrôle par anticipation en bon français.

# Chapitre 6

## Analyse d'un système : performance et robustesse

### 6.1 Objectifs

L'objectif de la commande des procédés est d'améliorer leurs performances, encore faut-il être capable de définir et quantifier ces performances. La première d'entre elle est la stabilité : la sortie ne doit pas diverger vers l'infini pour une référence bornée. La deuxième est la précision : après un éventuel transitoire, la sortie doit être la plus proche possible de la référence. Par ailleurs, le régime transitoire devra être le plus court possible, il s'agit de la rapidité. Ces performances sont quantifiées en supposant que le modèle représente parfaitement le procédé. C'est rarement le cas, on essaiera de garantir la stabilité malgré un modèle imparfait, on parle de robustesse aux incertitudes de modèle.

### 6.2 Stabilité

Avant de chercher à piloter un procédé, il faut au moins garantir sa stabilité : éviter que sa sortie ne diverge à l'infini. En pratique, la sortie d'un système n'atteint pas des valeurs infinies car des saturations interviennent, néanmoins atteindre ces saturations peut déjà être dangereux. De plus, en s'éloignant du point de fonctionnement nominal, le modèle représentant le système devient inexact. Les conclusions tirées de son analyse seront donc fausses et les performances en boucle fermée ne seront plus garanties.

#### 6.2.1 Définition

La notion de stabilité est propre au système et ne dépend pas de la nature de l'entrée.

**Définition 6.1** (stabilité BIBO (pour bounded input bounded output)). *Un système est stable si, pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.*

*Exemple 6.1.* Étudions les réponses indicielles (lorsque l'entrée est égale à la fonction échelon unitaire  $\Gamma(t)$ ) de  $G_1(p) = \frac{1}{p+3}$  et  $G_2(p) = \frac{1}{p-3}$ . Une décomposition en éléments simples des deux réponses donne

$$Y_1(p) = G_1(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{p+3} \frac{1}{p} = \frac{-1/3}{p+3} + \frac{1/3}{p} \quad (6.1)$$

$$Y_2(p) = G_2(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{p-3} \frac{1}{p} = \frac{1/3}{p-3} + \frac{-1/3}{p} \quad (6.2)$$

La transformée inverse de ces deux expressions permet d'obtenir les réponses temporelles

$$y_1(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}\Gamma(t) \quad (6.3)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\Gamma(t) \quad (6.4)$$

Pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $y_2(t)$  diverge donc on peut en conclure que  $G_2(p)$  est instable. En revanche  $y_1(t)$  ne diverge pas, mais pour conclure il faudrait établir ce résultat pour toute entrée bornée.

Afin d'avoir une définition plus utilisable il est préférable de relier la propriété de stabilité à la fonction de transfert du système.

**Théorème 6.1** (Stabilité asymptotique). *La fonction de transfert  $G(p)$  est stable si l'une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée.*

- Les pôles<sup>1</sup> de  $G(p)$  sont tous à parties réelles strictement négatives.
- La réponse impulsionnelle<sup>2</sup> de  $G(p)$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.* On considère la réponse  $y(t)$  à une impulsion  $x(t) = \delta(t)$  donnée par :  $Y(p) = G(p)X(p)$ . Comme  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ , il vient :  $Y(p) = G(p)$ . Une décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{(p - p_i)^{n_i}} \quad (6.5)$$

où les  $n_i$  sont les multiplicités de chaque pôle  $p_i$ . Ces pôles peuvent être réels ou complexes conjugués. La transformée de Laplace permet alors d'obtenir la réponse temporelle  $y(t)$  :

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{t^{n_i-1}}{(n_i - 1)!} e^{p_i t} \quad (6.6)$$

Il est alors évident que si  $\Re(p_i) < 0$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , la sortie converge vers 0.  $\square$

Cette définition de la stabilité est plus contraignante que la stabilité BIBO car elle exclut le cas de pôles à parties réelles nulles qui provoqueraient des oscillations non amorties. Elle lui est préférée car elle est facilement vérifiable numériquement et est plus adaptée à un objectif de régulation où on préfère que la sortie converge vers la valeur voulue plutôt que se contenter de rester à une distance bornée mais éventuellement grande.

*Exemple 6.2.* Reprenons l'exemple précédent avec  $G_1(p) = \frac{1}{p+3}$  et  $G_2(p) = \frac{1}{p-3}$ . Leurs réponses impulsionnelles respectives sont  $y_1(t) = e^{-3t}$  et  $y_2(t) = e^{3t}$ , on peut donc conclure que  $G_1(p)$  est un système stable et que  $G_2(p)$  est un système instable. Ces conclusions s'obtiennent également en calculant les pôles de ces fonctions de transfert : le pôle de  $G_1(p)$  est  $p_1 = -3 < 0$  alors que le pôle de  $G_2(p)$  est positif  $p_2 = 3 > 0$ .

## 6.2.2 Critère de Routh

Le critère de Routh permet de tester la stabilité d'un système sous forme de fonction de transfert, sans calculer ses pôles. Considérons la fonction de transfert d'ordre  $n$  suivante où le numérateur n'est pas détaillé car la stabilité ne dépend que du dénominateur :

$$G(p) = \frac{Num(p)}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (6.7)$$

- 
1. Les racines du dénominateurs de  $G(p)$
  2. La sortie du système pour une entrée égale à la fonction Dirac  $\delta(t)$

Le critère de Routh s'appuie sur un tableau construit comme suit.

- Les deux premières lignes sont données par les coefficients du dénominateur par puissance de  $p$  décroissante, de haut en bas, puis de gauche à droite, jusqu'à  $a_0$  (si  $a_0$  est en première ligne, un 0 remplit la deuxième).
- Les lignes suivantes sont complétées de gauche à droite suivant la règle suivante :

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-1,j+1}a_{i-2,1}}{a_{i-1,1}} \quad (6.8)$$

où  $a_{i,j}$  désigne le terme se trouvant dans la ligne  $L_i$  et la colonne  $C_j$ . Lorsqu'une case vide est utilisée dans un calcul, on suppose que le coefficient est nul.

- Le tableau comporte  $n + 1$  lignes, où  $n$  est le degré du dénominateur.

	$C_1$	$C_j$	$C_{j+1}$	
$L_1$	$a_n$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_0$
$L_2$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$\dots$	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$L_{i-2}$	$a_{i-2,1}$		$a_{i-2,j+1}$	
$L_{i-1}$	$a_{i-1,1}$		$a_{i-1,j+1}$	
$L_i$		$a_{i,j}$		
$L_{n+1}$	$a_{n+1,1}$	0	$\dots$	0

**Théorème 6.2** (Critère de Routh). *Le système  $G(p)$  est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne de son tableau de Routh sont strictement du même signe.*

*Exemple 6.3.* Utilisons le critère de Routh pour déterminer si  $G_1(p) = \frac{5p+7}{p^4+p^3+2p^2-p+3}$  et  $G_2(p) = \frac{p+1}{p^2+3p+5}$  sont stables. Leurs tableaux de Routh respectifs sont donnés ci-dessous.

Tableau de Routh de  $G_1(p)$

1	2	3
1	-1	0
3	3	0
-2	0	0
3	0	0

Tableau de Routh de  $G_2(p)$

1	5
3	0
5	0

Les termes de la première colonne du tableau de  $G_1(p)$  n'étant pas de même signe, on conclut que  $G_1(p)$  est instable. En revanche, les termes de la première colonne du tableau de  $G_2(p)$  sont tous de même signe, donc le système  $G_2(p)$  est stable.

Au-delà de la vérification de la stabilité d'un système, le critère de Routh permet de déterminer les valeurs des paramètres d'un correcteur garantissant la stabilité en boucle fermée. En effet, le dénominateur en boucle fermée fait apparaître les paramètres du correcteur et le critère de Routh donne alors des contraintes sur ces paramètres.

*Exemple 6.4.* Considérons le système instable  $G(p) = \frac{1}{p^2+p-2}$ . Pour le stabiliser, on choisit une commande en boucle fermée avec un correcteur PI<sup>3</sup>  $C(p) = K + T_i/p$ , où  $K$  et  $T_i$  sont à trouver pour assurer la stabilité du système en boucle fermée défini par :

$$G_{BF}(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{Kp + T_i}{p^3 + p^2 + (K - 2)p + T_i} \quad (6.9)$$

3. pour Proportionnel Intégral, le réglage et l'intérêt de ce correcteur font l'objet de la section 7.4.

Le tableau de Routh du système en boucle fermée est ci-dessous. D'après le critère de Routh, le système est stable en boucle fermée si et seulement si :  $T_i > 0$  et  $K > 2 + T_i$ .

1	$K - 2$
1	$T_i$
$K - 2 - T_i$	0
$T_i$	0

Le critère de Routh s'applique sur la fonction de transfert du système en boucle fermée. D'autres critères de stabilité fondent l'analyse de stabilité en boucle fermée sur le transfert de boucle. C'est en particulier le cas des critères de Nyquist ou du revers.

### 6.2.3 Critères de Nyquist et du revers

Le critère de Nyquist permet de conclure sur la stabilité en boucle fermée à partir du transfert de boucle défini par  $L(p) = C(p)G(p)$ . Cette particularité peut être intéressante car l'expression du transfert de boucle en fonction du correcteur  $C(p)$  à déterminer est plus simple que celle de la fonction de transfert en boucle fermée  $G_{BF}(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)}$ .

**Théorème 6.3** (Critère de Nyquist). *Un système en boucle fermée  $G_{BF}(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$  est stable si et seulement si, lorsque  $z$  entoure le demi-plan des complexes à parties réelles positives dans le sens horaire,  $L(z)$  entoure dans le sens trigonométrique (anti-horaire) le point  $-1$  un nombre de fois égal au nombre de pôles de  $L(p)$  à parties réelles positives.*

*Démonstration.* D'après le théorème de Cauchy, lorsque la variable  $z$  parcourt un circuit fermé du plan complexe dans le sens horaire, une fraction rationnelle  $F(z)$  entoure le point 0 dans le sens horaire un nombre de fois égal à  $N = Z - P$ , où  $P$  et  $Z$  sont respectivement le nombre de pôles et de zéros de  $F$  situés à l'intérieur du circuit.

Le système est stable en boucle fermée si et seulement si  $G_{BF}(p) = L(p)/(1+L(p))$  n'a pas de pôle dans le demi plan droit complexe, autrement dit : si et seulement si  $\tilde{L}(p) = 1+L(p)$  n'a pas de zéro dans le demi plan droit complexe. D'après le résultat énoncé plus haut, cela est vrai si et seulement si, lorsque  $z$  entoure le demi plan complexe droit dans le sens horaire,  $\tilde{L}(p)$  entoure 0 dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles de  $\tilde{L}(p)$  à partie réelle positive. Les pôles de  $L(p)$  et de  $\tilde{L}(p)$  étant les mêmes, leurs nombres sont égaux, ce qui achève la démonstration.  $\square$

Sur la gauche de la figure 6.1 sont représentés les pôles et les zéros de  $L(p)$  dans le plan complexe ainsi qu'un contour  $\Gamma$  entourant (par passage à la limite) le demi-plan complexe droit. La partie droite de la figure représente le lieu de  $L(z)$  lorsque  $z$  décrit  $\Gamma$

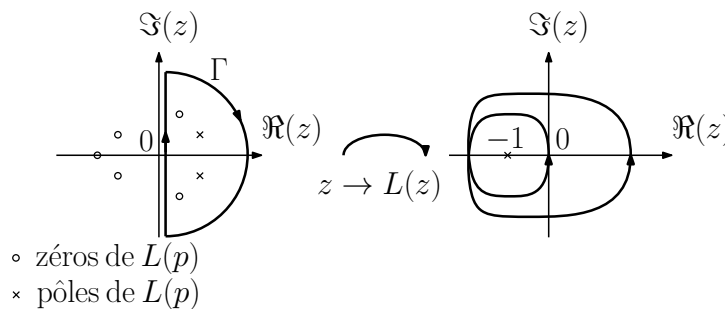


FIGURE 6.1 – Illustration du critère de Nyquist.

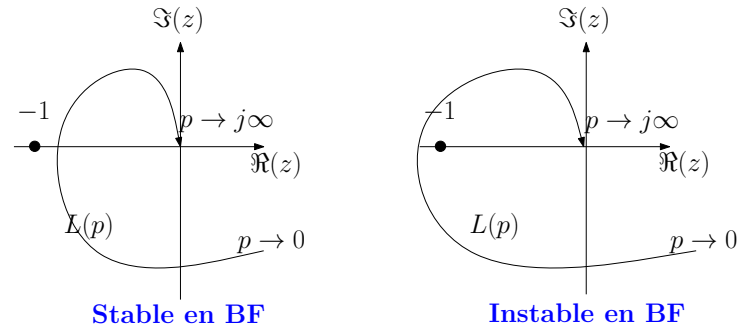


FIGURE 6.2 – Illustrations du critère du revers.

dans le sens horaire. Lorsque  $z$  parcourt  $\Gamma$ ,  $L(z)$  entoure le point  $-1$  deux fois dans le sens trigonométrique. Le nombre de pôles de  $L(p)$  dans le demi plan droit étant égal à 2, d'après le critère du revers, on peut conclure que le système en boucle fermée sera stable.

Ce critère peut sembler compliqué à employer, néanmoins une version simplifiée de ce critère - le critère du revers - permettra de lui donner un peu plus de sens.

**Théorème 6.4** (Critère du revers). *Sous l'hypothèse que le transfert de boucle  $L(p)$  est stable, le système en boucle fermée  $G_{BF}(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$  est stable si et seulement si, lorsque  $p$  décrit  $[0 i\infty[$ ,  $L(p)$  passe à droite du point  $-1$ .*

*Démonstration.* Si  $L(p)$  est stable, alors  $P = 0$ . En appliquant le critère de Nyquist, on en déduit que  $G_{BF}$  est stable si et seulement si l'image de  $\Gamma$  (entourant le demi plan droit complexe) par  $L(p)$  n'entoure pas  $-1$ . L'image du demi cercle infini par  $L(p)$  est le point 0 et l'image de  $] -i\infty 0]$  est le symétrique de celle de  $[0 i\infty[$ , on peut conclure que l'image de  $\Gamma$  par  $L(p)$  n'entoure pas  $-1$  si l'image de  $[0 i\infty[$  passe à droite du point  $-1$ .  $\square$

La figure 6.2 représente l'image de  $[0 i\infty[$  par deux transferts de boucle différents. Sur la partie gauche de la figure, l'image du demi-axe imaginaire par  $L(p)$  passe à droite de  $-1$ , donc  $G_{BF}(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$  est stable. Inversement sur la partie droite de la figure,  $L(p)$  passe à gauche de  $-1$ , donc  $G_{BF}(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}$  est instable.

Ce critère est plus simple à utiliser car il est facile de tracer l'image de  $[0 i\infty[$  par  $G(p)$  et de chercher quelle déformation le correcteur  $C(p)$  doit apporter pour que l'image du transfert  $L(p) = C(p)G(p)$  passe à droite du point  $-1$ . Par exemple, si la courbe de  $C(p)$  passe à gauche de  $-1$  pour une certaine pulsation, il suffit de choisir un correcteur dont le gain est inférieur à 1 autour de cette pulsation, comme l'illustre la figure 6.3.

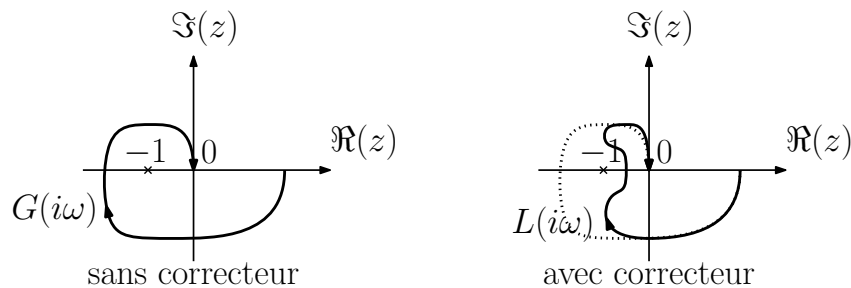


FIGURE 6.3 – Effet stabilisant d'un correcteur constaté sur le transfert de boucle.

*Exercice 6.1.* Montrer que lorsque  $p \in [0, i\infty[$ , le système du premier ordre  $\frac{K}{1+Tp}$  (avec  $T$  et  $K > 0$ ) décrit le demi cercle inférieur centré en  $K/2$ . En déduire qu'un correcteur proportionnel de gain positif ne peut pas le déstabiliser.

*Exercice 6.2.* Montrer qu'un correcteur proportionnel de gain positif ne peut pas déstabiliser un système du deuxième ordre  $\frac{K}{1+\frac{2zp}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$  (avec  $K, z$  et  $\omega_0 > 0$ ).

## 6.3 Précision

En régulation, la stabilité n'est pas un objectif suffisant. En effet, on souhaite faire converger la sortie vers la valeur de l'entrée de référence. On cherche donc à minimiser l'écart entre la sortie et la référence  $e(t) = x(t) - y(t)$  et on parle alors de précision. Si le but est de réduire cet écart en régime statique, c'est à dire au bout d'un temps infini pour une référence constante, on parle de précision statique. Si le but est que la sortie suive une entrée variant dans le temps, on parle de précision dynamique.

### 6.3.1 Précision statique

Partant de la relation entrée sortie donnée par

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1+L(p)}X(p) \quad (6.10)$$

l'écart  $e(t) = x(t) - y(t)$ , aussi appelé erreur de régulation (voire : "erreur", pour les intimes), s'écrit simplement en fonction du transfert de boucle

$$E(p) = \frac{1}{1+L(p)}X(p) \quad (6.11)$$

Dans le cas d'une entrée de référence constante,  $x(t) = x_0$ , le théorème de la valeur finale donne la valeur  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  appelée erreur statique :

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1+L(p)} \frac{x_0}{p} = \frac{x_0}{1+L(0)} \quad (6.12)$$

Une bonne précision statique sera donc obtenue si le gain statique de  $L(p)$  est important en basses fréquences. Si le gain statique du système en boucle ouverte n'est pas grand il convient donc que le correcteur apporte un grand gain en basses fréquences. Un simple correcteur proportionnel de gain important peut suffire. De plus, un intégrateur dans le transfert de boucle garantit une erreur statique nulle. Si le système  $G(p)$  n'est pas lui-même intégrateur, il suffit d'inclure un terme intégral dans le correcteur :  $C(p) = \frac{1}{p}(\dots)$ .

**Théorème 6.5.** *Sous réserve de stabilité en boucle fermée, si le transfert de boucle a un intégrateur pur, alors l'erreur statique en réponse à une entrée constante est nulle.*

*Exercice 6.3.* On considère le système  $G(p) = \frac{2}{1+p+p^2}$ . Quelle est l'erreur statique en boucle fermée avec un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ ? Quelles valeurs de  $K$  garantissent la stabilité en boucle fermée? Quel choix de  $K$  semble optimal?

*Exercice 6.4.* Reprendre l'exercice 6.3 avec un correcteur intégral pur  $C(p) = \frac{K}{p}$ .

### 6.3.2 Précision dynamique

La précision dynamique est la généralisation de la précision statique au suivi de référence non constante. On étudie le cas d'entrée définie par des polynômes en  $t$  car il est toujours possible d'approximer une fonction quelconque par un polynôme, au moins sur un support borné et avec une certaine précision. Le résultat du théorème 6.5 (polynôme en  $t$  d'ordre 0) se généralise à n'importe quel polynôme comme suit.

**Théorème 6.6.** *Sous réserve de stabilité en boucle fermée, si le transfert de boucle inclut  $m > n$  (resp.  $m = n$ ) intégrateurs purs, alors l'erreur finale en réponse à un polynôme en  $t$  d'ordre  $n$  est nulle (resp. finie).*

*Démonstration.* Considérons l'entrée définie par  $x(t) = t^n$ , avec  $n > 0$ . Sa transformée de Laplace est  $X(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ . On note  $Num(p)$  et  $Den(p)$  les polynômes numérateur et dénominateur de  $L(p)$ . Notons  $m$  le nombre d'intégrateurs purs dans le transfert de boucle, autrement dit :  $Den(p) = p^m \overline{Den}(p)$  avec  $\overline{Den}(0) \neq 0$ . L'erreur finale est donnée par :

$$e_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{1}{1 + L(p)} \right) \frac{n!}{p^{n+1}} = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{Den(p)}{Den(p) + Num(p)} \right) \frac{n!}{p^n} \quad (6.13)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{n! p^{m-n} \overline{Den}(p)}{p^m \overline{Den}(p) + Num(p)} \right) \quad (6.14)$$

La limite précédente a plusieurs valeurs suivant la valeur de  $m$

$$e_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ \frac{n! \overline{Den}(0)}{Num(0)} & \text{si } n = m \\ \pm\infty & \text{si } m < n \end{cases} \quad (6.15)$$

Par linéarité de la transformée de Laplace, il apparait que seul le terme de degré le plus élevé importe. De ce fait, le résultat obtenu s'étend à tout polynôme en  $t$  de degré  $n$ .  $\square$

Le tableau 6.1 donne la valeur de l'erreur finale en fonction du degré de l'entrée et du nombre d'intégrateurs purs dans le transfert de boucle. Les résultats sont établis sous réserve de stabilité de la boucle fermée, l'ajout d'intégrateur(s) au transfert de boucle n'est donc pas suffisant : les paramètres du correcteur doivent être validés par le critère de Nyquist, du revers ou de Routh.

TABLE 6.1 – Erreur finale en réponse à des entrées polynomiales en  $t$ , en fonction du transfert de boucle.

$L(p) \backslash x(t)$	$x_0$	$x_0 + x_1 t$	$x_0 + \dots + x_2 t^2$	...	$x_0 + \dots + x_n t^n$
$\tilde{L}(p), \tilde{L}(0) \neq \pm\infty$	$e_\infty = \frac{x_0}{1 + \tilde{L}(0)}$	$e_\infty = \pm\infty$	$e_\infty = \pm\infty$	...	$e_\infty = \pm\infty$
$\frac{1}{p} \tilde{L}(p), \tilde{L}(0) \neq \pm\infty$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{x_1}{\tilde{L}(0)}$	$e_\infty = \pm\infty$	...	$e_\infty = \pm\infty$
$\frac{1}{p^2} \tilde{L}(p), \tilde{L}(0) \neq \pm\infty$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = \frac{2x_2}{\tilde{L}(0)}$	...	$e_\infty = \pm\infty$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\frac{1}{p^n} \tilde{L}(p), \tilde{L}(0) \neq \pm\infty$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	...	$e_\infty = \frac{n! x_n}{\tilde{L}(0)}$
$\frac{1}{p^{n+1}} \tilde{L}(p), \tilde{L}(0) \neq \pm\infty$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	$e_\infty = 0$	...	$e_\infty = 0$



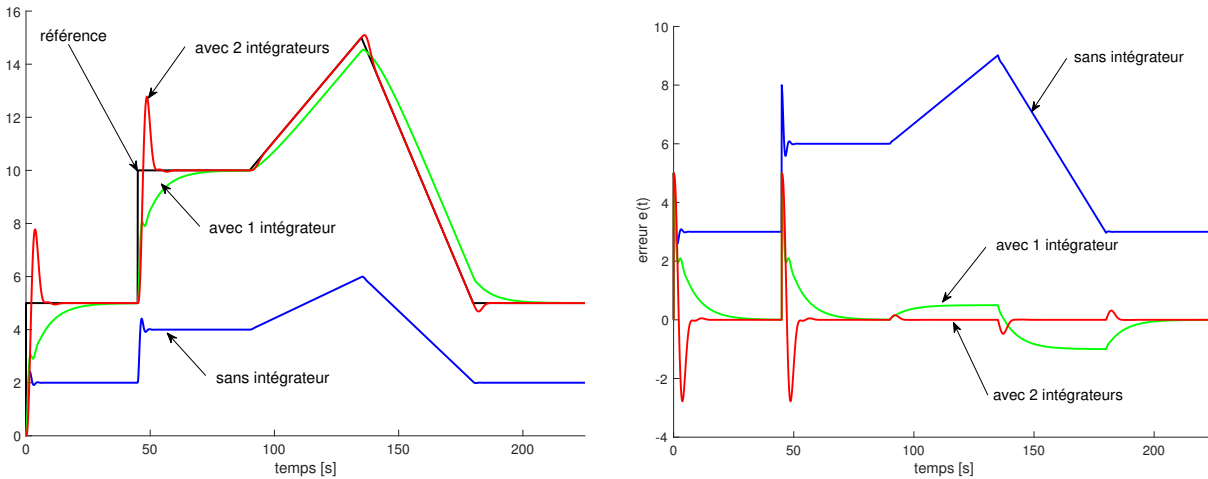


FIGURE 6.4 – Entrée (en noir) et sorties (à gauche); erreur de régulation (à droite).

*Exemple 6.5.* Considérons le système  $G(p) = \frac{2}{p^2+2p+3}$  et une référence constante ou affine par morceaux. Pour illustrer les résultats précédents, utilisons les correcteurs suivants :  $C_1(p) = 1$  sans intégrateur,  $C_2(p) = \frac{1/3+p}{p}$  avec un intégrateur et  $C_3(p) = \frac{1/3+p}{p^2}$  avec deux intégrateurs. Les figures 6.4 représentent l'entrée de référence et les sorties en boucle fermée (à gauche) et les erreurs de régulation (à droite). Lorsque la référence est constante (pour  $0 < t < 90$  ou  $t > 180$ ), sans intégrateur la sortie ne suit pas l'entrée et l'erreur tend à être finie mais non nulle (courbes bleues). En revanche, pour une entrée constante, un ou deux intégrateurs dans le transfert de boucle permettent de suivre l'entrée et d'annuler l'erreur (courbes rouges et vertes). Lorsque la référence est affine (pour  $90 < t < 180$ ), sans intégrateur l'erreur est affine et donc diverge (en un temps infini), en revanche un intégrateur dans le transfert de boucle permet d'obtenir une erreur de régulation finie (courbes vertes) et deux intégrateurs permettent de suivre la référence et d'annuler l'erreur après les transitoires (courbes rouges).

## 6.4 Robustesse

Toutes les performances étudiées précédemment s'appuient sur la connaissance et l'exactitude d'un modèle du système. Il faut donc que le modèle  $G(p)$  représente fidèlement le comportement entrée/sortie du système pour que le correcteur synthétisé garantisse la stabilité (et la précision) du système en boucle fermée. Malheureusement il est très rare de disposer d'un modèle exact dans une large plage de fonctionnement du système (si le modèle vient d'une linéarisation, il est inexact dès que le point de fonctionnement s'éloigne du point de linéarisation). Il faut donc garantir la stabilité malgré des incertitudes de modèle, c'est-à-dire même si le gain ou la phase de  $G(p)$  sont inexacts.

On étudiera également la robustesse par rapport à des perturbations modélisées par des signaux inconnus agissant sur le système. Le but est alors de minimiser l'influence de ces perturbations sur le suivi de la référence par la sortie régulée.

### 6.4.1 Robustesse aux incertitudes de modélisation

Si on traduit la remarque précédente en termes de lieu du transfert de boucle, il ne suffit pas que le transfert de boucle ne passe pas en  $-1$  pour que le système en boucle fermée soit stable : il faut également que le transfert de boucle passe *suffisamment loin*

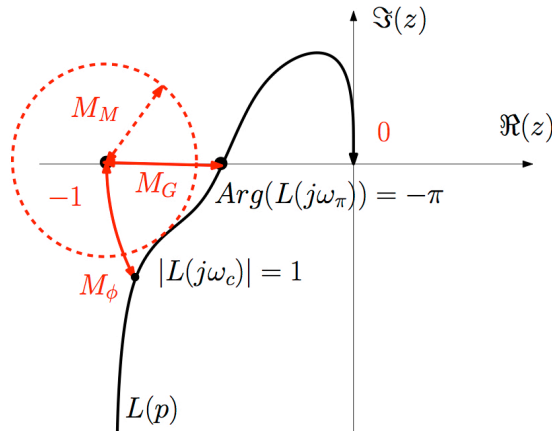


FIGURE 6.5 – Lieu du transfert de boucle et marges de robustesse dans le plan complexe.

du point  $-1$ . Pour quantifier la robustesse aux incertitudes de modélisation il reste à quantifier la distance au point  $-1$  du lieu du transfert de boucle  $L(p)$  pour  $p \in [0, i\infty[$ . Les différentes distances envisageables sont représentées sur la figure 6.5.

La **marge de gain** est le gain maximum par lequel on peut multiplier  $G(p)$  et donc le transfert de boucle sans faire passer ce dernier en  $-1$ . Le point du transfert qui peut être amené en  $-1$  par une homothétie centrée est l'intersection du transfert de boucle avec le demi axe des réels négatifs, autrement dit : celui pour lequel l'argument du transfert est égal à  $-\pi$ .

**Définition 6.2** (Marge de gain). *La marge de gain, notée  $M_G$ , est définie par*

$$M_G = \frac{1}{|L(i\omega_\pi)|}, \text{ où } \text{Arg}(L(i\omega_\pi)) = -\pi \quad (6.16)$$

*La marge de gain en décibels, notée  $M_{GdB}$ , est définie par :  $M_{GdB} = -20\log(|L(i\omega_\pi)|)$ . Un ordre de grandeur raisonnable de la marge de gain est  $M_G = 2$  (soit  $M_{GdB} = 6dB$ ).*

La **marge de phase** est la valeur maximale de la phase que l'on peut ajouter à  $G(p)$  et donc au transfert de boucle sans faire passer ce dernier en  $-1$ . Le point du transfert qui peut être amené en  $-1$  par une rotation centrée en 0 est l'intersection du transfert de boucle avec le cercle de centre 0 et de rayon égal à 1, autrement dit : celui pour lequel le module du transfert est égal à 1.

**Définition 6.3** (Marge de phase). *La marge de phase, notée  $M_\phi$ , est définie par*

$$M_\phi = \text{Arg}(L(i\omega_c)) + 180, \text{ où } |L(i\omega_c)| = 1 \quad (6.17)$$

*Un ordre de grandeur raisonnable de la marge de gain est  $M_\phi = 40\text{deg}$ .*

La marge de phase permet un nouvel énoncé du critère du revers.

**Théorème 6.7** (Critère du revers). *Sous l'hypothèse que le transfert de boucle est stable, le système en boucle fermée est stable si et seulement si la marge de phase est positive.*

La marge de phase n'est pas si abstraite qu'elle peut paraître si on se souvient que la transformée de Laplace d'une fonction retardée est donnée par  $\mathcal{L}(x(t - \tau)) = X(p)e^{-p\tau}$ .

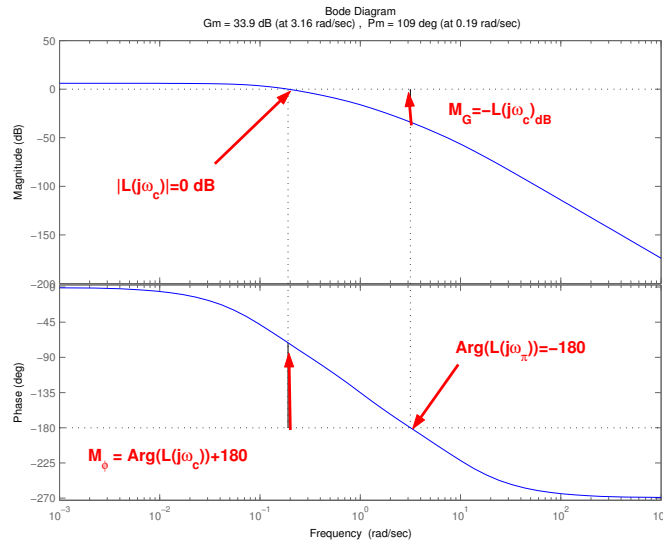


FIGURE 6.6 – Marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode du transfert de boucle.

De ce fait, un retard pur dans le transfert de boucle induit un déphasage, or les retards apparaissent à cause des temps de transmission des signaux, des temps de calcul du correcteur, etc. Le plus grand retard admissible dans le transfert de boucle sans déstabiliser le système en boucle fermée définit la marge de retard.

**Définition 6.4** (Marge de retard). *La marge de retard, notée  $M_\tau$ , est définie par*

$$M_\tau = \frac{\text{Arg}(L(i\omega_c))}{\omega_c}, \text{ où } |L(i\omega_c)| = 1 \quad (6.18)$$

La **marge de module** est la distance minimale de la courbe de  $L(i\omega)$  au point  $-1$ .

**Définition 6.5** (Marge de module). *La marge de module, notée  $M_M$ , est définie par*

$$M_M = \min_{\omega \in \mathbb{R}^+} |1 + L(i\omega)| \quad (6.19)$$

### Marges de robustesse sur les diagrammes de Bode de $L(p)$

Comme représenté sur la figure 6.6, les marges de gain et de phase se calculent facilement à partir des diagrammes de Bode du transfert de boucle comme suit.

- Marge de gain : sur la courbe de phase,  $\omega_\pi$  est la pulsation de l'intersection de la courbe de phase avec la droite  $\phi = -\pi$ . Sur la courbe de gain,  $M_{GdB}$  est alors donnée par l'opposé de la valeur du gain en décibels de  $L(p)$  à la pulsation  $\omega_\pi$ .

- Marge de phase : sur la courbe de gain,  $\omega_c$  est la pulsation de l'intersection de la courbe de gain  $G_{dB}(\omega)$  avec l'axe horizontal  $0 \text{ dB}$ . Sur la courbe de phase,  $M_\phi$  est alors donnée par la distance verticale de la droite  $\phi = -\pi$  au point  $\Phi(\omega_c)$

### 6.4.2 Robustesse aux entrées de perturbations

Outre les incertitudes de modèle considérées plus haut, il faut généralement tenir compte de l'environnement du système à piloter. Ainsi, l'entrée de commande n'est pas la seule grandeur à influencer le comportement du système et il est plus réaliste de considérer des entrées de perturbations, notées  $P(p)$  sur la figure 6.7, intervenant directement

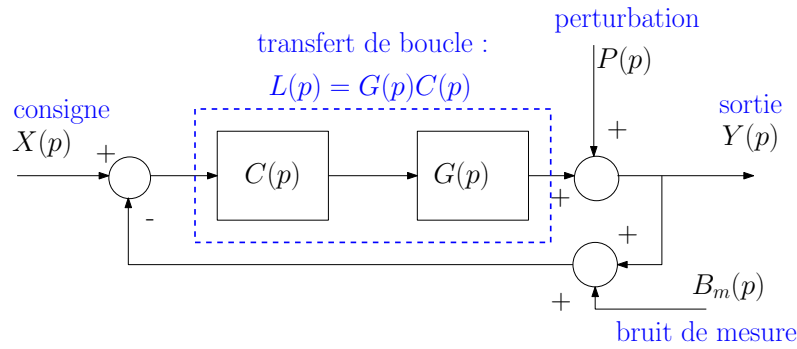


FIGURE 6.7 – Système en boucle fermée avec perturbation et bruit de mesure.

sur la sortie ou par l'intermédiaire d'une fonction de transfert, non représentée à la figure 6.7. Ces perturbations rassemblent tous les signaux exogènes (c'est-à-dire non fixés par l'opérateur) mesurables ou non, qui interviennent sur le comportement du procédé (température extérieure et ensoleillement dans le cas d'une climatisation, fuite ou infiltration dans le cas d'une régulation de niveau de réservoir, etc). Par ailleurs, la mesure de la sortie utilisée pour créer l'écart en entrée du régulateur est souvent inexacte (inertie mécanique ou thermique du capteur, erreurs de quantification, arrondis, etc), il est donc réaliste de prendre en compte des bruits de mesure intervenant entre la sortie et le comparateur et notés  $B_m(p)$  sur la figure 6.7. D'un point de vue fréquentiel, les bruits de mesure sont souvent caractérisés par des hautes fréquences tandis que les perturbations peuvent contenir une composante basses fréquences importante.

La relation entrées/ sortie du système en boucle fermée peut s'écrire en fonction du transfert de boucle  $L(p) = C(p)G(p)$  sous la forme

$$Y(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)} X(p) + \frac{1}{1 + L(p)} P(p) - \frac{L(p)}{1 + L(p)} B_m(p) \quad (6.20)$$

L'erreur de régulation s'obtient donc de manière similaire

$$E(p) = \frac{1}{1 + L(p)} X(p) - \frac{1}{1 + L(p)} P(p) + \frac{L(p)}{1 + L(p)} B_m(p) \quad (6.21)$$

On peut remarquer que, les transferts vers la sortie depuis la référence et depuis les bruits de mesures étant égales au signe près, il est impossible d'assurer simultanément un suivi parfait de référence et un rejet parfait de bruits de mesure si ces deux entrées ont le même contenu fréquentiel.

# Chapitre 7

## Synthèse de quelques correcteurs

### 7.1 Objectifs

À partir de l'équation (6.20) établie précédemment, il apparaît que le correcteur  $C(p)$  devra être choisi afin que le transfert de boucle  $L(p)$  satisfasse les contraintes suivantes.

– Un gain important en basses fréquences permet de minimiser l'erreur statique et donc d'améliorer la précision en suivi de référence constante. De plus, ce gain important en basses fréquences est utile pour rejeter les composantes basses fréquences des perturbations.

$$|L(i\omega)| \gg 1, \text{ pour } \omega \text{ petit}$$

– Un gain faible en hautes fréquences permet de minimiser l'influence des bruits de mesure en hautes fréquences.

$$|L(i\omega)| \ll 1, \text{ pour } \omega \text{ grand}$$

Empiriquement on peut également ajouter les règles suivantes.

– Pour augmenter la rapidité du système en boucle fermée il faut que la pulsation de coupure du transfert de boucle, notée  $\omega_{CBO}$  sur la figure 7.1 soit élevée.

– Pour éviter une dégradation de la robustesse, la pente de la courbe de gain doit être faible autour de la pulsation de coupure.

Pour un système  $G(p)$  donné, il reste donc à déterminer le correcteur  $C(p)$ , tel que le transfert de boucle  $L(p)$  rentre dans le gabarit représenté à la figure 7.1 qui synthétise toutes les contraintes énoncées.

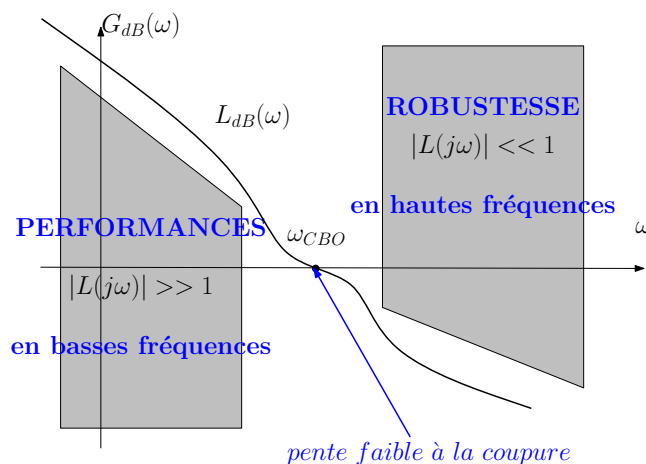


FIGURE 7.1 – Gabarit du gain du transfert de boucle.

Si le système est stable en boucle fermée et qu'il se comporte comme un système du deuxième ordre dans sa bande passante, on peut utiliser les trois règles empiriques suivantes reliant des grandeurs caractéristiques du système en boucle fermée à des grandeurs caractéristiques du système en boucle ouverte.

$$z_{BF} \approx \frac{M_\varphi^o}{100} \quad (7.1a)$$

$$\omega_{0BF} \approx \omega_{CBO} \quad (7.1b)$$

$$2 \leq \omega_{CBO} t_{rBF} \leq 3 \quad (7.1c)$$

où  $z_{BF}$  et  $\omega_{0BF}$  sont respectivement le coefficient d'amortissement et la pulsation propre du second ordre équivalent au système en boucle fermée,  $t_{rBF}$  est le temps de montée de la réponse indicielle du système en boucle fermée,  $M_\varphi^o$  est la marge de phase du transfert de boucle exprimée en degrés et  $\omega_{CBO}$  est la pulsation de coupure du transfert de boucle (c-à-d telle que  $|L(i\omega_{CBO})| = 1$ ) représentée sur la figure 7.1.

Dans la suite de ce chapitre nous étudierons le réglage des correcteurs les plus simples et répandus : P (proportionnel), PI (proportionnel intégral), PID (proportionnel intégral et dérivé), à retard ou avance de phase, en raisonnant sur le diagramme de Bode du transfert de boucle. On mentionnera également le correcteur RST ainsi que la synthèse de correcteurs par fonctions de sensibilité pour la poursuite de trajectoire.

## 7.2 Augmenter le gain : correcteur P

Le correcteur le plus simple est une commande proportionnelle à l'écart de régulation :

$$C(p) = K \quad (7.2)$$

Son diagramme de Bode est défini par  $G_{dB}(\omega) = 20\log(K)$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$  et  $\phi(\omega) = 0$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$ . La seule influence du correcteur sur le transfert de boucle est donc de traduire la courbe de gain de  $20\log(K)$ , comme sur la figure 7.2, où le diagramme de Bode du système  $G(p)$  est en pointillés bleus et celui du transfert de boucle avec  $C(p) = K$  est en rouge.

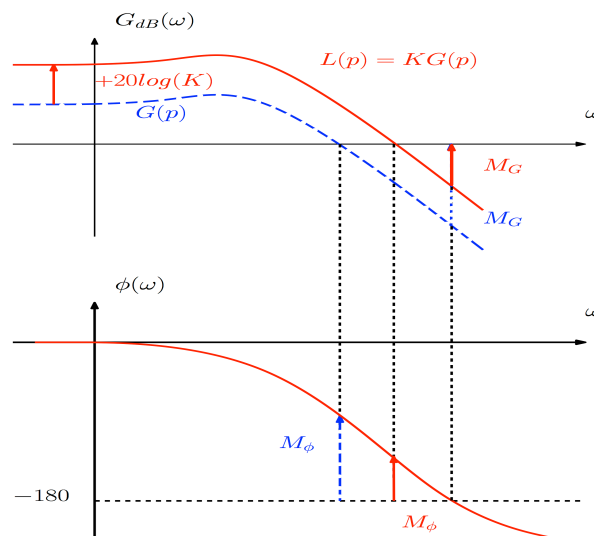


FIGURE 7.2 – Effet d'un correcteur P sur le transfert de boucle.

On observe donc les effets suivants (positifs ou négatifs) du correcteur proportionnel :

- + augmentation du gain en basses fréquences, donc meilleure précision ;
- + augmentation de la pulsation de coupure  $\omega_{CBO}$ , donc meilleure rapidité ;
- augmentation du gain en hautes fréquences, donc diminution de la marge de gain ;
- augmentation du gain en hautes fréquences, donc sensibilité aux bruits de mesure ;
- augmentation de  $\omega_{CBO}$ , donc diminution de la marge de phase, voire instabilité.

Une technique de réglage intuitive consiste donc à prendre le plus grand gain  $K$  possible garantissant la stabilité en boucle fermée et des marges de robustesse satisfaisantes.

## 7.3 Augmenter le gain en basses fréquences : correcteur à retard de phase

Pour augmenter le gain en basses fréquences sans l'augmenter en hautes fréquences on peut créer un correcteur apportant un gain  $K$  en basses fréquences et un gain égal à 1 en hautes fréquences. Sa fonction de transfert est donnée par

$$C(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + KTp}, \quad K > 1 \quad (7.3)$$

Ce type de correcteur est dit à retard de phase car, comme on peut le constater sur la gauche de la figure 7.3, il introduit une phase négative autour de l'intervalle  $\omega \in [1/KT \ 1/T]$ . Si cette déformation de la courbe de phase est placée pour  $\omega < \omega_{CBO}$  elle n'a aucune influence sur les marges de robustesse et permet d'avoir les avantages d'un correcteur P sans ses inconvénients. L'effet du correcteur à retard de phase sur le transfert de boucle est illustré à droite de la figure 7.3.

Pour résumer, les effets du correcteur à retard de phase sont :

- + augmentation du gain pour  $\omega < 1/T$ , donc meilleure précision ;
- + pas de détérioration des marges de robustesse si  $T > 1/\omega_{CBO}$  (mais pas d'amélioration non plus).

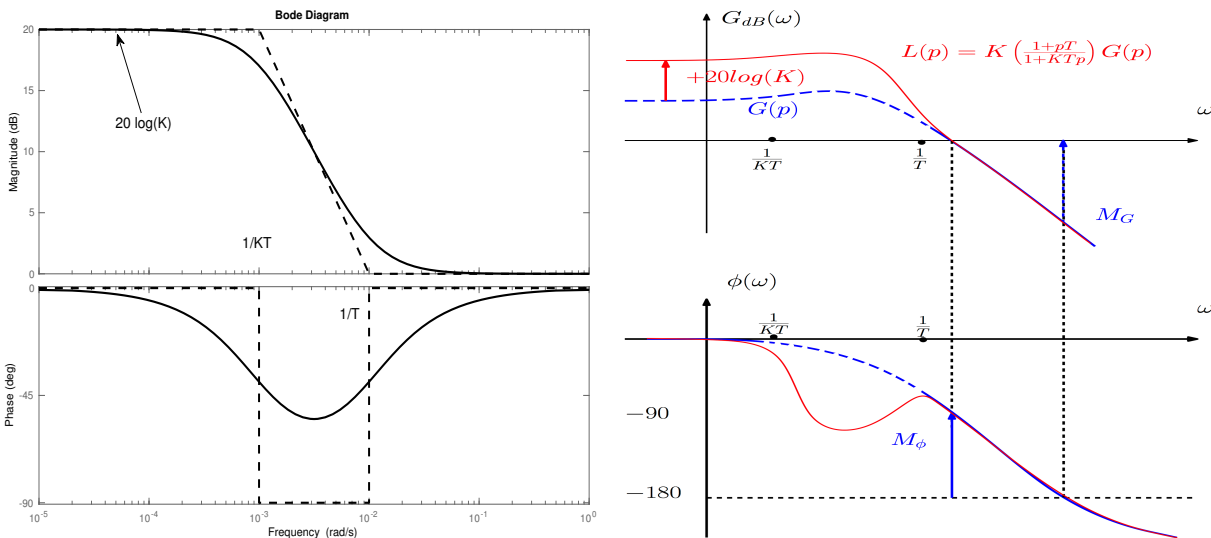


FIGURE 7.3 – Diagramme de Bode (à gauche) et effet d'un correcteur à retard de phase sur le transfert de boucle (à droite).

## 7.4 Précision statique parfaite : correcteur PI

Toujours dans l'idée d'améliorer la précision on peut ajouter un gain infini en basses fréquences avec un terme intégral. Le correcteur est alors appelé proportionnel intégral (ou PI) et sa fonction de transfert est donnée par

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) \quad (7.4)$$

Comme le montre le diagramme de Bode représenté à gauche de la figure 7.4, le terme intégral apporte un gain infini en basses fréquences et le terme proportionnel permet d'obtenir une pente du gain nulle en hautes fréquences pour ne pas dégrader la robustesse. Le gain statique infini permet d'assurer un suivi de référence constante parfait (voir la section 6.3.1). On peut constater sur la comparaison entre la courbe de gain du système  $G(p)$  et du transfert de boucle  $L(p)$  à droite de la figure 7.4 que pour une valeur raisonnable de  $K_p$  les marges de robustesse sont préservées (voire inchangées si on prend  $K_p = 1$ ).

Pour résumer, les effets du correcteur PI sont :

- + gain infini en basses fréquences, donc précision statique parfaite ;
- dégradation raisonnable de la robustesse si le gain  $K_p$  est faible ;
- réponse parfois lente.

## 7.5 Améliorer la robustesse : correcteur à avance de phase

On a constaté précédemment sur les figures 7.3 et 7.4 que les correcteurs à retard de phase ou PI s'ils permettent d'augmenter le gain en basses fréquences ont pour inconvénient d'éventuellement dégrader les marges de robustesse. Un bon réglage de ces correcteurs permet de placer la diminution de phase dans une zone où cela n'entraîne pas de diminution de la robustesse, mais on peut aller au-delà et chercher à améliorer la robustesse en augmentant la phase précisément dans la plage de pulsations où est calculée

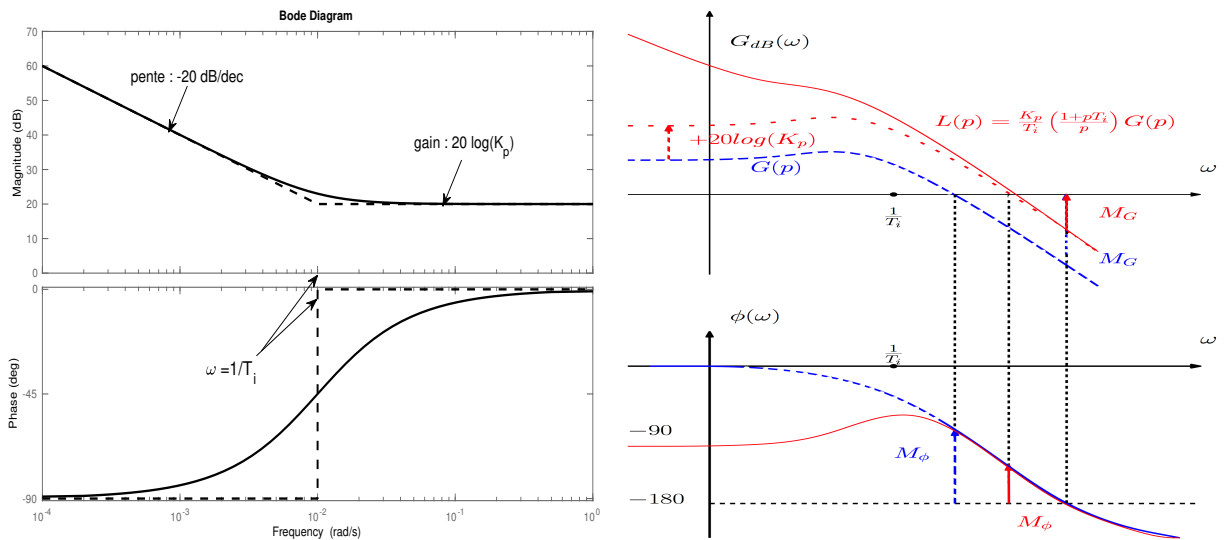


FIGURE 7.4 – Diagramme de Bode (à gauche) et effet d'un correcteur proportionnel intégral sur le transfert de boucle (à droite).



la marge de phase (la plus sensible des deux en pratique). Pour cela on peut utiliser un correcteur à avance de phase dont la fonction de transfert est donnée par

$$C(p) = K \left( \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \right), a > 1 \quad (7.5)$$

On peut montrer, qu'en la pulsation  $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{Ta}}$ , le correcteur (7.5) apporte au maximum une phase égale à

$$\phi_{max} = \arcsin \left( \frac{a - 1}{a + 1} \right) \quad (7.6)$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase est représenté à gauche de la figure 7.5 et son effet sur le transfert de boucle à droite.

Pour résumer, les effets du correcteur à avance de phase sont :

- + gain augmenté de  $K$  en basses fréquences, donc précision statique améliorée ;
- + augmentation de  $\omega_{CBO}$ , donc rapidité de la réponse en boucle fermée ;
- + augmentation de la phase autour de  $\omega_{CBO}$ , donc amélioration de la marge de robustesse ;
- gain augmenté de  $aK$  en hautes fréquences, donc sensibilité aux bruits de mesure ;
- augmentation de  $\omega_{CBO}$ , donc possible détérioration de la marge de gain.

## 7.6 Améliorer précision et robustesse : correcteur PID

Si le correcteur PI permet d'atteindre une précision statique parfaite et si le correcteur à avance de phase permet d'améliorer la robustesse, il semble naturel de chercher à combiner ces deux effets. Pour cela, on ajoute un terme dérivé au correcteur PI, qui devient PID (pour proportionnel intégral dérivé). La fonction de transfert du correcteur PID est :

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right) \quad (7.7)$$

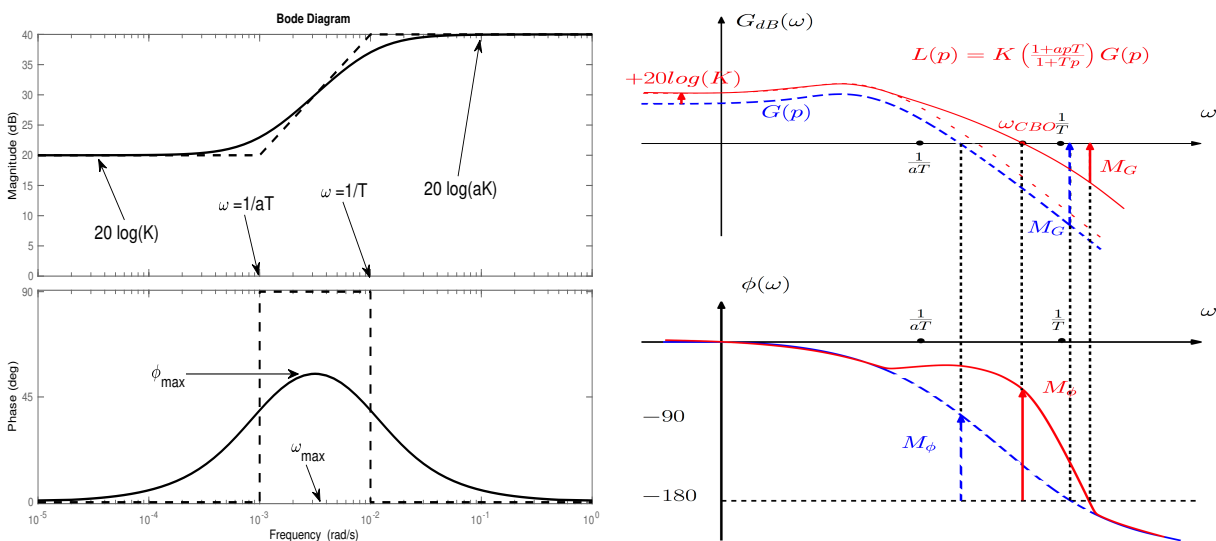


FIGURE 7.5 – Diagramme de Bode (à gauche) et effet d'un correcteur à avance de phase sur le transfert de boucle (à droite).

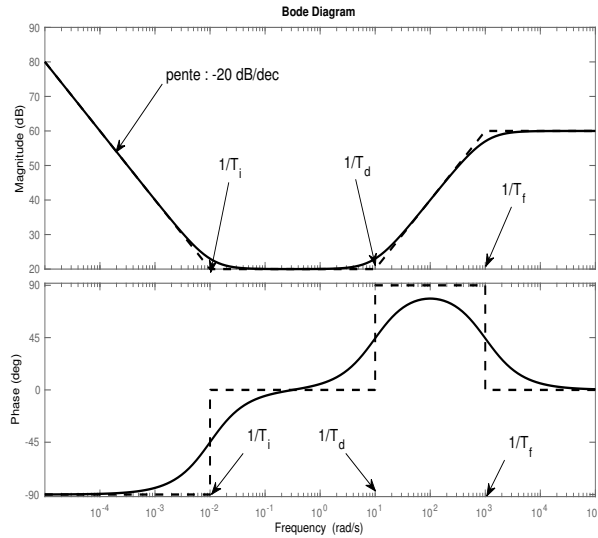


FIGURE 7.6 – Diagramme de Bode d'un correcteur PID.

Le terme dérivé  $pT_d$  n'étant pas causal, il faut ajouter un filtrage passe - bas :

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{pT_i} + pT_d \right) \frac{1}{1 + T_f p}, \quad T_f \ll T_d \quad (7.8)$$

Le diagramme de Bode d'un correcteur PID (avec filtrage) est représenté à la figure 7.6, on y reconnaît l'action d'un PI en basses fréquences (gain statique infini) et celle d'un correcteur à avance de phase en hautes fréquences (ajout de phase pour  $1/T_d < \omega < 1/T_f$ ).

Pour résumer, les effets du correcteur PID sont :

- + gain infini en basses fréquences, donc précision statique parfaite ;
- + augmentation de  $\omega_{CBO}$ , donc rapidité de la réponse en boucle fermée ;
- + augmentation de la phase entre  $1/T_d$  et  $1/T_f$ , donc meilleure marge de phase ;
- augmentation du gain en hautes fréquences, donc possible sensibilité aux bruits ;
- augmentation de  $\omega_{CBO}$ , donc possible détérioration de la marge de gain.

Le correcteur PID est depuis de nombreuses années le régulateur monovariante le plus répandu dans l'industrie. De ce fait, de nombreuses méthodes de réglages existent (voir le chapitre 4 de [1], le chapitre 7 de [2] et les chapitres 1 à 3 de [3]). Nous citerons seulement celle de Ziegler et Nichols [8] s'appliquant aux procédés stables en boucle ouverte mais dont le suivi de référence est lent et inexact. Dans ce cas, les paramètres des correcteurs P, PI, ou PID sont donnés par le tableau 7.1 en fonction de deux grandeurs relevées sur la réponse indicielle du système en boucle ouverte représentée à la figure 7.7 :  $R$  la pente de la tangente au point d'inflexion et  $L$  l'intersection de cette tangente avec l'axe horizontal.

TABLE 7.1 – Réglages de correcteurs P, PI et PID selon la méthode Ziegler - Nichols.

	P	PI	PID
$K_p$	$\frac{1}{LR}$	$\frac{0.9}{LR}$	$\frac{1.2}{LR}$
$T_i$		$3.3L$	$2L$
$T_d$			$0.5L$

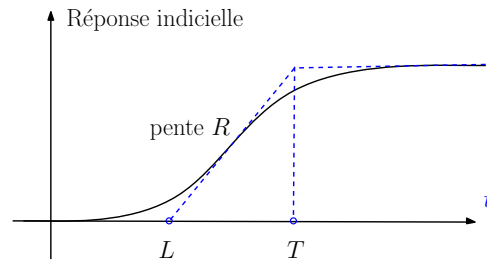


FIGURE 7.7 – Réponse indicielle en boucle ouverte du système à réguler.

## 7.7 Comparaison des résultats de quelques régulateurs

Reprenons l'exemple de la section 5.2.2. Pour rappel le système, représenté à la figure 7.8, est composé de deux réservoirs en série. L'objectif est que la hauteur du deuxième réservoir, notée  $h_2(t)$ , suive la référence  $h_{ref}$  et soit le moins sensible possible à la perturbation  $h_{pert}$  représentant la pluie tombant dans le deuxième réservoir à partir de  $t = 100$  s.

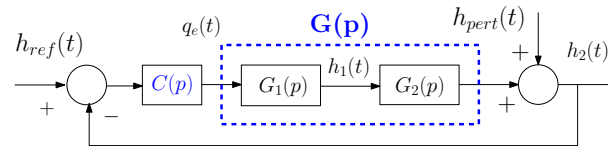


FIGURE 7.8 – Schéma bloc du système à deux réservoirs.

Tout d'abord, on utilise un régulateur P. On peut observer sur la gauche de la figure 7.9 qu'un gain faible entraîne une grande erreur statique (courbe en pointillés noirs pour  $K = 1$ ). Un gain plus grand améliore la précision mais provoque des oscillations de grandes amplitudes et des débordements indésirables (courbe noire pour  $K = 10$ ).

Pour améliorer la précision du suivi de référence sans avoir recours à un gain important, on peut utiliser un correcteur PI. On choisit ici les paramètres  $K_p = 1$  et  $T_i = 20$ . Comme on peut le constater à droite de la figure 7.9, le suivi de référence est parfait en régime statique et l'amplitude des oscillations est fortement limitée. La perturbation en sortie étant également constante, le rejet est également parfait après un transitoire. Le seul reproche à faire concerne précisément ces transitoires qui sont un peu longs.

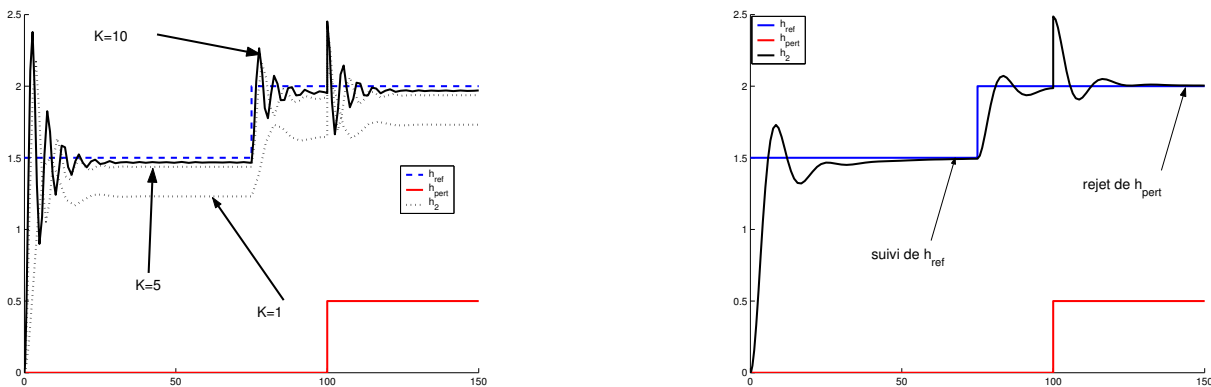


FIGURE 7.9 – Résultats de régulation avec un régulateur P (à gauche) et PI (à droite). L'entrée de référence est en bleu, l'entrée de perturbation en rouge et la sortie en noir.

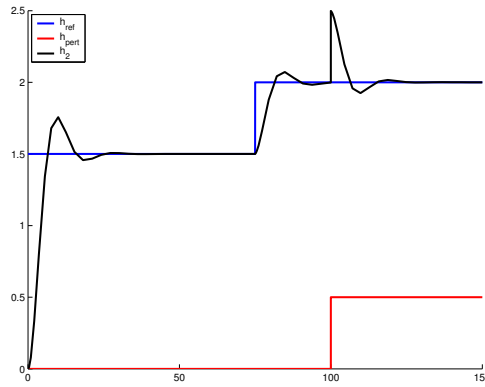


FIGURE 7.10 – Résultats de régulation des deux réservoirs avec un régulateur PID. L'entrée de référence est en bleu, l'entrée de perturbation en rouge et la sortie en noir.

Pour améliorer le transitoire de la réponse, on peut enfin ajouter un terme dérivé et utiliser un correcteur PID. Les paramètres choisis sont  $K_p = 0.9$ ,  $T_i = 12$  et  $T_d = 0.5$ . Comme on peut le constater à la figure 7.10 les transitoires des réponses en suivi de référence (après  $t = 0$  s et  $t = 75$  s) et en rejet de perturbation (après  $t = 100$  s) sont améliorés par rapport au correcteur PI, tout en conservant une précision statique parfaite.

## 7.8 Robustesse et suivi de trajectoire : correcteur RST

Les synthèses de correcteurs vues précédemment ont été effectuées essentiellement dans le domaine fréquentiel en se donnant des contraintes sur la précision statique et sur les marges de robustesse. Néanmoins, il est possible d'avoir des spécifications sur le comportement en boucle fermée dans le domaine temporel, autrement dit : chercher le correcteur tel que le système en boucle fermée satisfasse des spécifications temporelles telles qu'un temps de réponse à 5%, un dépassement maximum, etc.

Le système à piloter  $G(p)$  étant une fraction rationnelle, on note respectivement  $A(p)$  et  $B(p)$  le dénominateur et le numérateur de  $G(p)$  avec  $\deg(A(p)) = n$  et  $\deg(B(p)) = m$ . L'objectif de la synthèse du correcteur RST, représenté à la figure 7.11, est de permettre le rejet de perturbations constantes  $P(p)$  et que le suivi de  $x(t)$  par  $y(t)$  soit non seulement unitaire en régime statique, mais également que le transitoire réponde à des spécifications fixées par l'utilisateur : temps de réponse, amortissement, dépassement maximum, ... tout en maintenant des marges de robustesse minimales.

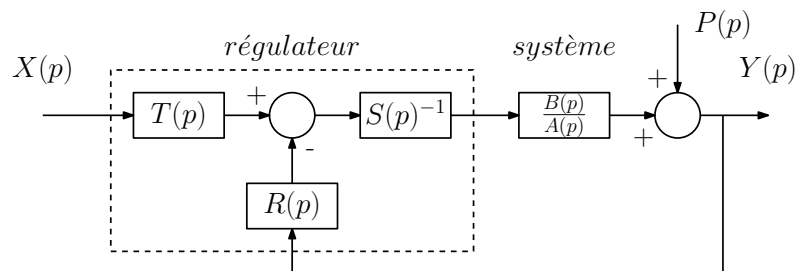


FIGURE 7.11 – Structure du correcteur RST dans une boucle de régulation.

La réponse du système en boucle fermée est

$$Y(p) = \frac{B(p)T(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)}X(p) + \frac{A(p)S(p)}{A(p)S(p) + B(p)R(p)}P(p) \quad (7.9)$$

Le rejet de perturbations constantes est assuré si et seulement si le gain statique de la fonction de transfert depuis  $P(p)$  vers  $Y(p)$  est nul. Ceci impose donc :

$$S(0) = 0 \quad (7.10)$$

De plus, le suivi unitaire de la référence  $x(t)$  impose un gain statique de la fonction de transfert de  $X(p)$  vers  $Y(p)$  égal à 1. Tenant compte de (7.10), il vient également :

$$T(0) = R(0) \quad (7.11)$$

Pour déterminer les polynômes  $R(p)$ ,  $S(p)$  et  $T(p)$ , on factorise le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme

$$A(p)S(p) + B(p)R(p) = M(p)F(p) \quad (7.12)$$

où  $M(p)$  est le dénominateur de la fonction de transfert souhaitée entre  $X(p)$  et  $Y(p)$ , également appelé polynôme de poursuite, et où  $F(p)$  est un polynôme de filtrage qui sera fixé ultérieurement pour assurer les marges de robustesse satisfaisantes (chapitre 14 de [2]).

Pour  $M(p)$  et  $F(p)$  fixés, il reste alors à résoudre l'équation de Bezout (7.12). Pour que cette équation ait une solution unique, il faut que le nombre d'équations égale celui d'inconnues. Les inconnues sont les coefficients de  $R(p)$  et  $S(p)$ . Les équations sont données par l'égalité des coefficients de chaque puissance en  $p$  des membres de droite et de gauche de (7.12). Le système et le correcteur étant causaux on a  $\deg(A(p)) \geq \deg(B(p))$  et  $\deg(S(p)) \geq \deg(R(p))$ , il vient donc

$$\deg(A(p)S(p) + B(p)R(p)) = \deg(A(p)) + \deg(S(p)) \quad (7.13)$$

Le nombre d'équations est donc :  $\deg(A(p)) + \deg(S(p)) + 1$  et, tenant compte de (7.10), le nombre d'inconnues est  $\deg(S(p)) + \deg(R(p)) + 1$ . L'équation de Bezout a une solution unique si et seulement si  $\deg(R(p)) = \deg(A(p)) = n$ . Par causalité, on fixe :  $\deg(S(p)) = \deg(R(p)) + 1 = n + 1$ . Notons

$$S(p) = s_1p + s_2p^2 + \cdots + s_np^n + s_{n+1}p^{n+1} \quad (7.14a)$$

$$R(p) = r_0 + r_1p + r_2p^2 + \cdots + r_np^n \quad (7.14b)$$

$$M(p)F(p) = d_0 + d_1p + \cdots + d_{2n+1}p^{2n+1} \quad (7.14c)$$

L'équation de Bezout (7.12) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & 0 & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \vdots & \ddots & a_n & b_m & \ddots & & 0 \\ a_0 & a_1 & & a_{n-1} & \vdots & b_m & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & \ddots & \vdots & b_0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 & 0 & b_0 & & b_m \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} s_{n+1} \\ \vdots \\ s_2 \\ s_1 \\ r_n \\ r_{n-1} \\ \vdots \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{2n+1} \\ \vdots \\ d_{n+3} \\ d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

et se résoudre par simple inversion pour finalement obtenir les coefficients des polynômes  $S(p)$  et  $R(p)$ . Enfin, on détermine  $T(p)$  pour satisfaire (7.11) par

$$T(p) = F(p) \frac{R(0)}{F(0)} \quad (7.16)$$

*Exemple 7.1.* On cherche à réguler le système représenté par la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{p + 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1.4} \quad (7.17)$$

Le cahier des charges est le suivant :

- rejet des perturbations constantes ;
- suivi de référence avec un temps de réponse à 5% de 0.5 s et un dépassement maximal de 10% ;
- marges de robustesse minimale de  $M_{GdB} = 6$  dB et  $M_\phi = 50$  deg.

Le comportement souhaité en boucle fermée donne le polynôme de poursuite définissant un système d'ordre 2 de pulsation propre  $\omega_0 = 10.86$  rad/s et de coefficient d'amortissement  $z = 0.59$ . La figure 7.12 permet de comparer la réponse indicielle du système  $G(p)$  sans correcteur et celle du comportement souhaité  $1/M(p)$  traduisant le cahier des charges. La racine du numérateur  $B(p)$  du système étant négative, on peut intégrer  $B(p)$  dans le polynôme de poursuite, autrement dit

$$M(p) = (p + 1)(0.0085p^2 + 0.11p + 1) \quad (7.18)$$

Ce faisant, la fonction de transfert en boucle fermée de  $X(p)$  vers  $Y(p)$  sera exactement  $\frac{1}{0.0085p^2 + 0.11p + 1}$ , par simplification du terme  $p + 1$  au numérateur et dénominateur.

Reste à déterminer le polynôme de filtrage. Le degré de  $F(p)$  est donné par  $\deg(F(p)) = 2\deg(A(p)) + 1 - \deg(M(p))$ , donc  $F(p)$  est de degré 4. Pour faire simple, on choisit  $F(p) = (p - p_f)^4$ , où le pôle de filtrage  $p_f$  est à trouver pour satisfaire les marges de robustesse. Pour une valeur donnée de  $p_f < 0$ ,  $F(p)$  est défini et (7.15) permet d'obtenir  $S(p)$  et  $R(p)$ . Il est alors possible de calculer les marges de robustesse de la fonction de sensibilité aux perturbations  $\frac{A(p)S(p)}{M(p)F(p)}$ . Si ces marges sont insuffisantes, on diminue  $p_f$  et

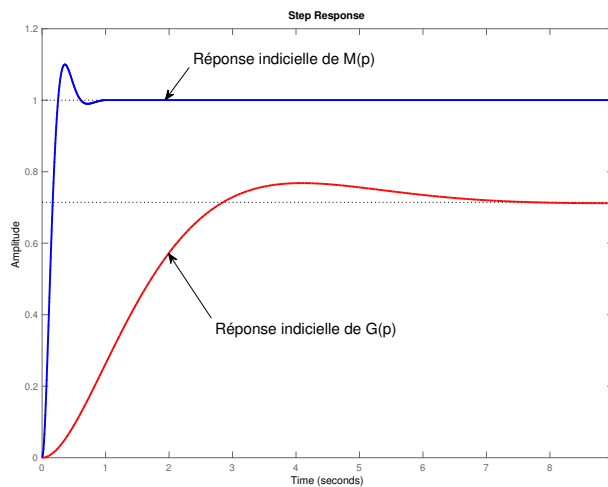


FIGURE 7.12 – Réponses indicielles du système  $G(p)$  (pointillés rouges) et du modèle à suivre  $M(p)$  en boucle fermée (bleu).

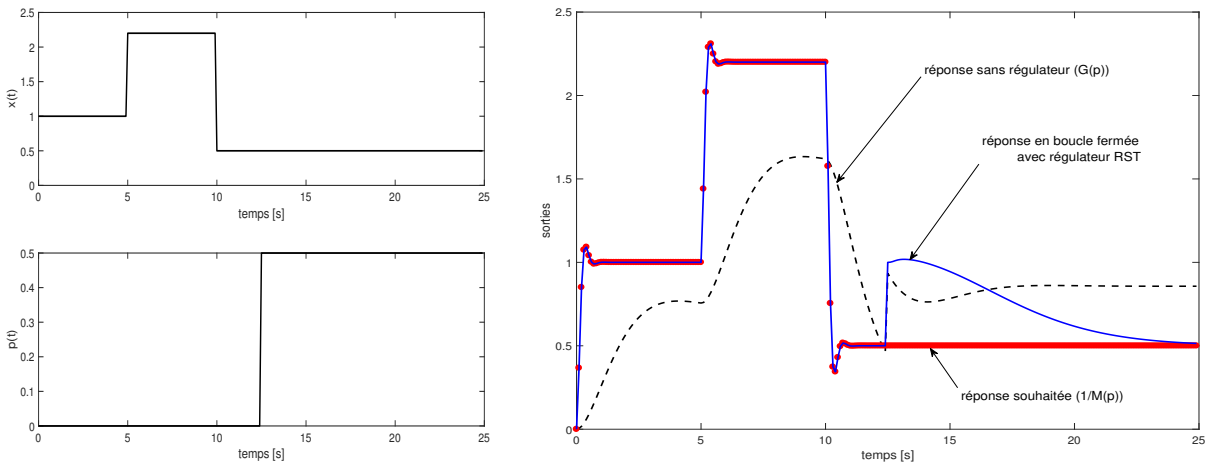


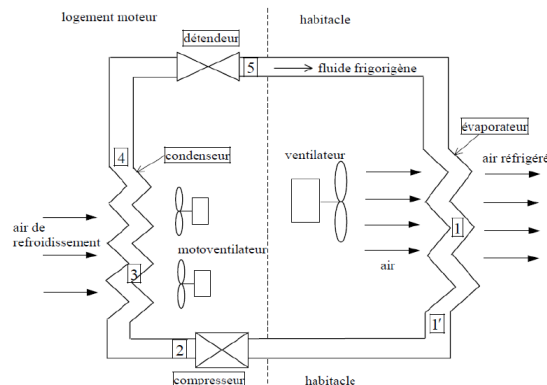
FIGURE 7.13 – Résultat de la régulation RST : entrée de référence à suivre (en haut à gauche) et perturbation à rejeter (en bas à gauche) et comparaison des sorties sans régulation (à droite, pointillés noirs), souhaitée (à droite, ronds rouges) et obtenue (à droite, ligne bleue) en boucle fermée.

on répète l'opération jusqu'à satisfaction des marges de robustesse. Ici la valeur  $p_f = -0.7$  permet de satisfaire le cahier des charges.

La figure 7.13 permet de visualiser les résultats de la régulation RST. Les entrées de référence et de perturbations sont représentées à gauche et les sorties sans régulation, souhaitée et avec régulation RST sont représentées à droite. On peut voir qu'en l'absence de perturbation (pour  $t < 12.5$  s) la réponse en boucle fermée du système régulé suit parfaitement la réponse souhaitée définie par  $1/M(p)$ . Après un certain transitoire, on voit également que la perturbation constante est correctement rejetée, malgré son amplitude importante (même ordre de grandeur que l'entrée de référence).

**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 1**  
**APPROCHE SYSTÈME**
**1. Exercice : Régulation de température dans une voiture**

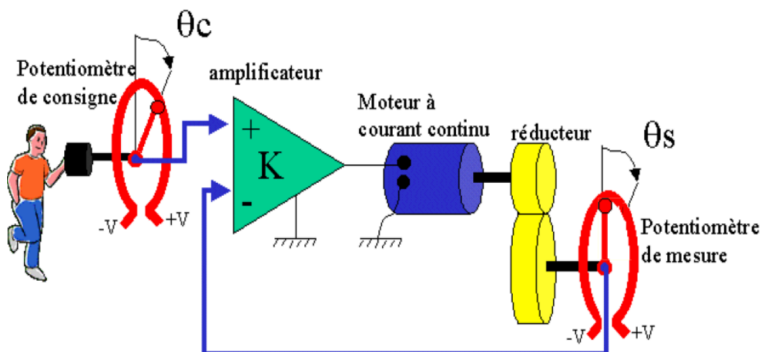
On considère un circuit de climatisation d'une voiture destiné à réguler la température de l'air à l'intérieur d'un véhicule. Comme le montre la figure ci-contre, il est constitué d'un circuit d'air pulsé par des ventilateurs et d'un circuit frigorifique (compresseur, condensateur, détendeur, évaporateur) permettant de refroidir l'air pulsé.



- Lister les grandeurs permettant de décrire la climatisation automatique d'une voiture et faire son schéma bloc simplifié.
- Comment modifier ce schéma bloc dans le cas où la climatisation est manuelle ?

**2. Exercice : Asservissement de position d'un moteur**

On considère la boucle d'asservissement de position d'un moteur à courant continu représentée ci-dessous.



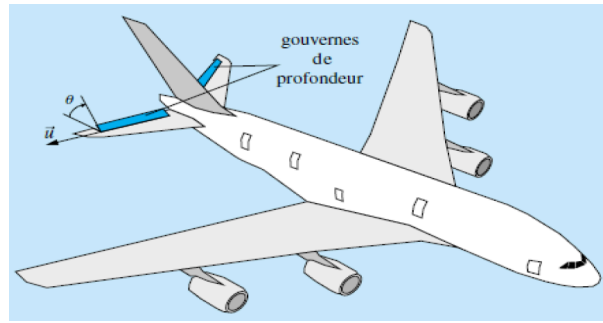
- Faire le schéma bloc correspondant.

**3. Exercice : Pilote automatique d'un avion**

On considère la boucle de régulation d'altitude d'un avion. L'altitude d'un avion est obtenue par les gouvernes de profondeur, situées à la queue de l'appareil, représenté ci-dessous. La chaîne de commande de ces gouvernes est composée des éléments suivants :

- la partie commande reçoit un signal électrique proportionnel à l'altitude  $h(t)$  de l'avion, fourni par un altimètre ;
- le signal précédent est comparé à un signal de consigne proportionnel à l'altitude  $h_c(t)$  choisie par le pilote pour former un signal d'écart  $\varepsilon(t)$  ;
- un régulateur traite cet écart et délivre un signal de commande  $u(t)$  à un actionneur électrique chargé de mouvoir les gouvernes.





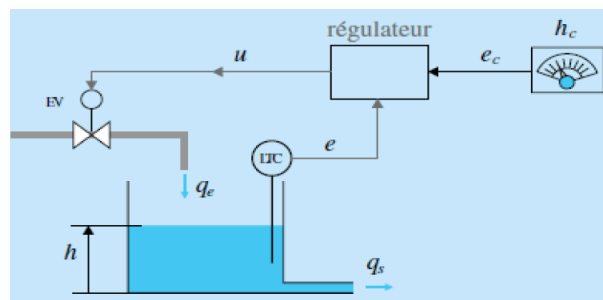
- Lister les différents éléments de la chaîne d'acquisition, de traitement et d'action de la commande d'altitude en précisant les grandeurs physiques en entrée et sortie de chacun.
- Tracer le schéma bloc décrivant la structure de l'asservissement.
- Quels éléments sont soumis à des perturbations? Quelles sont ces perturbations?

#### 4. Exercice : Régulation de niveau dans un réservoir

On s'intéresse à une cuve d'eau dont on souhaite garder le niveau de remplissage constant alors que le débit de sortie  $q_s(t)$  n'est pas contrôlé par l'opérateur.

Le dispositif étudié et représenté ci-contre comprend :

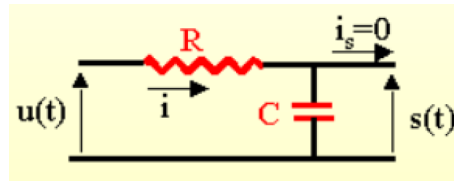
- une cuve de section constante  $S$ ;
- une électrovanne (EV) assurant un débit volumique  $q_e(t)$  proportionnel à une tension de commande  $u(t)$ ;
- un régulateur calculant la tension de commande  $u(t)$  à partir du niveau de consigne et du niveau mesuré;
- un capteur de pression délivrant une tension  $e(t)$  proportionnelle au niveau d'eau  $h(t)$ ;
- un pupitre sur lequel l'opérateur indique la consigne de niveau  $h_c(t)$  qui est traduite en une tension  $e_c(t)$ .



- Quelle est la grandeur physique régulée? Écrire l'équation régissant son évolution.
- Faire le schéma bloc du processus régulé et détailler les fonctions de transfert des différents éléments de la chaîne d'acquisition et d'action de l'asservissement.
- Le modèle précédent est-il applicable à une cuve sphérique?

#### 5. Exercice : Modélisation d'un circuit électrique

On considère le circuit RC représenté ci-dessous. La charge du condensateur est définie par :  $q(t) = Cs(t)$  où  $s(t)$  est la tension aux bornes du composant et  $C$  est la capacité électrique du condensateur. L'intensité du courant traversant le condensateur est donnée par :  $i(t) = dq(t)/dt$ .



- (a) Écrire l'équation différentielle entre  $u(t)$  et  $s(t)$ , les tensions aux bornes de l'entrée et de la sortie du circuit RC.
- (b) En déduire la fonction de transfert du système de  $U(p)$  vers  $S(p)$ .

### 6. Exercice : Modélisation d'une suspension

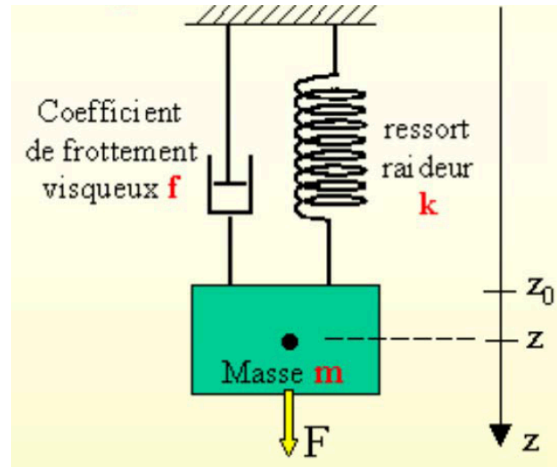
On considère la suspension représentée ci-dessus à droite. La force  $F_r$  exercée par un ressort est donnée par :

$$F_r(t) = -k(z(t) - z_0)$$

où  $z_0$  est la longueur du ressort au repos et  $k$  sa raideur. La force  $F_a$  exercée par un amortisseur est donnée par :

$$F_a(t) = -f \frac{dz(t)}{dt}$$

où  $f$  est le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur.



- (a) Écrire l'équation différentielle reliant  $F(t)$  la force exercée sur la masse  $m$  et la longueur  $z(t)$ .
- (b) En déduire la fonction de transfert du système de  $F(p)$  vers  $Z(p)$ .

**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 2**  
**TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**
**1. Exercice : Transformée de Laplace**

(a) Démontrer que  $\mathcal{L}(x(t - \tau)) = e^{-\tau p} X(p)$  et calculez la T.L. de :

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq T \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Déterminez la T.L. de  $x(t) = t^2$ .

(c) Démontrez que  $\mathcal{L}(e^{-at}x(t)) = X(p + a)$  et déterminez la T.L. de  $x(t) = e^{-at}t^n$ .

(d) Déterminez la T.L.  $x(t) = e^{-t+7}\Gamma(t - 7)$ .

**2. Exercice : Transformée de Laplace inverse**

Calculer le signal temporel (donc la transformée de Laplace inverse) correspondant à la fonction de la variable de Laplace suivante :

$$F(p) = \frac{(p + 1)e^{-7p}}{p^2(p + 5)}$$

**3. Exercice : fonction de transfert**

Donner la fonction de transfert du système dont la réponse à un échelon est :

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

**4. Exercice : fonction de transfert, réponse temporelle**

Dans chaque cas, déterminer la fonction de transfert  $H(p) = Y(p)/X(p)$  et la réponse  $y(t)$ .

(a)  $\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$ , avec  $y(0) = 2$  et  $x(t) = e^{-t}$

(b)  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + x(t)$ , avec  $\dot{y}(0) = y(0) = 0$  et  $x(t) = e^{-3t}$

(c)  $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ , avec  $\dot{y}(0) = y(0) = 0$  et  $x(t) = e^{-2t}$

(d)  $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ , avec  $\dot{y}(0) = y(0) = 0$  et  $x(t) = 1$

**5. Exercice : fonction de transfert, réponse temporelle**

On considère un système, d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$ , représenté par :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad y(0) = 0$$

(a) Donner la fonction de transfert du système, notée  $G(p)$ , telle que  $Y(p) = G(p)X(p)$ .

(b) En utilisant le théorème de la valeur initiale, donner la valeur de la pente de la tangente à l'origine de la réponse indicielle de  $G(p)$ .

(c) Calculer la réponse indicielle de  $G(p)$ , et vérifier le résultat précédent.

**6. Exercice : étude d'un thermomètre**

Un thermomètre est modélisé par un système du premier ordre, de constante de temps de 5 s. Il est placé dans un bain dont la température, initialement égale à  $\theta_0$ , augmente d'un degré par seconde. Quelle est l'erreur de mesure en régime établi ?

**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 3**  
**LINÉARISATION ET SCHÉMA-BLOCS**
**1. Exercice : modélisation d'un réservoir**

On considère un réservoir de section  $S$ . Les débits d'entrée et de sortie sont notés respectivement  $q_e(t)$  et  $q_s(t)$ . Le débit  $q_s(t)$  est lié à la hauteur de liquide dans le réservoir, notée  $h(t)$ , par :

$$q_s(t) = k\sqrt{h(t)}$$

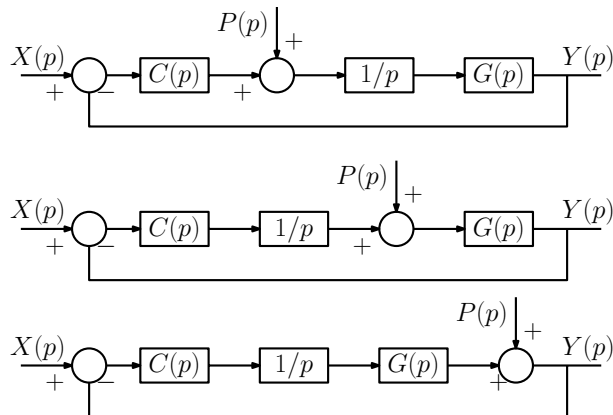
- En écrivant le bilan de matière dans le réservoir, établir l'équation non linéaire modélisant le comportement du système.
- Écrire la relation en régime établi quand l'alimentation est constante  $q_e(t) = q_{e0}$ .
- On envisage des petites variations autour d'une position d'équilibre. On pose alors, pour toutes les grandeurs,  $x = x_0 + \delta x$ , où  $x_0$  est la valeur à l'équilibre, et  $\delta x$  la variation autour de cette valeur. En linéarisant la relation différentielle autour d'un point d'équilibre, donner la fonction de transfert entre  $\delta q_e$  et  $\delta q_s$ .
- Le débit entrant augmente de  $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Au bout de combien de temps le débit sortant augmente de  $0.099 \text{ m}^3/\text{s}$ ? La section du réservoir et la hauteur de liquide à l'équilibre sont données par :  $k = \sqrt{2g}$ ,  $S = 100 \text{ m}^2$ , et  $h_0 = 10 \text{ m}$ .

**2. Influence d'une perturbation**

On considère un système  $G(p)$  dont on veut réguler la position en le commandant en vitesse avec le correcteur  $C(p)$ . Le système est dans un environnement perturbé, il faut donc envisager différents cas possibles suivant où la perturbation  $p(t)$  agit : sur la commande en vitesse, sur la commande en position, sur la sortie. On considère des entrées constantes :  $x(t) = x_0$ ,  $p(t) = p_0$  et les fonctions de transfert sont définies ci-dessous par :

$$C(p) = \frac{1}{1 + T_c p} \quad G(p) = \frac{3}{1 + T_g p}$$

Dans chacun des cas représentés à la figure ci-dessous, donnez l'erreur statique définie par :  $e_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - y(t))$ .



**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 4**  
**IDENTIFICATION**
**1. Identification d'un système à partir de sa réponse temporelle**

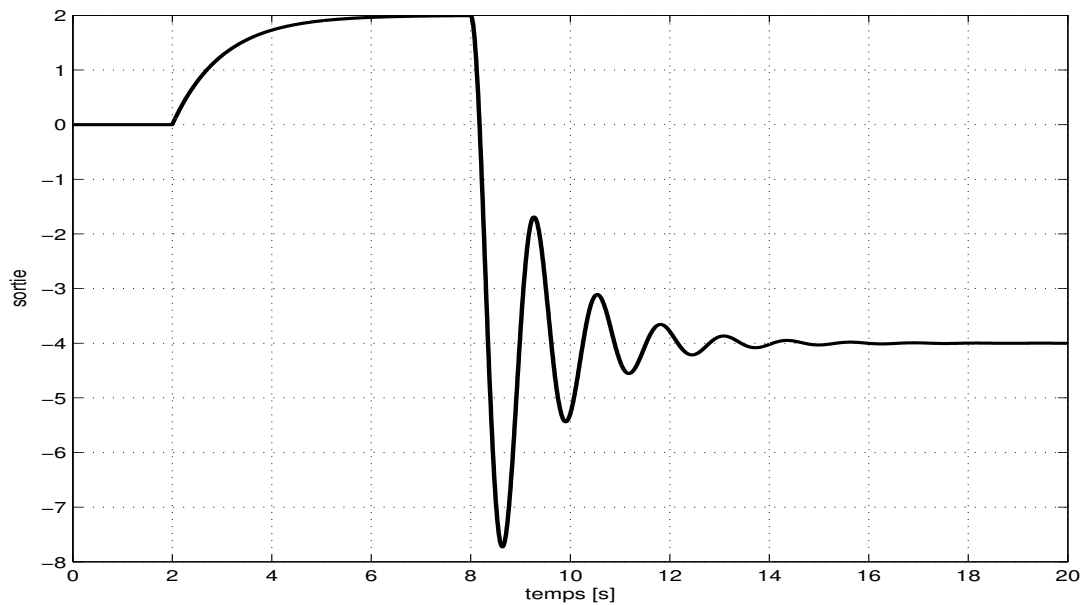
On considère le système à deux entrées et une sortie décrit par :

$$Y(p) = H_1(p)X_1(p) + H_2(p)X_2(p)$$

Afin de déterminer les paramètres des fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$ , on fait un relevé de la sortie  $y(t)$  pour les entrées définies par :

$$x_1(t) = \Gamma(t - 2) \quad \text{et} \quad x_2(t) = 2\Gamma(t - 8)$$

L'évolution de la sortie est représentée à la figure ci-dessous.



- (a) Quel est l'ordre de chacune des fonctions de transfert ?
- (b) Déterminer les valeurs des différents paramètres de  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$ .
- (c) Tracer les diagrammes de Bode des deux fonctions de transfert identifiées.

**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 5**  
**APPROCHE FRÉQUENTIELLE, DIAGRAMMES DE BODE**
**1. Exercice : réponse fréquentielle d'un système**

On considère le système décrit par la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{p+1}$$

- Tracer le diagramme de Bode de  $G(p)$ , quelle est sa bande passante à  $-3 \text{ dB}$
- Quelle est la réponse du système à l'entrée  $x_1(t) = \sin(10t)$
- Quelle est la réponse du système à l'entrée  $x_2(t) = \sin(0.1t)$
- Quelle est la réponse du système à l'entrée  $x_3(t) = 2\sin(10t) + 4\sin(0.1t)$

**2. Diagramme de Bode**

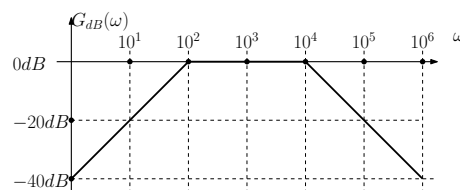
On considère la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{10(10p+1)^2}{p(100p+1)}$$

- Tracez le diagramme de Bode (Gain en dB et phase) de  $H(p)$ .
- Donnez la réponse établie de  $H(p)$  à l'entrée  $x(t) = \sin(0.001t) + \sin(10t)$ .
- Qu'appelle-t-on la bande passante à  $x \text{ dB}$  ?
- Donnez la bande passante de  $H(p)$  à  $60 \text{ dB}$ .

**3. Synthèse d'une prothèse auditive**

La bande passante de l'oreille humaine se situe, dans le meilleur des cas, de  $20 \text{ Hz}$  à  $20 \text{ kHz}$ . Afin de créer une prothèse auditive, on cherche à reproduire le comportement fréquentiel d'une oreille, donc le diagramme de gain de Bode est donné à la figure ci-dessous.



- Quelle est la fonction de transfert qui a cette réponse fréquentielle en gain. Tracer son diagramme de phase.
- Quelle est la réponse de ce système à l'entrée  $x(t) = \sin(t) + 2\sin(1000t) + 3\sin(100000t)$  ?

**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 6**  
**AMÉLIORATION DES PERFORMANCES EN BOUCLE FERMÉE.**
**1. Exercice : étude d'une climatisation**

On modélise une climatisation par

$$\begin{aligned}
 100\dot{\theta}(t) + \theta(t) &= W(t) + 0.2\theta_{ext}(t) && \text{(pièce)} \\
 W(t) &= K(\theta_{ref}(t) - \theta_m(t)) && \text{(climatisation)} \\
 \dot{\theta}_m(t) + \theta_m(t) &= \theta(t) && \text{(capteur)}
 \end{aligned}$$

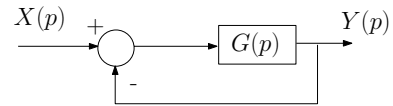
où  $\theta(t)$  est la température dans l'enceinte climatisée,  $\theta_{ref}(t)$  est la température donnée par l'utilisateur,  $\theta_{ext}(t)$  est la température extérieure,  $W(t)$  est la puissance de chauffe ou de refroidissement et  $\theta_m(t)$  est la mesure de température donnée par le capteur. Toutes ces grandeurs désignent des variations autour d'un point d'équilibre. On suppose par la suite que la condition initiale coïncide avec le point d'équilibre.

- (a) Faire le schéma blocs du système. Donner la fonction de transfert  $H_{ref}(p)$  entre  $\theta_{ref}(t)$  et  $\theta(t)$  ainsi que  $H_e(p)$  la fonction de transfert entre  $\theta_{ext}(t)$  et  $\theta(t)$ .
- (b) Donner la valeur finale de  $\theta(t)$  pour une variation de consigne  $\theta_{ref}(t) = 5$  en fonction de  $K$ .
- (c) Donner la valeur finale de  $\theta(t)$  pour une variation de la température extérieure  $\theta_{ext}(t) = 5$  en fonction de  $K$ .
- (d) On désire que  $\theta(t)$  soit proche de  $\theta_{ref}(t)$ , que l'influence de  $\theta_{ext}(t)$  soit la plus faible possible et enfin que la température dans la pièce n'oscille pas quand  $\theta_{ref}(t)$  et  $\theta_{ext}(t)$  sont constants. Comment choisir le gain  $K$  ?
- (e) On fixe  $K = 24$ , la température extérieure diminue de 5 degrés et la référence augmente de 5 degrés. En régime établi, quelle est la variation de la température dans la pièce ?
- (f) Comment rendre la température dans la pièce indépendante de la température extérieure, y compris en régime transitoire ?

**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 7**  
**ROBUSTESSE ET BOUCLE FERMÉE**
**1. Exercice : marge de robustesse et précision en BF**

On considère le système représenté ci-contre avec :

$$G(p) = \frac{10}{p(1 + 0.01p)}$$



- (a) Quelles sont les marges de phase et de gain de  $G(p)$ ? Quel effet aurait un régulateur proportionnel sur ces marges? Peut-on déstabiliser le système par un mauvais choix de ce régulateur?
- (b) Quelle est l'erreur en position lorsque l'entrée est donnée par  $x(t) = \Gamma(t)$ ?
- (c) Quelle est l'erreur en vitesse lorsque l'entrée est donnée par  $x(t) = t$ ? Comment évolue cette erreur en fonction du gain d'un correcteur proportionnel?

**2. Exercice : marge de robustesse et spécifications temporelles en BF**

On considère le système suivant :

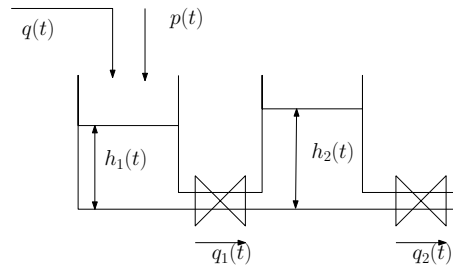
$$G(p) = \frac{4}{p(1 + \frac{p}{2})(1 + \frac{p}{8})}$$

- (a) Tracer le diagramme de Bode de  $G(p)$ .
- (b) Quelles sont les marges de phase et de gain du système? Que peut-on conclure quant à sa stabilité en boucle fermée (avec retour et correcteur unitaires)?
- (c) Si on se contente de boucler le système avec un correcteur proportionnel unitaire, quels sont le temps de montée et le dépassement approximatifs?
- (d) Quel gain choisir pour le correcteur pour obtenir une réponse en boucle fermée sans dépassement?



**CONTRÔLE DE SYSTÈMES LINÉAIRES - T.D. 8**  
**RÉGLAGES DE CORRECTEURS**
**1. Exercice : régulation proportionnelle de niveau**

On considère deux réservoirs d'eau, de section identique  $S$  (en  $m^2$ ). Le débit  $q_1$  est proportionnel à la différence de hauteur d'eau entre les deux réservoirs :  $q_1(t) = R_1(h_1(t) - h_2(t))$  et le débit  $q_2$  est proportionnel à la hauteur d'eau dans le deuxième réservoir :  $q_2(t) = R_2 h_2(t)$ . Le système est alimenté par un débit  $q(t)$  (en  $m^3/s$ ), contrôlé par l'opérateur du réseau de distribution d'eau. Le système est perturbé par le débit  $p(t)$  (en  $m^3/s$ ) représentant les infiltrations ou la pluie tombant dans le premier réservoir.



Dans un premier temps on étudie le système en boucle ouverte, avec  $q(t) = q_0$  et  $p(t) = p_0$ .

- Écrire les équations décrivant le système et donner les valeurs des hauteurs à l'équilibre. Par la suite on notera  $\delta x(t)$  les variations de  $x(t)$  autour de sa valeur à l'équilibre  $x_0$ .
- Écrire la fonction de transfert entre  $\delta p(t)$  et  $\delta h_2(t)$
- On suppose que  $p(t)$  augmente brutalement de 1, quelle est l'allure de l'évolution de  $\delta h_2(t)$  (valeur finale, dépassement, etc.) ?

On étudie à présent le système en boucle fermée avec :

$$\delta q(t) = K_C(h_{20} - h_2(t)) = -K_C \delta h_2(t)$$

- Écrire les équations du système en boucle fermée.
- Quelle est à présent la fonction de transfert entre  $\delta p(t)$  et  $\delta h_2(t)$  ?
- Comment fixer  $K_C$  pour minimiser l'influence en régime établi de  $\delta p(t)$  sur  $\delta h_2(t)$ , tout en évitant les oscillations ?

**2. Exercice : synthèse d'un correcteur proportionnel-intégral**

On considère le système défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2}{(1 + 2p) \left(1 + \frac{p}{63} + \frac{p^2}{3969}\right)}$$

Le cahier des charges pour le système, une fois corrigé, est : erreur statique nulle, dépassement inférieur à 10% et temps de montée minimal.

- Quelle est la réponse indicielle du système en boucle ouverte sans correcteur ? Le système satisfait-il le cahier des charges ?
- Quel correcteur choisir ?
- Déterminer les paramètres du correcteur répondant au CdC.

### 3. Exercice : synthèse d'un correcteur à avance de phase

On considère le système défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2}{1 + 0.18p + 0.01p^2}$$

L'objectif de synthèse du correcteur  $C(p)$  est que le système corrigé satisfasse les caractéristiques suivantes : temps de montée inférieur à 0.05 s et dépassement inférieur à 10% (pas de contrainte sur l'erreur statique).

- Le système  $H(p)$  en boucle ouverte satisfait-il le cahier des charges ?
- Le système en boucle fermée avec un correcteur proportionnel de gain unitaire satisfait-il le cahier des charges ? Quelles sont les marges de robustesse de ce système ?
- En utilisant les formules empiriques BO/BF, quelles caractéristiques doit avoir le transfert de boucle  $L(p) = H(p)C(p)$  ( $z_{BF}$ ,  $\omega_{CBO}$ ,  $M_\phi^o$ ) ?
- Un correcteur proportionnel suffit-il ? Sinon, mis à part du gain, que doit apporter le correcteur ?
- On considère le correcteur à avance de phase défini par :

$$C(p) = K_c \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \quad \text{avec } a > 1$$

Tracez le diagramme de Bode de  $C(p)$ .

- On peut montrer que pour  $K_c = 1$ , le lieu de Nyquist de  $C(p)$  est un demi cercle de centre  $z_0 = (a + 1)/2$  et de rayon  $r = (a - 1)/2$  et en déduire que le déphasage maximal apporté par  $C(p)$ , noté  $\Phi_{max}$ , est donné par :

$$\sin(\Phi_{max}) = \frac{a - 1}{a + 1}$$

On peut également montrer que ce déphasage maximal est obtenu en la pulsation  $\omega_\Phi = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ .

Calculez les valeurs de  $a$ ,  $T$  et  $K_c$  du correcteur répondant au CdC.

# Bibliographie

- [1] J.P. Corriou, *Commande des Procédés*, Lavoisier (Tec & Doc), 1996
- [2] P. de Larminat, *Automatique - Commande des Systèmes Linéaires*, Hermès, 1993.
- [3] J.M. Flaus, *La Régulation Industrielle*, Hermès, 1994.
- [4] D. Ichalal, B. Marx, D. Maquin, J. Ragot, Observer Design for State and Clinker Hardness Estimation in Cement Mill, IFAC Workshop in the Mining, Mineral and Metal Industries (IFAC MMM), 2012.
- [5] L. Ljung, *System Identification. Theory for the User*, Prentice-Hall, 1987.
- [6] A.M. Nagy Kiss, B. Marx, G. Mourot, J. Ragot, State estimation for nonlinear system diagnosis using multiple models. Application to wastewater treatment plants, Annual Conference of the European Safety and Reliability Association, (ESREL), 2011.
- [7] A.M. Nagy Kiss, B. Marx, G. Mourot, G. Schutz, J. Ragot, Observer design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant, *Journal of Process Control*, Vol. 21(7), pp. 1105-1114, 2011.
- [8] J.G. Ziegler et N.B. Nichols, Optimum Settings for Automatic Controllers, *Transactions of ASME*, Vol. 64, pp. 759-768, 1942.

Ce support de cours est à destination exclusive des étudiants inscrits à l'ENSGSI.  
**La reproduction à des fins pédagogiques hors ENSGSI en est interdite.**  
Toute demande devra être adressée à l'ENSGSI, qui transmettra à l'auteur