

Approche multimodèle pour l'estimation et la tolérance aux fautes

Marx

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 CNRS - Université de Lorraine



Introduction aux multimodèles

- Introduction intuitive des MM

- Tentative de classification des MM

- Comment obtenir un MM ?

Stabilité, contrôle, observation de MM

- Principe de base

- Quelques raffinements

Estimation d'état de MM

- Principe de base

- Estimation des MM à VPNM

- Estimation conjointe état / paramètres

- Quelques remarques

Tolérance aux défauts

- Suivi de référence malgré un défaut

- Retour de sortie malgré une commande saturée

Conclusion

Section 1

Introduction aux multimodèles

Introduction aux multimodèles

- Introduction intuitive des MM

- Tentative de classification des MM

- Comment obtenir un MM ?

Stabilité, contrôle, observation de MM

Estimation d'état de MM

Tolérance aux défauts

Conclusion

- **Objectif :**

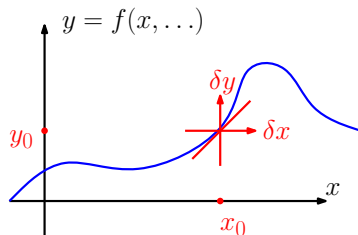
manipuler un **système non linéaire** : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

avec des méthodes proches de celles des **systèmes linéaires**

► **Objectif :**

manipuler un **système non linéaire** : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
avec des méthodes proches de celles des **systèmes linéaires**

► **Linéarisation autour d'un point d'équilibre**



$$\Rightarrow \delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t)$$

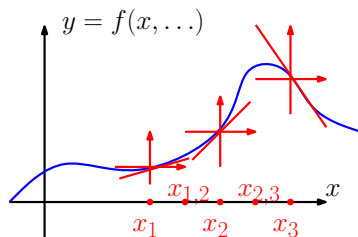
Modèle LTI :

- + simple
- approximation
- local

► Objectif :

manipuler un **système non linéaire** : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
avec des méthodes proches de celles des **systèmes linéaires**

► Linéarisation autour de plusieurs points et commutation



$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A_{\sigma} x(t) + B_{\sigma} u(t) + f_i$$

avec $\sigma = i$ pour $x_{i-1,i} < x < x_{i,i+1}$

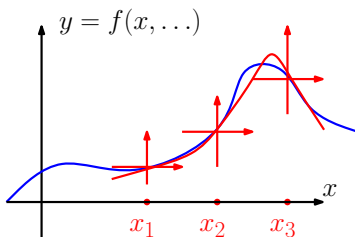
Modèle commuté :

- + global
- non linéaire
- approximation

► Objectif :

manipuler un **système non linéaire** : $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
avec des méthodes proches de celles des **systèmes linéaires**

► Linéarisation autour de plusieurs points et pondération



$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t) + f_i)$$

avec $\mu_i(x) \simeq \text{dist}(x, x_i)$

Multimodèle :

- + global
- non linéaire
- ? approximation

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

r nombre de sous-modèles (A_i, B_i) sous-modèle

μ_i fonction d'activation z variable de prémisse

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

r nombre de sous-modèles (A_i, B_i) sous-modèle

μ_i fonction d'activation z variable de prémisse

- Variables de prémisse (VP)
 - connues (entrée u , sortie y)
 - inconnues (état x , défaut)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

r nombre de sous-modèles (A_i, B_i) sous-modèle

μ_i fonction d'activation z variable de prémisse

- ▶ **Variables de prémisse (VP)**
 - ▶ connues (entrée u , sortie y)
 - ▶ inconnues (état x , défaut)
- ▶ **Fonctions d'activation (FA)** vérifiant les propriétés de somme convexe
 - ▶ positivité : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$
 - ▶ somme unitaire : $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

r nombre de sous-modèles (A_i, B_i) sous-modèle

μ_i fonction d'activation z variable de prémisse

- ▶ **Variables de prémisse (VP)**
 - ▶ connues (entrée u , sortie y)
 - ▶ inconnues (état x , défaut)
- ▶ **Fonctions d'activation (FA)** vérifiant les propriétés de somme convexe
 - ▶ positivité : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$
 - ▶ somme unitaire : $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$
- ▶ Liens avec d'autres modèles
 - ▶ Si $\mu_i(z(t)) \in \{0; 1\}$ → systèmes linéaires commutés (discret)
 - ▶ $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i \simeq A(\theta(t))$ → systèmes LPV

- Espace d'état commun à tous les sous-modèles : $x(t) \in \mathbb{R}^n$
modèle polytopique, homogène, de Takagi-Sugeno¹

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

1. Takagi, Sugeno, Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 15, 116-132, 1985.

2. Filev, Fuzzy modeling of complex systems, *Int. J. of Approximate Reasoning*, 5(3), 281-290, 1991

- Espace d'état commun à tous les sous-modèles : $x(t) \in \mathbb{R}^n$
modèle polytopique, homogène, de Takagi-Sugeno¹

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

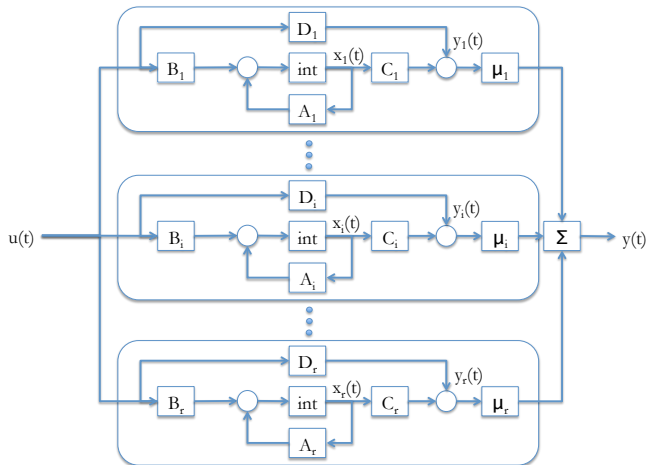
- Espaces d'état distincts propres à chaque sous-modèle : $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$
multimodèles découplés²

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) y_i(t) \end{cases}$$

1. Takagi, Sugeno, Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 15, 116-132, 1985.

2. Filev, Fuzzy modeling of complex systems, *Int. J. of Approximate Reasoning*, 5(3), 281-290, 1991

Structure des multimodèles découplés



- ▶ un vecteur d'état $x_i(t)$ par sous-modèle (A_i, B_i, C_i, D_i)
- ▶ interpolation des équations statiques de sortie : $y(t) = \sum_i \mu_i(z(t)) y_i(t)$

Les variables de prémisse $z(t)$ dépendant

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée $u(t)$, sortie $y(t)$, etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état $x(t)$, etc

Les variables de prémisse $z(t)$ dépendant

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée $u(t)$, sortie $y(t)$, etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état $x(t)$, etc

Le cas de variable de prémisse non mesurables

- ▶ est plus complexe, par exemple pour l'estimation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_i \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_i \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \end{cases}$$

Les variables de prémisses $z(t)$ dépendant

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée $u(t)$, sortie $y(t)$, etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état $x(t)$, etc

Le cas de variable de prémisses non mesurables

- ▶ est plus complexe, par exemple pour l'estimation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_i \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_i \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t))) \end{cases}$$

- ▶ donc moins étudié

Les variables de prémisses $z(t)$ dépendant

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée $u(t)$, sortie $y(t)$, etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état $x(t)$, etc

Le cas de variable de prémisses non mesurables

- ▶ est plus complexe, par exemple pour l'estimation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_i \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_i \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t))) \end{cases}$$

- ▶ donc moins étudié
- ▶ bien que naturel (cf exemple précédent : $\mu_i(x) \simeq \text{dist}(x, x_i)$)

- ▶ **Basé données : identification**^{3 4}
 - ▶ **données** : entrées / sorties
 - ▶ **choisir** : la structure du MM (découplé / TS), les VP ($z(t)$), les FA (μ_i), ...
 - ▶ **résolution** : minimisation non linéaire de l'erreur de modélisation

3. Gasso, Mourot, Ragot, Prédiction des maxima journaliers d'ozone, approche multimodèle, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39 (4), p. 513-532, 2005

4. Orjuela, Marx, Maquin, Ragot. Nonlinear system identification using heterogeneous multiple models, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 23 (1), 2013

5. Tanaka, Wang, *Fuzzy Control System Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, 2001

- ▶ **Basé données : identification**^{3 4}
 - ▶ **données** : entrées / sorties
 - ▶ **choisir** : la structure du MM (découplé / TS), les VP ($z(t)$), les FA (μ_i), ...
 - ▶ **résolution** : minimisation non linéaire de l'erreur de modélisation
- ▶ **Basé modèle : linéarisations en plusieurs points**
 - ▶ **données** : le modèle non linéaire
 - ▶ **choisir** : les points de linéarisation et les fonctions d'activation
 - ▶ **résolution** : **approximation** par développements de Taylor du modèle

3. Gasso, Mourot, Ragot, Prédiction des maxima journaliers d'ozone, approche multimodèle, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39 (4), p. 513-532, 2005

4. Orjuela, Marx, Maquin, Ragot. Nonlinear system identification using heterogeneous multiple models, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 23 (1), 2013

5. Tanaka, Wang, *Fuzzy Control System Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, 2001

- ▶ **Basé données : identification**^{3 4}
 - ▶ **données** : entrées / sorties
 - ▶ **choisir** : la structure du MM (découplé / TS), les VP ($z(t)$), les FA (μ_i), ...
 - ▶ **résolution** : minimisation non linéaire de l'erreur de modélisation
- ▶ **Basé modèle : linéarisations en plusieurs points**
 - ▶ **données** : le modèle non linéaire
 - ▶ **choisir** : les points de linéarisation et les fonctions d'activation
 - ▶ **résolution** : **approximation** par développements de Taylor du modèle
- ▶ **Basé modèle : ré-écriture polytopique**⁵
 - ▶ **données** : le modèle non linéaire
 - ▶ **hypothèses** : non-linéarités bornées ou $x(t)$ dans à un compact de $\mathbb{R}^n$
 - ▶ **résolution** : ré-écriture MM **exacte** des équations du modèle

3. Gasso, Mourot, Ragot, Prédiction des maxima journaliers d'ozone, approche multimodèle, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39 (4), p. 513-532, 2005

4. Orjuela, Marx, Maquin, Ragot. Nonlinear system identification using heterogeneous multiple models, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 23 (1), 2013

5. Tanaka, Wang, *Fuzzy Control System Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, 2001

- ▶ **Basé données : identification**^{3 4}
 - ▶ **données** : entrées / sorties
 - ▶ **choisir** : la structure du MM (découplé / TS), les VP ($z(t)$), les FA (μ_i), ...
 - ▶ **résolution** : minimisation non linéaire de l'erreur de modélisation

- ▶ **Basé modèle : linéarisations en plusieurs points**
 - ▶ **données** : le modèle non linéaire
 - ▶ **choisir** : les points de linéarisation et les fonctions d'activation
 - ▶ **résolution** : **approximation** par développements de Taylor du modèle

- ▶ **Basé modèle : ré-écriture polytopique**⁵
 - ▶ **données** : le modèle non linéaire
 - ▶ **hypothèses** : non-linéarités bornées ou $x(t)$ dans à un compact de $\mathbb{R}^n$
 - ▶ **résolution** : ré-écriture MM **exacte** des équations du modèle

3. Gasso, Mourot, Ragot, Prédiction des maxima journaliers d'ozone, approche multimodèle, *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 39 (4), p. 513-532, 2005

4. Orjuela, Marx, Maquin, Ragot. Nonlinear system identification using heterogeneous multiple models, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 23 (1), 2013

5. Tanaka, Wang, *Fuzzy Control System Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, 2001

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

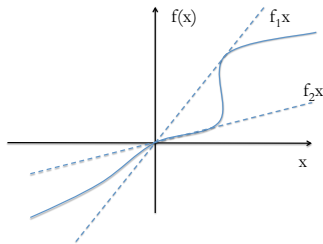
Transformation polytopique

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes f_1 et f_2 telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



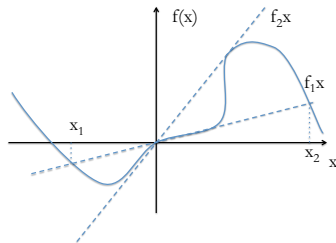
Transformation polytopique

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes f_1 et f_2 telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



(ou au moins localement pour $x_1 \leq x(t) \leq x_2$)

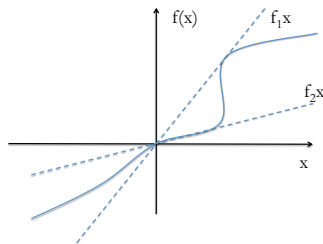
Transformation polytopique

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes f_1 et f_2 telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- ▶ On peut alors écrire :

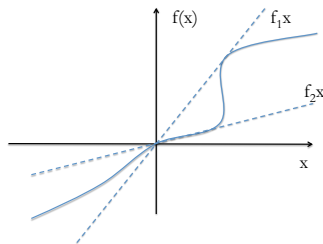
$$\dot{x}(t) = \left(\frac{f(x)/x - f_2}{f_1 - f_2} \right) f_1 x(t) + \left(\frac{f_1 - f(x)/x}{f_1 - f_2} \right) f_2 x(t)$$

- On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- Il est possible de trouver des bornes f_1 et f_2 telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- On peut alors écrire :

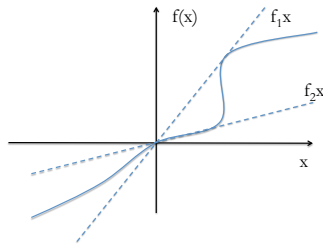
$$\dot{x}(t) = \underbrace{\left(\frac{f(x)/x - f_2}{f_1 - f_2} \right)}_{\mu_1(x)} \underbrace{f_1}_{A_1} x(t) + \underbrace{\left(\frac{f_1 - f(x)/x}{f_1 - f_2} \right)}_{\mu_2(x)} \underbrace{f_2}_{A_2} x(t)$$

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes f_1 et f_2 telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- ▶ On peut alors écrire :

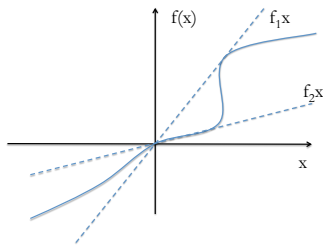
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) A_i x(t)$$

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes f_1 et f_2 telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- ▶ **Pour résumer :**

$$\underbrace{\dot{x} = f(x, u)}_{SNL} \Rightarrow \underbrace{\dot{x} = A(x, u)x + B(x, u)u}_{qLPV} \Rightarrow \underbrace{\dot{x} = \sum_i \mu_i (A_i x + B_i u)}_{T-S}$$

Transformation polytopique : exemple

- Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- On choisit la VP : $z(t) = (\sin(x(t))u(t))/(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

Transformation polytopique : exemple

- ▶ Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- ▶ On choisit la VP : $z(t) = (\sin(x(t))u(t))/(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = (-0.5 + \mu_1(z(t))(1) + \mu_2(z(t))(-1)) x(t)$$

Transformation polytopique : exemple

- Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- On choisit la VP : $z(t) = (\sin(x(t))u(t))/(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- Le système devient

$$\dot{x}(t) = (\mu_1(z(t))(0.5) + \mu_2(z(t))(-1.5)) x(t)$$

Transformation polytopique : exemple

- Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- On choisit la VP : $z(t) = (\sin(x(t))u(t))/(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- Le système devient

$$\dot{x}(t) = (\mu_1(z(t))(0.5) + \mu_2(z(t))(-1.5)) x(t)$$

- On a un MM :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$A_1 = 0.5 \quad A_2 = -1.5 \quad B_1 = B_2 = 0$$

Transformation polytopique : exemple

- ▶ Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- ▶ On choisit la VP : $z(t) = (\sin(x(t))u(t))/(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = (\mu_1(z(t))(0.5) + \mu_2(z(t))(-1.5)) x(t)$$

- ▶ On a un MM :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$A_1 = 0.5 \quad A_2 = -1.5 \quad B_1 = B_2 = 0$$

- ▶ **système instable** ($A_1 > 0$)
sous-modèles non commandable ($B_i = 0$)

Transformation polytopique : exemple

- Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- On choisit comme VP : $z(t) = \sin(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

Transformation polytopique : exemple

- Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- On choisit comme VP : $z(t) = \sin(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- Le système devient

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + (\mu_1(z(t))(1) + \mu_2(z(t))(-1)) u(t)$$

Transformation polytopique : exemple

- ▶ Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- ▶ On choisit comme VP : $z(t) = \sin(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + (\mu_1(z(t))(1) + \mu_2(z(t))(-1)) u(t)$$

- ▶ On a un MM :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$A_1 = A_2 = -0.5 \quad B_1 = 1 \quad B_2 = -1$$

Transformation polytopique : exemple

- Un système non linéaire à entrée saturée :

$$\dot{x}(t) = -0.5x + \sin(x(t))u(t), \text{ avec } -1 \leq u(t) \leq 1$$

- On choisit comme VP : $z(t) = \sin(x(t)) \in [-1 \ 1]$.

$$z(t) = \underbrace{\left(\frac{z(t) - (-1)}{2}\right)}_{\mu_1(z(t))}(1) + \underbrace{\left(\frac{1 - z(t)}{2}\right)}_{\mu_2(z(t))}(-1)$$

- Le système devient

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + (\mu_1(z(t))(1) + \mu_2(z(t))(-1)) u(t)$$

- On a un MM :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

$$A_1 = A_2 = -0.5 \quad B_1 = 1 \quad B_2 = -1$$

- **système stable** ($\exists P > 0$ t.q. $PA_i + (PA_i)^T < 0$)
sous-modèles commandables

- le choix des variables de décision n'est pas unique ;
- les variables d'état apparaissent souvent dans les variables de décision ;
- nombre de sous-modèles : $r = 2^{n_z}$, où n_z est le nombre de VP ;

6. Nagy, Mourot, Marx, Ragot, Schutz, Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46(6), 2790-2799, 2010

- le choix des variables de décision n'est pas unique ;
- les variables d'état apparaissent souvent dans les variables de décision ;
- nombre de sous-modèles : $r = 2^{n_z}$, où n_z est le nombre de VP ;
- + la TP est toujours possible, au moins sur un compact de l'espace d'état.
- + la TP est une ré-écriture **exacte** du modèle non linéaire ;

- le choix des variables de décision n'est pas unique ;
- les variables d'état apparaissent souvent dans les variables de décision ;
- nombre de sous-modèles : $r = 2^{n_z}$, où n_z est le nombre de VP ;
- + la TP est toujours possible, au moins sur un compact de l'espace d'état.
- + la TP est une ré-écriture **exacte** du modèle non linéaire ;
- +/- ré-écritures exactes -donc équivalentes- donnant des résultats différents⁶.

6. Nagy, Mourot, Marx, Ragot, Schutz, Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46(6), 2790-2799, 2010

Section 2

Stabilité, contrôle, observation de MM

Introduction aux multimodèles

Stabilité, contrôle, observation de MM

Principe de base

Quelques raffinements

Estimation d'état de MM

Tolérance aux défauts

Conclusion

► **Objectif :**

stabiliser le MM :
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec le retour d'état :
$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$$

► **Objectif :**

stabiliser le MM :
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec le retour d'état :
$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$$

► **Démarche :**

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$

$$\text{stabilisation} \Leftrightarrow \dot{V}(x(t)) < 0$$

► **Objectif :**

stabiliser le MM : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$

avec le retour d'état : $u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$

► **Démarche :**

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$

$$x^T \left(P \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (A_i + B_i F_j) + (\dots)^T \right) x < 0$$

► **Objectif :**

stabiliser le MM :
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec le retour d'état :
$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$$

► **Démarche :**

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left(x^T \left(P(A_i + B_i F_j) + (A_i + B_i F_j)^T P \right) x \right) < 0$$

► **Objectif :**

stabiliser le MM : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$

avec le retour d'état : $u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$

► **Démarche :**

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$
- convexité et positivité des FA : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \left(x^T \left(P(A_i + B_i F_j) + (A_i + B_i F_j)^T P \right) x \right) < 0$$

► **Objectif :**

stabiliser le MM :
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec le retour d'état :
$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$$

► **Démarche :**

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$
- convexité et positivité des FA : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$
- inégalités matricielles sur les sommets A_i, B_i .

$$P(A_i + B_i F_j) + (A_i + B_i F_j)^T P < 0, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

► Objectif :

stabiliser le MM :
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec le retour d'état :
$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$$

► Démarche :

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$
- convexité et positivité des FA : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$
- inégalités matricielles sur les sommets A_i, B_i .
- congruence, changements de variables, ... $\rightarrow$ LMI

$$(A_i + B_i F_j) X + X (A_i + B_i F_j)^T < 0, \text{ avec } X = P^{-1}$$

► Objectif :

stabiliser le MM : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$

avec le retour d'état : $u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$

► Démarche :

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$
- convexité et positivité des FA : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$
- inégalités matricielles sur les sommets A_i, B_i .
- congruence, changements de variables, ... $\rightarrow$ LMI

$$(A_i X + B_i \tilde{F}_j) + (A_i X + B_i \tilde{F}_j)^T < 0, \text{ avec } \tilde{F}_j = F_j X$$

► **Objectif :**

stabiliser le MM :
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

avec le retour d'état :
$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_j(z(t)) F_i x(t)$$

► **Démarche :**

- fonction de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$, où $P > 0$
- convexité et positivité des FA : $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$
- inégalités matricielles sur les sommets A_i, B_i .
- congruence, changements de variables, ... $\rightarrow$ LMI

► **Solution : conditions suffisantes LMI**

$\rightarrow u(t)$ stabilise le MM **si** il existe $X = X^T > 0$ et $\tilde{F}_i$ t.q., pour $1 \leq i, j \leq r$

$$(A_i X + B_i \tilde{F}_j) + (A_i X + B_i \tilde{F}_j)^T < 0, \text{ et } F_i = \tilde{F}_i X^{-1}$$

Quelques remarques :

+ même démarche pour :

- estimation d'état : $\dot{V}(x(t) - \hat{x}(t)) < 0$
- gain $\mathcal{L}_2$ borné : $\dot{V}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$
- taux de décroissance : $\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0$

Quelques remarques :

- + même démarche pour :

- estimation d'état : $\dot{V}(x(t) - \hat{x}(t)) < 0$

- gain $\mathcal{L}_2$ borné : $\dot{V}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$

- taux de décroissance : $\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0$

- + outils linéaires (LMI) pour systèmes non linéaires

- + solution constructive

Quelques remarques :

- + même démarche pour :

- estimation d'état : $\dot{V}(x(t) - \hat{x}(t)) < 0$

- gain $\mathcal{L}_2$ borné : $\dot{V}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$

- taux de décroissance : $\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0$

- + outils linéaires (LMI) pour systèmes non linéaires

- + solution constructive

- dépend uniquement des sommets

- nombre de LMI polynomial en r

- conditions suffisantes $\rightarrow$ conservatisme

- Fonction polyquadratique⁷

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) x^T(t) P_i x(t)$$

7. Tanaka, Hori, Wang, A Multiple Lyapunov Function Approach to Stabilization of Fuzzy Control Systems, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 11(4), 582-589, 2003

8. Guerra, Vermeiren, LMI-based relaxed non quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form, *Automatica*, 40, 823-829, 2004

9. Kruszewski, Wang, Guerra., Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete-time TS fuzzy models : A new approach, *IEEE Tr. Automatic Control*, 53(2), 606 -611, 2008

- Fonction polyquadratique⁷

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) x^T(t) P_i x(t)$$

- Fonction non quadratique⁸

$$V(x(t)) = x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x(t)$$

7. Tanaka, Hori, Wang, A Multiple Lyapunov Function Approach to Stabilization of Fuzzy Control Systems, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 11(4), 582-589, 2003

8. Guerra, Vermeiren, LMI-based relaxed non quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form, *Automatica*, 40, 823-829, 2004

9. Kruszewski, Wang, Guerra., Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete-time TS fuzzy models : A new approach, *IEEE Tr. Automatic Control*, 53(2), 606 -611, 2008

- Fonction polyquadratique⁷

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) x^T(t) P_i x(t)$$

- Fonction non quadratique⁸

$$V(x(t)) = x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) P_i \right)^{-1} x(t)$$

- Cas discret : calculer la $\Delta V(x(t))$ entre deux instants non consécutifs⁹

$$\Delta_k V(x(t)) = V(x(t+k)) - V(x(t))$$

7. Tanaka, Hori, Wang, A Multiple Lyapunov Function Approach to Stabilization of Fuzzy Control Systems, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 11(4), 582-589, 2003

8. Guerra, Vermeiren, LMI-based relaxed non quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form, *Automatica*, 40, 823-829, 2004

9. Kruszewski, Wang, Guerra., Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete-time TS fuzzy models : A new approach, *IEEE Tr. Automatic Control*, 53(2), 606-611, 2008

- Factorisation des termes en $\mu_i \mu_j$ ^{10 11}

$$\frac{1}{r-1} M_{ii} + \frac{1}{2} (M_{ij} + M_{ji}) < 0$$

10. Tanaka, Ikeda, Wang, Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 6(2), 250-265, 1998

11. Tuan, Apkarian, Narikiyo et Yamamoto, Parameterized Linear Matrix Inequality Techniques in Fuzzy Control System Design, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 9(2), 324-332, 2001

12. Sala, Arino, Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 2671-2686, 2007

13. F. Delmotte, Guerra, Ksantini, Continuous Takagi-Sugeno's models : reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 426-438, 2007

Quelques raffinements : mieux que $M_{ij} < 0 \Rightarrow \sum_i \sum_j M_{ij} < 0$

- Factorisation des termes en $\mu_i \mu_j$ ^{10 11}

$$\frac{1}{r-1} M_{ii} + \frac{1}{2} (M_{ij} + M_{ji}) < 0$$

- Idem, mais après multiplication par $(\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)))^p$ ¹²

10. Tanaka, Ikeda, Wang, Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 6(2), 250-265, 1998

11. Tuan, Apkarian, Narikiyo et Yamamoto, Parameterized Linear Matrix Inequality Techniques in Fuzzy Control System Design, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 9(2), 324-332, 2001

12. Sala, Arino, Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 2671-2686, 2007

13. F. Delmotte, Guerra, Ksantini, Continuous Takagi-Sugeno's models : reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 426-438, 2007

Quelques raffinements : mieux que $M_{ij} < 0 \Rightarrow \sum_i \sum_j M_{ij} < 0$

- ▶ Factorisation des termes en $\mu_i \mu_j$ ^{10 11}

$$\frac{1}{r-1} M_{ii} + \frac{1}{2} (M_{ij} + M_{ji}) < 0$$

- ▶ Idem, mais après multiplication par $(\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)))^p$ ¹²
- ▶ Ajout de variables LMI supplémentaires pour découpler A_i et P_j ¹³
(comme en switché (de Oliveira et. al., 1999) ou (Daafouz et. al., 2002))

10. Tanaka, Ikeda, Wang, Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 6(2), 250-265, 1998

11. Tuan, Apkarian, Narikiyo et Yamamoto, Parameterized Linear Matrix Inequality Techniques in Fuzzy Control System Design, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 9(2), 324-332, 2001

12. Sala, Arino, Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya's theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, 158, 2671-2686, 2007

13. F. Delmotte, Guerra, Ksantini, Continuous Takagi-Sugeno's models : reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 426-438, 2007

- Concaténation de relations dynamiques et statiques¹⁴

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}u(t) \\ y(t) = C_{\mu}x(t) + D_{\mu}u(t) \\ u(t) = K_{\mu}y(t) \end{cases}$$

14. K. Tanaka, Ohtake, Wang, A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 333-341, 2007

15. Mozelli, Palhares, Souza, Mendes, A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences*, 179, 1149-1162, 2009

- Concaténation de relations dynamiques et statiques¹⁴

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \\ u(t) = K_\mu y(t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu & B_\mu & 0 \\ 0 & -I & K_\mu \\ C_\mu & D_\mu & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } V(t) = \bar{x}^T(t) P E \bar{x}(t) = x^T(t) P_{11} x(t)$$

14. K. Tanaka, Ohtake, Wang, A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 333-341, 2007

15. Mozelli, Palhares, Souza, Mendes, A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences*, 179, 1149-1162, 2009

- Concaténation de relations dynamiques et statiques¹⁴

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \\ u(t) = K_\mu y(t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu & B_\mu & 0 \\ 0 & -I & K_\mu \\ C_\mu & D_\mu & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } V(t) = \bar{x}^T(t) P E \bar{x}(t) = x^T(t) P_{11} x(t)$$

- Augmentation de l'état par sa dérivée¹⁵

$$0 > \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}}_{=\dot{V}(x(t))} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

14. K. Tanaka, Ohtake, Wang, A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 333-341, 2007

15. Mozelli, Palhares, Souza, Mendes, A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences*, 179, 1149-1162, 2009

- Concaténation de relations dynamiques et statiques¹⁴

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \\ u(t) = K_\mu y(t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu & B_\mu & 0 \\ 0 & -I & K_\mu \\ C_\mu & D_\mu & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } V(t) = \bar{x}^T(t) P E \bar{x}(t) = x^T(t) P_{11} x(t)$$

- Augmentation de l'état par sa dérivée¹⁵

$$0 > \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}^T \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}}_{=\dot{V}(x(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A_\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A_\mu^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T \end{bmatrix}}_{=0} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

14. K. Tanaka, Ohtake, Wang, A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 333-341, 2007

15. Mozelli, Palhares, Souza, Mendes, A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences*, 179, 1149-1162, 2009

- Concaténation de relations dynamiques et statiques¹⁴

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \\ u(t) = K_\mu y(t) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_E \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu & B_\mu & 0 \\ 0 & -I & K_\mu \\ C_\mu & D_\mu & -I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } V(t) = \bar{x}^T(t) P E \bar{x}(t) = x^T(t) P_{11} x(t)$$

- Augmentation de l'état par sa dérivée¹⁵

$$0 > \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}^T \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}}_{=\dot{V}(x(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A_\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A_\mu^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T \end{bmatrix}}_{=0} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

- introduire des **degrés de liberté**
- découpler / linéariser** K_i et P_i

14. K. Tanaka, Ohtake, Wang, A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Tr. Fuzzy Systems*, 15(3), 333-341, 2007

15. Mozelli, Palhares, Souza, Mendes, A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences*, 179, 1149-1162, 2009

Section 3

Estimation d'état de MM

Introduction aux multimodèles

Stabilité, contrôle, observation de MM

Estimation d'état de MM

- Principe de base

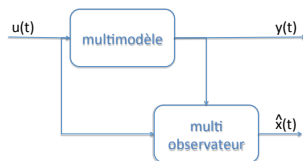
- Estimation des MM à VPNM

- Estimation conjointe état / paramètres

- Quelques remarques

Tolérance aux défauts

Conclusion

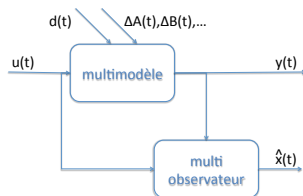


► Objectif :

- reconstruire l'état du système $x(t)$
- connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(D_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

Estimation d'état : principe de base



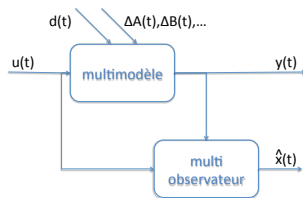
► Objectif :

- reconstruire l'état du système $x(t)$
- connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i \Delta B_i(t))u(t) + F_i d(t) \dots) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) ((C_i + \Delta C_i(t))x(t) + (D_i \Delta D_i(t))u(t) + G_i d(t) \dots) \end{cases}$$

► Difficultés habituelles :

- perturbations, incertitudes de modèle, entrées inconnues



► **Objectif :**

- reconstruire l'état du système $x(t)$
- connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

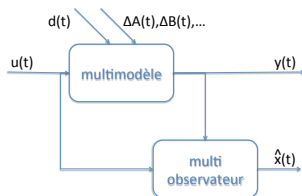
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

► **Difficultés habituelles :**

- perturbations, incertitudes de modèle, entrées inconnues

► **Difficultés propres aux MM :**

- variables de décision non mesurables (VDNM)



► **Objectif :**

- reconstruire l'état du système $x(t)$
- connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

► **Difficultés habituelles :**

- perturbations, incertitudes de modèle, entrées inconnues

► **Difficultés propres aux MM :**

- variables de décision non mesurables (VDNM)

► **Méthode :**

- fonction de Lyapunov de $e = (x - \hat{x})$ et écriture LMI

- ▶ MM à observer, avec $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶ MM à observer, avec $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶ Un multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y})) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

gains L_i à trouver afin que $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$

- ▶ MM à observer, avec $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶ Un multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y})) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

gains L_i à trouver afin que $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$

- ▶ Erreur d'estimation $e(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i - L_i C_j) e(t)$$

- ▶ MM à observer, avec $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶ Un multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y})) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

gains L_i à trouver afin que $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$

- ▶ Erreur d'estimation $e(t) = (x(t) - \hat{x}(t))$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i - L_i C_j) e(t)$$

- ▶ Conditions suffisantes à la décroissance de $V(e(t)) = e^T(t) P e(t)$

$$(P A_i + \bar{L}_i C_j) + (P A_i + \bar{L}_i C_j)^T < 0, \text{ pour } 1 \leq i, j \leq r$$

$$L_i = P^{-1} \bar{L}_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq r$$

- ▶ MM dont les FA dépendent de l'état $x(t)$ (fréquent lorsque le MM est obtenu par transformation polytopique)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \text{ où } X_{\mu} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))X_i$$

- ▶ MM dont les FA dépendent de l'état $x(t)$ (fréquent lorsque le MM est obtenu par transformation polytopique)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \text{ où } X_{\mu} = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))X_i$$

- ▶ L'état est inconnu pour les FA de l'observateur
→ on utilise l'estimée de l'état au lieu de l'état

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \text{ où } X_{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))X_i$$

- ▶ MM dont les FA dépendent de l'état $x(t)$ (fréquent lorsque le MM est obtenu par transformation polytopique)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \text{ où } X_{\mu} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t))X_i$$

- ▶ L'état est inconnu pour les FA de l'observateur
→ on utilise l'estimée de l'état au lieu de l'état

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}, \text{ où } X_{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\mathbf{x}}(t))X_i$$

- ▶ Écrire l'erreur d'estimation sous une forme exploitable

- Pour faciliter l'écriture de $e(t)$, on ré-écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}}x(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Pour faciliter l'écriture de $e(t)$, on ré-écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_{\mu} - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des **incertitudes**

$$X_{\mu} - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- Pour faciliter l'écriture de $e(t)$, on ré-écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}}x(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_{\mu} - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des **incertitudes**

$$X_{\mu} - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- On a donc

$$\begin{aligned} A_{\mu} - A_{\hat{\mu}} &= \Delta A(t) = M^A \Sigma^A(t) N^A \\ B_{\mu} - B_{\hat{\mu}} &= \Delta B(t) = M^B \Sigma^B(t) N^B \end{aligned}$$

- Pour faciliter l'écriture de $e(t)$, on ré-écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_{\mu} - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des **incertitudes**

$$X_{\mu} - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- On a donc

$$\begin{aligned} A_{\mu} - A_{\hat{\mu}} &= \Delta A(t) = M^A \Sigma^A(t) N^A \\ B_{\mu} - B_{\hat{\mu}} &= \Delta B(t) = M^B \Sigma^B(t) N^B \end{aligned}$$

- Comme $0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1$ et $0 \leq \mu_i(\hat{x}(t)) \leq 1$, il vient :

$$(\Sigma^A(t))^T \Sigma^A(t) \leq I \quad \text{et} \quad (\Sigma^B(t))^T \Sigma^B(t) \leq I$$

- Le problème d'estimation de MM à VDNM, se ramène à celui d'un MM **incertain** avec des **variables de décision mesurables**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_{\hat{\mu}} + \Delta A(t))x(t) + (B_{\hat{\mu}} + \Delta B(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

par l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- Le problème d'estimation de MM à VDNM, se ramène à celui d'un MM **incertain** avec des **variables de décision mesurables**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_{\hat{\mu}} + \Delta A(t))x(t) + (B_{\hat{\mu}} + \Delta B(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

par l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- On peut écrire le système augmenté :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C & \Delta A(t) \\ 0 & A_{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta B(t) \\ B_{\mu} \end{pmatrix} u(t)$$

- ▶ Le problème d'estimation de MM à VDNM, se ramène à celui d'un MM **incertain** avec des **variables de décision mesurables**

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_{\hat{\mu}} + \Delta A(t))x(t) + (B_{\hat{\mu}} + \Delta B(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

par l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- ▶ On peut écrire le système augmenté :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C & \Delta A(t) \\ 0 & A_{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta B(t) \\ B_{\mu} \end{pmatrix} u(t)$$

- ▶ Et chercher les L_i qui minimisent le gain $\mathcal{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.

- Fonction de Lyapunov de $e(t)$ et $x(t)$

$$V(e, x) = e^T(t)P_1 e(t) + x^T(t)P_2 x(t)$$

avec $P_1 = P_1 > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$

- Gain $\mathcal{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$ borné si

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_{\hat{\mu}} - P_1 L_{\hat{\mu}} C) + I & P_1 \Delta A(t) & P_1 \Delta B(t) \\ (P_1 \Delta A(t))^T & \mathbb{S}(P_2 A_{\mu}) & P_2 B_{\mu} \\ (P_1 \Delta B(t))^T & (P_2 B_{\mu})^T & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0$$

- Fonction de Lyapunov de $e(t)$ et $x(t)$

$$V(e, x) = e^T(t) P_1 e(t) + x^T(t) P_2 x(t)$$

avec $P_1 = P_1 > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$

- Gain $\mathcal{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$ borné si

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_{\hat{\mu}} - P_1 L_{\hat{\mu}} C) + I & P_1 \Delta A(t) & P_1 \Delta B(t) \\ (P_1 \Delta A(t))^T & \mathbb{S}(P_2 A_{\mu}) & P_2 B_{\mu} \\ (P_1 \Delta B(t))^T & (P_2 B_{\mu})^T & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0$$

- Manipulations pour avoir des conditions suffisantes LMI :

→ séparer partie certaine / incertaine ($\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$)

→ majoration par : pour $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I$ et $\lambda > 0$

$$X^T \Delta^T(t) Y + Y^T \Delta(t) X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y$$

→ complément de Schur

→ changement de variables $\bar{L}_i = P_1 L_i$

→ positivité des FA

Synthèse de multiobservateur pour MM à VDNM¹⁶

$$\text{Système MM à VDNM : } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\text{Multi-observateur : } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état vérifie : $\int_0^{\infty} e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{\infty} u^T(t)u(t)dt$
 s'il existe $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, λ^A , λ^B et $\bar{L}_i$ minimisant γ^2 s.c.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - \bar{L}_i C) + I & 0 & 0 & P_1 M_i^A & P_1 M_i^B \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_i) + N^{AT} \lambda^A N^A & P_2 B_i & 0 & 0 \\ 0 & (P_2 B_i)^T & N^{BT} \lambda^B N^B - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ (P_1 M_i^A)^T & 0 & 0 & -\lambda^A I & 0 \\ (P_1 M_i^B)^T & 0 & 0 & 0 & -\lambda^B I \end{pmatrix} < 0$$

pour $i = 1, \dots, r$. Les gains de l'observateur sont donnés par : $L_i = P_1^{-1} \bar{L}_i$.

16. Ichalal, Marx, Ragot, Maquin, State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables, *IET Control Theory and Applications*, 4(5), 897-908, 2010

Cette approche se généralise

- ▶ MM à VDNM avec incertitudes / entrées inconnues additives

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

17. Nagy-Kiss, Marx, Mourot, Schutz, Ragot, State estimation of two-time scale multiple models. Application to wastewater treatment plant, *Control Engineering Practice*, 19(11), 1354-1362, 2011

18. Nagy-Kiss, Marx, Mourot, Schutz, Ragot, Observer design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant, *Journal of Process Control*, 21(7), 1105-1114, 2011

Cette approche se généralise

- ▶ MM à VPM avec incertitudes / entrées inconnues additives

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- ▶ MM singuliers à VPM avec entrées inconnues¹⁷

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

17. Nagy-Kiss, Marx, Mourot, Schutz, Ragot, State estimation of two-time scale multiple models. Application to wastewater treatment plant, *Control Engineering Practice*, 19(11), 1354-1362, 2011

18. Nagy-Kiss, Marx, Mourot, Schutz, Ragot, Observer design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant, *Journal of Process Control*, 21(7), 1105-1114, 2011

Cette approche se généralise

- ▶ MM à VDNM avec incertitudes / entrées inconnues additives

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- ▶ MM singuliers à VDNM avec entrées inconnues¹⁷

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- ▶ MM à VDNM avec incertitudes paramétriques¹⁸

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) ((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

17. Nagy-Kiss, Marx, Mourot, Schutz, Ragot, State estimation of two-time scale multiple models. Application to wastewater treatment plant, *Control Engineering Practice*, 19(11), 1354-1362, 2011

18. Nagy-Kiss, Marx, Mourot, Schutz, Ragot, Observer design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant, *Journal of Process Control*, 21(7), 1105-1114, 2011

- Représentation d'un système non linéaire à paramètres bornés variants dans le temps

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i(\theta(t))x(t) + B_i(\theta(t))u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\theta_j(t) \in [\underline{\theta}_j \ \bar{\theta}_j] \quad A_i(\theta(t)) = \bar{A}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{A}_{ij} \quad \text{et} \quad B_i(\theta(t)) = \bar{B}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{B}_{ij}$$

- Représentation d'un système non linéaire à **paramètres bornés variants** dans le temps

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i(\theta(t))x(t) + B_i(\theta(t))u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\theta_j(t) \in [\underline{\theta}_j \ \bar{\theta}_j] \quad A_i(\theta(t)) = \bar{A}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{A}_{ij} \quad \text{et} \quad B_i(\theta(t)) = \bar{B}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{B}_{ij}$$

- Transformation polytopique appliquée à chaque $\theta_j(t)$ borné

$$\theta_j(t) = \tilde{\lambda}_1(\theta_j(t)) \underline{\theta}_j + \tilde{\lambda}_2(\theta_j(t)) \bar{\theta}_j$$

- Représentation d'un système non linéaire à paramètres bornés variants dans le temps

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i(\theta(t))x(t) + B_i(\theta(t))u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$\theta_j(t) \in [\underline{\theta}_j \ \bar{\theta}_j] \quad A_i(\theta(t)) = \bar{A}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{A}_{ij} \quad \text{et} \quad B_i(\theta(t)) = \bar{B}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{B}_{ij}$$

- Transformation polytopique appliquée à chaque $\theta_j(t)$ borné

$$\theta_j(t) = \tilde{\lambda}_1(\theta_j(t)) \bar{\theta}_j + \tilde{\lambda}_2(\theta_j(t)) \underline{\theta}_j$$

- Écriture MM du système non linéaire à paramètres variants

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(x(t)) \lambda_j(\theta(t)) (A_{ij}x(t) + B_{ij}u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Système non linéaire à paramètres variants

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}_{\mu\lambda}x(t) + \mathcal{B}_{\mu\lambda}u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Proche de MM à VDNM avec un état augmenté

$$\bar{x}^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) \end{bmatrix}$$

- Système non linéaire à paramètres variants

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}_{\mu\lambda}x(t) + \mathcal{B}_{\mu\lambda}u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Proche de MM à VDNM avec un état augmenté

$$\bar{x}^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) \end{bmatrix}$$

- Observateur proche d'une structure PI estimant état et paramètres

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \mathcal{A}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\hat{x}(t) + \mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}u(t) + L_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = -\alpha_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\hat{\theta} + K_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \end{cases}$$

- Système non linéaire à paramètres variants

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}_{\mu\lambda}x(t) + \mathcal{B}_{\mu\lambda}u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Proche de MM à VDNM avec un état augmenté

$$\bar{x}^T(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) \end{bmatrix}$$

- Observateur proche d'une structure PI estimant état et paramètres

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \mathcal{A}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\hat{x}(t) + \mathcal{B}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}u(t) + L_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = -\alpha_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\hat{\theta} + K_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \end{cases}$$

- Conditions LMI suffisantes à l'existence de l'observateur et détermination des gains $L_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}$, $K_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}$ et $\alpha_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}$ ¹⁹

19. Bezzaoucha, Marx, Maquin, Ragot, Nonlinear Joint State and Parameter Estimation : Application to a Wastewater Treatment Plant, *Control Engineering and Practice*, 21(10), 1377-1385, 2013

Application à un modèle de station d'épuration à boues activées

$$\begin{cases} \dot{X}_{DCO}(t) = -\frac{1}{Y_h}[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] + (1 - f_p)(\varphi_4(t) + \varphi_5(t)) + D_1(t) \\ \dot{S}_O(t) = \frac{Y_h-1}{Y_h}\varphi_1(t) + \frac{Y_a-4.57}{Y_a}\varphi_3(t) + D_2(t) \\ \dot{S}_{NH}(t) = -i_{xb}[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] - \left[i_{xb} + \frac{1}{Y_a}\right]\varphi_3(t) + (i_{xb} - f_p i_{xp})[\varphi_4(t) + \varphi_5(t)] + D_3(t) \\ \dot{S}_{NO}(t) = \frac{Y_h-1}{2.86 Y_h}\varphi_2(t) + \frac{1}{Y_a}\varphi_3(t) + D_4(t) \\ \dot{X}_{BH}(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) - \varphi_4(t) + D_5(t) \\ \dot{X}_{BA}(t) = \varphi_3(t) - \varphi_5(t) + D_6(t) \end{cases}$$

Application à un modèle de station d'épuration à boues activées

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t) = \mu_h \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ \varphi_2(t) = \mu_h \eta_{NOg} \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ \varphi_3(t) = \mu_a \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t) \\ \varphi_4(t) = b_H X_{BH}(t) \\ \varphi_5(t) = b_A X_{BA}(t) \\ D_1(t) = D_{in}(t) [X_{DCO,in}(t) - X_{DCO}(t)] \\ D_2(t) = D_{in}(t) [-S_O(t)] + Kq_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\ D_3(t) = D_{in}(t) [S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] \\ D_4(t) = D_{in}(t) [-S_{NO}(t)] \\ D_5(t) = D_{in}(t) \left[X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + \frac{f_r(1-f_w)}{f_r + f_w} X_{BH}(t) \right] \\ D_6(t) = D_{in}(t) \left[-X_{BA}(t) + \frac{f_r(1-f_w)}{f_r + f_w} X_{BA}(t) \right] \end{array} \right.$$

Application à un modèle de station d'épuration à boues activées

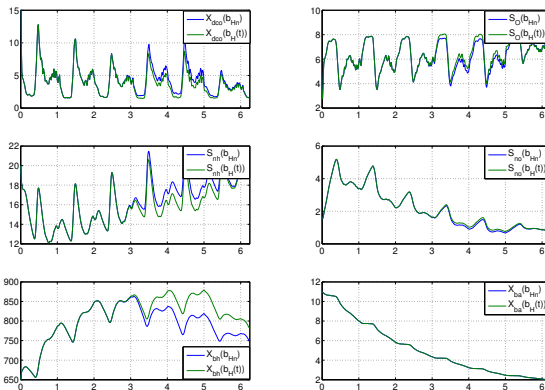
- ▶ $n = 6$ variables d'état
- ▶ 4 variables de prémisses

$$\begin{cases} z_1(x(t), u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \\ z_2(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \\ z_3(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \\ z_4(x(t), u(t)) = \frac{1}{K_{OA} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} X_{BA}(t) \end{cases}$$

- ▶ 1 paramètre borné variant dans le temps
- ▶ $r = \underbrace{2^4}_z \times \underbrace{2^1}_\theta = 32$ sous-modèles

Estimation conjointe état / paramètres

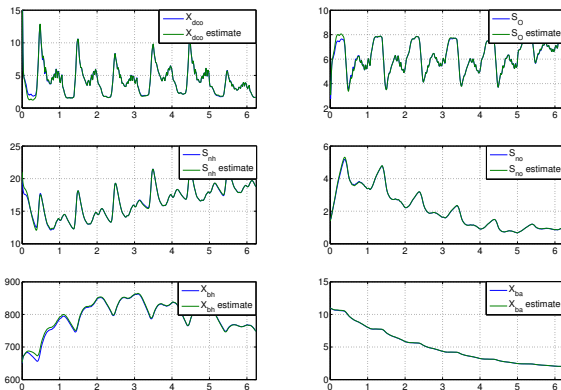
Application à un modèle de station d'épuration à boues activées



Effet du paramètre variant (sans : **bleu** / avec : **vert**)

Estimation conjointe état / paramètres

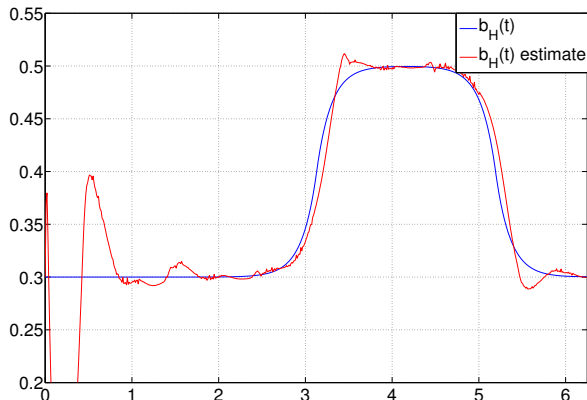
Application à un modèle de station d'épuration à boues activées



Estimation des variables d'état (réelles : bleu / estimées : vert)

Estimation conjointe état / paramètres

Application à un modèle de station d'épuration à boues activées



Estimation du paramètre variant (réel : bleu / estimé : rouge)

- ▶ L'accent n'a pas encore été mis sur la minimisation du conservatisme des LMIs
 - ▶ utilisation de fonctions de Lyapunov multiples
 - ▶ relaxation de (Tuan et. al., 2001) pour limiter le nombre de LMIs
 - ▶ approche descripteur pour limiter le nombre de LMIs et éviter les termes non linéaires

- ▶ L'accent n'a pas encore été mis sur la minimisation du conservatisme des LMIs
 - ▶ utilisation de fonctions de Lyapunov multiples
 - ▶ relaxation de (Tuan et. al., 2001) pour limiter le nombre de LMIs
 - ▶ approche descripteur pour limiter le nombre de LMIs et éviter les termes non linéaires
- ▶ Extensions existantes des résultats présentés
 - ▶ Observateur PI (PMI) : augmentation de l'état pour estimer les entrées inconnues constantes (ou pas)
 - ▶ utilisation de l'état estimé pour la commande
 - ▶ utilisation des estimées de l'état et des entrées inconnues pour le diagnostic et / ou la commande tolérante aux fautes

Section 4

Tolérance aux défauts

Introduction aux multimodèles

Stabilité, contrôle, observation de MM

Estimation d'état de MM

Tolérance aux défauts

- Suivi de référence malgré un défaut

- Retour de sortie malgré une commande saturée

Conclusion

Suivi de référence malgré un défaut

► Objectifs et difficulté

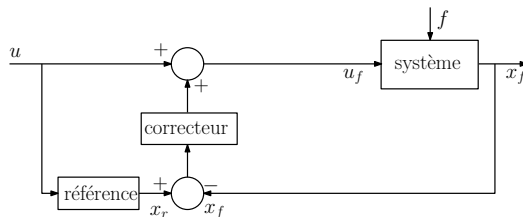
- suivi de trajectoire d'un modèle de référence :

$$\dot{x}_r(t) = A^r x_r(t) + B^r u(t)$$

- en présence de défaut capteur et actionneur :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_\mu x_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu f(t) \\ y_f(t) = C_\mu x_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu f(t) \end{cases}$$

► Principe



► Objectifs et difficulté

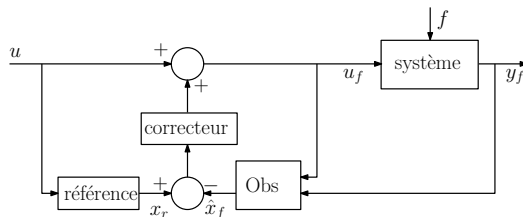
- suivi de trajectoire d'un modèle de référence :

$$\dot{x}_r(t) = A^r x_r(t) + B^r u(t)$$

- en présence de défaut capteur et actionneur :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_\mu x_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu f(t) \\ y_f(t) = C_\mu x_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu f(t) \end{cases}$$

► Principe



Suivi de référence malgré un défaut

► Objectifs et difficulté

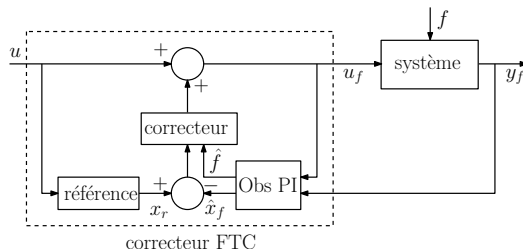
- suivi de trajectoire d'un modèle de référence :

$$\dot{x}_r(t) = A^r x_r(t) + B^r u(t)$$

- en présence de défaut capteur et actionneur :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_\mu x_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu f(t) \\ y_f(t) = C_\mu x_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu f(t) \end{cases}$$

► Principe



► Objectifs et difficulté

- suivi de trajectoire d'un modèle de référence :

$$\dot{x}_r(t) = A^r x_r(t) + B^r u(t)$$

- en présence de défaut capteur et actionneur :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_\mu x_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu f(t) \\ y_f(t) = C_\mu x_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu f(t) \end{cases}$$

► Principe

- réguler l'erreur de poursuite et compenser le défaut

$$u_f(t) = u(t) + K_\mu(x_r - \hat{x}_f) + K_\mu^f \hat{f}(t)$$

- P(M)IO pour estimer l'état en défaut et le défaut :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f(t) = A_\mu \hat{x}_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu \hat{f}(t) + L_\mu^1(y_f(t) - \hat{y}_f(t)) \\ \hat{f}(t) = L_\mu^2(y_f(t) - \hat{y}_f(t)) - \hat{f}(t) \\ (\dots = \dots) \\ \hat{y}_f(t) = C_\mu \hat{x}_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu \hat{f}(t) \end{cases}$$

► Objectifs et difficulté

- suivi de trajectoire d'un modèle de référence :

$$\dot{x}_r(t) = A^r x_r(t) + B^r u(t)$$

- en présence de défaut capteur et actionneur :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_\mu x_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu f(t) \\ y_f(t) = C_\mu x_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu f(t) \end{cases}$$

► Principe

- réguler l'erreur de poursuite et compenser le défaut

$$u_f(t) = u(t) + K_\mu(x_r - \hat{x}_f) + K_\mu^f \hat{f}(t)$$

- P(M)IO pour estimer l'état en défaut et le défaut :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f(t) = A_\mu \hat{x}_f(t) + B_\mu u_f(t) + G_\mu \hat{f}(t) + L_\mu^1(y_f(t) - \hat{y}_f(t)) \\ \hat{f}(t) = L_\mu^2(y_f(t) - \hat{y}_f(t)) - \hat{f}(t) \\ (\dots = \dots) \\ \hat{y}_f(t) = C_\mu \hat{x}_f(t) + D_\mu u_f(t) + W_\mu \hat{f}(t) \end{cases}$$

- approche descripteur
- minimisation du gain $\mathcal{L}_2$ de f vers les erreurs de poursuite et d'estimation²⁰

20. Bouarar, Marx, Maquin, Ragot, Fault tolerant control for uncertain Takagi-Sugeno systems by trajectory tracking : a descriptor approach, *IET Control Theory and Applications*, 4(14), 1793-1805, 2013.

► Objectif et difficulté

- Stabiliser le système MM

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}u(t) \\ y(t) = C_{\mu}x(t) + D_{\mu}u(t) \end{cases}$$

- par un retour de sortie

"statique"

$$u(t) = K_{\mu}y(t)$$

ou

dynamique

$$\dot{x}_c(t) = A_{\mu}^c x_c(t) + B_{\mu}^c y(t)$$

$$u(t) = C_{\mu}^c x_c(t) + D_{\mu}^c y(t)$$

► Objectif et difficulté

- Stabiliser le système MM

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}\text{sat}(u(t)) \\ y(t) = C_{\mu}x(t) + D_{\mu}\text{sat}(u(t)) \end{cases}$$

- par un retour de sortie

"statique"

$$u(t) = K_{\mu}y(t)$$

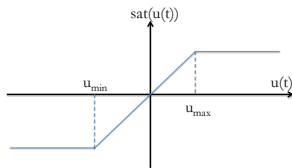
ou

dynamique

$$\dot{x}_c(t) = A_{\mu}^c x_c(t) + B_{\mu}^c y(t)$$

$$u(t) = C_{\mu}^c x_c(t) + D_{\mu}^c y(t)$$

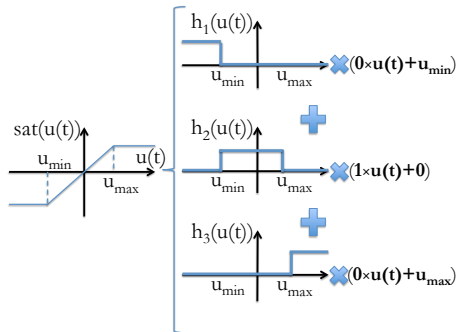
- malgré une commande saturée



$$\text{sat}(u(t)) = \begin{cases} u_{\max}, & u_{\max} \leq u(t) \\ u(t), & u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \\ u_{\min}, & u(t) \leq u_{\min} \end{cases}$$

Retour de sortie malgré une commande saturée

- **Démarche** : représentation MM de la saturation
 - Commande saturée **scalaire** sous forme **polytopique** :



- ▶ **Démarche** : représentation MM de la saturation
 - ▶ Commande saturée **scalaire** sous forme **polytopique** :

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^3 h_i(u(t))(\lambda_i u(t) + \gamma_i)$$

où les $h_i(u(t))$ sont positives et de somme unitaire

- **Démarche** : représentation MM de la saturation

- Commande saturée **scalaire** sous forme **polytopique** :

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^3 h_i(u(t))(\lambda_i u(t) + \gamma_i)$$

où les $h_i(u(t))$ sont positives et de somme unitaire

- Généralisation au cas d'une commande saturée **vectorielle**

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} h_i(u(t))(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

- **Démarche** : représentation MM de la saturation

- Commande saturée **scalaire** sous forme **polytopique** :

$$sat(u(t)) = \sum_{i=1}^3 h_i(u(t))(\lambda_i u(t) + \gamma_i)$$

où les $h_i(u(t))$ sont positives et de somme unitaire

- Généralisation au cas d'une commande saturée **vectorielle**

$$sat(u(t)) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} h_i(u(t))(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

- Le système MM avec commande saturée s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r \mu_j(z)(A_j x(t) + B_j sat(u(t))) \\ y(t) = \sum_{j=1}^r \mu_j(z)(C_j x(t) + D_j sat(u(t))) \end{cases}$$

- **Démarche** : représentation MM de la saturation

- Commande saturée **scalaire** sous forme **polytopique** :

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^3 h_i(u(t))(\lambda_i u(t) + \gamma_i)$$

où les $h_i(u(t))$ sont positives et de somme unitaire

- Généralisation au cas d'une commande saturée **vectorielle**

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} h_i(u(t))(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

- Le système MM avec commande saturée s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_j(z) h_i(u) (A_i x(t) + B_j (\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)) \\ y(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_j(z) h_i(u) (C_x(t) + D_j (\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)) \end{cases}$$

- **Démarche** : représentation MM de la saturation

- Commande saturée **scalaire** sous forme **polytopique** :

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^3 h_i(u(t))(\lambda_i u(t) + \gamma_i)$$

où les $h_i(u(t))$ sont positives et de somme unitaire

- Généralisation au cas d'une commande saturée **vectorielle**

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} h_i(u(t))(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

- Le système MM avec commande saturée s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu} x(t) + B_{\mu} \Lambda_h u(t) + B_{\mu} \Gamma_h \\ y(t) = C_{\mu} x(t) + D_{\mu} \Lambda_h u(t) + D_{\mu} \Gamma_h \end{cases}$$

- **Démarche** : approche descripteur

- Retour de sortie **statique saturé**

système :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}(\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \\ y(t) = C_{\mu}x(t) + D_{\mu}(\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \end{cases}$$

correcteur : $u(t) = K_{\mu}y(t)$

- **Démarche** : approche descripteur

- Retour de sortie **statique saturé**

système :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu(\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu(\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \end{cases}$$

correcteur : $u(t) = K_\mu y(t)$

- Système en boucle fermée sous **forme descripteur** :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu & B_\mu \Lambda_h & 0 \\ 0 & -I & K_\mu \\ C_\mu & D_\mu \Lambda_h & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_\mu \Gamma_h \\ 0 \\ D_\mu \Gamma_h \end{pmatrix}$$

- **Démarche** : approche descripteur

- Retour de sortie **dynamique saturé**

$$\text{système : } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\mu}x(t) + B_{\mu}(\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \\ y(t) = C_{\mu}x(t) + D_{\mu}(\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \end{cases}$$

$$\text{correcteur : } \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_{\mu}^c x_c(t) + B_{\mu}^c y(t) \\ u(t) = C_{\mu}^c x_c(t) + D_{\mu}^c y(t) \end{cases}$$

- Système en boucle fermée sous **forme descripteur** :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\mu} & 0 & B_{\mu}\Lambda_h & 0 \\ 0 & A_{\mu}^c & 0 & B_{\mu}^c \\ 0 & C_{\mu}^c & -I & D_{\mu}^c \\ C_{\mu} & 0 & D_{\mu}\Lambda_h & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\mu}\Gamma_h \\ 0 \\ 0 \\ D_{\mu}\Gamma_h \end{pmatrix}$$

► **Démarche** : approche descripteur

► Retour de sortie **dynamique saturé**

$$\text{système : } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu (\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu (\Lambda_h u(t) + \Gamma_h) \end{cases}$$

$$\text{correcteur : } \begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_\mu^c x_c(t) + B_\mu^c y(t) \\ u(t) = C_\mu^c x_c(t) + D_\mu^c y(t) \end{cases}$$

► Système en boucle fermée sous **forme descripteur** :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\mu & 0 & B_\mu \Lambda_h & 0 \\ 0 & A_\mu^c & 0 & B_\mu^c \\ 0 & C_\mu^c & -I & D_\mu^c \\ C_\mu & 0 & D_\mu \Lambda_h & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_c(t) \\ u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_\mu \Gamma_h \\ 0 \\ 0 \\ D_\mu \Gamma_h \end{pmatrix}$$

► Dans les deux cas²¹ :

→ $E \dot{x}_a(t) = \tilde{A}_{\mu h} x_a(t) + \tilde{B}_{\mu h}$

→ fonction de Lyapunov de l'état augmenté x_a

→ conditions LMI suffisantes pour la convergence dans $\mathcal{B}(0, \beta)$

→ minimisation du rayon β

► Approche multimodèle

- + représentation générale de systèmes linéaires
- + prise en compte unifiée de saturation, paramètres variants, etc
- + utilisation d'outils issus du linéaire
- conservatisme des conditions suffisantes évaluées aux sommets
- problème des écritures équivalentes qui ne le sont pas

► Approche multimodèle

- + représentation générale de systèmes linéaires
- + prise en compte unifiée de saturation, paramètres variants, etc
- + utilisation d'outils issus du linéaire
- conservatisme des conditions suffisantes évaluées aux sommets
- problème des écritures équivalentes qui ne le sont pas

► Pistes à suivre

- réduction du conservatisme
- diagnostic / FTC sans estimation
- croisement avec d'autres communautés : LPV, switché, etc

Approche multimodèle pour l'estimation et la tolérance aux fautes

Marx

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 CNRS - Université de Lorraine

