

Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 25 octobre 2013

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Mention Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique)

par

Souad BEZZAOUCHA

Composition du jury

<i>Président :</i>	Gérard SCORLETTI	Professeur à l'École Centrale de Lyon
<i>Rapporteurs :</i>	David HENRY	Professeur à l'Université des Sciences et Technologie de Bordeaux
	Olivier SENAME	Professeur à Grenoble-INP
<i>Examineurs :</i>	Krishna BUSAWON	Professeur à Northumbria University
	Didier MAQUIN	Professeur à l'UL (Directeur de thèse)
	José RAGOT	Professeur à l'UL (Co-directeur de thèse)
	Benoît MARX	Maître de conférences à l'UL (Co-directeur de thèse)



Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Université de Lorraine – CNRS

2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy
Tél.+33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44

Mis en page avec la classe thesul.

À la personne la plus chère à mon cœur, à une femme et une mère d'exception sans qui je n'aurai sans doute jamais tant accompli, à ma très chère maman : Madame BOUYAKOUB Badia.

Remerciements

Le présent travail a été effectué au sein du groupe thématique Commande, Identification et Diagnostic (CID) du Centre de Recherche en Automatique de Nancy.

Je souhaite exprimer en premier lieu ma plus sincère reconnaissance à mes directeurs de thèse, Messieurs Didier MAQUIN, José RAGOT et Benoît MARX pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'offrant la possibilité d'intégrer leur équipe.

Les mots me manquent pour leur exprimer ma gratitude, ma considération est inestimable. Je tiens à leur faire part de toute ma reconnaissance pour leurs investissements, encouragements et le temps conséquent qu'ils m'ont accordée. Leurs qualités pédagogiques et rigueur scientifique ainsi que leur gentillesse à mon égard durant ces trois années m'ont permis de mener à bien mon travail. J'ai beaucoup appris à leurs côtés et je leur adresse mes sincères remerciements pour tout cela. Le temps passé à Nancy restera, sans aucun doute, l'un de mes meilleurs souvenirs !!

Mes sincères remerciements à Monsieur Gilles MOUROT pour toutes nos discussions, ses conseils et son éternelle bonne humeur.

J'adresse mes respectueux remerciements aux membres du jury : Monsieur David HENRY, Professeur à l'Université des Sciences et Technologie de Bordeaux et Monsieur Olivier SE-NAME, Professeur à Grenoble-INP pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse. Monsieur Krishna BUSAWON, Professeur à Northumbria University d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et Monsieur Gérard SCORLETTI, Professeur à l'École Centrale de Lyon, de m'avoir fait l'honneur de la présider.

Je souhaite également exprimer mes remerciements aux collègues et aux amis ainsi qu'à ma famille (mon frère Abdelfettah et mes soeurs Amel et Fella ainsi que mon oncle BOUYAKOUB Mohamed Redha) pour leurs encouragements et soutien.

Merci à tous !!

Table des matières

Notations	1
------------------	----------

1 Introduction générale

1.1 Contexte du travail : bref état de l'art sur les systèmes non linéaires	3
1.2 Présentation des modèles T-S	4
1.3 Contribution et plan du manuscrit	5

Liste des publications	7
-------------------------------	----------

2 Introduction à la modélisation, l'estimation et la commande des modèles T-S

2.1 Introduction	9
2.2 Représentation T-S des systèmes non linéaires	10
2.3 Transformation par secteurs non linéaires	11
2.4 Stabilité des systèmes T-S	12
2.5 Observabilité des modèles T-S	13
2.6 Synthèse d'observateurs	13
2.6.1 Variables de décision mesurables (VDM)	13
2.6.2 Variables de décision non mesurables (VDNM)	14
2.7 Stabilisation des modèles T-S	15
2.7.1 Stabilisation par retour d'état	15
2.7.2 Stabilisation par retour de sortie	19
2.8 Conclusion	22

3 Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires à paramètres variants dans le temps

3.1 Introduction	23
3.1.1 Défauts, pannes et diagnostic	24
3.1.2 Estimation paramétrique : systèmes variants dans le temps	25
3.1.3 Contribution du chapitre	26
3.2 Systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps	26
3.2.1 Exemple introductif : cas d'un seul paramètre	27

3.2.2	Synthèse d'observateur	27
3.2.3	Atténuation du bruit de mesure	32
3.2.4	Exemple numérique	33
3.3	Systèmes non linéaires à paramètres variant dans le temps	36
3.3.1	Synthèse d'observateur	37
3.3.2	Application à une station d'épuration d'eau	41
3.3.3	Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteurs	48
3.4	Conclusion	55

4 Commande sous contrainte de saturation

4.1	Introduction	57
4.2	Motivations et position du problème	58
4.3	Représentation T-S de la saturation	59
4.4	Commande saturée par retour d'état de systèmes linéaires	62
4.4.1	Positionnement du problème	62
4.4.2	Représentation T-S du système	62
4.4.3	Synthèse de la commande	63
4.5	Commande saturée par retour d'état de systèmes non linéaires	65
4.5.1	Positionnement du problème	65
4.5.2	Représentation T-S du système soumis à une commande saturée	65
4.5.3	Commande de systèmes non linéaires saturés	65
4.5.4	Commande de systèmes non linéaires incertains saturés	71
4.5.5	Commande de systèmes non linéaires incertains saturés, approche descripteur	74
4.6	Commande par retour de sortie	79
4.6.1	Commande par retour de sortie statique	80
4.6.2	Commande par retour de sortie dynamique	83
4.6.3	Exemple numérique	85
4.7	Conclusion	86

5 Poursuite de consigne générée par un modèle de référence

5.1	Introduction	89
5.2	Etude bibliographique	90
5.2.1	Poursuite de modèle de référence des systèmes linéaires	90
5.2.2	Poursuite d'un modèle de référence par un système non linéaire	93
5.2.3	Poursuite de modèle de référence des systèmes T-S : contribution du chapitre	94
5.3	Conditions structurelles de poursuite	95
5.3.1	Modèle et objectif	95

5.3.2	Loi de commande prédéfinie	95
5.3.3	Loi de commande à structure non prédéfinie	98
5.4	Choix du critère de poursuite	99
5.4.1	Variables de décision indépendantes de la commande	99
5.4.2	Variables de décision fonction de la commande	100
5.4.3	100
5.5	Commande prédictive non linéaire d'un système sous forme T-S	106
5.5.1	Variables de décision indépendantes de la commande	107
5.5.2	Variables de décision fonction de la commande	107
5.6	Poursuite de modèle de référence tolérante aux défauts	110
5.6.1	Poursuite de modèle de référence tolérante aux défauts de capteurs	110
5.6.2	Poursuite de modèle de référence sous contrainte de saturation : cas discret . . .	122
5.6.3	Conclusion	126

6 Perspectives et conclusions

6.1	Perspectives	127
6.1.1	Estimation paramétrique	127
6.1.2	Saturation T-S de la commande	128
6.1.3	Poursuite de modèle de référence	132
6.2	Conclusions	133

Annexes

A Outils pour l'analyse des systèmes T-S

B Comparaison entre différentes structures non linéaires et la représentation T-S

B.1	Les modèles ARX	141
B.2	Les modèles LPV	142
B.3	Les réseaux de fonctions à base radiale	143
B.4	Exemples illustratifs	143
B.4.1	Représentation des systèmes	143
B.4.2	Synthèse d'observateur	145

Bibliographie

Table des figures

2.1	Modèles T-S couplés	10
2.2	Modèles T-S découplés	10
3.1	Système nominal (bleu) et système avec variation paramétrique (rouge)	34
3.2	Entrée du système	34
3.3	Etats du système et leurs valeurs estimées	35
3.4	Paramètre $\theta(t)$ et son estimé	35
3.5	Effet du paramètre variable dans le temps	46
3.6	Etats du système et leurs valeurs estimées	47
3.7	Biomasse hétérotrophe $b_H(t) = b_{Hn} + 0.2\theta_1(t)$ et son estimée	47
3.8	Sortie nominale (sans défaut) et sortie avec défaut $f_1(t)$	54
3.9	Entrée du système	54
3.10	Etats du système et leurs valeurs estimées	55
3.11	Défaut $f_1(t)$ et son estimé	55
4.1	Schéma de l'ensemble chariot-pendule	68
4.2	Commandes nominale, nominale saturée et T-S	70
4.3	Etats du système avec commande par retour d'état	71
4.4	Incertitudes $\sigma(t)$	77
4.5	Etats du système incertain	78
4.6	Entrées de commande	79
4.7	Etats du système par retour de sortie	86
4.8	Diagrammes de phase en BF avec correcteurs par retour de sortie statique et dynamique	86
5.1	Etats du système et du modèle de référence	97
5.2	Commandes $u_{r,k}$ et u_k calculée	97
5.3	Fonctions d'activation $\mu_{1,k}$ et $\mu_{2,k}$	98
5.4	Etats du système et du modèle de référence avec $W = \text{diag}(0.01, 1, 1)$	101
5.5	Commandes $u_{r,k}$ et u_k	101
5.6	Etats du système et du modèle de référence avec $W = \text{diag}(0.01, 0.1, 1)$	102
5.7	Commandes $u_{r,k}$ et u_k avec $W = \text{diag}(0.01, 0.1, 1)$	103
5.8	Etats du système et du modèle de référence avec $W = I_2$	104
5.9	Commandes $u_{r,k}$ et u_k avec $W = I_2$	104
5.10	Etats du système et du modèle de référence	105
5.11	Commandes $u_{r,k}$ et u_k	105
5.12	Etats du système obtenus par la commande prédictive et ceux du modèle de référence	109
5.13	Commande du modèle de référence $u_r(k)$ et commande MPC $u(k)$	109
5.14	Structure du contrôleur	112
5.15	Etats du système et de l'observateur	117

5.16	Etats du système et du modèle de référence	118
5.17	Entrées du système et du modèle de référence	118
5.18	Etats du système, de l'observateur et du modèle de référence	121
5.19	Etats du système, de l'observateur et du modèle de référence	121
5.20	Etats du système	125
5.21	Commandes avec et sans prise en compte de la saturation	125
B.1	Représentation linéaire fractionnaire haute des incertitudes	144
B.2	Représentation LFT du système	144

Liste des tableaux

3.1	Transformation par secteurs non linéaires : exemple à trois paramètres	38
4.1	Exemple à deux entrées	62
4.2	Paramètres de l'ensemble chariot-pendule	68
5.1	Influence du poids W	102
5.2	Influence de la taille de l'horizon	110
5.3	Comparaison des performances en poursuite pour différentes tailles d'horizon	124

Notations

Matrices et vecteurs

I_n (I)	Matrice identité de dimension n (resp. de dimension appropriée)
0_n (0)	Matrice nulle de dimension n (resp. de dimension appropriée)
$P > 0$ ($P < 0$)	Matrice P symétrique définie positive (resp. symétrique définie négative)
P^T	Transposée de la matrice P
P^{-1}	Inverse de la matrice P
$\lambda_{max}(M)$ ($\lambda_{min}(M)$)	Valeur propre maximale (resp. minimale) de M
$\text{Tr}(M)$	Trace la matrice carrée M
$\mathbb{S}(M)$	$\mathbb{S}(M) := M + M^T$
$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ (*) & S_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole (*) représente S_{12}^T
$\text{diag}(M_1, \dots, M_l)$	Matrice bloc diagonale = $\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & M_l \end{pmatrix}$

Acronymes

BMI	Bilinear Matrix Inequality
LMI	Linear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant
LTV	Linear Time Varying
LPV	Linear Parameter Varying
quasi-LPV	Quasi-Linear Parameter Varying
T-S	Takagi-Sugeno
T-S à VDM	Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables
T-S à VDNM	Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables
MPC	Model Predictive Control
NMPC	Nonlinear Model Predictive Control
PDC	Parallel Distributed Compensation

1

Introduction générale

Sommaire

1.1	Contexte du travail : bref état de l'art sur les systèmes non linéaires	3
1.2	Présentation des modèles T-S	4
1.3	Contribution et plan du manuscrit	5

1.1 Contexte du travail : bref état de l'art sur les systèmes non linéaires

L'analyse ou la synthèse de loi de commande pour un système dynamique (étude de stabilité, stabilisation, rejet de perturbation, suivi de référence,...) suppose au préalable une connaissance de son comportement, de l'évolution de ses composants au cours du temps (vieillessement, pannes, défauts), de ses interactions avec l'environnement extérieur (perturbations, entrées inconnues) ainsi que des contraintes qu'il subit (saturation de ses organes de contrôle et de mesure, détérioration ou usure de certains composants). Cette connaissance prend la forme d'un ensemble d'équations et d'inéquations mathématiques appelé "modèle".

Modéliser judicieusement un système consiste à trouver une représentation simple, exploitable et suffisamment précise pour décrire fidèlement la réalité, mais peu complexe afin de permettre la synthèse d'une loi de commande.

Nous distinguons ainsi les modèles linéaires et non linéaires. L'étude de la première catégorie se base sur une théorie bien maîtrisée. Ils peuvent approximer localement des systèmes non linéaires, mais leur utilisation ne garantit pas la stabilité du système dans tout l'espace d'état. La seconde catégorie regroupe les systèmes qui présentent des comportements complexes qui ne peuvent pas être décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition, ou plutôt cette remarque, explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires. En effet, si le modèle linéarisé est acceptable dans certains cas, le respect de certaines contraintes pratiques (saturation, hystérésis, paramètres variants dans le temps,..) mène à des systèmes bouclés non linéaires. Les travaux publiés font état de plusieurs classes de systèmes non linéaires.

- Une des classes de systèmes non linéaires la plus répandue est celle des systèmes polynomiaux. Ils sont utilisés pour modéliser le comportement de nombreux processus (biologiques, thermiques,

chimiques, économiques,.... Cependant, le système associé à cette classe de modèles peut présenter un comportement chaotique et des trajectoires divergentes en temps fini (Ebenbauer et Allgöwer [2006]). Dans ce cas, l'étude de la stabilité de tels systèmes peut s'avérer délicate, le choix de fonctions de Lyapunov utilisées pour cette étude se révélant difficile.

- Les systèmes bilinéaires : ils représentent en particulier la classe des systèmes non linéaires affines par rapport à la commande (Chabour *et al.* [1993], Banks [1986], Celikovsky [1993]). Cependant, les résultats disponibles sur la stabilisation par exemple, sont adaptés à des classes particulières (stabilisation par feedback de classe C^1 des systèmes plans dans (Bacciotti et Boieri [1991]) et de systèmes de dimension deux dans (Chabour *et al.* [1993])).
- Les systèmes à paramètres variants dans le temps : les caractéristiques dynamiques de ces systèmes évoluent au cours du temps en fonction de certains paramètres. Un grand nombre d'approches ont été développées pour l'étude de la stabilité et la synthèse de correcteurs robustes pour ces systèmes LPV (Sename et Dugard [2012], Mohammadpour et Scherer [2012]). Ces méthodes dépendent bien évidemment de la nature et du type d'incertitudes et/ou des paramètres considérés.
- Les systèmes présentés sous forme paramétrique pure : le système non linéaire est fragmenté en un ensemble de sous-systèmes imbriqués sous forme triangulaire stricte. L'étude de la stabilité de ces systèmes est généralement basée sur la théorie de Lyapunov en utilisant par exemple la technique du backstepping. A chaque étape de cette technique séquentielle, l'ordre du sous-système analysé est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée, la dernière étape correspondant au système global. L'inconvénient majeur de ces systèmes est bien entendu la forme restrictive imposée de leur structure.

Les lois de commande pour ces classes de systèmes non linéaires sont souvent construites à partir des concepts de géométrie différentielle. Cette approche a pour objectif la linéarisation de la relation entrée-sortie pour permettre l'utilisation de lois de commande linéaires pouvant être obtenues suivant des critères de stabilité de Lyapunov. Cependant, la mise en oeuvre de ces méthodes de façon numérique reste difficile, et de ce fait, ces méthodes sont plus particulièrement adaptées à des systèmes d'ordre réduit.

L'étude des systèmes non linéaires est ainsi basée sur des outils mathématiques plus élaborés que pour le cas linéaire. Toutefois, la multitude de formes non linéaires existantes rend difficile la mise en place d'une théorie unique, générale et systématique.

Cette constatation nous amène à introduire les modèles de Takagi-Sugeno (T-S). Ces modèles, comme il sera montré tout au long du manuscrit de thèse, permettent de représenter un système non linéaire sous forme d'une interpolation de sous-systèmes linéaires, avec la possibilité d'étendre de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires.

1.2 Présentation des modèles T-S

Modèle T-S, modèle flou de Takagi-Sugeno (Takagi et Sugeno [1985]), modèle linéaire polytopique (PLM) (Angelis [2001]), multimodèle (Murray-Smith et Johansen [1997]) ou modèle affine par morceaux, sont autant de termes montrant que dans la littérature, plusieurs terminologies sensiblement équivalentes peuvent définir ce type de modèles. Néanmoins, l'idée principale s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples (fréquemment linéaires) où chaque sous-modèle contribue de manière variable dans le temps au comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle au modèle global, qui est une combinaison convexe des sous-systèmes, est définie par une fonction d'activation, en général non linéaire mais vérifiant la propriété de somme convexe.

L'approche T-S permet ainsi de ré-écrire un système non linéaire d'une manière plus facile à étudier en le décomposant en unités plus simples et maîtrisables. L'intérêt de réaliser une décomposition du système en utilisant ce type de modèles est que, grâce à la propriété de somme convexe, l'étude de

stabilité, la synthèse de correcteurs et d'observateurs qui ont été largement étudiés dans le cas linéaire peuvent s'étendre au cas non linéaire avec des outils similaires. On peut ainsi citer (Tanaka *et al.* [2003], Tanaka *et al.* [2007], Tanaka et Wang [2001], Tuan *et al.* [2001], Kruszewski [2006], Yoneyama [2006] et Guerra *et al.* [2006]) où l'étude de la stabilité est inspirée des outils utilisés pour les systèmes linéaires. On peut également citer (Akhenak *et al.* [2007], Patton *et al.* [1998] et Marx *et al.* [2007]) pour leur travaux portant sur la synthèse d'observateurs et la détection de défauts.

Les fonctions d'activation dépendent des variables dites de décision ou de prémisses. Ces variables peuvent être mesurables (entrées/sortie du système) ou non mesurables (état du système,...). Il est important de noter que la classe des modèles T-S à variables de décisions non mesurables est plus large que celle à variables de décision mesurables. Ceci vient du fait que le modèle T-S est obtenu généralement par la transformation en secteurs non linéaires, qui dans la majorité des cas, fait apparaître une partie ou la totalité des variables d'état dans les fonctions d'activation. Ce point est également illustré dans les travaux de (Yoneyama [2008], Bergsten et Palm [2000] et Ichalal *et al.* [2012]).

Les modèles T-S peuvent être regroupés en deux familles distinctes : d'une part les modèles T-S à états couplés ou homogènes, dans le sens où ils partagent la même structure et le même espace d'état, et d'autre part les modèles découplés ou hétérogènes, dans le sens où leur structure et leur espace d'état diffèrent (les sous-modèles possèdent chacun un vecteur d'état indépendant).

Pour la première famille, la représentation d'un système non linéaire sous forme de modèle T-S est obtenue par trois approches largement développées dans la littérature. La première est basée sur les techniques d'identification. Elle est considérée dans le cas où l'expression analytique du modèle non linéaire n'est pas disponible et repose sur des techniques d'identification en utilisant des jeux de données entrées-sorties du système réel à identifier, la structure du modèle et celle des fonctions d'activation étant choisies a priori (Gasso [2000]). La seconde approche repose sur la linéarisation du modèle non linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement. Elle est basée sur des techniques d'optimisation afin de minimiser l'erreur quadratique de sortie. Ainsi à chaque zone de fonctionnement est affecté un sous-modèle (Akhenak [2004]). La troisième, celle qui sera utilisée dans cette thèse, est la méthode dite de *transformation en secteurs non linéaires*. Cette dernière a été initiée par (Kawamoto *et al.* [1992]) et étendue par (Tanaka et Wang [2001] et Morère [2001]). Elle est basée directement sur la connaissance analytique du modèle non linéaire et contrairement aux deux méthodes citées précédemment qui donnent une approximation du modèle non linéaire, cette dernière méthode permet de proposer une écriture systématique pour décrire les non-linéarités en tenant compte de l'objectif de l'étude (analyse de stabilité et synthèse de contrôleur, d'observateur,...) et fournit un modèle T-S représentant de manière exacte le modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état. Le principe utilisé repose sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires du système dynamique à étudier. Plus précisément, cette méthode consiste à trouver a_1 et a_2 tels que $a_1x(t) \leq f(x(t), u(t)) \leq a_2x(t)$ où $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ représente un système non linéaire. Notons que l'approche par secteurs non linéaires permet d'associer une infinité de modèles T-S pour un système non linéaire suivant le découpage des non-linéarités réalisé. La seconde famille de modèles T-S (modèles découplés) (Filev [1991], Orjuela [2008]) introduit une certaine flexibilité dans l'étape de modélisation dans la mesure où la dimension des sous-modèles (leur nombre d'états) peut être adaptée à la complexité du système dans chaque zone de fonctionnement. Cette représentation s'adapte donc particulièrement bien à la modélisation des systèmes complexes présentant des non-linéarités et des changements de structure engendrés par leur mode de fonctionnement.

1.3 Contribution et plan du manuscrit

Bien que la structure T-S ait fait et fasse encore l'objet de nombreux travaux dans le domaine de l'estimation, de la commande ou du diagnostic, il subsiste encore une multitude de problèmes ouverts

concernant ces différents points.

Dans les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit, nous nous intéressons à la façon de représenter les systèmes non linéaires et les non-linéarités qui leur sont associées (saturation et paramètres variants dans le temps) pour traiter aussi bien la commande (stabilisation et poursuite de modèle de référence en présence de contraintes) que l'estimation d'état et le diagnostic de fonctionnement. Ainsi, la contribution de cette thèse porte sur trois points essentiels : l'estimation et le diagnostic de systèmes non linéaires à paramètres variant dans le temps (pouvant être considérés comme défauts additifs ou multiplicatifs de système, d'actionneurs et de capteurs) et la commande (synthèse de loi de commande stabilisante en présence de saturation affectant les actionneurs et de commandes pour la poursuite de référence, y compris en présence de défauts de capteurs). Ces différents points sont abordés en se basant sur la structure T-S et l'approche polytopique.

La première partie de la thèse est consacrée à l'estimation d'état et au diagnostic de fonctionnement.

- Le chapitre 2 de ce mémoire présente les principaux outils ainsi que les résultats les plus couramment utilisés pour l'analyse des modèles de Takagi-Sugeno. Leurs structures ainsi que la façon de les obtenir par l'approche de type secteurs non linéaires sont également présentées.

- Le chapitre 3 traite du problème d'estimation simultanée de l'état et des paramètres des systèmes non linéaires à paramètres variant dans le temps. Une nouvelle approche utilisant la transformation en secteurs non linéaires permet de ré-écrire le système sous forme polytopique en prenant en compte la présence de paramètres variant dans le temps. Cette forme polytopique est ensuite utile pour la synthèse d'observateur assurant l'estimation simultanée de l'état et des paramètres du système en transformant le modèle original sous forme de modèle T-S à variables de décision non mesurables. Les gains d'observateur sont obtenus en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Une application au diagnostic est également considérée en comparant les valeurs des paramètres estimés en ligne avec leurs valeurs nominales, en mode non défailant (absence de pannes), supposées connues.

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée, des applications sur un modèle simplifié de station d'épuration et sur des données issues du benchmark du programme européen Cost 624 sont proposées.

La deuxième partie de la thèse porte sur l'aspect commande saturée de systèmes T-S. En effet, des contraintes physiques, technologiques ou imposées par des consignes de sécurité se traduisent généralement par des limitations sur les entrées, les états ou les sorties du système, conduisant naturellement à prendre en compte les saturations de ces variables et l'analyse de leur influence.

- Ainsi, le chapitre 4 traite de la commande sous contrainte de saturation, cette dernière étant représentée sous forme de modèle T-S et intégrée au modèle du système. La synthèse d'une loi de commande assurant la stabilité du système bouclé, en prenant en compte les limites de saturation est proposée. Plusieurs lois de commande sont considérées, d'abord un retour d'état pour les systèmes linéaires, puis une extension aux systèmes non linéaires et non linéaires incertains. La commande par retour de sortie est également considérée avec l'approche descripteur pour relaxer les conditions à vérifier par les gains de la loi de commande. Afin d'illustrer les résultats, un exemple de stabilisation d'un chariot-pendule soumis à des saturations de commande est traité.

- Le chapitre 5 traite de la poursuite de modèle de référence. La contribution principale de ce chapitre est la mise en évidence des conditions structurelles de poursuite pour les modèles non linéaires sous forme T-S. En particulier, une généralisation des conditions d'Erzberger initialement établies dans le cas linéaire est proposée. L'accent est mis sur les différents critères de choix de commande en fonction des buts recherchés (poursuite parfaite, approchée, commande prédictive et saturée).

- Enfin, le dernier chapitre résume les différents résultats obtenus tout au long de cette thèse en mettant l'accent sur différentes suites possibles aux travaux présentés dans ce mémoire.

Liste des publications

Revues internationales avec comité de lecture

- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). Nonlinear joint state and parameter estimation : application to a wastewater treatment plant. *Control Engineering Practice*, 21(10) : 1377-1385.

Conférences internationales avec comité de lecture

- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). State and multiplicative sensor fault estimation for nonlinear systems. 2nd International Conference on Control and Fault-Tolerant Systems, SysTol'13, Nice, France, October 9-11.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). Model reference tracking control for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno structure. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2013, Hyderabad, India, July 7-10.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). Stabilization of nonlinear systems subject to actuator saturation. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2013, Hyderabad, India, July 7-10.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). Contribution to the constrained output feedback control. American Control Conference, ACC 2013, Washington, DC, USA, June 17-19.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). Stabilization of nonlinear systems subject to uncertainties and actuator saturation. American Control Conference, ACC 2013, Washington, DC, USA, June 17-19.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). State and parameter estimation for nonlinear systems : a Takagi-Sugeno approach. American Control Conference, ACC 2013, Washington, DC, USA, June 17-19.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2013). State and Parameter Estimation for Time-varying Systems : a Takagi-Sugeno Approach, 5th IFAC Joint Conference 2013, 5th Symposium on System Structure and Control, SSSC 2013, Grenoble, France, February 4-6.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2012). Linear Feedback Control Input under Actuator Saturation : a Takagi-Sugeno Approach, 2nd International Conference on Systems and Control, ICSC12, Marrakech, Morocco, June 20-22.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2011). On the Unknown Input Observer Design : a Decoupling Class Approach, 9th IEEE International Conference on Control and Automation, IEEE ICCA'11, Santiago, Chile, December 19-21.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2011). On the Unknown Input Observer Design : a Decoupling Class Approach with Application to Sensor Fault Diagnosis, 1st International Conference on Automation and Mechatronics, CIAM'11, Oran, Algeria, November 22-24.

Congrès nationaux et workshops

- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2012). Quelques applications de la représentation polytopique à la commande et l'estimation, Groupe de Travail Sûreté, Surveillance, Supervision du GdR Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes Dynamiques (MACS), GT S3, Paris, France, 11 Juin.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin and J. Ragot (2011). Observateurs à entrées inconnues : approche par découplage, 4^{ième} Workshop du Groupement d'Intérêt Scientifique Surveillance, Sûreté, Sécurité des Grands Systèmes, GIS-3SGS'11, Valenciennes, France, 12-13 Octobre.

2

Introduction à la modélisation, l'estimation et la commande des modèles T-S

Sommaire

2.1	Introduction	9
2.2	Représentation T-S des systèmes non linéaires	10
2.3	Transformation par secteurs non linéaires	11
2.4	Stabilité des systèmes T-S	12
2.5	Observabilité des modèles T-S	13
2.6	Synthèse d'observateurs	13
2.6.1	Variables de décision mesurables (VDM)	13
2.6.2	Variables de décision non mesurables (VDNM)	14
2.7	Stabilisation des modèles T-S	15
2.7.1	Stabilisation par retour d'état	15
2.7.2	Stabilisation par retour de sortie	19
2.8	Conclusion	22

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de résultats fondamentaux portant sur la stabilité, l'estimation et la commande des systèmes T-S.

Dans la première partie de ce chapitre nous nous intéressons à la représentation T-S des systèmes non linéaires ainsi qu'à la transformation par secteurs non linéaires qui permet d'obtenir de manière systématique un modèle T-S à partir d'un système non linéaire. Ensuite, nous rappelons les principaux résultats portant sur la stabilité, la synthèse d'observateurs (à variables de décision mesurables et non mesurables) ainsi que la commande PDC (Parallel Distributed Compensation) par retour d'état statique et de sortie statique ou dynamique. Les avantages de l'approche descripteur sont également mis en évidence.

2.2 Représentation T-S des systèmes non linéaires

Comme il a été mentionné dans le chapitre précédent, les modèles T-S peuvent être regroupés en deux familles distinctes ayant les structures indiquées par les figures 2.1 et 2.2.

Modèles T-S couplés	Modèles T-S découplés
L'état global x couple tous les états par le mélange des équations dynamiques des sous-modèles	Chaque sous-modèle possède un espace d'état propre dans lequel il évolue indépendamment
$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi) y_i(t) \end{cases}$

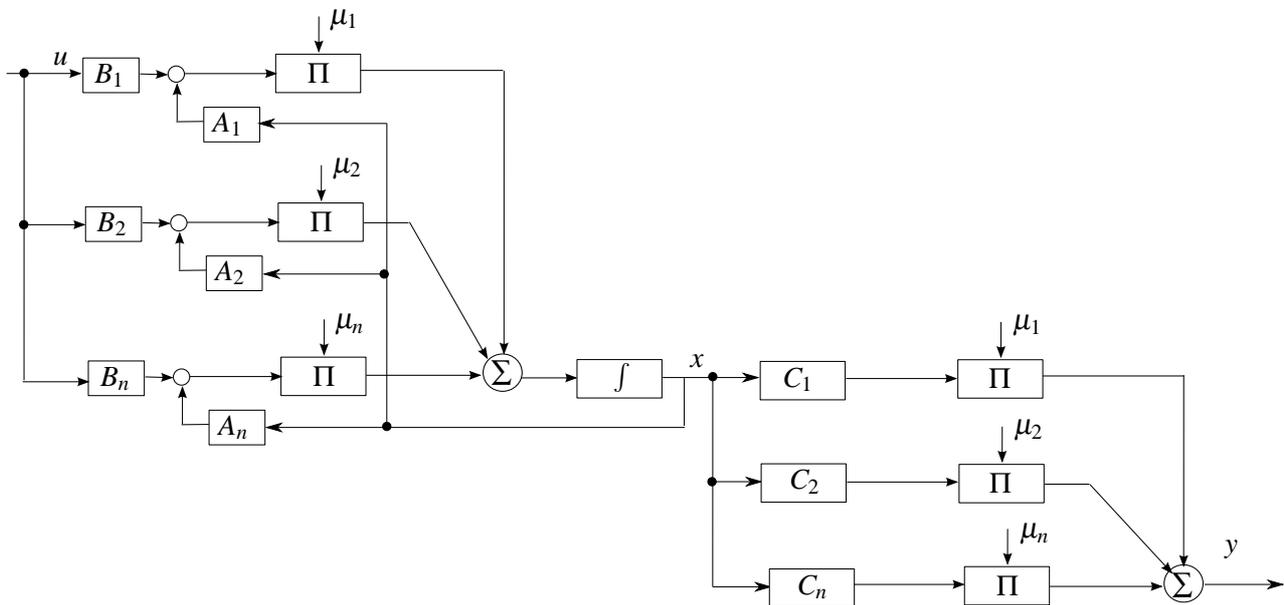


Figure 2.1 – Modèles T-S couplés

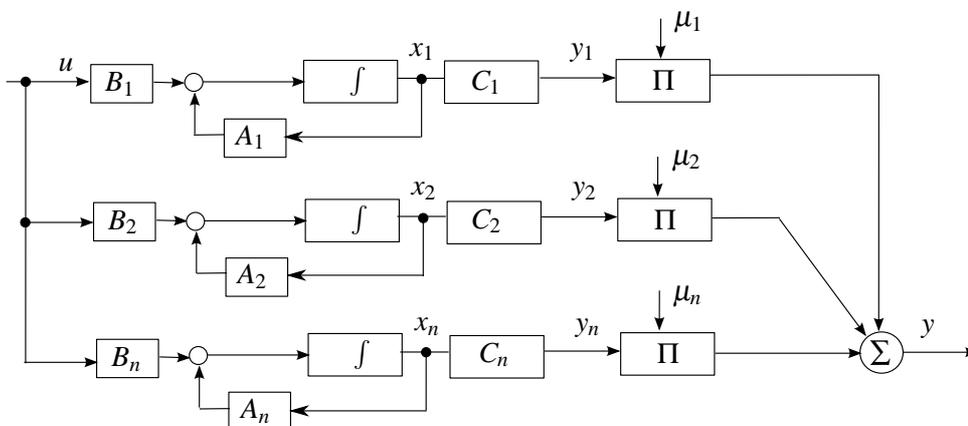


Figure 2.2 – Modèles T-S découplés

Dans la suite du manuscrit, nous nous intéresserons à la forme T-S couplée, cette famille étant la plus largement étudiée dans la communauté scientifique puisqu'elle est facilement déduite de manière systématique, sans aucune perte d'information en utilisant la transformation par secteurs non linéaires à partir de l'expression analytique du système non linéaire dynamique.

Les modèles découplés, sont surtout intéressants pour l'identification où les dimensions différentes des sous-modèles peuvent éviter une sur-paramétrisation dans certaines zones de fonctionnement (Orjuela *et al.* [2013]). Néanmoins, les travaux présentés dans ce mémoire ne concernent pas l'identification et, pour la commande et l'estimation, un modèle découplé peut facilement s'écrire sous la forme d'un modèle couplé (en concaténant les états locaux x_i).

2.3 Transformation par secteurs non linéaires

On détaille ici une méthode permettant de ré-écrire des non-linéarités bornées sous forme polytopique et ainsi de transformer un grand nombre de systèmes non linéaires en système T-S.

Soit le modèle non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ la commande et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ la sortie.

Par simple factorisation, le système (2.1) est ré-écrit sous la forme quasi-LPV suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\xi(t))x(t) + B(\xi(t))u(t) \\ y(t) &= C(\xi(t))x(t) + D(\xi(t))u(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Soit k le nombre de fonctions non linéaires présentes dans le système (2.2). Ces fonctions apparaissent dans les matrices d'état $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ et $D(\cdot)$; elles dépendent généralement de l'état x et de la commande u et sont notées $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, k$. Supposons qu'il existe un compact \mathcal{C} des variables $\xi(t)$ où les non-linéarités sont bornées, dans ce cas les ξ_i vérifient :

$$\xi_i(t) \in [\xi_{i,2}, \xi_{i,1}], i = 1, \dots, k \quad (2.3)$$

Les non-linéarités $\xi_i(t)$ peuvent se ré-écrire de la manière suivante :

$$\xi_i(t) = F_{i,1}(\xi_i(t)) \xi_{i,1} + F_{i,2}(\xi_i(t)) \xi_{i,2} \quad (2.4)$$

où :

$$\begin{cases} \xi_{i,1} &= \max_{x,u} \{\xi_i(t)\} \\ \xi_{i,2} &= \min_{x,u} \{\xi_i(t)\} \\ F_{i,1}(\xi_i(t)) &= \frac{\xi_i(t) - \xi_{i,2}}{\xi_{i,1} - \xi_{i,2}} \\ F_{i,2}(\xi_i(t)) &= \frac{\xi_{i,1} - \xi_i(t)}{\xi_{i,1} - \xi_{i,2}} \end{cases} \quad (2.5)$$

Les fonctions d'activation $\mu_i(\xi(t))$ sont obtenues à partir des fonctions $F_{i,1}(\xi_i(t))$ et $F_{i,2}(\xi_i(t))$ par :

$$\mu_j(\xi(t)) = \prod_{i=1}^{2^k} F_{i,\sigma_i^j}(\xi_i(t)) \quad (2.6)$$

Le nombre de sous-modèles est égal à 2^k . Les indices σ_j^i ($j = 1, \dots, 2^k$ et $i = 1, \dots, k$) sont égaux à 1 ou à 2 et indiquent quelle partition du sous-modèle i ($F_{i,1}$ ou $F_{i,2}$) est utilisée pour définir le sous-modèle j . La relation entre le numéro du sous-modèle i et les indices σ_i^j est donnée par l'équation suivante :

$$i = 2^{n-1} \sigma_i^1 + 2^{n-2} \sigma_i^2 + \dots + 2^0 \sigma_i^n - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \quad (2.7)$$

Les matrices A_i , B_i , C_i et D_i sont obtenues en remplaçant $\xi_i(t)$ par ξ_{i,σ_j} dans $A(\xi(t))$, $B(\xi(t))$, $C(\xi(t))$ et $D(\xi(t))$ dans (2.2). On obtient ainsi le système T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{2^k} \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{2^k} \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

Remarque 1. *Il est important de souligner que l'écriture polytopique issue d'une représentation LPV peut généralement s'écrire de manière équivalente, au moins sur un compact de l'espace d'état, sous forme T-S. Inversement, un système T-S peut également être vu comme un système LPV.*

En effet, si les paramètres varient dans un ensemble compact, il est possible de manière directe et systématique (comme il est démontré dans le chapitre 3), de ré-écrire ces modèles sous forme T-S. Cette idée est exploitée dans le chapitre 3 (estimation paramétrique) et y est largement détaillée.

2.4 Stabilité des systèmes T-S

Considérons le système variant dans le temps

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (2.9)$$

ce système est asymptotiquement stable (stabilité quadratique), s'il existe une matrice de Lyapunov P symétrique positive $P = P^T > 0$ telle que la fonction de Lyapunov candidate

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \geq 0 \quad (2.10)$$

est positive, nulle en $x = 0$ et décroissante dans le temps. Le même raisonnement est appliqué pour le système non linéaire représenté par le modèle T-S autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (2.11)$$

avec les fonctions d'activation $\mu_i(\xi(t))$ vérifiant la propriété de somme convexe (B.2) :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Lemme 1. (Tanaka et Wang [2001]) *Le système (2.11) est quadratiquement stable s'il existe une matrice P symétrique positive $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour $i = 1, \dots, n$:*

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (2.12)$$

Démonstration. *La démonstration s'appuie sur le choix d'une fonction de Lyapunov candidate $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ où $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. La propriété de somme convexe des fonctions d'activation permet d'obtenir les n inégalités matricielles (LMIs) à résoudre simultanément.*

Un enjeu scientifique important à l'heure actuelle est la relaxation des conditions de stabilité. Différentes approches sont possibles, on peut ainsi citer les travaux de (Sala et Arino [2007]) où plusieurs termes dans $\dot{V}(x)$ sont fractionnés en utilisant la propriété de somme convexe ou bien utiliser des fonctions de Lyapunov plus complexes comme dans (Tanaka *et al.* [2003], Kruszewski [2006]), etc.

2.5 Observabilité des modèles T-S

Etudier l'observabilité d'un système consiste à établir les conditions sous lesquelles l'état du système peut être reconstruit à partir des entrées et des sorties mesurées.

Pour les systèmes non linéaires (2.1), le problème d'observabilité, lié souvent au concept d'indiscernabilité, a largement été étudié et le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux présentés dans (Besançon [2007], Fossard et Normand-Cyrot [1993] et Diop et Fliess [1991]) par exemple.

Pour les modèles T-S, une condition nécessaire d'observabilité peut être donnée par la contrainte d'observabilité des modèles locaux, i.e. de chaque paire (A_i, C_i) des sous-modèles du système, ou au moins leur détectabilité (Ichalal [2009], Kamidi [2000], Angelis [2001]).

Remarque 2. Une condition nécessaire de commandabilité des modèles T-S se déduit de manière duale à la condition d'observabilité (i.e. commandabilité des modèles locaux).

2.6 Synthèse d'observateurs

Considérons le modèle T-S donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

L'observateur le plus commun pour ce type de systèmes consiste en une extension T-S de l'observateur de Luenberger (Luenberger [1971]). Il est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{\xi}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $\hat{x}(t)$ et $\hat{\xi}(t)$ qui représentent respectivement l'estimé de l'état $x(t)$ et des variables de décision $\xi(t)$. Les gains L_i de l'observateur sont déterminés afin que l'estimé de l'état $\hat{x}(t)$ tende asymptotiquement vers l'état $x(t)$. Il faut donc assurer la stabilité du système générant l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

On rappelle que les fonctions d'activation $\mu_i(\xi(t))$ du modèle T-S (2.13) vérifient la propriété de somme convexe et dépendent des variables dites de décision ou de prémisse $\xi(t)$. Ces variables peuvent être mesurables (entrées/sortie du système) ou non mesurables (état du système,...). Il est important de noter que la classe des modèles T-S à variables de décisions non mesurables est plus large que celle à variables de décision mesurables du fait qu'une partie ou la totalité des variables d'état apparaît dans les fonctions μ_i . Dans ce qui suit, les deux cas sont présentés pour la synthèse d'observateurs.

2.6.1 Variables de décision mesurables (VDM)

Dans le cas de variables de décision mesurables, la synthèse d'observateurs s'appuie sur la disponibilité des variables de décision. Par conséquent, le système et son observateur partagent les mêmes fonctions d'activation. Ceci présente comme avantage la possibilité de factoriser ces dernières lors de l'étude de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état définie par $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Nous avons ainsi :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i - L_i C)e(t) \quad (2.15)$$

Une simple analyse de stabilité du système (2.15) permet de trouver les gains L_i recherchés, et qui peuvent être donnés, par exemple, par le théorème suivant :

Lemme 2. (Patton et al. [1998]). *L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice P , $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites pour $i = 1, \dots, n$:*

$$PA_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < 0 \quad (2.16)$$

Les gains de l'observateur sont obtenus par l'équation suivante :

$$L_i = P^{-1} K_i \quad (2.17)$$

Dans le cas où la sortie dépend d'une seule matrice C (2.13), les mêmes relaxations qu'en analyse de stabilité peuvent être faites. Pour une sortie polytopique ($y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) C_i x(t)$), le conservatisme de l'étude de stabilité d'un système défini par une double somme peut être réduit (Tuan *et al.* [2001]), (Sala et Arino [2007]).

2.6.2 Variables de décision non mesurables (VDNM)

L'étude des systèmes à variables de décision non mesurables est beaucoup plus réaliste et fait l'objet d'un intérêt grandissant de la part des chercheurs ces dernières années. Cela peut s'expliquer du fait que cette classe de modèles T-S est plus large que celle à variables de décision mesurables. En effet, le modèle T-S obtenu par la transformation en secteurs non linéaires fait apparaître, dans la majorité des cas, une partie ou la totalité des variables d'état dans les fonctions d'activation sachant que ces variables d'état ne sont pas toutes accessibles. On peut ainsi citer les travaux suivants portant sur le sujet (Yoneyama [2008], Bergsten et Palm [2000] et Ichalal *et al.* [2012]).

La présence de variables de décision non mesurables empêche d'écrire simplement la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. Une des solutions proposées consiste à ré-écrire le système T-S à VDNM sous forme d'un système T-S incertain où les incertitudes sont bornées. Les gains de l'observateur sont alors déterminés de manière à assurer la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état, tout en assurant une atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de l'influence des incertitudes vers l'erreur d'estimation d'état. A cet effet, l'équation d'évolution de l'état est ré-écrite sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + (\mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)) \right) \quad (2.18)$$

En utilisant les définitions (2.14) et (2.18), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est ainsi donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i - L_i C) e(t) + \Delta A(t) x(t) + \Delta B(t) u(t) \quad (2.19)$$

où $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ jouent le rôle d'incertitudes et sont définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A(t) = \sum_{i=1}^n (\mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t))) A_i \\ \quad = \mathcal{A} \Sigma_A(t) E_A \\ \Delta B(t) = \sum_{i=1}^n (\mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t))) B_i \\ \quad = \mathcal{B} \Sigma_B(t) E_B \end{array} \right. \quad (2.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \text{diag}(\delta_1(t) I_{n_x}, \dots, \delta_n(t) I_{n_x}), \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_n \end{bmatrix}, \Sigma_B(t) = \text{diag}(\delta_1(t) I_{n_u}, \dots, \delta_n(t) I_{n_u}), \\ E_A &= \begin{bmatrix} I_{n_x} & \dots & I_{n_x} \end{bmatrix}^T, E_B = \begin{bmatrix} I_{n_u} & \dots & I_{n_u} \end{bmatrix}^T, \delta_i(t) = \mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les gains de l'observateur sont ainsi donnés par le théorème suivant :

Théorème 1. (Ichalal et al. [2010]) *Le système (2.19) est stable et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de la paire $u(t), x(t)$ vers l'erreur d'estimation est borné par γ , s'il existe deux matrices symétriques et définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ et des scalaires positifs λ_1, λ_2 et $\bar{\gamma}$ tels que les LMIs suivantes soient vérifiées pour $i, j = 1, \dots, n$:*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - K_i C) + I_{n_x} & 0 & 0 & P_1 A & P_1 B \\ * & \mathbb{S}(P_2 A_j) + \lambda_1 E_A^T E_A & P_2 B_j & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{\gamma} I_{n_u} + \lambda_2 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ * & * & * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & * & 0 & -\lambda_1 I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.22)$$

Les gains de l'observateur et le taux d'atténuation γ du transfert des incertitudes vers l'erreur d'estimation sont donnés par :

$$L_i = P_1^{-1} K_i \quad (2.23)$$

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \quad (2.24)$$

2.7 Stabilisation des modèles T-S

La stratégie de commande la plus répandue pour la stabilisation des systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S est la commande PDC (Compensation Parallèle Distribuée -Parallel Distributed Compensation). Introduite dans (Wang *et al.* [1996] et Tanaka *et al.* [1998]), cette loi de commande dépend des mêmes fonctions d'activation que celles utilisées dans le modèle T-S considéré. La synthèse peut se faire par retour d'état classique (à condition que tous les états soient mesurables ou estimables), par retour d'état à base d'observateurs, ou bien par retour de sortie (statique ou dynamique). L'approche descripteur est également considérée afin de réduire le nombre de conditions à satisfaire mais aussi pour supprimer certains couplages entre les gains de commande et les matrices de Lyapunov, principales sources de conservatisme.

2.7.1 Stabilisation par retour d'état

Stabilisation par retour d'état classique

Pour le modèle T-S :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.25)$$

la loi de commande PDC par retour d'état est donnée par l'expression suivante :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j x(t) \quad (2.26)$$

Le système muni de sa commande se ré-écrit ainsi sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (2.27)$$

En considérant la fonction de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, la stabilité du système (2.27) est assurée s'il existe une matrice symétrique définie positive $P_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et des matrices $R_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ telles que les LMIs suivantes soient vérifiées pour $i, j = 1, \dots, n$ (Tanaka et Wang [2001]) :

$$P_1 A_i^T + A_i P_1 - R_j^T B_i^T - B_i R_j < 0 \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

Les gains K_j du contrôleur sont alors donnés par :

$$K_j = P_1^{-1} R_j \quad \text{avec} \quad P_1 = P^{-1} \quad (2.29)$$

Stabilisation de systèmes T-S à VDM par retour d'état à base d'observateurs

Dans le cas où une partie ou la totalité des états du système (2.25) n'est pas disponible, une solution consiste à considérer une commande à base d'observateur. Cette commande est alors choisie pour les systèmes T-S à VDM sous la forme suivante :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j \hat{x}(t) \quad (2.30)$$

où la dynamique de l'observateur s'explique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

En combinant l'équation de commande (2.30) et celle de l'observateur (2.31), tout en définissant l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, les équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) ((A_i - B_i K_j) x(t) + B_i K_j e(t)) \\ \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i - L_i C_j) e(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

Le système à état augmenté (2.33) est alors déduit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) G_{ij} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) G_{ii} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}, G_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

En considérant la fonction de Lyapunov $V(x_a(t)) = x_a^T(t) P x_a(t)$, la stabilité du système augmenté (2.33) est assurée si les conditions suivantes sont vérifiées pour $i, j = 1, \dots, n$ (Tanaka et Wang [2001]) :

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0 \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &< 0, \quad j > i \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les gains K_j du contrôleur et L_i de l'observateur sont alors donnés par les BMIs (inégalités matricielles bilinéaires) (2.35). L'approche descripteur, présentée en 2.7.2, permet de linéariser ces BMIs.

Stabilisation de systèmes T-S à VDNM par retour d'état à base d'observateurs

Dans le cas des systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S à VDNM, la commande PDC par retour d'état ainsi que la dynamique de l'observateur sont alors données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = -\sum_{j=1}^n \mu_j(\hat{\xi}(t)) K_j \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.36)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est régie par l'équation :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \mu_k(\hat{\xi}(t)) \\ &((A_i - A_j - (B_i - B_j)K_k + L_j(C_k - C_i))x(t) + (A_j - L_j C_k + (B_i - B_j)K_k)e(t)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le système d'état augmenté (2.38) est alors déduit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \mu_k(\hat{\xi}(t)) G_{ijk} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) G_{ijj} x_a(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < k} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\hat{\xi}(t)) \mu_k(\hat{\xi}(t)) \frac{G_{ijk} + G_{ikj}}{2} x_a(t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}, G_{ijk} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_k & B_i K_k \\ S_{ijk}^1 & S_{ijk}^2 \end{pmatrix} \\ S_{ijk}^1 &= (A_i - A_j) - (B_i - B_j)K_k + L_j(C_k - C_i) \\ S_{ijk}^2 &= A_j - L_j C_k + (B_i - B_j)K_k \end{aligned} \quad (2.39)$$

En considérant la fonction de Lyapunov $V(x_a(t)) = x_a^T(t) P x_a(t)$, la stabilité du système augmenté (2.38) est assurée si les conditions suivantes sont vérifiées pour $i, j, k = 1, \dots, n$ (Tanaka et Wang [2001]) :

$$\begin{aligned} G_{ijj}^T P + P G_{ijj} &< 0 \\ \left(\frac{G_{ijk} + G_{ikj}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ijk} + G_{ikj}}{2} \right) &< 0, \quad \forall i, j < k \end{aligned} \quad (2.40)$$

Les gains K_k du contrôleur et L_j de l'observateur sont alors obtenus en linéarisant les BMIs (inégalités matricielles bilinéaires) (2.40) par simple changement de variables et complément de Schur ou en utilisant l'approche descripteur.

Stabilisation par retour d'état des systèmes incertains

En pratique, il existe plusieurs sources d'incertitude affectant les systèmes physiques ; celles-ci doivent être prises en compte lors de la modélisation. Ces incertitudes peuvent être dues à une connaissance imparfaite des valeurs numériques des paramètres du système, à des approximations de modélisation, à la présence de perturbations exogènes ou endogènes, ou à la présence de certains phénomènes

dynamiques rapides négligés. Tous ces phénomènes induisent un écart parfois considérable entre le comportement réel d'un système et celui obtenu par simulation de son modèle. Afin d'éviter ces écarts, ou d'en minimiser les effets, des techniques de commande robuste ont été mises en oeuvre (Henrion [1999], Daafouz [1997], Zhou *et al.* [1996]). Nous nous intéressons dans ce qui suit à la stabilisation par retour d'état des systèmes non linéaires incertains représentés sous forme de modèle T-S.

Considérons le modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) ((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)) \quad (2.41)$$

où les incertitudes $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ qui affectent les matrices d'état sont communes à tous les sous-systèmes et sont structurées sous la forme :

$$\Delta A(t) = A \Sigma_A(t) E_A \quad (2.42)$$

$$\Delta B(t) = B \Sigma_B(t) E_B \quad (2.43)$$

les variations $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$ étant inconnues mais bornées :

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \forall t \quad (2.44)$$

$$\Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I, \forall t \quad (2.45)$$

Considérons la loi de commande pour assurer le recalage à l'origine de l'état du système (2.41) :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j x(t) \quad (2.46)$$

où les gains $K_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ sont à déterminer.

En reportant (2.46) dans (2.41), nous obtenons :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i - B_i K_j + \Delta A(t) - \Delta B(t) K_j) x(t) \quad (2.47)$$

Afin d'analyser la stabilité de l'état $x(t)$, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (2.48)$$

où $P \in \mathbb{R}^n$ est une matrice symétrique définie positive.

Pour assurer la stabilité de (2.47), les conditions à satisfaire sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{S}(A_i P_1 - B_i R_j) + \lambda_A A A^T + \lambda_B B B^T & P_1 E_A^T & R_j^T E_B^T \\ * & -\lambda_A I & 0 \\ * & * & -\lambda_B I \end{pmatrix} < 0, i, j = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

avec $P_1 = P^{-1}$, λ_A, λ_B des scalaires positifs et $\mathbb{S}(A_i P_1 - B_i R_j) = A_i P_1 - B_i R_j + P_1 A_i^T - R_j^T B_i^T$. Les gains du contrôleur K_j (2.46) sont donnés par :

$$K_j = R_j P_1^{-1} \quad (2.50)$$

pour $i, j = 1, \dots, n$.

2.7.2 Stabilisation par retour de sortie

Dans cette section, nous nous intéressons à la commande par retour de sortie statique ou dynamique. Un contrôleur dynamique permet notamment d'améliorer les performances en boucle fermée d'un système dynamique et a souvent été utilisé dans le cadre de la commande robuste (Li *et al.* [2000], Yoneyama *et al.* [2001], Yoneyama [2006]). Un contrôleur statique s'avère particulièrement intéressant dans le cadre d'applications nécessitant un faible coût de calcul puisque, contrairement aux lois de commande à base d'observateurs ou par retour de sortie dynamique, sa conception ne nécessite pas la résolution d'équations différentielles en ligne (Chadli *et al.* [2002], Huang et Nguang [2006]). Notons cependant qu'une loi de commande par retour de sortie fait apparaître dans son expression de nombreux termes croisés (couplage entrées-sorties) et conduit donc à des conditions de stabilisation LMI qui sont assez conservatives (Bouarar [2009]).

Dans cette section, l'accent est également mis sur les modèles descripteurs non linéaires sous forme T-S. En effet, cette représentation appliquée à la synthèse de la commande consiste à introduire une dynamique virtuelle sur l'entrée et la sortie et se base sur une réécriture du système en boucle fermée sous la forme d'un modèle descripteur facilitant le calcul de la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov. Cette approche permet non seulement de réduire le nombre de LMIs à résoudre, mais également de supprimer certains couplages entre les gains de commande et les matrices de Lyapunov, principales sources de conservatisme (Lin *et al.* [1999], Taniguchi *et al.* [2001], Guelton *et al.* [2009], Tanaka *et al.* [2007] et Guelton *et al.* [2009]). Ainsi, dans ce qui suit, nous proposons la formulation de conditions de stabilisation de systèmes non linéaires, sous forme de modèles T-S, par retour de sortie (statique et dynamique) basée sur l'approche descripteur.

Stabilisation par retour de sortie statique

Soit le système T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_j(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_j(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.51)$$

Afin d'assurer la stabilisation du système (2.51), considérons la commande par retour de sortie statique donnée par :

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j y(t) \quad (2.52)$$

En se basant sur l'approche descripteur et en introduisant une dynamique virtuelle sur l'entrée et la sortie du système, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} 0 \cdot \dot{u}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) K_i y(t) - u(t) \\ 0 \cdot \dot{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) - y(t) \end{cases} \quad (2.53)$$

L'état augmenté $x_a(t) = (x^T(t) \quad u^T(t) \quad y^T(t))^T$ obtenu à partir des équations (2.51) et (2.53) est régi par la dynamique :

$$E \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) \mathcal{A}_i^s x_a(t) \quad (2.54)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n_u} & 0 \\ 0 & 0 & 0_m \end{pmatrix}, \mathcal{A}_i^s = \begin{pmatrix} A_i & B_i & 0 \\ 0 & -I_{n_u} & K_i \\ C_i & D_i & -I_m \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov

$$V(t) = x_a^T(t) E^T P x_a(t) \quad (2.56)$$

avec la condition

$$E^T P = P^T E \geq 0 \quad (2.57)$$

Un des choix possibles pour la matrice P assurant la condition (2.57) est de la prendre sous forme bloc diagonale $P = \text{diag}(P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2, P_3 > 0$. Dans ce cas, $V(t)$ est une fonction quadratique en l'état du système, en effet, $V(t) = x^T(t) P_1 x(t)$. La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov (2.56) s'explique :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\xi(t)) x_a^T(t) ((\mathcal{A}_i^s)^T P + P^T \mathcal{A}_i^s) x_a(t) \quad (2.58)$$

Afin d'assurer la stabilité du système (2.54), la condition à satisfaire est $\dot{V}(t) < 0$. Ainsi tenant compte de (2.55) et (2.58), les LMIs à résoudre par rapport à P_1, P_2, P_3 et $R_j, j = 1, \dots, n$ sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} A_i^T P_1 + P_1 A_i & P_1 B_i & C_i^T P_3 \\ * & -P_2 - P_2^T & R_i + D_i^T P_3 \\ * & * & -P_3 - P_3^T \end{pmatrix} < 0 \quad (2.59)$$

Les gains du retour de sortie sont ainsi donnés par :

$$K_i = (P_2^T)^{-1} R_i \quad (2.60)$$

Stabilisation par retour de sortie dynamique

Afin de stabiliser le système non linéaire T-S (2.51), considérons maintenant la commande par retour de sortie dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= \sum_{i=1}^n h_i(\xi(t)) (A_i^c x_c(t) + B_i^c y(t)) \\ u(t) &= \sum_{i=1}^n h_i(\xi(t)) (C_i^c x_c(t) + D_i^c y(t)) \end{cases} \quad (2.61)$$

où $x^c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ est l'état du correcteur et où les matrices A_i^c, B_i^c, C_i^c et D_i^c du contrôleur, de dimensions appropriées, sont déterminées pour assurer la stabilité du système augmenté défini ci-dessous.

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x_c^T(t) & u^T(t) & y^T(t) \end{pmatrix}^T$$

Comme précédemment, en utilisant l'approche descripteur, à partir des équations du système (2.51) et de celles du contrôleur dynamique (2.61), nous avons :

$$E \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\xi(t)) \mathcal{A}_i^d x_a(t) \quad (2.62)$$

où E et \mathcal{A}_i^d s'explicitent :

$$E = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_i^d = \begin{pmatrix} A_i & 0 & B_i & 0 \\ 0 & A_i^c & 0 & B_i^c \\ 0 & C_i^c & -I & D_i^c \\ C_i & 0 & D_i & -I \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = x_a^T(t) E^T P x_a(t) \quad (2.64)$$

vérifiant les conditions de symétrie et de positivité :

$$E^T P = P^T E \geq 0 \quad (2.65)$$

En fonction des définitions (2.62) et des contraintes (2.65), la matrice P est choisie sous la forme :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

avec

$$P_{11} = P_{11}^T > 0, P_{22} = P_{22}^T > 0, P_{33} \text{ inversible} \quad (2.67)$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov est alors donnée par :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\xi(t)) x_a^T(t) ((\mathcal{A}_i^d)^T P + P^T \mathcal{A}_i^d) x_a(t) \quad (2.68)$$

Pour assurer la stabilité de (2.62), il suffit de garantir l'inégalité $\dot{V}(t) < 0$. Les LMIs à résoudre par rapport à $P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{41}, \dots, P_{44}, \bar{A}_i^c, \bar{B}_i^c, \bar{C}_i^c$ et \bar{D}_i^c pour $i = 1, \dots, n$ sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} M_i^{11} & C_i^T P_{42} & P_{11} B_i + C_i^T P_{43} + P_{41}^T D_i & C_i^T P_{44} - P_{41}^T \\ * & (\bar{A}_i^c)^T + \bar{A}_i^c & (\bar{C}_i^c)^T + P_{42}^T D_i & \bar{B}_i^c - P_{42}^T \\ * & * & M_i^{33} & \bar{D}_i^c + D_i^T P_{44} - P_{43}^T \\ * & * & * & -P_{44} - P_{44}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (2.69)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_i^{11} &= A_i^T P_{11} + P_{11} A_i + C_i^T P_{41} + P_{41}^T C_i \\ M_i^{33} &= -P_{33} - P_{33}^T + P_{43}^T D_i + D_i^T P_{43} \end{aligned} \quad (2.70)$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Les gains du contrôleur sont ainsi donnés par :

$$\begin{cases} A_i^c &= P_{22}^{-1} \bar{A}_i^c & B_i^c &= P_{22}^{-1} \bar{B}_i^c \\ C_i^c &= (P_{33}^T)^{-1} \bar{C}_i^c & D_i^c &= (P_{33}^T)^{-1} \bar{D}_i^c \end{cases} \quad (2.71)$$

Remarque 3. Relation entre la stabilisation par retour d'état à base d'observateurs et stabilisation par retour de sortie dynamique : il est important de noter que la commande par retour d'état observé est un cas particulier de la commande par retour de sortie dynamique. En effet, si l'on considère le premier

cas de figure, nous rappelons que l'observateur et la commande pour le cas mono-modèle (linéaire) sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.72)$$

ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.73)$$

ce qui correspond bien à l'équation du contrôleur par retour de sortie dynamique pour $x_c(t) = \hat{x}(t)$, $A^c = A - BK - LC$, $B^c = L$, $C^c = -K$ et $D^c = 0$. Cette remarque peut facilement être transposée pour la stabilisation non linéaire T-S.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, les concepts de base relatifs aux modèles T-S ainsi que des conditions suffisantes de stabilité ont été présentés. Ces dernières se basent sur la théorie de Lyapunov et sont écrites sous la forme de LMI afin d'être résolues par les outils classiques de l'optimisation convexe. Nous avons ensuite présenté des méthodes de synthèse d'observateurs pour les différents cas de figure (VDM et VDNM) ainsi que des contrôleurs assurant la stabilisation des systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S. Des commandes statiques et dynamiques, par retour d'état et de sortie ont été détaillées. L'accent a également été mis sur le lien entre la stabilisation par retour d'état à base d'observateurs et la stabilisation par retour de sortie dynamique.

3

Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires à paramètres variants dans le temps

Sommaire

3.1 Introduction	23
3.1.1 Défauts, pannes et diagnostic	24
3.1.2 Estimation paramétrique : systèmes variants dans le temps	25
3.1.3 Contribution du chapitre	26
3.2 Systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps	26
3.2.1 Exemple introductif : cas d'un seul paramètre	27
3.2.2 Synthèse d'observateur	27
3.2.3 Atténuation du bruit de mesure	32
3.2.4 Exemple numérique	33
3.3 Systèmes non linéaires à paramètres variant dans le temps	36
3.3.1 Synthèse d'observateur	37
3.3.2 Application à une station d'épuration d'eau	41
3.3.3 Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteurs	48
3.4 Conclusion	55

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche basée sur la ré-écriture polytopique et la transformation par secteurs non linéaires du comportement de paramètres variants dans le temps. Le but recherché est la synthèse d'un observateur assurant l'estimation simultanée de l'état et des variations paramétriques du système en transformant le modèle original à paramètres variants sous forme de modèle de Takagi-Sugeno (T-S) à variables de décision non mesurables. Les gains de l'observateur sont obtenus en résolvant un problème d'optimisation exprimé sous forme d'inégalités matricielles linéaires.

3.1.1 Défauts, pannes et diagnostic

Un système physique est souvent soumis à des perturbations, non directement mesurables, qui ont pour origine des phénomènes extérieurs dûs à l'environnement ou des phénomènes internes liés à des modifications du système (vieillessement des composants par exemple). Ces perturbations ont des effets néfastes sur le comportement du système et peuvent être à l'origine de son dysfonctionnement. Pour garantir, d'une part, la sécurité d'un procédé et de son environnement et, d'autre part, le respect de la mission qui lui a été confiée, il faut donc connaître à chaque instant et le plus précisément possible son état de fonctionnement. En particulier, on doit être capable de dire si le fonctionnement est normal ou si un dysfonctionnement est apparu. Aussi, il est intéressant de connaître la nature de ce dysfonctionnement (panne de capteurs, d'actionneurs, défauts de transmission d'information, etc.); c'est l'objectif du diagnostic.

Un défaut est un événement qui agit sur un système, il peut changer ses propriétés et modifier sa dynamique conduisant à une dégradation des performances du procédé voir à son instabilité (Isermann [1997]). Les défauts proviennent essentiellement des actionneurs (défaillance au niveau de la partie opérative conduisant à la perte d'une action de commande sur le système), des capteurs (l'information récupérée ne correspond pas à la valeur de la grandeur physique à mesurer), ou du procédé lui-même (défauts système qui reflètent un changement dans les paramètres du système, ce qui induit un changement du comportement dynamique de ce dernier) (Staroswiecki et Gehin [2001], Blanke *et al.* [2003]).

Les défauts sont également classés en défauts additifs et défauts multiplicatifs. Les premiers représentés par des signaux externes et non par des changements dans les matrices du système sont plus faciles à traiter, d'où l'idée de transformer des défauts multiplicatifs sous forme additive dans la plupart des travaux sur le sujet (Noura *et al.* [2000], Rodrigues [2005]).

Les problèmes associés à l'amélioration des performances des systèmes, de leur efficacité, fiabilité et sécurité, nécessitent la mise en place de systèmes de surveillance et de diagnostic performants et précis. Différents travaux sur le sujet peuvent être cités comme référence (Blanke *et al.* [2003], Maquin et Ragot [2000], Chen et Patton [1999], Ragot *et al.* [1990]). Deux catégories d'approches pour le diagnostic peuvent être répertoriées, celles basées sur les signaux et celles basées sur les modèles. Les premières détectent les défauts en testant des propriétés spécifiques (contenu spectral par exemple) de différents signaux de mesure des entrées-sorties du système. La seconde catégorie d'approches est basée sur l'utilisation d'un modèle mathématique. Ces méthodes s'appuient sur la comparaison du comportement observé et du comportement attendu (prédit par un modèle) du système. Elles sont généralement constituées de deux étapes : la génération des résidus et leur évaluation grâce à un système de décision (Isermann [2006], Chen et Patton [1999], Ichalal *et al.* [2009b]). Le rôle de ce système de décision est de déterminer si l'évolution des résidus est significative pour conclure de l'occurrence d'un défaut. Si la détection de l'occurrence d'un défaut est en général assez aisée, en revanche, les tâches de localisation (isolation) et d'évaluation (amplitude et variation) sont beaucoup plus délicates.

La technique la plus répandue pour la localisation de défauts est celle basée sur les bancs d'observateurs. En effet, une analyse des résidus issus de ces observateurs couplée à une logique de décision (table des signatures), connue sous le nom de *column matching* (Gertler [1988], Gertler [1991], Gertler [1998]), permet de localiser les défauts (Ding [2008], Isermann [2006]). Pour l'évaluation des défauts, plusieurs approches peuvent être citées, dont celles basées sur les observateurs à entrées-inconnues ou sur l'estimation paramétrique.

Les observateurs à entrées inconnues sont largement utilisés pour le diagnostic de défauts systèmes en présence d'incertitudes afin de rendre les résidus insensibles aux incertitudes considérées. Plusieurs travaux sur le sujet peuvent être cités (Hou et Muller [1992], Darouach *et al.* [1994], Chang [1997], de Oliveira *et al.* [1999]). Une des approches ayant rencontré le plus de succès dans la littérature est celle qui se base sur le découplage. L'idée consiste à rendre l'erreur d'estimation d'état indépendante

des entrées inconnues (EIs) (Basile et Marro [1969], Yang et Wilde [1988], Chang [1997], Chen et Chen [2010], Hammouri et Tmar [2010]). L'inconvénient majeur de cette méthode est la condition de rang sur certaines matrices du système, qui devient d'autant plus restrictive que le nombre d'entrées inconnues croît. L'autre approche consiste en l'estimation simultanée des EIs et des états du système par des observateurs PI (proportionnel intégral). Des exemples peuvent être trouvés dans (Shumsky [2008], Ichalal *et al.* [2009b] et Ichalal *et al.* [2009a]), cependant les développements proposés ne considèrent que le cas d'EIs constantes. Des extensions ont été proposées, dans (Lendek *et al.* [2010]) par exemple, le cas d'EIs sous forme polynomiale a été traité. Dans (Marx *et al.* [2007]), les auteurs proposent une méthode pour l'estimation d'état et le diagnostic à base d'observateur de systèmes T-S sous forme descripteur.

Dans (Bezzaoucha *et al.* [2011b]), un observateur pour des systèmes linéaires discrets en présence d'entrées inconnues en relaxant les contraintes structurelles d'observabilité des EIs a été proposé. Le principe retenu consiste à caractériser la classe d'entrées inconnues pour laquelle le découplage exact de l'erreur d'estimation d'état par rapport à l'entrée inconnue, sans aucune condition de rang, en explicitant de façon analytique la famille des solutions de type exponentiel. Par la suite, ce principe a été étendu en décomposant n'importe quelle entrée inconnue en deux termes. Le premier écrit sous forme d'une somme d'exponentielles assurant les conditions du découplage exact de l'erreur d'estimation d'état. L'effet du terme restant sur l'estimation d'état est alors atténué par l'approche \mathcal{L}_2 . Une stratégie de placement de pôles a également été appliquée afin d'améliorer les performances de l'observateur synthétisé et illustré par une application au diagnostic de défauts capteurs avec génération de résidus et banc d'observateurs proposée dans (Bezzaoucha *et al.* [2011a]).

Pour l'estimation de pannes multiplicatives (défauts paramètres), une solution serait de considérer des méthodes d'estimation par l'identification en ligne de système, ou par des observateurs adaptatifs. Le diagnostic peut être établi en comparant les valeurs de paramètres estimés en ligne avec leurs valeurs nominales, en mode non défaillant (absence de panne), supposées connues. L'identification en ligne se complique dans le cas des systèmes à variables d'état non directement mesurables, rendant l'estimation en-ligne des paramètres beaucoup plus difficile.

Dans ce qui suit, une attention particulière a été portée à l'estimation simultanée des états et des paramètres variants dans le temps (représentant des défauts non additifs système, actionneurs, ou capteurs) aussi bien pour les systèmes linéaires que non linéaires.

3.1.2 Estimation paramétrique : systèmes variants dans le temps

Comme cela a été souligné dans la section précédente, les défauts les plus difficiles à détecter, localiser et estimer qu'ils soient additifs ou multiplicatifs, sont les défauts affectant les systèmes. Ces derniers peuvent être représentés comme des paramètres du modèle variants dans le temps.

La prise en compte de ces paramètres dans le modèle d'un système a pour effet d'augmenter le niveau de complexité pour la synthèse d'observateurs. Dans ce cas, les observateurs conventionnels développés pour les systèmes invariants ne peuvent être appliqués et ce sont des observateurs dits adaptatifs pour l'estimation simultanée des états et des paramètres qui doivent être considérés. Ces observateurs présentent l'avantage de donner une estimation optimale au sens d'un critère prédéfini du/ou des paramètres, ce qui allège considérablement le dispositif de diagnostic. En effet, dans ce cas, il n'est plus nécessaire de faire appel aux bancs d'observateurs. Cependant, le manque d'informations sur les variations des paramètres considérés rend difficile l'estimation de ces paramètres.

Plusieurs méthodes ont été publiées à ce sujet, par exemple, le cas des systèmes linéaires à paramètres constants ou faiblement variables a été traité dans (Li *et al.* [2011], Zhang et Xu [2001], Zhang [2002], Lubenova [1999], Rajamani et Hedrich [1995], Besançon [2000], Cho et Rajamani [1997] et Kenne *et al.* [2008]). Pour des systèmes comme les bioprocédés, l'estimation des états et des paramètres non mesu-

rables est souvent conduite sur la base de filtres de Kalman étendus. Le vecteur d'état est augmenté du nombre de paramètres à estimer et les paramètres cinétiques sont ainsi considérés comme des états supplémentaires. Cependant, le problème de cette approche est l'absence de garantie de convergence et de stabilité, ainsi que la difficulté associée au réglage des paramètres (Chamilothis [1987], Dimitratos *et al.* [1991], Valdes-Gonzalez [2002]). Il existe aussi des observateurs dont les applications sont plus restrictives mais dont la convergence a été démontrée, tels que ceux utilisés dans la méthode dite Recursive Prediction Error (RPE). Cette méthode permet d'estimer simultanément l'état et les paramètres d'un procédé selon une procédure hiérarchique à deux niveaux. L'état est estimé par un filtre de Kalman et l'estimation des paramètres est réalisée de manière récursive en minimisant une fonction quadratique de l'erreur de prédiction, par la méthode du gradient (Ljung [1979], Ljung et Soderström [1983], Valdes-Gonzalez [2002]). Par contre, dans le cas où les systèmes sont non linéaires, la synthèse d'observateurs d'état est plus délicate et les approches envisageables utilisent des algorithmes linéaires appliqués à une approximation des systèmes non linéaires, ou des algorithmes non linéaires spécifiques, ne servant qu'à la classe de systèmes pour lesquels ils ont été conçus (Dochain [1986], Gauthier *et al.* [1992], Alcorta Garcia et Frank [1997], Valdes-Gonzalez [2002], Carlos-Hernandez *et al.* [2009]).

Une approche efficace ayant rencontré un grand succès ces dernières années est la ré-écriture du système non linéaire sous une forme plus simple qui est celle d'un modèle T-S. Ce dernier est obtenu, sans approximation, à partir du modèle non linéaire par la transformation en secteurs non linéaires (SNT) (voir section 2.3).

Dans le présent chapitre, cette ré-écriture en système T-S est exploitée pour la synthèse d'observateurs de systèmes à paramètres variants dans le temps. L'approche proposée a l'avantage d'être systématique, sans approximation, ni perte d'information et ne nécessite pas de connaissance préalable du comportement des paramètres, hormis leurs bornes et sur condition d'identifiabilité des paramètres.

3.1.3 Contribution du chapitre

La principale contribution de ce chapitre est de formaliser le problème de synthèse d'observateur (pour des systèmes linéaires et non linéaires) à paramètres variants dans le temps. Le principe a été introduit dans (Bezzaoucha *et al.* [2013h]), puis généralisé pour le cas non linéaire dans (Bezzaoucha *et al.* [2013g]) et par la suite appliqué à une station d'épuration d'eaux usées avec des données issues du Benchmark du programme européen Cost 624 dans (Bezzaoucha *et al.* [2013c]). L'approche proposée consiste en la ré-écriture sous forme polytopique convexe des non-linéarités du système ainsi que des paramètres variant dans le temps. Cette dernière présente l'avantage d'être analytique, générale et systématique, sans aucune perte d'information ni approximation. Un observateur T-S est ensuite proposé pour l'estimation simultanée des états du système et des paramètres. Ses gains sont calculés en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

La deuxième partie de ce chapitre porte sur la description polytopique du comportement d'un paramètre variant dans le temps. Un exemple introductif pour le cas linéaire avec un seul paramètre est présenté avec des conditions de convergence relaxées. La partie 3 porte sur l'extension aux systèmes non linéaires, à n paramètres avec l'application citée ci-dessus. Le cas de défauts de capteur multiplicatifs est également considéré.

3.2 Systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps

L'idée présentée dans cette section est de ré-écrire les paramètres agissant sur les matrices d'état et d'entrée (ces paramètres peuvent être considérés comme des défauts affectant le système ou ses actionneurs sous forme multiplicative) sous forme polytopique afin de transformer le système initial (linéaire

à paramètres variants) en un système T-S à variables de décision non mesurables.

3.2.1 Exemple introductif : cas d'un seul paramètre

Considérons le cas d'un système linéaire avec un seul paramètre variant dans le temps, intervenant dans les matrices A et B du système (3.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{cases} A(\theta(t)) &= A_0 + \theta(t)\bar{A}, \quad \theta(t) \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \\ B(\theta(t)) &= B_0 + \theta(t)\bar{B} \end{cases} \quad (3.2)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ l'entrée de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ la sortie. A_0, \bar{A}, B_0 et \bar{B} sont des matrices connues avec des dimensions appropriées. $\theta(t) \in \mathbb{R}$ est le paramètre variant dans le temps, non mesurable, mais borné.

En se basant sur la transformation par secteurs non linéaires, $\theta(t)$ peut être ré-écrit comme suit :

$$\theta(t) = \mu_1(\theta(t))\underline{\theta} + \mu_2(\theta(t))\bar{\theta} \quad (3.3)$$

avec

$$\mu_1(\theta(t)) = \frac{\bar{\theta} - \theta(t)}{\bar{\theta} - \underline{\theta}}, \quad \mu_2(\theta(t)) = \frac{\theta(t) - \underline{\theta}}{\bar{\theta} - \underline{\theta}} \quad (3.4)$$

les fonctions poids $\mu_1(\theta(t))$ et $\mu_2(\theta(t))$ vérifiant la propriété de somme convexe (3.5) avec $r = 2$:

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(\theta(t)) \leq 1, \quad i = 1, \dots, r, \quad \forall t \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.3) et (3.2) dans l'équation (3.1), le système linéaire à temps variant est ré-écrit sous la forme T-S suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.6)$$

avec :

$$\begin{cases} A_1 &= A_0 + \underline{\theta}\bar{A}, & B_1 &= B_0 + \underline{\theta}\bar{B} \\ A_2 &= A_0 + \bar{\theta}\bar{A}, & B_2 &= B_0 + \bar{\theta}\bar{B} \end{cases} \quad (3.7)$$

Remarque 4. Dans cette sous-section, le cas d'un seul paramètre a été considéré. Le même développement peut être présenté pour le cas de plusieurs paramètres θ_i , avec les matrices $(A(\theta), B(\theta))$ affines en θ_i , en décomposant chaque paramètre, puis en proposant une forme T-S compacte pour tout le vecteur de paramètres (voir la section 3.3).

3.2.2 Synthèse d'observateur

En se basant sur la représentation T-S (3.6) obtenue dans la sous-section précédente, un observateur simultané état-paramètre est proposé. Une approche par atténuation \mathcal{L}_2 est également considérée afin de minimiser le transfert du paramètre $\theta(t)$ sur les erreurs d'estimation d'état et de paramètre. L'observateur suivant est proposé :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t))(K_i(y(t) - \hat{y}(t)) - \alpha_i \hat{\theta}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

où $L_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$, $K_i \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ sont les gains d'observateur et α_i des scalaires positifs à déterminer de façon à ce que les estimés de l'état et du paramètre, $\hat{x}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$, convergent vers ceux de $x(t)$ et $\theta(t)$.

Il est important de noter que le problème d'estimation n'est pas aisé puisque les fonctions poids du système (3.6) dépendent de $\theta(t)$ alors que celles de l'observateur (3.8) dépendent de $\hat{\theta}(t)$.

Soit l'erreur d'estimation d'état $e_x(t)$ définie comme suit :

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.9)$$

En se basant sur la propriété de somme convexe des fonctions poids, l'équation d'état (3.6) peut cependant se ré-écrire comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + \sum_{i=1}^2 (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.10)$$

Cette écriture permet une comparaison directe entre $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ puisque $\mu_i(\hat{\theta}(t))$ apparaît maintenant dans les expressions des deux états.

Définissons les quantités jouant le rôle de perturbations ou d'incertitudes :

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^2 (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t))) A_i \\ &= \mathcal{A} \Sigma_A(t) E_A \\ \Delta B(t) &= \sum_{i=1}^2 (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t))) B_i \\ &= \mathcal{B} \Sigma_B(t) E_B \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) I_{n_x} & 0 \\ 0 & \delta_2(t) I_{n_x} \end{pmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} I_{n_x} & I_{n_x} \end{bmatrix}^T \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}, \Sigma_B(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) I_{n_u} & 0 \\ 0 & \delta_2(t) I_{n_u} \end{pmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} I_{n_u} & I_{n_u} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.12)$$

Grâce à la propriété (3.5), pour $i = 1, 2$, nous avons :

$$\delta_i(t) = \mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t)), \quad -1 \leq \delta_i(t) \leq 1 \quad (3.13)$$

ce qui implique grâce à la définition (3.12)

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad \Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I \quad (3.14)$$

Le système (3.10) est alors écrit sous forme d'un système incertain donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) ((A_i + \Delta A(t)) x(t) + (B_i + \Delta B(t)) u(t)) \quad (3.15)$$

A partir des équations (3.15), (3.8) et (3.9), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'explique :

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) ((A_i - L_i C) e_x(t) + \Delta A(t) x(t) + \Delta B(t) u(t)) \quad (3.16)$$

Définissons maintenant l'erreur d'estimation du paramètre $e_\theta(t)$ telle que :

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.17)$$

Compte tenu de l'équation (3.8), la dynamique de cette erreur s'explique :

$$\dot{e}_\theta(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) (\dot{\theta}(t) - K_i C e_x(t) + \alpha_i \theta(t) - \alpha_i e_\theta(t)) \quad (3.18)$$

Considérons maintenant les vecteurs augmentés suivants :

$$e_a(t) = \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{pmatrix}, \quad \omega(t) = (x^T(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t) \quad u^T(t))^T \quad (3.19)$$

La dynamique du vecteur augmenté $e_a(t)$ est donnée par :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) (\Phi_i e_a(t) + \Psi_i(t) \omega(t)) \quad (3.20)$$

avec

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} A_i - L_i C & 0 \\ -K_i C & -\alpha_i \end{pmatrix}, \quad \Psi_i(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) \\ 0 & \alpha_i & I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Notre objectif est la synthèse d'un observateur joint pour l'état $x(t)$ et le paramètre $\theta(t)$ garantissant une atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$. La détermination des gains de l'observateur s'appuie sur le théorème suivant.

Théorème 2. *L'observateur (3.8) pour le système linéaire variant dans le temps (3.1) garantit que le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β , s'il existe des matrices $P_0 = P_0^T > 0$, $\Gamma_2^0 = (\Gamma_2^0)^T$, $\Gamma_2^3 = (\Gamma_2^3)^T > 0$, F_i , R_i , des scalaires positifs P_1 , β , λ_1 , λ_2 , Γ_2^1 , Γ_2^2 , et $\bar{\alpha}_i$ solution du problème d'optimisation (3.22) sous les contraintes LMI (3.23) et (3.24) (pour $i = 1, 2$)*

$$\min_{P_0, P_1, R_i, F_i, \bar{\alpha}_i, \lambda_1, \lambda_2, \Gamma_2^0, \Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \Gamma_2^3} \beta \quad (3.22)$$

$$\Gamma_2^k < \beta I, \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} C_i^1 & -C^T F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 A & P_0 B \\ * & -2\bar{\alpha}_i + 1 & 0 & \bar{\alpha}_i & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \lambda_2 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\lambda_2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

avec $C_i^1 = P_0 A_i + A_i^T P_0 - R_i C - C^T R_i^T + I_{n_x}$.

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$\begin{cases} L_i = P_0^{-1} R_i \\ K_i = P_1^{-1} F_i \\ \alpha_i = P_1^{-1} \bar{\alpha}_i \end{cases} \quad (3.25)$$

Remarque 5. *L'atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ n'est possible que sous la condition que toutes les composantes du vecteur $\omega(t)$ soient bornées et que les incertitudes $\Delta_A(t)$ ne déstabilisent pas le système.*

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e_a(t)) = e_a^T(t) P e_a(t), P = P^T > 0 \quad (3.26)$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}(e_a(t)) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) (e_a^T(t) (\Phi_i^T P + P \Phi_i) e_a(t) + e_a^T(t) P \Psi_i(t) \omega(t) + \omega^T(t) \Psi_i^T(t) P e_a(t)) \quad (3.27)$$

Considérant l'équation (3.20), le but de la synthèse est d'atténuer l'effet du vecteur de perturbation $\omega(t)$ sur $e_a(t)$. Ainsi, pour garantir la stabilité de (3.20) et la minimisation du transfert de $\omega(t)$ à $e_a(t)$, le critère suivant est considéré :

$$\dot{V}(e_a(t)) + e_a^T(t) e_a(t) - \omega^T(t) \Gamma_2 \omega(t) < 0 \quad (3.28)$$

avec

$$\Gamma_2 = \text{diag}(\Gamma_2^k), \Gamma_2^k < \beta I, \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.29)$$

tel que les constantes Γ_2^k permettent d'atténuer le transfert de certaines composantes de $\omega(t)$ sur celles de $e_a(t)$.

Avec (3.27), (3.28) devient :

$$\sum_{i=1}^2 \mu_i^j(\hat{\theta}(t)) \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_i^T P + P \Phi_i + I & P \Psi_i(t) \\ \Psi_i^T(t) P & -\Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.30)$$

La difficulté principale à résoudre est la satisfaction de (3.30) en présence de termes dépendants du temps. La solution considérée est alors d'isoler et de majorer ces termes. Pour cela, la matrice P est prise sous forme bloc diagonale :

$$P = \text{diag}(P_0, P_1) \quad (3.31)$$

A partir de (3.17), (3.21), (3.29) et (3.31), (3.30) s'explique sous la forme :

$$\sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) (Q_i + Q(t) + Q^T(t)) < 0 \quad (3.32)$$

avec :

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_i^{11} & -C^T K_i^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & Q_i^{22} & 0 & P_1 \alpha_i & P_1 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$Q_i^{11} = P_0 A_i + A_i^T P_0 - C^T L_i^T P_0 - P_0 L_i C + I_{n_x}, Q_i^{22} = -2P_1 \alpha_i + 1 \quad (3.34)$$

En se basant sur (3.11) et (3.14), le terme dépendant du temps dans (3.32) s'explique :

$$Q(t) = \begin{pmatrix} A^T P_0^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma_A(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^T P_0^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma_B(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_B \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

L'objectif est de proposer un majorant pour $Q(t)$ en se basant sur le lemme 3.

Lemme 3. (Zhou et Khargonekar [1988]) Soient deux matrices X et Y avec des dimensions appropriées, une matrice $\Delta(t)$ fonction du temps et un scalaire positif ε . Alors, la propriété suivante est vérifiée pour $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I$:

$$X^T \Delta^T(t)Y + Y^T \Delta(t)X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y \quad (3.36)$$

Compte tenu de l'expression (3.35), pour des scalaires positifs λ_1 et λ_2 , nous avons :

$$\mathcal{Q}(t) + \mathcal{Q}^T(t) < \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 E_B^T E_B \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

avec :

$$\mathcal{Q}_1 = \lambda_1^{-1} P_0 A A^T P_0 + \lambda_2^{-1} P_0 B B^T P_0 \quad (3.38)$$

De l'inégalité (3.37) et de la propriété de somme convexe des fonctions d'activation $\mu_i(\hat{\theta}(t))$, la condition (3.32) est vérifiée si la suivante l'est :

$$\mathcal{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_i^{11} + \mathcal{Q}_1 & -C^T K_i^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \mathcal{Q}_i^{22} & 0 & P_1 \alpha_i & P_1 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \lambda_2 E_B^T E_B \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Considérons le changement de variable :

$$\begin{cases} R_i = P_0 L_i \\ F_i = P_1 K_i \\ \bar{\alpha}_i = P_1 \alpha_i \end{cases} \quad (3.40)$$

En appliquant un complément de Schur sur le terme \mathcal{Q}_1 , les LMIs (3.39), équivalentes à (3.24), impliquent (3.32) et donc l'atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ à $e_a(t)$, ce qui achève la preuve. \square

Dans l'objectif d'améliorer les résultats précédents, les conditions (3.24) peuvent être relaxées grâce à la propriété de somme convexe (3.5) des fonctions d'activation $\mu_i(t)$ (3.4). Ainsi, sachant que

$$\mu_2(t) = 1 - \mu_1(t) \quad (3.41)$$

(3.15) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) ((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)) \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \delta_1(t)(A_1 - A_2) \\ \Delta B(t) &= \delta_1(t)(B_1 - B_2) \\ \delta_1(t) &= \mu_1(\theta(t)) - \mu_1(\hat{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (3.43)$$

En se basant sur les mêmes développements que précédemment, le théorème suivant est établi :

Théorème 3. L'observateur (3.8) pour le système linéaire variant dans le temps (3.1) garantit que le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β , s'il existe des matrices $P_0 = P_0^T > 0$, $\Lambda_1 = \Lambda_1^T$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^T$, $\Gamma_2^0 = (\Gamma_2^0)^T$, $\Gamma_2^3 = (\Gamma_2^3)^T > 0$, F_i et R_i ainsi que des scalaires positifs P_1 , Γ_2^1 , Γ_2^2 et $\bar{\alpha}_i$ solution du problème d'optimisation (3.44) sous les contraintes LMI (3.45) et (3.46) (pour $i = 1, 2$)

$$\min_{P_0, P_1, R_i, F_i, \bar{\alpha}_i, \Lambda_1, \Lambda_2, \Gamma_2^0, \Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \Gamma_2^3} \beta \quad (3.44)$$

$$\Gamma_2^k < \beta I \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.45)$$

$$\begin{pmatrix} C_i^1 & -C^T F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & P_0 \\ * & -2\bar{\alpha}_i + 1 & 0 & \bar{\alpha}_i & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \Lambda_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \Lambda_B & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Lambda_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

où

$$\begin{aligned} C_i^1 &= P_0 A_i + A_i^T P_0 - R_i C - C^T R_i^T + I_{n_x} \\ \Lambda_A &= (A_1 - A_2)^T \Lambda_1 (A_1 - A_2) \\ \Lambda_B &= (B_1 - B_2)^T \Lambda_2 (B_1 - B_2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les gains d'observateur sont donnés par (3.25).

Démonstration. La preuve du théorème 3 est basée exactement sur les mêmes étapes que celles du théorème 2. La différence entre les deux théorèmes réside dans les blocs Λ_1 et Λ_2 . En effet, pour le théorème 2, les deux éléments étaient scalaires, alors que grâce à la propriété de somme convexe, pour le théorème 3, les deux blocs sont à présent des matrices, ce qui par conséquent relaxe les conditions à satisfaire. \square

3.2.3 Atténuation du bruit de mesure

Afin d'étendre l'approche proposée, considérons la présence d'un bruit de mesure. Le système est alors décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Gb(t) \end{cases} \quad (3.48)$$

où $b(t)$ correspond au bruit de mesure. Les matrices $A(t)$ et $B(t)$ ont déjà été définies en (3.2).

L'observateur état-paramètre est défini de forme identique à (3.8).

Considérons les vecteurs augmentés $e_a(t)$ et $\omega(t)$

$$e_a(t) = \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{pmatrix}, \quad \omega(t) = (x^T(t) \quad \theta^T(t) \quad \dot{\theta}^T(t) \quad u^T(t) \quad b^T(t))^T \quad (3.49)$$

où $\omega(t)$ prend en compte le bruit $b(t)$. On en déduit :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\hat{\theta}(t)) (\Phi_i e_a(t) + \Psi_i(t) \omega(t)) \quad (3.50)$$

avec

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} A_i - L_i C & 0 \\ -K_i C & -\alpha_i \end{pmatrix}, \Psi_i(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) & -L_i G \\ 0 & \alpha_i & I & 0 & -K_i G \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Le nouvel objectif est d'atténuer l'effet du paramètre $\theta(t)$ et du bruit $b(t)$ sur les estimations d'état et de paramètre. Le calcul des gains de l'observateur est détaillé dans le théorème suivant.

Théorème 4. *L'observateur robuste (3.8) pour le système linéaire variant dans le temps (3.48) soumis au bruit de mesure $b(t)$ garantit que le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β ($\beta > 0$) s'il existe des matrices $P_0 = P_0^T > 0$, $\Lambda_1 = \Lambda_1^T$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^T$, $\Gamma_2^0 = (\Gamma_2^0)^T$, $\Gamma_2^3 = (\Gamma_2^3)^T > 0$, $\Gamma_2^4 = (\Gamma_2^4)^T > 0$, F_i , R_i ainsi que des scalaires positifs P_1 , Γ_2^1 , Γ_2^2 et $\bar{\alpha}_i$ solution du problème d'optimisation (3.52) sous les contraintes LMI (3.53) et (3.54)*

$$\min_{P_0, P_1, R_i, F_i, \bar{\alpha}_i, \Lambda_1, \Lambda_2, \Gamma_2^0, \Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \Gamma_2^3} \beta \quad (3.52)$$

$$\Gamma_2^k < \beta \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3.53)$$

$$\begin{pmatrix} C_i^1 & -C^T F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_i G & P_0 & P_0 \\ * & -2\bar{\alpha}_i + 1 & 0 & \bar{\alpha}_i & P_1 & 0 & -F_i G & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \Lambda_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \Lambda_B & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Gamma_2^4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\Lambda_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (3.54)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_i^1 &= P_0 A_i + A_i^T P_0 - R_i C - C^T R_i^T + I_{n_x} \\ \Lambda_A &= (A_1 - A_2)^T \Lambda_1 (A_1 - A_2) \\ \Lambda_B &= (B_1 - B_2)^T \Lambda_2 (B_1 - B_2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Les gains de l'observateur sont donnés par (3.25), pour $i = 1, 2$.

Démonstration. La preuve du théorème 4 est similaire aux deux précédentes et est donc omise. \square

3.2.4 Exemple numérique

L'approche proposée est illustrée par un exemple académique. Soit le système linéaire variant dans le temps défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \theta(t)\bar{A})x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + b(t) \end{cases} \quad (3.56)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.3 & -1 & -0.3 \\ 0.1 & -2 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Le paramètre $\theta(t)$ varie dans l'intervalle $[0, 1]$. Afin d'illustrer l'influence de $\theta(t)$ sur l'évolution du système (3.56), la figure 3.1 représente les états $x_n(t)$ du système nominal, i.e. $\dot{x}_n(t) = A_0 x_n(t) + Bu(t)$, et les états du système variant dans le temps $x(t)$ donnés par (3.56). De la figure présentée, il est évident que la déviation causée par $\theta(t)$ sur les états est conséquente, d'où l'importance de l'estimation simultanée et de la prise en compte de $\theta(t)$ dans la synthèse de l'observateur d'état. L'entrée du système $u(t)$ est représentée à la figure 3.2.

Le bruit de mesure $b(t)$ est défini par une distribution normale de moyenne nulle et de variance égale à 15% de l'amplitude de la sortie affectant le système (3.56) avec $G = I_2$. Les gains de l'observateur sont calculés selon la procédure du théorème 4. Les états $x(t)$ et le paramètre $\theta(t)$ ainsi que leurs estimés sont représentés respectivement par les figures 3.3 et 3.4. Le système est initialisé avec $x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, l'observateur de l'état et du paramètre est initialisé par $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{\theta}_0 = (0)$.

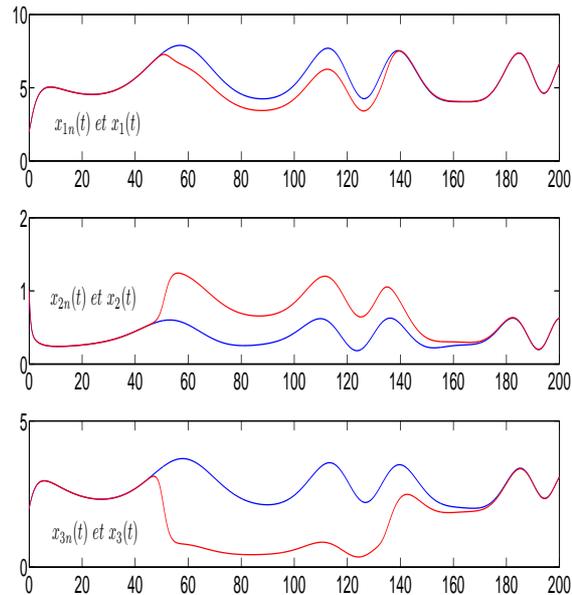


Figure 3.1 – Système nominal (bleu) et système avec variation paramétrique (rouge)

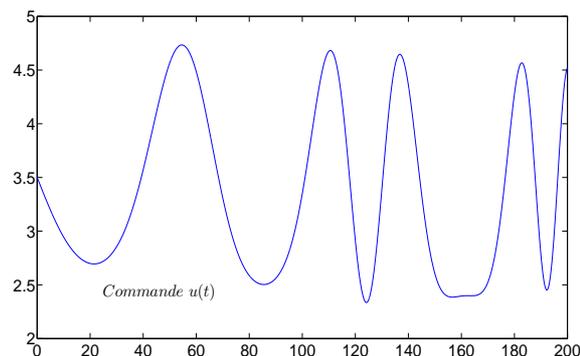


Figure 3.2 – Entrée du système

Des figures obtenues, on peut conclure sur l'efficacité et la robustesse de l'approche proposée, y compris en présence de bruits de mesure.

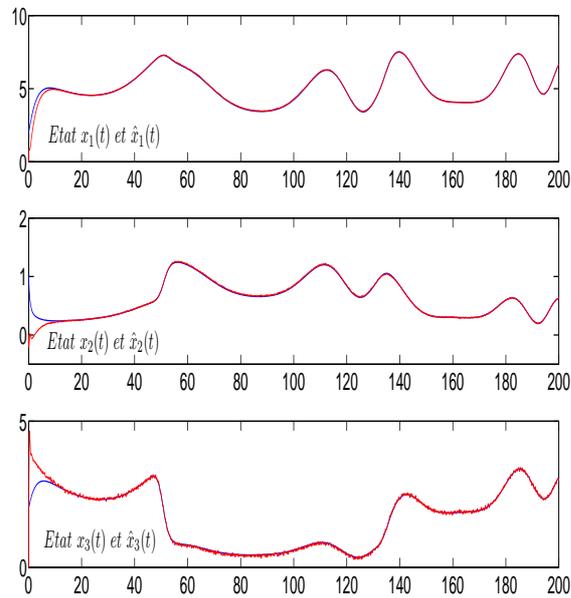
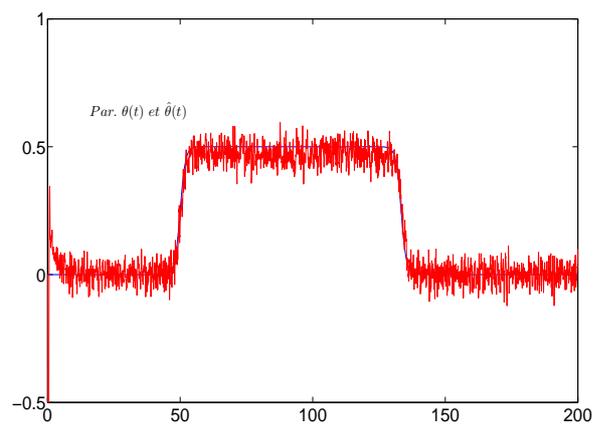


Figure 3.3 – Etats du système et leurs valeurs estimées

Figure 3.4 – Paramètre $\theta(t)$ et son estimé

3.3 Systèmes non linéaires à paramètres variant dans le temps

Dans cette troisième partie du chapitre, nous nous intéressons aux systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S à paramètres variant dans le temps. Soit le système suivant avec n paramètres $\theta_j(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i(\theta(t))x(t) + B_i(\theta(t))u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.57)$$

avec $\theta(t) = [\theta_1(t) \quad \dots \quad \theta_n(t)]^T$ et les matrices $A_i(\theta(t))$ et $B_i(\theta(t))$ affines en $\theta(t)$, telles que :

$$A_i(\theta(t)) = \bar{A}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{A}_{ij}, \quad B_i(\theta(t)) = \bar{B}_i + \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{B}_{ij} \quad (3.58)$$

Remarque 6. Dans cette présentation, on suppose que les matrices $A_i(\theta(t))$ et $B_i(\theta(t))$ dépendent des mêmes paramètres $\theta_j(t)$. Cependant, si une matrice A_i (resp. B_i) ne dépend pas d'un des paramètres $\theta_j(t)$, alors \bar{A}_{ij} (resp. \bar{B}_{ij}) dans (3.58) est nulle.

Par exemple, si les matrices $A_i(\theta_a(t))$ (resp. $B_i(\theta_b(t))$) dépendent de $\theta_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ (resp. $\theta_b \in \mathbb{R}^{n_b}$), elles peuvent alors être définies comme en (3.58) avec $\theta(t) = [\theta_a^T(t), \theta_b^T(t)]^T$, $n = n_a + n_b$, $\bar{A}_{ij} = 0$ pour $j = n_a + 1, \dots, n$ et $\bar{B}_{ij} = 0$ pour $j = 1, \dots, n_a$.

En se basant sur la transformation par secteurs non linéaires (SNT) (Tanaka et Wang [2001]), chaque paramètre $\theta_j(t)$ est exprimé en fonction de ses bornes maximale et minimale, respectivement notées θ_j^1 et θ_j^2 :

$$\theta_j(t) = \tilde{\mu}_j^1(\theta_j(t))\theta_j^1 + \tilde{\mu}_j^2(\theta_j(t))\theta_j^2 \quad (3.59)$$

où les fonctions $\tilde{\mu}_j^1(\theta_j(t))$ et $\tilde{\mu}_j^2(\theta_j(t))$ définies par :

$$\tilde{\mu}_j^1(\theta_j(t)) = \frac{\theta_j(t) - \theta_j^2}{\theta_j^1 - \theta_j^2}, \quad \tilde{\mu}_j^2(\theta_j(t)) = \frac{\theta_j^1 - \theta_j(t)}{\theta_j^1 - \theta_j^2} \quad (3.60)$$

satisfont la propriété de somme convexe :

$$\tilde{\mu}_j^1(\theta_j(t)) + \tilde{\mu}_j^2(\theta_j(t)) = 1, \quad 0 \leq \tilde{\mu}_j^i(\theta_j(t)) \leq 1, \quad \forall t \quad (3.61)$$

En remplaçant (3.59) dans (3.58), nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_i(\theta(t)) &= \bar{A}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \tilde{\mu}_j^k(\theta_j(t)) \theta_j^k \bar{A}_{ij} \\ B_i(\theta(t)) &= \bar{B}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \tilde{\mu}_j^k(\theta_j(t)) \theta_j^k \bar{B}_{ij} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Afin d'écrire les matrices $A_i(\theta(t))$ et $B_i(\theta(t))$ sous forme polytopique, de (3.61), nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \bar{A}_{ij} &= \sum_{j=1}^n [(\tilde{\mu}_j^1(\theta_j(t))\theta_j^1 + \tilde{\mu}_j^2(\theta_j(t))\theta_j^2) \bar{A}_{ij}] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[[(\tilde{\mu}_j^1(\theta_j(t))\theta_j^1 + \tilde{\mu}_j^2(\theta_j(t))\theta_j^2) \bar{A}_{ij}] \left[\prod_{k=1, k \neq j}^n \sum_{m=1}^2 \tilde{\mu}_k^m(\theta_k(t)) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ainsi, les équations (3.62) se mettent sous la forme :

$$A_i(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{2^n} \tilde{\mu}_j(\theta(t)) \mathcal{A}_{ij}, B_i(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{2^n} \tilde{\mu}_j(\theta(t)) \mathcal{B}_{ij} \quad (3.64)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_j(\theta(t)) &= \prod_{k=1}^n \tilde{\mu}_k^{\sigma_j^k}(\theta_k(t)) \\ \mathcal{A}_{ij} &= \bar{A}_i + \sum_{k=1}^n \theta_k^{\sigma_j^k} \bar{A}_{ik} \\ \mathcal{B}_{ij} &= \bar{B}_i + \sum_{k=1}^n \theta_k^{\sigma_j^k} \bar{B}_{ik} \end{cases} \quad (3.65)$$

Pour n paramètres, 2^n sous modèles sont obtenus. Il est important de noter que les matrices $A_i(\theta(t))$ et $B_i(\theta(t))$ sont obtenues avec des fonctions poids convexes $\tilde{\mu}_j(\theta(t))$ vérifiant $\sum_{i=1}^{2^n} \tilde{\mu}_j(\theta(t)) = 1$, où les indices σ_j^k ($j = 1, \dots, 2^n$, $k = 1, \dots, n$), égaux soit à 1 soit à 2, indiquent quelle partition du $k^{\text{ième}}$ paramètre ($\tilde{\mu}_k^1$ ou $\tilde{\mu}_k^2$) est considérée dans le $j^{\text{ième}}$ sous-modèle.

La relation entre j et σ_j^k est donnée par l'équation suivante :

$$j = 2^{n-1} \sigma_j^1 + 2^{n-2} \sigma_j^2 + \dots + 2^0 \sigma_j^n - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \quad (3.66)$$

Finalement, en se basant sur (3.64), le système non linéaire variant dans le temps (3.57) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\xi(t)) \tilde{\mu}_j(\theta(t)) (\mathcal{A}_{ij} x(t) + \mathcal{B}_{ij} u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.67)$$

Un exemple illustratif est donné pour trois paramètres ($n = 3$), où $\theta(t) = (\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t))^T$. Puisque chaque paramètre est partitionné selon (3.59), les matrices polytopiques $A_i(\theta(t))$ (et $B_i(\theta(t))$) sont définies par (3.64) avec 2^3 termes donnés par le tableau 3.1.

3.3.1 Synthèse d'observateur

En se basant sur le modèle T-S obtenu (3.67), où les variables de prémisses $\xi(t)$ sont non mesurables, puisqu'elles dépendent de l'état du système $x(t)$ et du vecteur de paramètres $\theta(t)$, un observateur simultané pour l'état $x(t)$ et $\theta(t)$ peut être synthétisé et implémenté. Une approche par atténuation \mathcal{L}_2 afin de minimiser l'effet des paramètres à temps variant sur les erreurs d'estimation est également considérée. L'observateur simultané de l'état et des paramètres du système (3.67) est pris sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) (\mathcal{A}_{ij} \hat{x}(t) + \mathcal{B}_{ij} u(t) + L_{ij} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) (-\alpha_{ij} \hat{\theta}(t) + K_{ij} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.68)$$

avec $L_{ij} \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$, $K_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont les gains de l'observateur à déterminer pour assurer la convergence des valeurs estimées de l'état et du vecteur de paramètres vers la valeur de $x(t)$ et $\theta(t)$. Soit le vecteur d'erreur d'estimation $e_x(t)$:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.69)$$

$j : (\sigma_j^1, \sigma_j^2, \sigma_j^3)$	$\tilde{\mu}_j(\theta(t))$	\mathcal{A}_{ij}
1 : (1, 1, 1)	$\tilde{\mu}_1^1(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^1(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^1(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^1 \bar{A}_{i1} + \theta_2^1 \bar{A}_{i2} + \theta_3^1 \bar{A}_{i3}$
2 : (1, 1, 2)	$\tilde{\mu}_1^1(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^1(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^2(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^1 \bar{A}_{i1} + \theta_2^2 \bar{A}_{i2} + \theta_3^2 \bar{A}_{i3}$
3 : (1, 2, 1)	$\tilde{\mu}_1^1(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^2(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^1(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^1 \bar{A}_{i1} + \theta_2^2 \bar{A}_{i2} + \theta_3^1 \bar{A}_{i3}$
4 : (1, 2, 2)	$\tilde{\mu}_1^1(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^2(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^2(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^1 \bar{A}_{i1} + \theta_2^2 \bar{A}_{i2} + \theta_3^2 \bar{A}_{i3}$
5 : (2, 1, 1)	$\tilde{\mu}_1^2(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^1(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^1(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^2 \bar{A}_{i1} + \theta_2^1 \bar{A}_{i2} + \theta_3^1 \bar{A}_{i3}$
6 : (2, 1, 2)	$\tilde{\mu}_1^2(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^1(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^2(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^2 \bar{A}_{i1} + \theta_2^1 \bar{A}_{i2} + \theta_3^2 \bar{A}_{i3}$
7 : (2, 2, 1)	$\tilde{\mu}_1^2(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^2(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^1(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^2 \bar{A}_{i1} + \theta_2^2 \bar{A}_{i2} + \theta_3^1 \bar{A}_{i3}$
8 : (2, 2, 2)	$\tilde{\mu}_1^2(\theta_1(t)) \times \tilde{\mu}_2^2(\theta_2(t)) \times \tilde{\mu}_3^2(\theta_3(t))$	$\bar{A}_i + \theta_1^2 \bar{A}_{i1} + \theta_2^2 \bar{A}_{i2} + \theta_3^2 \bar{A}_{i3}$

Tableau 3.1 – Transformation par secteurs non linéaires : exemple à trois paramètres

Comme pour le cas linéaire, la présence de variables de décision non mesurables ne permet pas de déduire directement la dynamique des erreurs de reconstruction. La solution est encore une fois, la ré-écriture sous la forme d'un système incertain :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} (\mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) (\mathcal{A}_{ij} x(t) + \mathcal{B}_{ij} u(t)) + (\mu_i(x(t)) \tilde{\mu}_j(\theta(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t))) (\mathcal{A}_{ij} x(t) + \mathcal{B}_{ij} u(t))) \quad (3.70)$$

En effet, cette forme permet une meilleure comparaison entre $x(t)$ et $\hat{x}(t)$, puisque le terme $\mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t))$ apparaît non seulement dans (3.68), mais également dans (3.70). Soient :

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} [\mu_i(x(t)) \tilde{\mu}_j(\theta(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t))] \mathcal{A}_{ij} \\ &= \mathcal{A} \Sigma_A(t) E_A \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \Delta B(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} [\mu_i(x(t)) \tilde{\mu}_j(\theta(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t))] \mathcal{B}_{ij} \\ &= \mathcal{B} \Sigma_B(t) E_B \end{aligned} \quad (3.72)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{r2^n} \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \text{diag}(\delta_{11}(t) I_{n_x}, \dots, \delta_{r2^n}(t) I_{n_x}), \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \dots & \mathcal{B}_{r2^n} \end{bmatrix}, \Sigma_B(t) = \text{diag}(\delta_{11}(t) I_{n_u}, \dots, \delta_{r2^n}(t) I_{n_u}), \\ E_A &= \begin{bmatrix} I_{n_x} & \dots & I_{n_x} \end{bmatrix}^T, E_B = \begin{bmatrix} I_{n_u} & \dots & I_{n_u} \end{bmatrix}^T \\ \delta_{ij}(t) &= \mu_i(x(t)) \tilde{\mu}_j(\theta(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Puisque $\mu_i(x(t))$ et $\tilde{\mu}_j(\theta(t))$ satisfont (3.5), de la définition (3.73), on déduit que les matrices $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$ sont bornées et que :

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad \Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I \quad (3.74)$$

A partir de (3.71) et (3.72), le système (3.70) est alors écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) ((\mathcal{A}_{ij} + \Delta A(t))x(t) + (\mathcal{B}_{ij} + \Delta B(t))u(t)) \quad (3.75)$$

Soit $e_\theta(t)$ le vecteur d'erreur d'estimation paramétrique :

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t) \quad (3.76)$$

De (3.68), (3.75), (3.69) et (3.76) la dynamique des erreurs d'estimation d'état et des paramètres s'explique :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) (\Phi_{ij} e_a(t) + \Psi_{ij}(t) \omega(t)) \quad (3.77)$$

avec

$$e_a(t) = \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_\theta(t) \end{pmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) & \dot{\theta}^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix}^T \quad (3.78)$$

et

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ij} - L_{ij}C & 0 \\ -K_{ij}C & -\alpha_{ij} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) \\ 0 & \alpha_{ij} & I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Compte tenu de (3.77), l'objectif à atteindre est la synthèse d'un observateur simultané pour l'état et les paramètres minimisant le transfert \mathcal{L}_2 de $\omega(t)$ à $e_a(t)$. Le calcul des gains de l'observateur K_{ij} , L_{ij} et α_{ij} est détaillé au théorème 5 suivant.

Théorème 5. *L'observateur (3.68) pour un système T-S non linéaire variant dans le temps (3.57) générant l'erreur d'estimation $e_a(t)$ (3.77) permet une atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ bornée par β ($\beta > 0$), si l'on peut résoudre le problème d'optimisation (3.80) sous les contraintes LMI (3.81) et (3.82) pour des matrices symétriques définies positives $P_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $\Gamma_2^0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\Gamma_2^1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma_2^2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma_2^3 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ et des scalaires positifs β , λ_1 , $\lambda_2 > 0$ (avec $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, 2^n$)*

$$\min_{P_0, P_1, R_{ij}, F_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}, \lambda_1, \lambda_2, \Gamma_2^k} \beta \quad (3.80)$$

avec :

$$\Gamma_2^k < \beta I \text{ pour } k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.81)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{ij}^{11} & -C^T F_{ij}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 \mathcal{A} & P_0 \mathcal{B} \\ * & Q_{ij}^{22} & 0 & \bar{\alpha}_{ij} & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & Q_{ij}^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & Q_{ij}^{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\lambda_2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.82)$$

et

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{11} &= P_0 \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{ij}^T P_0 - R_{ij} C - C^T R_{ij}^T + I_{n_x}, & Q_{ij}^{22} &= -\bar{\alpha}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}^T + I_n \\ Q_{ij}^{33} &= -\Gamma_2^0 + \lambda_1 E_A^T E_A, & Q_{ij}^{66} &= -\Gamma_2^3 + \lambda_2 E_B^T E_B \end{aligned} \quad (3.83)$$

Les gains de l'observateur sont alors donnés par :

$$\begin{cases} L_{ij} = P_0^{-1} R_{ij} \\ K_{ij} = P_1^{-1} F_{ij} \\ \alpha_{ij} = P_1^{-1} \bar{\alpha}_{ij} \end{cases} \quad (3.84)$$

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov :

$$V(e_a(t)) = e_a^T(t) P e_a(t), P = P^T > 0 \quad (3.85)$$

Compte tenu de (3.77), sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_a(t)) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) [e_a^T(t) (\Phi_{ij}^T P + P \Phi_{ij}) e_a(t) \\ & + e_a^T(t) P \Psi_{ij}(t) \omega(t) + \omega^T(t) \Psi_{ij}^T(t) P e_a(t)] \end{aligned} \quad (3.86)$$

L'atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ à $e_a(t)$ est bornée par β si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(e_a(t)) + e_a^T(t) e_a(t) - \omega^T(t) \Gamma_2 \omega(t) < 0 \quad (3.87)$$

où la matrice de pondération Γ_2 est définie par :

$$\Gamma_2 = \text{diag}(\Gamma_2^k), \Gamma_2^k < \beta I, \text{ for } k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.88)$$

En utilisant (3.86), (3.87) devient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \mu_j(\hat{\theta}(t)) \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_{ij}^T P + P \Phi_{ij} + I_{n_x+n} & P \Psi_{ij}(t) \\ \Psi_{ij}^T(t) P & -\Gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.89)$$

Pour simplifier la résolution de (3.89), la matrice de Lyapunov P est choisie bloc diagonale :

$$P = \text{diag}(P_0, P_1) \quad (3.90)$$

De (3.76), (3.79), (3.88) et (3.90), (3.89) est vraie si

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^n} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t)) (Q_{ij} + \mathcal{Q}(t) + \mathcal{Q}^T(t)) < 0 \quad (3.91)$$

avec les définitions :

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{ij}^{11} & -C^T K_{ij}^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_1 \alpha_{ij} - \alpha_{ij}^T P_1 + I_n & 0 & P_1 \alpha_{ij} & P_1 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

$$\bar{Q}_{ij}^{11} = P_0 \mathcal{A}_{ij} + \mathcal{A}_{ij}^T P_0 - P_0 L_{ij} C - C^T L_{ij}^T P_0 + I_{n_x} \quad (3.93)$$

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_0 \Delta A(t) & 0 & 0 & P_0 \Delta B(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Avec (3.71) et (3.72), le terme dépendant du temps (3.94) se met sous la forme :

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{pmatrix} P_0 \mathcal{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Sigma_A(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} P_0 \mathcal{B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Sigma_B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_B \end{pmatrix}^T \quad (3.95)$$

En utilisant le lemme 1 et la propriété (3.74), pour tous scalaires positifs λ_1 et λ_2 , on a :

$$\mathcal{Q}(t) + \mathcal{Q}^T(t) < \text{diag}(\mathcal{Q}^1, 0, \lambda_1 E_A^T E_A, 0, 0, \lambda_2 E_B^T E_B) \quad (3.96)$$

avec :

$$\mathcal{Q}^1 = \lambda_1^{-1} P_0 \mathcal{A} \mathcal{A}^T P_0 + \lambda_2^{-1} P_0 \mathcal{B} \mathcal{B}^T P_0 \quad (3.97)$$

pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, 2^n$.

De l'inégalité (3.96) et de la propriété de somme convexe des fonctions $\mu_i(\hat{x}(t))$ et $\tilde{\mu}_j(\hat{\theta}(t))$, la condition (3.91) devient :

$$\mathcal{Q}_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{Q}}_{ij}^{11} + \mathcal{Q}^1 & -C^T K_{ij}^T P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_1 \alpha_{ij} - \alpha_{ij}^T P_1 + I_n & 0 & P_1 \alpha_{ij} & P_1 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \lambda_2 E_B^T E_B \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

En considérant le changement de variables (3.84) et un complément de Schur appliqué sur \mathcal{Q}^1 , (3.98) implique (3.82) et par conséquent, le gain \mathcal{L}_2 de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β , ce qui achève la démonstration.

3.3.2 Application à une station d'épuration d'eau

Description du procédé

Le traitement des eaux usées par le procédé à boues activées représente un processus biochimique complexe. Les variations du débit d'eaux usées et de leur composition, combinées avec des réactions variant dans le temps dans une culture mélangée de micro-organismes, font que ce processus a un comportement non linéaire. Afin de mettre en évidence les résultats d'estimation et de diagnostic proposés précédemment, une application sur des données issues du benchmark du programme européen Cost 624 sur une station d'épuration d'eaux usées est considérée. Pour cela, un modèle non linéaire réduit, inspiré de (Weijers [2000]) à six variables d'état est utilisé. Le modèle se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles non linéaires obtenues à partir des équations dynamiques de bilan du bioréacteur. L'écriture d'un bilan pour chaque composé conduit au modèle du procédé.

Les variables d'état sont : les concentrations des matières organiques (Demandes Chimique en Oxygène DCO) X_{DCO} , de l'oxygène dissous S_O , de la matière organique X_{BH} , de l'ammoniac S_{NH} , du nitrate S_{NO} et de la biomasse autotrophe X_{BA} . Le vecteur d'état est ainsi défini par :

$$x(t) = [X_{DCO}(t) \quad S_O(t) \quad X_{BH}(t) \quad S_{NH}(t) \quad S_{NO}(t) \quad X_{BA}(t)]^T \quad (3.99)$$

Les vecteurs réunissant les entrées et les sorties du processus sont :

$$y(t) = [X_{DCO}(t), S_O(t), S_{NH}(t), S_{NO}(t)]^T \quad (3.100)$$

$$u(t) = [X_{DCO,in}(t), q_a(t), q_{in}(t)]^T \quad (3.101)$$

où les variables $q_{in}(t)$ et $q_a(t)$ représentent respectivement les débits d'entrée et le débit d'air dans le bioréacteur et $X_{DCO,in}(t)$ la concentration de la matière organique à l'entrée du réacteur. Les équations dynamiques décrivant le système sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_{DCO}(t) = -\frac{1}{Y_h} [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] + (1 - f_p)(\varphi_4(t) + \varphi_5(t)) + D_1(t) \\ \dot{S}_O(t) = \frac{Y_h - 1}{Y_h} \varphi_1(t) + \frac{Y_a - 4.57}{Y_a} \varphi_3(t) + D_2(t) \\ \dot{S}_{NH}(t) = -i_{xb}[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] - \left[i_{xb} + \frac{1}{Y_a} \right] \varphi_3(t) \\ \quad + (i_{xb} - f_p i_{xp})[\varphi_4(t) + \varphi_5(t)] + D_3(t) \\ \dot{S}_{NO}(t) = \frac{Y_h - 1}{2.86 Y_h} \varphi_2(t) + \frac{1}{Y_a} \varphi_3(t) + D_4(t) \\ \dot{X}_{BH}(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) - \varphi_4(t) + D_5(t) \\ \dot{X}_{BA}(t) = \varphi_3(t) - \varphi_5(t) + D_6(t) \end{array} \right. \quad (3.102)$$

où $Y_a, Y_h, f_p, i_{xb}, i_{xp}$ sont des coefficients constants et $\varphi_1(t), \dots, \varphi_5(t)$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t) = \mu_h \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ \varphi_2(t) = \mu_h \eta_{NOg} \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \\ \varphi_3(t) = \mu_a \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t) \\ \varphi_4(t) = b_H X_{BH}(t) \\ \varphi_5(t) = b_A X_{BA}(t) \end{array} \right. \quad (3.103)$$

En se basant sur les hypothèses simplificatrices proposées par (Weijers [2000]) et sur le *benchmark* considéré (Alex *et al.* [1999]), la concentration de l'oxygène dissout à l'entrée du réacteur ($S_{O,in}(t)$) est considérée comme nulle, ainsi $S_{NO,in}(t) \cong 0$ et $X_{BA,in}(t) \cong 0$. Le bilan entrée/sortie est alors exprimé par

le vecteur $D(t)$:

$$\begin{aligned}
D_1(t) &= D_{in}(t) [X_{DCO,in}(t) - X_{DCO}(t)] \\
D_2(t) &= D_{in}(t) [-S_O(t)] + Kq_a(t) [S_{O,sat} - S_O(t)] \\
D_3(t) &= D_{in}(t) [S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] \\
D_4(t) &= D_{in}(t) [-S_{NO}(t)] \\
D_5(t) &= D_{in}(t) \left[X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + \frac{f_r(1-f_w)}{f_r+f_w} X_{BH}(t) \right] \\
D_6(t) &= D_{in}(t) \left[-X_{BA}(t) + \frac{f_r(1-f_w)}{f_r+f_w} X_{BA}(t) \right] \\
D_7(t) &= D_{in}(t) \left[X_{BH,in}(t) - \frac{f_w(1+f_r)}{f_r+f_w} X_{BH}(t) \right] \\
D_8(t) &= D_{in}(t) \left[-X_{BA}(t) - \frac{f_w(1+f_r)}{f_r+f_w} X_{BA}(t) \right]
\end{aligned} \tag{3.104}$$

avec $D_{in}(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}$ (V étant le volume du réacteur).

Représentation T-S polytopique

Puisque la ré-écriture du modèle non linéaire (3.102) sous forme d'un modèle T-S n'est pas l'objet principal de ce travail, ne seront considérés que les points principaux du développement. Pour de plus amples détails, le lecteur peut consulter les références suivantes : (Nagy *et al.* [2011], Nagy *et al.* [2010]). L'examen des équations (3.102) avec les définitions (3.103) et (3.104), incite à considérer les variables de prémisses suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= \frac{q_{in}(t)}{V} \\
\xi_2(t) &= \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \\
\xi_3(t) &= \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \\
\xi_4(t) &= \frac{1}{K_{OA} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} X_{BA}(t)
\end{aligned} \tag{3.105}$$

ce qui permet de ré-écrire le système (3.102) sous la forme quasi-LPV suivante :

$$\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + B(\xi)u(t) \tag{3.106}$$

où les matrices $A(\xi)$ et $B(\xi)$ sont fonctions des variables de prémisses définies précédemment :

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(\xi_1) & 0 & 0 & 0 & a_{1,5}(\xi_2, \xi_3) & a_{1,6} \\ 0 & a_{2,2}(\xi_1, \xi_4) & 0 & 0 & a_{2,5}(\xi_2) & 0 \\ 0 & a_{3,2}(\xi_4) & a_{3,3}(\xi_1) & 0 & a_{3,5}(\xi_2, \xi_3) & a_{3,6} \\ 0 & a_{4,2}(\xi_4) & 0 & a_{4,4}(\xi_1) & a_{4,5}(\xi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & 0 \\ 0 & a_{6,2}(\xi_4) & 0 & 0 & 0 & a_{6,6}(\xi_1) \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

$$B(\xi) = \begin{bmatrix} b_{1,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & K S_{O,sat} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $a_{1,1}(\xi_1) = a_{3,3}(\xi_1) = a_{4,4}(\xi_1) = -b_{1,1}(\xi_1) = -\xi_1(t)$ et :

$$\begin{aligned}
 a_{1,5}(\xi_2, \xi_3) &= -\frac{\mu_h}{Y_h} \xi_2(t) + (1 - f_p) b_H - \frac{\mu_h \eta_{NOg}}{Y_h} \xi_3(t) \\
 a_{1,6} &= (1 - f_p) b_a \\
 a_{2,2}(\xi_1, \xi_4) &= -\xi_1(t) - K q_a - \frac{4.57 - Y_a}{Y_a} \mu_a \xi_4(t) \\
 a_{2,5}(\xi_2) &= \frac{Y_h - 1}{Y_h} \mu_h \xi_2(t) \\
 a_{3,2}(\xi_4) &= -(i_{xb} + \frac{1}{Y_a}) \mu_a \xi_4(t) \\
 a_{3,5}(\xi_2, \xi_3) &= (i_{xb} - f_p i_{xp}) b_H - i_{xb} \mu_h \xi_2(t) - i_{xb} \mu_h \eta_{NOg} \xi_3(t) \\
 a_{3,6} &= (i_{xb} - f_p i_{xp}) b_A \\
 a_{4,2}(\xi_4) &= \frac{1}{Y_a} \mu_a \xi_4(t) \\
 a_{4,5}(\xi_3) &= \frac{Y_h - 1}{2.86 Y_h} \mu_h \eta_{NOg} \xi_3(t) \\
 a_{5,5}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \mu_h \xi_2(t) - b_H + \xi_1(t) \left[\frac{f_w(1+f_r)}{f_r+f_w} - 1 \right] + \mu_h \eta_{NOg} \xi_3(t) \\
 a_{6,2}(\xi_4) &= \mu_a \xi_4(t) \\
 a_{6,6}(\xi_1) &= \xi_1(t) \left[\frac{f_w(1+f_r)}{f_r+f_w} - 1 \right] - b_A
 \end{aligned}$$

Les variables de prémisses $\xi_j(t)$ ($j = 1, \dots, 4$) sont ré-écrites grâce à la transformation par secteurs non linéaires :

$$\xi_j(t) = F_{j,1}(\xi_j(t)) \xi_{j,1} + F_{j,2}(\xi_j(t)) \xi_{j,2} \quad (3.108)$$

où les scalaires $\xi_{j,2}$, $\xi_{j,1}$ et les fonctions $F_{j,1}(\xi_j)$, $F_{j,2}(\xi_j)$ sont définis par :

$$\xi_{j,1} = \max_{x,u} \{ \xi_j(t) \}, \quad \xi_{j,2} = \min_{x,u} \{ \xi_j(t) \} \quad (3.109)$$

$$F_{j,1}(\xi_j(t)) = \frac{\xi_j(t) - \xi_{j,2}}{\xi_{j,1} - \xi_{j,2}}, \quad F_{j,2}(\xi_j(t)) = \frac{\xi_{j,1} - \xi_j(t)}{\xi_{j,1} - \xi_{j,2}} \quad (3.110)$$

Afin d'obtenir la structure T-S du système quasi-LPV (3.106), chaque variable $\xi_j(t)$ est décomposée selon (3.108) puis multipliée par $\prod_{k=1, k \neq j}^4 (F_{j,1} + F_{j,2}) = 1$. Les fonctions poids obtenues sont données par :

$$\mu_i(\xi(t)) = F_{1,\sigma_i^1}(\xi_1(t)) F_{2,\sigma_i^2}(\xi_2(t)) F_{3,\sigma_i^3}(\xi_3(t)) F_{4,\sigma_i^4}(\xi_4(t)) \quad (3.111)$$

Les matrices $A_i(\theta(t))$ et $B_i(\theta(t))$ sont obtenues en posant $\xi_j(t) = \xi_{j,\sigma_i^j}$ dans $A(\xi)$ et $B(\xi)$, ce qui conduit au résultat suivant :

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1,1}(\xi_{1,\sigma_i^1}) & 0 & 0 & 0 & a_{1,5}(\xi_{2,\sigma_i^2}, \xi_{3,\sigma_i^3}) & a_{1,6} \\ 0 & a_{2,2}(\xi_{1,\sigma_i^1}, \xi_{4,\sigma_i^4}) & 0 & 0 & a_{2,5}(\xi_{2,\sigma_i^2}) & 0 \\ 0 & a_{3,2}(\xi_{4,\sigma_i^4}) & a_{3,3}(\xi_{1,\sigma_i^1}) & 0 & a_{3,5}(\xi_{2,\sigma_i^2}, \xi_{3,\sigma_i^3}) & a_{3,6} \\ 0 & a_{4,2}(\xi_{4,\sigma_i^4}) & 0 & a_{4,4}(\xi_{1,\sigma_i^1}) & a_{4,5}(\xi_{3,\sigma_i^3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5}(\xi_{1,\sigma_i^1}, \xi_{2,\sigma_i^2}, \xi_{3,\sigma_i^3}) & 0 \\ 0 & a_{6,2}(\xi_{4,\sigma_i^4}) & 0 & 0 & 0 & a_{6,6}(\xi_{1,\sigma_i^1}) \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{1,1}(\xi_{1,\sigma_i^1}) & 0 \\ 0 & K S_{O,sat} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Ainsi, le système non linéaire (3.106) est de façon équivalente représenté sous la forme T-S suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{16} \mu_i(x, u) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.113a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.113b)$$

avec la matrice de sortie :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

Paramètre variant dans le temps pour le modèle T-S de la station d'épuration

Le modèle T-S (3.113) a été obtenu sous l'hypothèse que la biomasse hétérotrophe est homogène et que le coefficient de mortalité b_H est constant et égal à une valeur nominale $b_{Hn} = 0.3$.

En réalité, à cause de changements dans les conditions de fonctionnement, le coefficient b_H est sujet à des variations. Afin de prendre ces dernières en considération, un paramètre $\theta_1(t)$ variant dans le temps, borné, est utilisé :

$$b_H(\theta_1(t)) = b_{Hn} + 0.2 \theta_1(t), \theta_1(t) \in [0, 1] \quad (3.115)$$

Ceci permet de considérer une variation maximale de 66% de la valeur nominale. Puisque $b_H(\theta_1(t))$ apparaît dans $a_{1,5}$, $a_{3,5}$ et $a_{5,5}$, les matrices A_i sont maintenant variables au cours du temps et sont réécrites sous la forme $A_i(\theta(t)) = \bar{A}_i + \theta_1(t)\bar{A}_{i1}$ avec :

$$\bar{A}_{i1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

\bar{A}_i est obtenu à partir de $A_i(\theta(t))$ pour $\theta_1(t) = 0$ (cas nominal).

L'évolution du coefficient $b_H(t)$ est représentée dans la figure 3.7.

Afin d'illustrer l'effet du paramètre variant dans le temps sur les états du système, la figure 3.5 représente les états dans le cas nominal (avec $b_H = 0.3$ constant) et dans le cas d'une variation du coefficient b_H . La figure 3.5 montre bien que la variation de b_H a un effet significatif sur la plupart des variables du système. A noter que dans le cas considéré, la régulation n'a pas pour but de compenser l'effet de la variation paramétrique.

Résultats et discussions

Afin de représenter un comportement robuste de la station d'épuration, les données entrées/sorties ont été générées par la simulation du modèle ASM1 complet à 13 variables d'état (Henze *et al.* [1987]). Bien que l'observateur soit synthétisé sur la base du modèle T-S simplifié ($n_x = 6$ variables d'état) et que les données soient issues du modèle complet, les résultats d'estimation sont satisfaisants.

En appliquant le théorème 5, l'observateur simultané de l'état et du paramètre (3.68) est synthétisé en calculant tous les gains K_{ij} , L_{ij} et α_{ij} .

Les comparaisons entre les états du système, le paramètre $b_H(t)$ et leurs valeurs estimées respectives sont représentées par les figures 3.6 et 3.7.

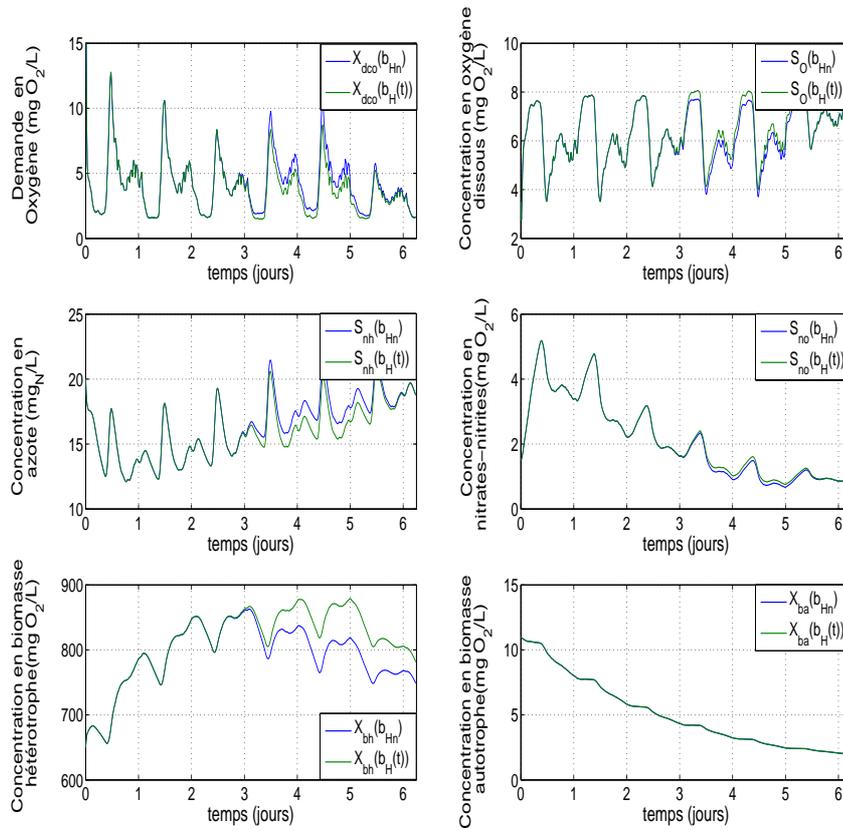


Figure 3.5 – Effet du paramètre variable dans le temps

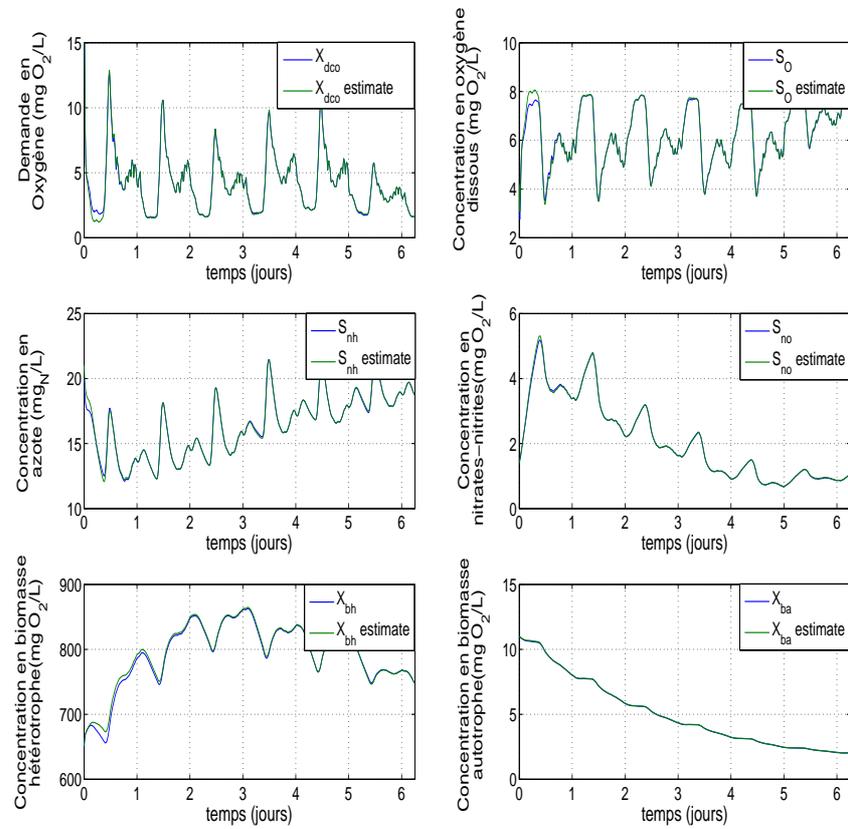


Figure 3.6 – Etats du système et leurs valeurs estimées

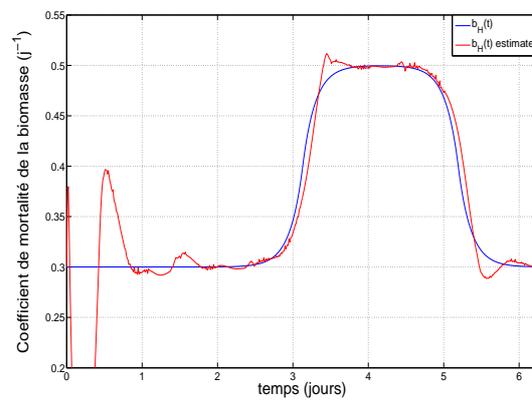


Figure 3.7 – Biomasse hétérotrophe $b_H(t) = b_{Hn} + 0.2\theta_1(t)$ et son estimée

Des résultats obtenus, on peut conclure sur l'efficacité de l'observateur proposé, puisque les six variables d'état ainsi que le paramètre $b_H(t)$ sont correctement estimés. La légère imperfection d'estimation en début de simulation est due à l'initialisation, le système et l'observateur ayant été respectivement initialisés aux valeurs :

$$\begin{aligned} x_0 &= (30 \ 3.5 \ 20 \ 1.5 \ 650 \ 11)^T \\ \hat{x}_0 &= (27 \ 4.2 \ 21 \ 1.4 \ 652 \ 11)^T, \quad \hat{\theta}_0 = 0 \end{aligned}$$

3.3.3 Diagnostic de défauts multiplicatifs de capteurs

Dans cette partie du chapitre, nous nous intéressons aux défauts multiplicatifs de capteurs. Comme souligné en introduction, le cas de défauts de capteurs le plus répandu dans la littérature existante est celui des défauts additifs, dont l'étude est plus facile à mettre en oeuvre. Le diagnostic dans ce cas se fait principalement au moyen de bancs d'observateurs qui permettent une détection et une isolation des défauts.

Dans ce qui suit, nous appliquons le principe de ré-écriture polytopique introduit ci-dessus pour la détection et l'estimation de défauts multiplicatifs de capteurs.

Considérons le système non linéaire T-S avec défauts multiplicatifs de capteurs représenté par (3.117)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{cases} \quad (3.117)$$

avec

$$C(t) = (I_m + F(t))C \quad (3.118)$$

où $F(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est définie par :

$$F(t) = \text{diag}(f(t)) \quad (3.119)$$

avec $\text{diag}(f(t))$ une matrice diagonale d'éléments $f_j(t)$ (défauts de capteurs). $F(t)$ peut également être mise sous la forme :

$$F(t) = \sum_{j=1}^m f_j(t) F_j \quad (3.120)$$

où F_j est une matrice de dimension $m \times m$ dont toutes les composantes sont nulles sauf le terme (j, j) qui est égal à 1. Les termes f_j sont des paramètres inconnus, variants dans le temps et représentant des défauts de capteur multiplicatifs. Chaque composante est inconnue, mais bornée telle que $f_j(t) \in [f_j^2, f_j^1]$, où les valeurs minimale et maximale sont connues. Alors, $f_j(t)$ peut se ré-écrire :

$$f_j(t) = \tilde{\mu}_j^1(f_j(t)) f_j^1 + \tilde{\mu}_j^2(f_j(t)) f_j^2, \quad f_j(t) \in [f_j^2, f_j^1] \quad (3.121)$$

avec

$$\tilde{\mu}_j^1(f_j(t)) = \frac{f_j(t) - f_j^2}{f_j^1 - f_j^2}, \quad \tilde{\mu}_j^2(f_j(t)) = \frac{f_j^1 - f_j(t)}{f_j^1 - f_j^2} \quad (3.122)$$

$$\tilde{\mu}_j^1(f_j(t)) + \tilde{\mu}_j^2(f_j(t)) = 1, \quad 0 \leq \tilde{\mu}_j^i(f_j(t)) \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \quad (3.123)$$

Le report de (3.121) dans (3.120) permet d'écrire :

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^2 \tilde{\mu}_j^k(f_j(t)) f_j^k F_j \quad (3.124)$$

Comme précédemment, une forme polytopique de $C(t)$ est obtenue, où la variable de décision est le vecteur de faute $f(t)$ non mesurable. Le système (3.117) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{j=1}^{2^{n_x}} \tilde{\mu}_j(f(t)) \tilde{C}_j x(t) \end{cases} \quad (3.125)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{C}_j = C + \bar{F}_j C \\ \tilde{\mu}_j(f(t)) = \prod_{k=1}^m \tilde{\mu}_k^{\sigma_j^k}(f_k(t)) \\ \bar{F}_j = \sum_{k=1}^m f_k^{\sigma_j^k} F_j \end{cases} \quad (3.126)$$

Synthèse d'observateur

Un observateur simultané de l'état et des défauts multiplicatifs de capteur est proposé pour le système T-S obtenu. Une approche par atténuation \mathcal{L}_2 est alors considérée.

L'observateur état-paramètres est choisi comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(\hat{y}(t) - y(t))) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(K_i(y(t) - \hat{y}(t)) - \alpha_i \hat{f}(t)) \\ \hat{y}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) \tilde{C}_j \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.127)$$

où $L_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ représentent les gains à calculer.

Soient $e_x(t)$ et $e_f(t)$ les erreurs d'estimation définies comme suit :

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad e_f(t) = f(t) - \hat{f}(t) \quad (3.128)$$

Comme précédemment, (3.125) se ré-écrit sous forme incertaine :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)) \\ y(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t))(\tilde{C}_j + \Delta C(t))x(t) \end{cases} \quad (3.129)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^r [\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))]A_i \\ &= \mathcal{A}\Sigma_A(t)E_A \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \Delta B(t) &= \sum_{i=1}^r [\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))]B_i \\ &= \mathcal{B}\Sigma_B(t)E_B \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned}\Delta C(t) &= \sum_{j=1}^{2^m} (\tilde{\mu}_j(f(t)) - \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t))) \tilde{C}_j \\ &= \mathcal{C} \Sigma_C(t) E_C\end{aligned}\quad (3.132)$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= [A_1 \quad \dots \quad A_r], \Sigma_A(t) = \text{diag}(\delta_1(t), \dots, \delta_r(t)), E_A = [I_{n_x} \quad \dots \quad I_{n_x}]^T \\ \mathcal{B} &= [B_1 \quad \dots \quad B_r], \Sigma_B(t) = \text{diag}(\delta_1(t), \dots, \delta_r(t)), E_B = [I_{n_u} \quad \dots \quad I_{n_u}]^T \\ \mathcal{C} &= [C_1 \quad \dots \quad C_{2^m}], \Sigma_C(t) = \text{diag}(\tilde{\delta}_1(t), \dots, \tilde{\delta}_{2^m}(t)), E_C = [I_{2^m} \quad \dots \quad I_{2^m}]^T \\ \delta_i(t) &= \mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)), \tilde{\delta}_j(t) = \tilde{\mu}_j(f(t)) - \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t))\end{aligned}\quad (3.133)$$

De la propriété (3.123), nous déduisons les inégalités :

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1, \quad -1 \leq \tilde{\delta}_j(t) \leq 1 \quad (3.134)$$

qui permettent de déduire de (3.133) :

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad \Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I, \quad \Sigma_C^T(t) \Sigma_C(t) \leq I \quad (3.135)$$

De (3.129), (3.127) et (3.128), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i e_x(t) + \Delta A(t) x(t) - L_i (y(t) - \hat{y}(t)) + \Delta B(t) u(t)) \quad (3.136)$$

L'erreur de sortie $y(t) - \hat{y}(t)$ s'explique alors :

$$y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (\tilde{C}_j e_x(t) + \Delta C(t) x(t)) \quad (3.137)$$

En remplaçant (3.137) dans (3.136), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est alors donnée par :

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) \left((A_i - L_i \tilde{C}_j) e_x(t) + (\Delta A(t) - L_i \Delta C(t)) x(t) + \Delta B(t) u(t) \right) \quad (3.138)$$

On déduit des équations (3.137) et (3.127) la dynamique de l'erreur d'estimation du défaut :

$$\dot{e}_f(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (-K_i \tilde{C}_j e_x(t) - \alpha_i e_f(t) + \dot{f}(t) - K_i \Delta C(t) x(t) + \alpha_i f(t)) \quad (3.139)$$

En définissant les vecteurs augmentés $e_a(t)$ et $\omega(t)$

$$e_a(t) = \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \end{pmatrix}, \quad \omega(t) = (x^T(t) \quad f^T(t) \quad \dot{f}^T(t) \quad u(t))^T \quad (3.140)$$

on déduit de (3.138), (3.139) et (3.140) :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (\Phi_{ij} e_a(t) + \Psi_i(t) \omega(t)) \quad (3.141)$$

avec

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - L_i \tilde{C}_j & 0 \\ -K_i \tilde{C}_j & -\alpha_i \end{pmatrix}, \quad \Psi_i(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) - L_i \Delta C(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) \\ -K_i \Delta C(t) & \alpha_i & I & 0 \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

Compte tenu de (3.141), l'objectif est la synthèse d'un observateur simultanément pour l'état et le vecteur de défauts capteur avec gain \mathcal{L}_2 minimum du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$. Les gains de l'observateur sont donnés par le théorème qui suit.

Théorème 6. L'observateur (3.127), pour le système non linéaire avec défauts multiplicatifs de capteurs (3.117) garantit que le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β ($\beta > 0$) s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 > 0$, $\bar{\alpha}_i, \bar{K}_i, R_i$ ainsi que des scalaires $\beta, \lambda_1, \lambda_{1C} > 0$, $\lambda_{2C} > 0$ et $\lambda_B > 0$ solutions du problème d'optimisation (3.143) sous les contraintes LMIs (3.144) et (3.145) (avec $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, 2^m$)

$$\min_{P_1, P_2, R_i, \bar{K}_i, \bar{\alpha}_i, \lambda_1, \lambda_{1C}, \lambda_{2C}, \lambda_B} \beta \quad (3.143)$$

$$\Gamma_k < \beta I \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.144)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{ij}^{11} & -\tilde{C}_j^T \bar{K}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 A & P_1 B & R_i C & 0 \\ * & Q_i^{22} & 0 & \bar{\alpha}_i & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{K}_i C \\ * & * & Q^{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & Q^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\lambda_B I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & -\lambda_{1C} I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{2C} I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.145)$$

avec

$$Q_{ij}^{11} = P_1 A_i + A_i^T P_1 - R_i \tilde{C}_j - \tilde{C}_j^T R_i^T + I_{n_x}, \quad Q_i^{22} = -\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_i^T + I_m \quad (3.146)$$

$$Q^{33} = -\Gamma_1 + \lambda_1 E_A^T E_A + \lambda_{1C} E_C^T E_C + \lambda_{2C} E_C^T E_C, \quad Q^6 = -\Gamma_4 + \lambda_B E_B^T E_B$$

Les gains de l'observateur sont donnés par

$$\begin{cases} L_i = P_1^{-1} R_i \\ K_i = P_2^{-1} \bar{K}_i \\ \alpha_i = P_2^{-1} \bar{\alpha}_i \end{cases} \quad (3.147)$$

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov

$$V(e_a(t)) = e_a^T(t) P e_a(t), \quad P = P^T > 0 \quad (3.148)$$

Utilisant (3.141), sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\dot{V}(e_a(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) [e_a^T(t) ((\Phi_{ij})^T P + P \Phi_{ij}) e_a(t) + e_a^T(t) P \Psi_i(t) \omega(t) + \omega^T(t) \Psi_i^T(t) P e_a(t)] \quad (3.149)$$

L'erreur $e_a(t)$ converge asymptotiquement vers zéro quand $\omega(t) = 0$ et le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β si la condition suivante est vérifiée

$$\dot{V}(e_a(t)) + e_a^T(t) e_a(t) - \omega^T(t) \Gamma \omega(t) < 0 \quad (3.150)$$

avec

$$\Gamma = \text{diag}(\Gamma_k), \quad \Gamma_k < \beta I, \text{ pour } k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.151)$$

Compte tenu de (3.149), (3.150) devient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \mu_j(\hat{f}(t)) \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_{ij}^T P + P \Phi_{ij} + I_{n_x+m} & P \Psi_i(t) \\ \Psi_i^T(t) P & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.152)$$

La fonction de Lyapunov considérée est choisie avec :

$$P = \text{diag}(P_1, P_2) \quad (3.153)$$

Avec les définitions (3.128), (3.142), (3.151) et (3.153), (3.152) est vraie si

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{2^m} \mu_i(\hat{x}(t)) \tilde{\mu}_j(\hat{f}(t)) (Q_{ij} + Q(t) + Q^T(t)) < 0 \quad (3.154)$$

avec :

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{ij}^{11} & -\tilde{C}_j^T K_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_2 \alpha_i - \alpha_i^T P_2 + I_m & 0 & \bar{\alpha}_i & P_2 & 0 \\ * & * & -\Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_4 \end{pmatrix} \quad (3.155)$$

$$Q_{ij}^{11} = P_1 A_i + A_i^T P_1 - P_1 L_i \tilde{C}_j - \tilde{C}_j^T L_i^T P_1 + I_{n_x} \quad (3.156)$$

Avec les définitions (3.130), (3.131) et (3.132), le terme variant dans le temps de (3.154) peut s'exprimer :

$$\begin{aligned} Q(t) = & \begin{pmatrix} A^T P_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma_A(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} B^T P_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \Sigma_B(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_B \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} C^T L_i^T P_1^T & C^T K_i^T P_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Sigma_C(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E_C & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.157)$$

En utilisant le lemme 1 et la propriété (3.134), pour tous scalaires positifs λ_1 , λ_B , λ_{1C} et λ_{2C} , on a :

$$Q(t) + Q^T(t) < \begin{pmatrix} Q^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_B E_B^T E_B \end{pmatrix} \quad (3.158)$$

avec :

$$Q^1 = \lambda_1^{-1} P_1 A A^T P_1 + \lambda_B^{-1} P_1 B B^T P_1 + (\lambda_{1C})^{-1} P_1 L_i C C^T L_i^T P_1 \quad (3.159)$$

$$Q^2 = \lambda_{2C}^{-1} P_2 K_i C C^T K_i^T P_2, \quad Q^3 = \lambda_1 E_A^T E_A + (\lambda_{1C} + \lambda_{2C}) E_C^T E_C$$

pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, 2^m$.

De l'inégalité (3.158), puisque $\mu_i(\hat{x}(t))$ et $\tilde{\mu}_j(\hat{f}(t))$ satisfont la propriété de somme convexe, la condition (3.154) est vraie si la suivante est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} Q_{ij}^{11} + Q^1 & -\tilde{C}_j^T K_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -P_2 \alpha_i - \alpha_i^T P_2 + I_{n_x} + Q^2 & 0 & \bar{\alpha}_i & P_2 & 0 \\ * & * & Q^{33} + Q^3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_4 + \lambda_B E_B^T E_B \end{pmatrix} < 0 \quad (3.160)$$

En considérant le changement de variables (3.147), ainsi qu'un complément de Schur sur Q^1 et Q^2 , la condition (3.160) implique (3.145). Par conséquent, le gain \mathcal{L}_2 du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est borné par β , ce qui achève la démonstration.

Exemple numérique

Dans cette section, la conception d'un observateur robuste est réalisée afin d'estimer simultanément l'état d'un bioréacteur et un défaut multiplicatif sur un capteur. Le bioréacteur considéré est réduit à deux équations d'état non linéaires (Bezzaoucha *et al.* [2013f]) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{ax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b} - x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{cax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b} + (d - x_2(t))u(t) \end{aligned} \quad (3.161)$$

où $x_1(t)$ représente la concentration en biomasse et $x_2(t)$ la concentration en substrat. La commande $u(t)$ est le taux de dilution. Les paramètres a , b et d sont connus. La sortie mesurée est la concentration en biomasse ($y(t) = x_1(t)$).

Considérons un défaut multiplicatif de capteur borné $f_1(t)$ qui affecte la sortie $y(t)$ tel que :

$$y(t) = (1 + f_1(t))x_1(t) \quad (3.162)$$

Comme montré précédemment, $f_1(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f_1(t) = \tilde{\mu}_1^1(f_1(t))f_1^1 + \tilde{\mu}_1^2(f_1(t))f_1^2, \quad f_1(t) \in [f_1^2, f_1^1] \quad (3.163)$$

avec $f_1^2 = 0.125$, $f_1^1 = 0.625$, $\tilde{\mu}_1^1(f_1(t))$ et $\tilde{\mu}_1^2(f_1(t))$ définis par (3.122). Les paramètres b , c , d sont respectivement égaux à $b = 0.07$, $c = 0.7$ et $d = 2.5$.

L'examen des non-linéarités du système (3.161), incite à considérer les variables de prémisse suivantes :

$$z_1(t) = -u(t), \quad z_2(t) = \frac{ax_1(t)}{x_2(t)+b} \quad (3.164)$$

De (3.161) et (3.164), la forme quasi-LPV suivante est obtenue :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ 0 & -cz_2(t) + z_1(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} u(t) \quad (3.165)$$

Un modèle T-S est obtenu sur un compact de l'espace d'état en définissant les intervalles de variation de $z_1(t)$ et $z_2(t)$ par $z_1(t) \in [-1, -0.2]$ et $z_2(t) \in [0.004, 15]$. Utilisant la transformation en secteurs non linéaires, deux partitions pour chaque variable de prémisse sont construites :

$$\begin{cases} z_1(t) = F_{11}(z_1)z_1^2 + F_{12}(z_1)z_1^1 \\ z_2(t) = F_{21}(z_2)z_2^2 + F_{22}(z_2)z_2^1 \end{cases} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } F_{11}(z_1) &= \frac{z_1(t) - z_1^2}{z_1^1 - z_1^2}, \quad F_{12}(z_1) = \frac{z_1^1 - z_1(t)}{z_1^1 - z_1^2} \\ F_{21}(z_2) &= \frac{z_2(t) - z_2^2}{z_2^1 - z_2^2}, \quad F_{22}(z_2) = \frac{z_2^1 - z_2(t)}{z_2^1 - z_2^2} \end{aligned} \quad (3.167)$$

où les scalaires z_1^1 , z_1^2 , z_2^1 et z_2^2 sont définis par :

$$z_1^1 = \max_u z_1(t), \quad z_1^2 = \min_u z_1(t), \quad z_2^1 = \max_x z_2(t), \quad z_2^2 = \min_x z_2(t) \quad (3.168)$$

Les sous-modèles sont définis par les paires (A_i, B_i) avec $i = 1, \dots, 4$. Les variables de prémisse ont été choisies de façon à avoir toutes les matrices B_i égales à $B^T = [0 \quad d]$. Compte tenu de (3.164) et (3.165), les matrices A_i sont données par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^1 \\ 0 & -cz_2^1 + z_1^1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} z_1^1 & z_2^2 \\ 0 & -cz_2^2 + z_1^1 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} z_1^2 & z_2^1 \\ 0 & -cz_2^1 + z_1^2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} z_1^2 & z_2^2 \\ 0 & -cz_2^2 + z_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

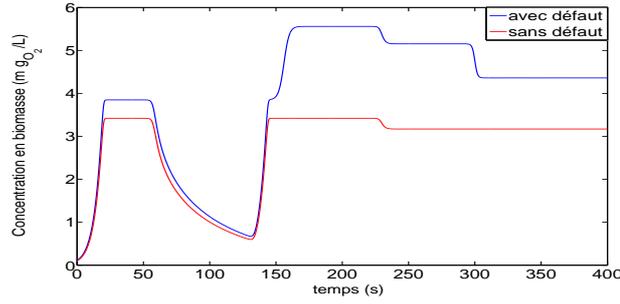


Figure 3.8 – Sortie nominale (sans défaut) et sortie avec défaut $f_1(t)$

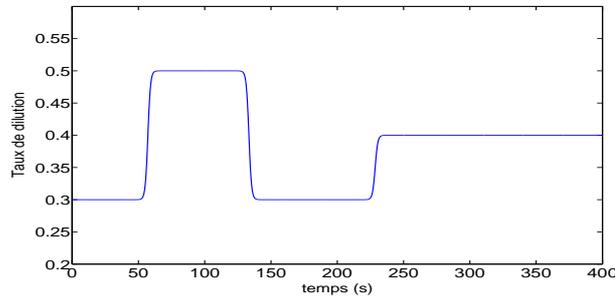


Figure 3.9 – Entrée du système

Le modèle T-S du système avec les défauts multiplicatifs de capteur est obtenu par interpolation des quatre sous-modèles du système et des deux sous-modèles de la sortie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + Bu(t)) \\ y(t) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\mu}_j(f_1(t)) \tilde{C}_j x(t) \end{cases} \quad (3.169)$$

avec $\tilde{C}_1 = (1 + f_1^2 \ 0)$, $\tilde{C}_2 = (1 + f_1^1 \ 0)$.

Les fonctions poids $\mu_j(f(t))$ sont calculées à partir de (3.122). Les $\mu_i(z(t))$ sont données par :

$$\begin{aligned} \mu_1(z(t)) &= F_{11}(z_1(t)) F_{21}(z_2(t)) \\ \mu_2(z(t)) &= F_{11}(z_1(t)) F_{22}(z_2(t)) \\ \mu_3(z(t)) &= F_{12}(z_1(t)) F_{21}(z_2(t)) \\ \mu_4(z(t)) &= F_{12}(z_1(t)) F_{22}(z_2(t)) \end{aligned} \quad (3.170)$$

Afin d’illustrer l’effet du défaut sur la sortie du système, la figure 3.8 représente la sortie avec et sans défaut. L’entrée du système, les états et leurs valeurs estimées ainsi que le défaut considéré et son estimé sont représentés respectivement par les figures 3.9, 3.10 et 3.11. Les conditions initiales sont fixées à $x(0) = (0.1 \ 1.5)$ pour le système et $\hat{x}_a(0) = (0.09 \ 2.3 \ 0)$ pour l’observateur des états et du défaut. A noter qu’avec la méthode proposée, l’observateur synthétisé a été obtenu avec un taux d’atténuation $\beta = 1.98 \cdot 10^{-2}$.

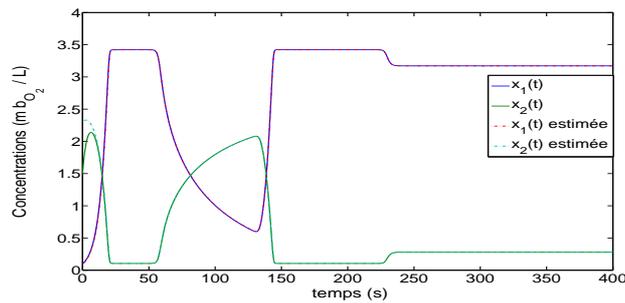
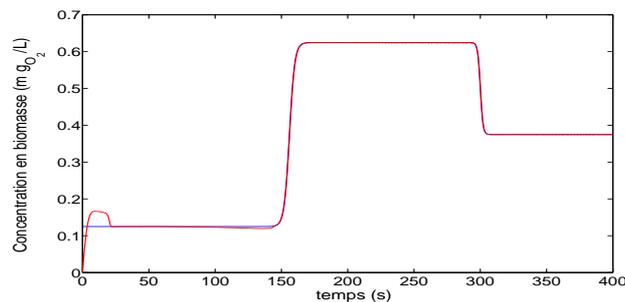


Figure 3.10 – Etats du système et leurs valeurs estimées

Figure 3.11 – Défaut $f_1(t)$ et son estimé

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'estimation d'état robuste (reconstruction d'état avec un certain degré de précision malgré la présence d'erreurs de modélisation et/ou de défauts actionneurs/capteurs) des systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S à variables de décision non mesurables ainsi que le diagnostic (estimation des défauts).

Dans un premier temps, les systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps avec une sortie bruitée ont été considérés en proposant des conditions de convergence relaxées.

Dans un second temps, l'approche a été généralisée aux systèmes non linéaires sous forme T-S avec une première partie dédiée aux erreurs de modélisation, de défauts systèmes et de défauts d'actionneurs et une seconde partie pour les défauts multiplicatifs de capteurs. Dans chaque partie, l'exemple d'un bioréacteur ayant un comportement non linéaire a été considéré. Cette approche a été structurée en trois étapes :

- Ré-écriture des équations non linéaires du système en modèle T-S par l'approche de transformation en secteurs non linéaires
- Ré-écriture polytopique des défauts
- Synthèse d'observateur et diagnostic par estimation des défauts ou paramètres variants.

4

Commande sous contrainte de saturation

Sommaire

4.1	Introduction	57
4.2	Motivations et position du problème	58
4.3	Représentation T-S de la saturation	59
4.4	Commande saturée par retour d'état de systèmes linéaires	62
4.4.1	Positionnement du problème	62
4.4.2	Représentation T-S du système	62
4.4.3	Synthèse de la commande	63
4.5	Commande saturée par retour d'état de systèmes non linéaires	65
4.5.1	Positionnement du problème	65
4.5.2	Représentation T-S du système soumis à une commande saturée	65
4.5.3	Commande de systèmes non linéaires saturés	65
4.5.4	Commande de systèmes non linéaires incertains saturés	71
4.5.5	Commande de systèmes non linéaires incertains saturés, approche descripteur	74
4.6	Commande par retour de sortie	79
4.6.1	Commande par retour de sortie statique	80
4.6.2	Commande par retour de sortie dynamique	83
4.6.3	Exemple numérique	85
4.7	Conclusion	86

4.1 Introduction

Les contraintes de saturation affectant les variables d'un système représentent probablement les non-linéarités les plus répandues en pratique. En effet, que ce soit pour des raisons physiques, technologiques, ou de sécurité, tout système physique est soumis à des limitations de fonctionnement qui se modélisent par des contraintes d'amplitude sur les actionneurs et les capteurs. En présence de saturation de commande, les performances d'un contrôleur synthétisé pour le cas nominal, c'est-à-dire en l'absence de saturation, peuvent se dégrader de manière significative. Ces dégradations peuvent se manifester comme

des dépassements, des oscillations de fortes amplitudes, des temps de réponse ou des régimes transitoires assez longs, et même dans certains cas conduire à une instabilité (Syaichu-Rohman [2005], Kapasouris et Athans [1988], Walgama et Sternby [1993], Park et Choi [1995], Kapoor *et al.* [1998]). Un exemple classique des effets catastrophiques pouvant être engendrés en négligeant ces contraintes est celui de la centrale nucléaire de Tchernobyl en 1986, mentionné dans (Stein [1989]). Une des causes du désastre fut attribuée aux limitations sur la vitesse à laquelle les barres de contrôle pouvaient être placées et retirées du noyau du réacteur nucléaire. Quand la réaction s'accéléra, la loi de commande essaya de placer les barres dans le noyau aussi vite que possible pour ralentir la réaction. Cependant, à cause de la limitation de vitesse sur le mouvement des barres de contrôle, l'action de la loi de commande ne fut pas assez rapide, ce qui amena à une réaction en chaîne incontrôlée [Henrion [1999]]. Il est maintenant largement admis que les saturations doivent être prises en compte lors de la synthèse de lois de commande. De façon résumée, deux approches principales permettent d'aborder cette problématique :

1. la synthèse de lois de commande dans le cas nominal, sans tenir compte de la saturation ; cette dernière est considérée a posteriori en rajoutant un bloc fonctionnel dédié à contrer son effet lors de son apparition. L'exemple le plus illustratif est l'anti-windup (Syaichu-Rohman et Middleton [2004], Zaccarian et Teel [2002], Mulder *et al.* [2001], Grimm *et al.* [2003]). C'est une approche en deux temps et qui consiste typiquement à ajouter au contrôleur nominal un compensateur basé sur la différence entre les signaux de commande non saturés et saturés du système (Syaichu-Rohman [2005]). Une généralisation du problème de synthèse anti-windup en se basant sur une caractérisation de la fonction saturation à l'aide d'une condition de secteur a également fait l'objet de plusieurs travaux, dont (Gomes da Silva Jr et Tarbouriech [2005]). Cependant, concernant les systèmes LPV saturés, la littérature n'est pas très abondante à ce sujet, mais nous pouvons notamment citer (Scorletti et El Ghaoui [1998]), (Wu *et al.* [2000]) et (Do *et al.* [2011]) où la condition de secteur modifiée introduite par (Gomes da Silva Jr et Tarbouriech [2005]) a été généralisée aux systèmes LPV soumis à une saturation d'entrée et à des contraintes sur l'état.
2. la synthèse de lois de commande en tenant compte de la saturation. Des méthodes efficaces ont largement été traitées dans la littérature comme la construction d'ensembles invariants et le calcul du domaine d'attraction. L'idée fondamentale est de s'assurer qu'aucun dépassement de commande n'apparaisse, ou plutôt que le système n'atteigne jamais la saturation en cherchant le plus grand ensemble de conditions initiales pour lesquelles la stabilité en boucle fermée est garantie et que les états restent invariants dans un certain sous-ensemble de l'ensemble d'état admissible qui prend en compte des valeurs admissibles d'entrée. Toutefois, cet ensemble doit être suffisamment grand pour être satisfaisant. L'un des critères qui peuvent être pris en compte pour la conception des commandes est celui de la « maximisation » de la taille du sous-ensemble invariant. C'est un problème fondamental, cependant particulièrement difficile, et qui reste irrésolu dans le cas général (Henrion et Tarbouriech [1999]). Plusieurs méthodes ont été proposées pour approximer ces ensembles invariants (Hu et Lin [2003], De Dona *et al.* [1999], Gilbert et Tan [1991]).

La première approche est plus adaptée aux saturations qui relèvent d'une optimisation locale des performances et où les contraintes jouent un rôle minime, contrairement à la seconde approche plus appropriée au cas où l'effet des contraintes est critique (Blanchini et Miani [2008]). En effet, en l'absence d'hypothèse de stabilité, il est bien connu qu'en présence de saturation, certaines trajectoires du système peuvent être instables.

4.2 Motivations et position du problème

Par opposition aux méthodes citées ci-dessus, généralement conçues pour éviter la saturation des actionneurs afin de préserver les performances en boucle fermée du système, l'approche proposée dans ce

chapitre traite explicitement des saturations de commande. En effet, la ré-écriture sous forme de modèle T-S des saturations affectant les commandes du système permet d'intégrer ces contraintes dans le modèle du système et de synthétiser les lois de commande en fonction des bornes imposées.

Un autre avantage de la méthode proposée est que la ré-écriture T-S des saturations permet non seulement de traiter le cas des systèmes linéaires, mais aussi celui des systèmes non linéaires, ce qui n'est pas le cas des méthodes citées précédemment qui traitent essentiellement le cas des systèmes linéaires.

Comme nous allons le voir par la suite, l'écriture générique et systématique de la saturation permet non seulement la conception d'une commande stabilisante des systèmes (linéaires et non linéaires), mais assure également la robustesse par rapport aux incertitudes. Les cas traités concernent la commande par retour d'état, par retour de sortie, l'utilisation de contrôleurs statique ou dynamique, en utilisant la méthode de Lyapunov classique ainsi que l'approche descripteur pour représenter le système à étudier.

La section 4.3 présente l'écriture T-S des saturations d'actionneurs. La section 4.4 porte sur la synthèse de commande par retour d'état des systèmes linéaires saturés (Bezzaoucha *et al.* [2012]). Une extension aux systèmes non linéaires sous forme T-S est proposée à la section 4.5 (Bezzaoucha *et al.* [2013d]). Un exemple de stabilisation d'un chariot-pendule soumis à des saturations de commande est traité. Dans l'exemple proposé, l'effet déstabilisant de la saturation est mis en évidence, ainsi que l'apport de l'approche T-S.

Pour améliorer les résultats obtenus, nous nous sommes également intéressés dans ce chapitre à la résolution par approche descripteur. Cette dernière a été appliquée dans le cas de systèmes non linéaires incertains (Bezzaoucha *et al.* [2013e]) ainsi que pour la commande par retour de sortie (Bezzaoucha *et al.* [2013a]). A noter que les stratégies de commande par retour d'état proposées sont basées sur l'hypothèse que le vecteur d'état soit mesurable ; cette condition n'étant pas forcément satisfaite pour tous les systèmes, deux solutions peuvent être envisagées : soit l'introduction d'un observateur, soit la synthèse de stratégies de commande avec retour de sortie. C'est cette dernière solution qui est retenue et présentée dans la section 4.6. Ce choix est motivé par la remarque 3 du chapitre 2 selon laquelle le retour dynamique de sortie inclut le cas du retour d'état observé par un multi-observateur de type Luenberger. Deux cas de figure sont traités : la synthèse d'un contrôleur statique, puis celle d'un contrôleur dynamique. Afin d'illustrer l'efficacité des approches proposées, des exemples de simulation sont également présentés.

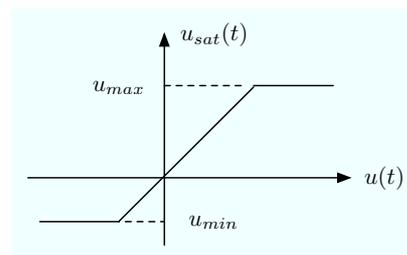
4.3 Représentation T-S de la saturation

L'effet de la saturation sur un système peut se modéliser de plusieurs manières. Une possibilité consiste à représenter le système saturé à l'aide d'un modèle polytopique. Cette représentation est basée sur la décomposition par secteurs non linéaires et aboutit à un modèle de type Takagi-Sugeno. Pour cela, nous proposons de ré-écrire chaque composante du vecteur d'entrée sous une forme particulière avec trois sous-modèles.

La fonction non linéaire saturation pour un signal $u(t)$ est définie comme suit :

$$u_{sat}(t) := \begin{cases} u(t) & \text{si } u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ u_{max} & \text{si } u(t) > u_{max} \\ u_{min} & \text{si } u(t) < u_{min} \end{cases} \quad (4.1)$$

où u_{max} et u_{min} sont les limites de saturation.



Considérons à présent le vecteur d'entrées $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, tel que :

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & u_{n_u}(t) \end{pmatrix}^T \quad (4.2)$$

L'entrée de commande sous contrainte de saturation est définie comme :

$$u_{sat}(t) = \begin{pmatrix} u_{sat,1}(t) & \dots & u_{sat,n_u}(t) \end{pmatrix}^T \quad (4.3)$$

Dans ce qui suit, nous établissons une relation entre $u_{sat}(t)$ et $u(t)$. Compte tenu de (4.1), chaque composante du vecteur peut se ré-écrire sous la forme :

$$u_{sat,j}(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i^j(u_j(t)) (\lambda_i^j u_j(t) + \gamma_i^j), \quad j = 1, \dots, n_u \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_1^j = 0 \\ \lambda_2^j = 1 \\ \lambda_3^j = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \gamma_1^j = u_{min,j} \\ \gamma_2^j = 0 \\ \gamma_3^j = u_{max,j} \end{cases} \quad (4.6)$$

et les fonctions d'activation suivantes :

$$\begin{cases} \mu_1^j(u_j(t)) = \frac{1 - \text{sign}(u_j(t) - u_{min,j})}{2} \\ \mu_2^j(u_j(t)) = \frac{\text{sign}(u_j(t) - u_{min,j}) - \text{sign}(u_j(t) - u_{max,j})}{2} \\ \mu_3^j(u_j(t)) = \frac{1 + \text{sign}(u_j(t) - u_{max,j})}{2} \end{cases} \quad (4.7)$$

où sign désigne la fonction signe et où $u_{min,j}$ et $u_{max,j}$ représentent respectivement les bornes inférieures et supérieures de la commande u_j .

A partir de (4.3) et (4.4), on ré-écrit alors le vecteur d'entrées $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ soumis aux contraintes saturation sous la forme

$$u_{sat}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \mu_i^1(u_1(t)) (\lambda_i^1 u_1(t) + \gamma_i^1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i^\ell(u_\ell(t)) (\lambda_i^\ell u_\ell(t) + \gamma_i^\ell) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i^{n_u}(u_{n_u}(t)) (\lambda_i^{n_u} u_{n_u}(t) + \gamma_i^{n_u}) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Pour simplifier et alléger les notations, les fonctions d'activation $\mu_i^j(u(t))$ seront désormais notées $\mu_i^j(t)$. En se basant sur la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, on peut ré-écrire (4.8) afin de

faire apparaître des fonctions d'activation communes à toutes les composantes du vecteur d'entrées :

$$u_{sat}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \mu_i^1(t)(\lambda_i^1 u_1(t) + \gamma_i^1) \times \left(\prod_{k=2}^{n_u} \sum_{j=1}^3 \mu_j^k(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i^\ell(u_\ell(t))(\lambda_i^\ell u_\ell(t) + \gamma_i^\ell) \times \left(\prod_{k=1, k \neq \ell}^{n_u} \sum_{j=1}^3 \mu_j^k(t) \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i^{n_u}(t)(\lambda_i^{n_u} u_{n_u}(t) + \gamma_i^{n_u}) \times \left(\prod_{k=1}^{n_u-1} \sum_{j=1}^3 \mu_j^k(t) \right) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Ainsi, pour n_u entrées de commande, 3^{n_u} sous-modèles sont obtenus. Il est aussi important de souligner que nous obtenons une expression analytique de la commande saturée $u_{sat}(t)$, exprimée en fonction du signal d'entrée $u(t)$. Finalement, l'équation (4.9) peut s'exprimer sous la forme :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i) \quad (4.10)$$

où les fonctions d'activation globales $\mu_i^{sat}(t)$ ainsi que les matrices $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ et les vecteurs $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \mu_i^{sat}(t) &= \prod_{j=1}^{n_u} \mu_{\sigma_i^j}^j(u_j(t)) \\ \Lambda_i &= \text{diag}(\lambda_{\sigma_i^1}^1, \dots, \lambda_{\sigma_i^{n_u}}^{n_u}) \\ \Gamma_i &= [\gamma_{\sigma_i^1}^1 \quad \gamma_{\sigma_i^2}^2 \quad \dots \quad \gamma_{\sigma_i^{n_u}}^{n_u}]^T \end{cases} \quad (4.11)$$

les indices σ_i^j ($i = 1, \dots, 3^{n_u}$ et $j = 1, \dots, n_u$), égaux à 1, 2 ou 3, indiquant quelle partition de la j ième entrée (μ_1^j , μ_2^j ou μ_3^j) est considérée dans le i ième sous-modèle.

La relation entre le i ième sous-modèle et les indices σ_i^j est donnée par l'expression suivante :

$$i = 3^{n_u-1} \sigma_i^1 + 3^{n_u-2} \sigma_i^2 + \dots + 3^0 \sigma_i^{n_u} - (3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n_u-1}) \quad (4.12)$$

Inversement, on peut également retrouver les indices σ_i^j en fonction du numéro i du sous-modèle, les quantités $((\sigma_i^1 - 1), \dots, (\sigma_i^{n_u} - 1))$ correspondent à $(i - 1)$ exprimé en base 3.

Un exemple illustratif est donné pour deux entrées ($n_u = 2$), où :

$$u_{sat}(t) = (u_{sat}^1(t) \quad u_{sat}^2(t))^T \quad (4.13)$$

Puisque nous avons trois partitions pour chaque entrée, le modèle T-S global pour $u_{sat}(t)$ se compose alors de 3^2 sous-modèles :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^9 \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i) \quad (4.14)$$

avec les paramètres μ_i^{sat} , Λ_i et Γ_i donnés par le tableau 1 dans lequel les quantités $\mu_{\sigma_i^j}^j(t)$, $\gamma_{\sigma_i^j}^j$ et $\lambda_{\sigma_i^j}^j$ ($\sigma_i^j = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2$) sont respectivement données par (4.7), (4.6) et (4.5).

sous-modèle i	(σ_i^1, σ_i^2)	$\mu_i^{sat}(t)$	Λ_i	Γ_i
1	(1, 1)	$\mu_1^1(t)\mu_1^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_1^1, \lambda_1^2)$	$[\gamma_1^1 \ \gamma_1^2]^T$
2	(1, 2)	$\mu_1^1(t)\mu_2^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_1^1, \lambda_2^2)$	$[\gamma_1^1 \ \gamma_2^2]^T$
3	(1, 3)	$\mu_1^1(t)\mu_3^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_1^1, \lambda_3^2)$	$[\gamma_1^1 \ \gamma_3^2]^T$
4	(2, 1)	$\mu_2^1(t)\mu_1^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_2^1, \lambda_1^2)$	$[\gamma_2^1 \ \gamma_1^2]^T$
5	(2, 2)	$\mu_2^1(t)\mu_2^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_2^1, \lambda_2^2)$	$[\gamma_2^1 \ \gamma_2^2]^T$
6	(2, 3)	$\mu_2^1(t)\mu_3^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_2^1, \lambda_3^2)$	$[\gamma_2^1 \ \gamma_3^2]^T$
7	(3, 1)	$\mu_3^1(t)\mu_1^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_3^1, \lambda_1^2)$	$[\gamma_3^1 \ \gamma_1^2]^T$
8	(3, 2)	$\mu_3^1(t)\mu_2^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_3^1, \lambda_2^2)$	$[\gamma_3^1 \ \gamma_2^2]^T$
9	(3, 3)	$\mu_3^1(t)\mu_3^2(t)$	$\text{diag}(\lambda_3^1, \lambda_3^2)$	$[\gamma_3^1 \ \gamma_3^2]^T$

Tableau 4.1 – Exemple à deux entrées

4.4 Commande saturée par retour d'état de systèmes linéaires

4.4.1 Positionnement du problème

Nous nous intéressons dans cette partie du chapitre à la synthèse d'une loi de commande par retour d'état statique pour un système linéaire soumis à une contrainte de saturation. L'objectif est d'assurer la stabilité du système bouclé malgré la contrainte de saturation, mais également de trouver le gain de commande en fonction des bornes de saturation.

La solution proposée est le passage par la représentation T-S. En effet, la ré-écriture de la saturation avec des modèles de Takagi-Sugeno permet d'exprimer la contrainte de saturation sous la forme (4.10) en fonction des bornes de saturation et d'utiliser l'écriture T-S globale (système + contrôleur) par la suite pour la synthèse de la commande.

4.4.2 Représentation T-S du système

Soit le modèle linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.15)$$

Comme l'entrée de commande $u(t)$ est soumise à une contrainte de saturation, le système décrit par (4.15) devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu^{sat}(t) \quad (4.16)$$

A partir du résultat (4.10), le système (4.16) est équivalent à :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{nu}} \mu_i^{sat}(t) (Ax(t) + B(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)) \quad (4.17)$$

4.4.3 Synthèse de la commande

On considère à présent la commande par retour d'état donnée par :

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.18)$$

Le report de (4.18) dans le modèle T-S (4.17) conduit à :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t) ((A - B\Lambda_i K)x(t) + B\Gamma_i) \quad (4.19)$$

La synthèse de la loi de commande est obtenue en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Le calcul du gain de commande K est précisé grâce au théorème suivant.

Théorème 7. *Il existe une commande par retour d'état pour le système linéaire saturé (4.16) tel que l'état du système converge vers une boule centrée à l'origine et dont le rayon est borné par β , s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, R, \Sigma = \Sigma^T > 0$ solutions du problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{P_1, R, \Sigma} \beta \quad (4.20)$$

t.q.

$$\begin{pmatrix} Q_i & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, 3^{n_u} \quad (4.21)$$

avec

$$Q_i = \begin{pmatrix} P_1 A^T + A P_1 - R^T \Lambda_i^T B^T - B \Lambda_i R & I \\ I & -\Sigma \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

et

$$\Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i < \beta \quad (4.23)$$

pour $i = 1, \dots, 3^{n_u}$.

Le gain du contrôleur est alors donné par :

$$K = R P_1^{-1} \quad (4.24)$$

Démonstration. *Considérons la fonction de Lyapunov suivante :*

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (4.25)$$

avec $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ matrice symétrique définie positive.

A partir des équations (4.19) et (4.25), la dérivée par rapport au temps de $V(x(t))$ est donnée par :

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t) (x^T(t) ((A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K)) x(t) + \Gamma_i^T B^T P x(t) + x^T(t) P B \Gamma_i) \quad (4.26)$$

En appliquant le lemme 5 du "Carré Matriciel", on utilise la majoration suivante avec $\Sigma = \Sigma^T > 0$:

$$\Gamma_i^T B^T P x(t) + x^T(t) P B \Gamma_i \leq \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i + x^T(t) P \Sigma^{-1} P x(t) \quad (4.27)$$

avec $\Sigma > 0$, ceci conduit à borner (4.26) par :

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t) (x^T(t) ((A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K) + P \Sigma^{-1} P) x(t) + \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i) \quad (4.28)$$

Définissons maintenant :

$$Q_i = (A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K) + P\Sigma^{-1}P \quad (4.29)$$

$$\varepsilon = \min_{i=1:3^{n_u}} \lambda_{\min}(-Q_i) \quad (4.30)$$

$$\delta = \max_{i=1:3^{n_u}} \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i \quad (4.31)$$

L'inégalité (4.28) se ré-écrit :

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{\text{sat}}(t) (x^T(t) Q_i x(t) + \delta) \quad (4.32)$$

Puisque $\Sigma > 0$, de l'équation (4.32) avec la propriété de somme convexe des fonctions d'activation (B.2) ainsi qu'en se basant sur le lemme de congruence (lemme 1), $\dot{V}(x(t)) < -\varepsilon \|x(t)\|^2 + \delta$. Il en découle que $\dot{V}(x(t)) < 0$ pour

$$\begin{cases} Q_i < 0 \\ \|x(t)\|^2 > \frac{\delta}{\varepsilon} \end{cases} \quad (4.33)$$

Ceci implique, suivant la théorie de stabilité de Lyapunov, que $x(t)$ converge vers la boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$.

En appliquant le principe de congruence (Lemme 2), un complément de Schur, ainsi que les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} P_1 = P^{-1} \\ R = KP_1 \end{cases} \quad (4.34)$$

l'inégalité $Q_i < 0$ avec Q_i définie en (4.29) est linéarisée et mise sous la forme de la LMI $Q_i < 0$ avec Q_i donnée par (4.22). La condition $Q_i < 0$ avec Q_i donnée par (4.22) assure la convergence de l'état vers une boule centrée en zéro de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$.

L'objectif est à présent d'optimiser le résultat obtenu en minimisant le rayon de la boule $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$. Une des solutions possibles consiste à minimiser d'une part δ et d'autre part à maximiser ε . Pour cela, introduisons un scalaire positif β . Si β vérifie :

$$\begin{cases} \delta < \beta \\ \varepsilon > 1/\beta \end{cases} \quad (4.35)$$

alors le rayon de la boule $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ est borné par β .

Les deux conditions (4.35) se traduisent comme suit :

1. Si (4.23) est vraie pour $(i = 1, \dots, 3^{n_u})$, d'après (4.31), alors $\delta < \beta$.
2. Si (4.22) est vraie, un complément de Schur donne

$$-Q_i > (1/\beta) I, \quad i = 1, \dots, 3^{n_u} \quad (4.36)$$

alors toutes les valeurs propres de $-Q_i$ sont supérieures à $1/\beta$, en particulier ε définie en (4.30).

Les conditions (4.33) sont donc impliquées par (4.21) et (4.23), ce qui achève la démonstration.

Remarque 7. Il est important de noter qu'à partir du théorème 7 et de la définition des matrices Q_i (4.22), l'approche proposée stabilise le système saturé à condition que le système nominal (sans saturation) soit initialement stable (valeurs propres de la matrice A négatives).

En effet, il est évident à partir du bloc (1, 1) de la matrice Q_i et de la définition des matrices Λ_i , que lorsque $\Lambda_i = 0$ si la quantité $P_1 A^T + A P_1$ n'est pas définie négative, alors la condition de stabilité $Q_i < 0$ ne sera jamais assurée.

Pour résumer, l'approche proposée ne peut pas stabiliser un système nominal instable sous une contrainte de saturation de commande, mais en revanche, assure parfaitement la stabilité des systèmes initialement stables mais déstabilisés par la saturation de commande.

4.5 Commande saturée par retour d'état de systèmes non linéaires

4.5.1 Positionnement du problème

Comme pour la section précédente, nous nous intéressons dans cette partie à la synthèse d'une loi de commande par retour d'état assurant un recalage de l'état à l'origine, mais cette fois-ci appliquée à un système non linéaire sous forme de modèle T-S soumis à une contrainte de saturation. L'objectif est toujours d'assurer la stabilité du système bouclé malgré la contrainte non linéaire, mais également de trouver les gains de commande dépendants des bornes de la saturation.

L'intérêt de l'approche proposée est qu'elle se généralise de manière immédiate du cas linéaire au cas des systèmes non linéaires sous forme T-S, les non-linéarités du système et les saturations étant représentées de manière similaire.

4.5.2 Représentation T-S du système soumis à une commande saturée

Considérons le modèle non linéaire (sous forme T-S) suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4.37)$$

avec $\xi(t)$ les variables de prémisse supposées connues et mesurables.

Comme l'entrée de commande $u(t)$ est soumise à une contrainte de saturation, le système T-S décrit par (4.37) devient alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u_{sat}(t)) \quad (4.38)$$

A partir du résultat (4.10) explicitant la commande saturée, le système non linéaire (4.38) s'écrit aussi :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_k^{sat}(u(t))(A_i x(t) + B_i (\Lambda_k u(t) + \Gamma_k)) \quad (4.39)$$

4.5.3 Commande de systèmes non linéaires saturés

On considère à présent la commande de type PDC (*Parallel Distributed Compensation*) suivante :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j x(t) \quad (4.40)$$

En reportant (4.40) dans le modèle T-S (4.39), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t) ((A_i - B_i \Lambda_k K_j) x(t) + B_i \Gamma_k) \quad (4.41)$$

Le réglage des gains de la loi de commande se ramène à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Les gains K_i sont donnés par le théorème suivant.

Théorème 8. *Il existe une commande par retour d'état pour le système non linéaire saturé (4.38) telle que l'état du système converge vers une boule centrée à l'origine dont le rayon est borné par β , s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, R_j , $\Sigma_k = \Sigma_k^T > 0$ (pour $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 3^{n_u}$), solutions du problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{P, R_j, \Sigma_k} \beta \quad (4.42)$$

sous les contraintes :

$$\begin{pmatrix} Q_{ijk} & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.43)$$

$$\Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k < \beta \quad (4.44)$$

avec

$$Q_{ijk} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}(A_i P - B_i \Lambda_k R_j) & I \\ I & -\Sigma_k \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Les gains du contrôleur (4.40) sont donnés par

$$K_j = R_j P^{-1} \quad (4.46)$$

Démonstration. *La preuve du théorème 8 découle du même raisonnement que celui utilisé pour le théorème 7. En effet, considérons la même fonction de Lyapunov que celle utilisée précédemment :*

$$V(x(t)) = x^T(t) P^{-1} x(t) \quad (4.47)$$

avec $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ matrice symétrique définie positive. A partir de (4.41), sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \mu_k(t) \left(\mathbb{S}(x^T(t) P^{-1} B_i \Gamma_k + x^T(t) P^{-1} (A_i - B_i \Lambda_k K_j) x(t)) \right) \quad (4.48)$$

Du lemme 5 "Carré matriciel" avec $\Sigma = \Sigma^T > 0$, nous déduisons :

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \mu_k(t) \left(x^T(t) (\mathbb{S}(P^{-1} (A_i - B_i \Lambda_k K_j) + P^{-1} \Sigma_k^{-1} P^{-1}) x(t) + \Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k) \right) \quad (4.49)$$

Notons :

$$Q_{ijk} = \mathbb{S}(P^{-1} (A_i - B_i \Lambda_k K_j) + P^{-1} \Sigma_k^{-1} P^{-1}) \quad (4.50)$$

$$\varepsilon = \min_{i=1:n, j=1:n, k=1:3^{n_u}} \lambda_{\min}(-Q_{ijk}) \quad (4.51)$$

$$\delta = \max_{i=1:n, k=1:3^{n_u}} \Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k \quad (4.52)$$

L'inégalité (4.49) est ré-écrite sous la forme $\dot{V}(x(t)) < -\varepsilon \|x\|_2^2 + \delta$, ainsi $\dot{V}(x(t))$ est négative pour :

$$Q_{ijk} < 0 \quad \text{and} \quad \|x\|_2^2 > \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (4.53)$$

ce qui implique que $x(t)$ converge vers une boule centrée à l'origine dont le rayon est égal à $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ (Zhang et al. [2009]).

Analysons à présent la condition $Q_{ijk} < 0$, i.e.

$$\mathbb{S}(P^{-1} (A_i - B_i \Lambda_k K_j) + P^{-1} \Sigma_k^{-1} P^{-1}) < 0 \quad (4.54)$$

De la propriété de congruence (6), l'inégalité (4.54) devient :

$$\mathbb{S}((A_i - B_i \Lambda_k K_j)P) + \Sigma_k^{-1} < 0 \quad (4.55)$$

Avec le changement de variables (4.46) et l'utilisation d'un complément de Schur, les inégalités (4.55) sont équivalentes au bloc (1,1) de (4.43), i.e. $Q_{ijk} < 0$. Comme les fonctions d'activation satisfont la propriété de somme convexe (B.2) et comme $\Sigma_k > 0$, si $Q_{ijk} < 0$ est vérifiée pour $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 3^{n_u}$ et $\|x\|_2 > \frac{\delta}{\varepsilon}$, alors $\dot{V}(x(t)) < 0$, implique que $x(t)$ converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$.

L'objectif à présent est de minimiser le rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$. Ainsi, de (4.52) et des LMIs (4.44), δ est borné par β . De (4.43), avec un complément de Schur, nous en déduisons que :

$$(1/\beta)I < -Q_{ijk}, i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 3^{n_u} \quad (4.56)$$

impliquant que toutes les valeurs propres de $(-Q_{ijk})$ sont supérieures à $1/\beta$. Par conséquent, $1/\beta < \varepsilon$ est vraie et finalement le rayon est borné par β .

Remarque 8. Afin d'améliorer le résultat du théorème (8), les conditions de relaxation présentées dans (Tuan et al. [2001]) peuvent être appliquées car les sommes sur i et j sont pondérées par les mêmes fonctions d'activation. D'après (Tuan et al. [2001] et (4.43)), le problème d'optimisation relaxé devient :

$$\min_{P, R_j, \Sigma_k} \beta \quad (4.57)$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} Q_{iik} & I \\ I & -\beta I \end{array} \right) < 0, i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, 3^{n_u} \\ \left(\begin{array}{cc} \frac{2}{n-1}Q_{iik} + Q_{ijk} + Q_{jik} & I \left(\frac{2n}{n-1} \right) \\ * & -\beta I \left(\frac{2n}{n-1} \right) \end{array} \right) < 0, i \neq j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, 3^{n_u} \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Remarque 9. Les résultats précédents sont basés sur le lemme 5 du "Carré Matriciel", ce qui conduit à l'apparition du terme δ ($\Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k$) et de ce fait, la convergence vers une boule centrée à l'origine de rayon inférieur à β .

Afin de réduire le conservatisme induit par le lemme 5 du "Carré matriciel" (les termes Σ_k et Σ_k^{-1}) une solution consisterait à considérer le changement de variable suivant $x = \bar{x} + \tau_{ijk}$ dans l'équation (4.48), avec $\tau_{ijk} = -(\Xi_{ijk}^T + \Xi_{ijk})^{-1} P^{-1} B_i \Gamma_k$ et $\Xi_{ijk} = A_i - B_i \Lambda_k K_j$. L'équation (4.48) devient alors :

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} h_i(\xi(t)) h_j(\xi(t)) \mu_k(t) (\bar{x}^T(t) (\Xi_{ijk}^T + \Xi_{ijk}) \bar{x}(t) - \Gamma_k^T B_i^T P^{-1} (\Xi_{ijk}^T + \Xi_{ijk})^{-1} P^{-1} B_i \Gamma_k) \quad (4.59)$$

Pour chaque triplet (i, j, k) , il apparaît dans l'expression de $\dot{V}(x(t))$ une boule de centre τ_{ijk} et de rayon

$r_{ijk} = \sqrt{\frac{\Gamma_k^T B_i^T P^{-1} (\Xi_{ijk}^T + \Xi_{ijk})^{-1} P^{-1} B_i \Gamma_k}{\lambda_{\max}(\Xi_{ijk}^T + \Xi_{ijk})}}$. Ainsi, d'après la théorie de Lyapunov, si les conditions $\Xi_{ijk}^T + \Xi_{ijk} < 0$ sont vraies (pour $i, j = 1, \dots, n$ et $k = 1, \dots, 3^{n_u}$), le vecteur d'état converge vers la boule qui englobe toutes les boules de caractéristiques $\{\tau_{ijk}, r_{ijk}\}$.

Exemple applicatif

Afin d'illustrer l'approche proposée, nous considérons l'exemple d'un chariot-pendule représenté par la figure 4.1.

Sur ce schéma apparaissent les grandeurs physiques dont le sens est donné dans le tableau 4.2.

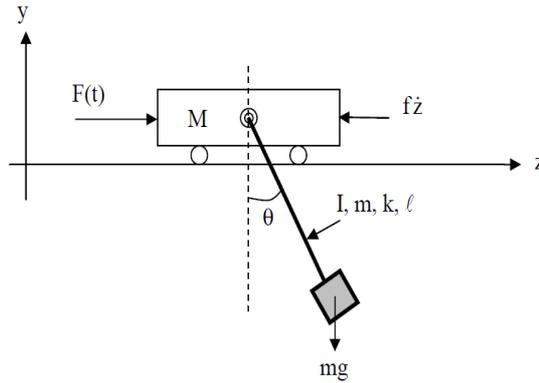


Figure 4.1 – Schéma de l'ensemble chariot-pendule

$z(t)$	Position horizontale du chariot (en m)
$\theta(t)$	Position angulaire du pendule (en rad)
$F(t)$	Force d'entraînement transmise par la courroie et due au moteur (en N)
M	Masse du chariot = 5 kg
m	Masse du pendule = 1 kg
g	Accélération de la pesanteur = $9,81ms^{-2}$
l	Longueur du pendule = 0,1 m
I	Moment d'inertie du pendule par rapport au centre de masse ($510kgm^2$)
f	Coefficient de frottement visqueux entre le chariot et le rail et s'opposant à l'action $F(t)$ ($f = 100N/m/s$)
k_s	Coefficient de frottement sec du chariot ($k_s = 0.001N/m/s$)
k	Coefficient de frottement visqueux du pendule sur son axe ($k = 0.045N/rad/s$)

Tableau 4.2 – Paramètres de l'ensemble chariot-pendule

Sous certaines hypothèses, le comportement dynamique de ce système non linéaire est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{z}(t) + f\dot{z}(t) + k_s z(t) - ml\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) + ml\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) & = F(t) \\ -ml\ddot{z}(t)\cos(\theta(t)) + (ml^2 + I)\ddot{\theta}(t) + k\dot{\theta}(t) + mgl\sin(\theta(t)) & = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Afin d'alléger le volume de calculs, nous ne considérons dans ce qui suit que le cas des petits angles. Le modèle simplifié s'écrit alors :

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{z}(t) + k_s z(t) + f\dot{z}(t) - ml\ddot{\theta}(t) + ml\dot{\theta}^2(t)\theta(t) & = F(t) \\ -ml\ddot{z}(t) + (ml^2 + I)\ddot{\theta}(t) + k\dot{\theta}(t) + mgl\theta(t) & = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

Comme il sera montré ultérieurement, la saturation de la commande nominale a un effet déstabilisant sur le système dynamique non linéaire. Afin de contrer cet effet, nous proposons d'appliquer l'approche

proposée dans cette section, qui consiste en un premier temps à modéliser le système non linéaire sous forme d'un modèle T-S, puis à prendre en compte la saturation dans la synthèse de commande en la représentant également sous forme T-S. Finalement, les gains de retour d'état seront calculés à partir des conditions relaxées du théorème 8 sachant que la commande est saturée par $0 \leq F(t) \leq 3$.

Passage du système non linéaire à sa représentation T-S

Considérons le vecteur d'état $x(t)$ et l'entrée de commande $u(t)$ définis par :

$$x(t) = (z(t) \quad \dot{z}(t) \quad \theta(t) \quad \dot{\theta}(t))^T, \quad u(t) = F(t) \quad (4.62)$$

De (4.61) et (4.62), on en déduit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{(ml^2 + I)\dot{x}_4(t) + kx_4(t) + mglx_3(t)}{ml} \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{-\frac{m+M}{ml}kx_4(t) - ((m+M)g + mlx_4^2(t))x_3(t) - k_sx_1(t) - fx_2(t) + u(t)}{\frac{m+M}{ml}(ml^2 + I) - ml} \end{cases} \quad (4.63)$$

La factorisation de x permet de déduire la forme quasi-LPV suivante :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) \quad (4.64)$$

avec :

$$A(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3(t) & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_5 & a_6 & a_7(t) & a_8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

et où les paramètres a_i et b_i sont définis par :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{(m+M)\frac{(ml)^2}{ml^2+I}} & b_2 &= \frac{b_1 ml}{ml^2+I} & a_1 &= -k_s b_1 & a_2 &= -f b_1 & a_3(t) &= -b_1 ml(g + x_4^2(t)) \\ a_4 &= -\frac{b_1 ml k}{ml^2+I} & a_5 &= \frac{a_1 ml}{ml^2+I} & a_6 &= \frac{a_2 ml}{ml^2+I} & a_7(t) &= \frac{a_3(t) ml}{ml^2+I} - g & a_8 &= \frac{a_4 ml - k}{ml^2+I} \end{aligned} \quad (4.66)$$

L'examen de (4.65) et (4.66) suggère de choisir la non-linéarité $z(t) = x_4^2(t)$ comme variable de prémisse. Du fait des limitations d'angle et de vitesse, $z(t)$ est bornée et la transformation polytopique convexe est appliquée, ce qui permet d'avoir :

$$z(t) = h_1(t)z_1 + h_2(t)z_2 \quad (4.67)$$

avec

$$\begin{cases} z_1 &= \max z(t) \\ z_2 &= \min z(t) \\ h_1(t) &= \frac{z(t) - z_2}{z_1 - z_2} \\ h_2(t) &= \frac{z_1 - z(t)}{z_1 - z_2} \end{cases} \quad (4.68)$$

où $h_1(t)$ et $h_2(t)$ représentent les fonctions d'activation du modèle T-S défini par l'équation :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(t)(A_i x(t) + Bu(t)) \quad (4.69)$$

Les matrices A_i ($i = 1, 2$) sont obtenues en remplaçant $a_3(t)$ respectivement par $(-b_1 ml(g + z_1))$ et $(-b_1 ml(g + z_2))$ dans $A(x(t))$ (4.65).

Synthèse de la commande

Comme mentionné précédemment trois lois de commande sont synthétisées et traitées. La première utilise un retour d'état et est appliquée dans le cas nominal (sans saturation), la deuxième utilise le même correcteur nominal mais est saturée, la troisième utilise également un retour d'état mais prend en compte la saturation lors de la synthèse de la loi de commande sachant que les niveaux de saturation correspondent à $u_{min} = 0$ et $u_{max} = 3$ (méthode T-S proposée). Les lois de commande considérées sont ainsi données par :

$$\begin{aligned} u_N(t) &= -\sum_{i=1}^2 h_i(t) K_{i,N} x(t) \\ u_{N,sat}(t) &= \text{sat}(u_N(t)) \\ u_{TS}(t) &= -\sum_{i=1}^2 h_i(t) K_{i,TS} x(t) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Le calcul de la commande nominale $u_N(t)$ est basée sur le développement donné dans la section 2.7.1. Quant à celui de $u_{TS}(t)$, il est donné par le théorème 8 avec les conditions relaxées de la remarque 8, les gains suivants ont été obtenus :

$$K_{1,N} = (11.53 \quad -79.84 \quad 14.34 \quad 6.48), \quad K_{2,N} = (9.95 \quad -82.17 \quad 11.78 \quad 5.51) \quad (4.71)$$

$$K_{1,TS} = (0.43 \quad 2.14 \quad 1.17 \quad 0.05), \quad K_{2,TS} = (0.37 \quad -9.19 \quad -0.10 \quad 0.53) \quad (4.72)$$

Les commandes nominale, nominale saturée et T-S sont ainsi représentées par la figure 4.2.

Pour la condition initiale $x_0 = (0 \quad 0 \quad 15\pi/180 \quad 0)^T$, la figure 4.3 représente l'évolution au cours du

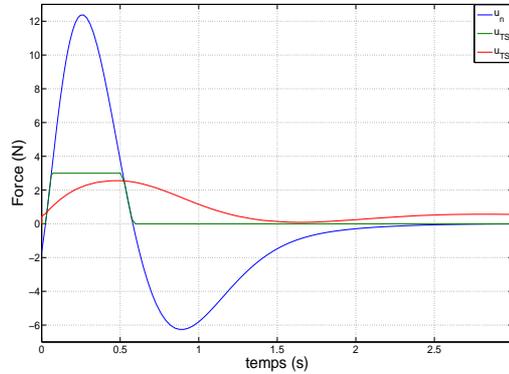


Figure 4.2 – Commandes nominale, nominale saturée et T-S

temps de :

- x_N , l'état obtenu en appliquant la commande nominale (sans saturation), i.e.

$$\dot{x}_N(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(t) (A_i x_N(t) + B u_N(t))$$

- $x_{N,sat}$, l'état pour la commande nominale saturée (saturation subie), i.e.

$$\dot{x}_{N,sat}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(t) (A_i x_{N,sat}(t) + B u_{N,sat}(t))$$

t.q. $u_{N,sat}(t) = \text{sat}(u_N(t))$.

– et $x_{sat,TS}$ l'état pour l'approche T-S proposée, i.e.

$$\dot{x}_{sat,TS}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(t)(A_i x_{sat,TS}(t) + B u_{TS}(t))$$

$$\text{avec } u_{TS}(t) = - \sum_{i=1}^2 h_i(t) K_{i,TS} x_{sat,TS}(t).$$

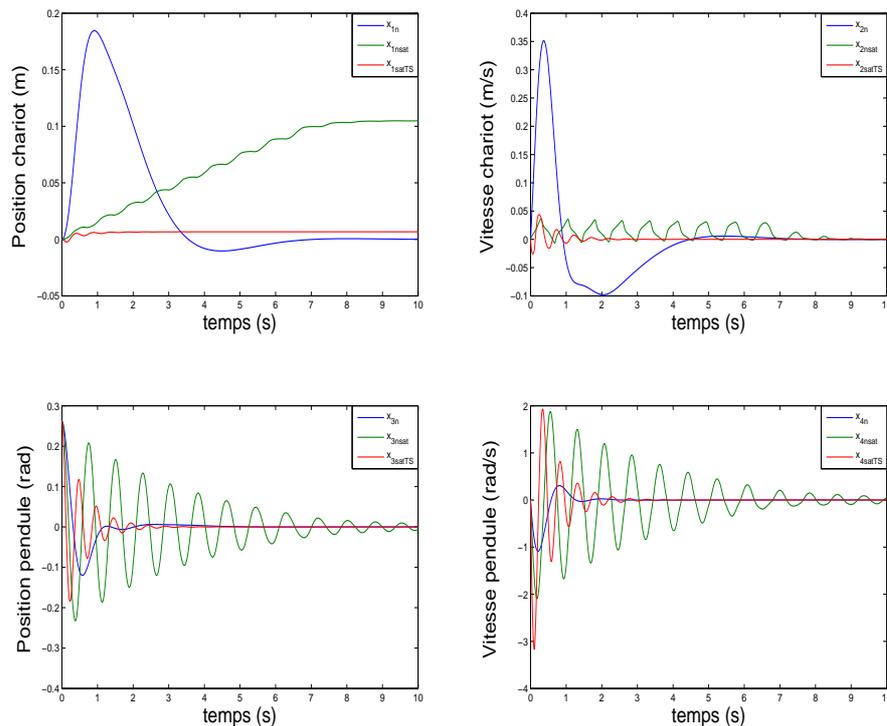


Figure 4.3 – Etats du système avec commande par retour d'état

L'examen de la figure obtenue montre bien la non convergence vers zéro de l'état. Il apparaît clairement que l'approche T-S proposée assure la convergence de l'état vers une boule centrée à l'origine.

4.5.4 Commande de systèmes non linéaires incertains saturés

En pratique, il existe plusieurs sources d'incertitudes affectant les systèmes physiques et donc leurs modèles. Un cas d'étude intéressant consiste à prendre en compte simultanément l'incertitude des systèmes non linéaires et la saturation de la commande. En effet, dans ce cas, la représentation utilisée par modèles T-S présente l'intérêt d'apporter une écriture uniforme et commune des non-linéarités du modèle du système et de celles affectant les entrées (saturation de commande), ce qui permet de facilement transposer les techniques de commande robuste utilisées pour l'étude des systèmes linéaires aux systèmes non linéaires incertains.

Restructuration du modèle

La solution proposée est donc d'exprimer la saturation de la commande sous forme de modèle T-S et d'utiliser cette écriture pour la synthèse d'une loi de commande par retour d'état robuste pour les systèmes non linéaires incertains sous forme de modèles T-S. Considérons le système T-S non linéaire incertain avec entrée saturée suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) ((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u_{sat}(t)) \quad (4.73)$$

où les incertitudes affectant les matrices d'état sont communes à tous les sous-systèmes et sont structurées sous la forme :

$$\Delta A(t) = A \Sigma_A(t) E_A \quad (4.74)$$

$$\Delta B(t) = B \Sigma_B(t) E_B \quad (4.75)$$

les variations $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$ étant inconnues mais bornées :

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \forall t \quad (4.76)$$

$$\Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I, \forall t \quad (4.77)$$

La matrice identité I ainsi que les matrices connues A , B , E_A et E_B sont de dimensions appropriées. A partir de la définition (4.10) de la saturation, le système non linéaire incertain (4.73) se ré-écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t) ((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))(\Lambda_k u(t) + \Gamma_k)) \quad (4.78)$$

Synthèse de la commande

Comme énoncé précédemment, l'objectif à présent est la synthèse d'une commande par retour d'état (4.79) pour stabiliser le système T-S non linéaire incertain en présence de saturation de commande (4.73). La commande est choisie sous la forme suivante :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j x(t) \quad (4.79)$$

où les gains $K_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ sont à déterminer.

En remplaçant (4.79) dans (4.78), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t) ((A_i - B_i \Lambda_k K_j)x(t) + (\Delta A(t) - \Delta B(t) \Lambda_k K_j)x(t) + B_i \Gamma_k + \Delta B(t) \Gamma_k) \quad (4.80)$$

Les gains K_j du contrôleur sont donnés par le théorème suivant.

Théorème 9. *Il existe un contrôleur par retour d'état (4.79) pour un système T-S non linéaire incertain en présence de saturation de commande (4.73) assurant la convergence de l'état du système vers une boule centrée à l'origine dont le rayon est borné par β , s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, R_j , $\Sigma_k = \Sigma_k^T > 0$ et des scalaires positifs σ_k , ω_1 , ω_{2k} solutions du problème d'optimisation :*

$$\min_{P, R_j, \Sigma_k, \sigma_k, \omega_1, \omega_{2k}} \beta \quad (4.81)$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} Q_{ijk} & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.82)$$

$$\Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k + \sigma_k \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k < \beta \quad (4.83)$$

où les matrices Q_{ijk} sont définies de la façon suivante :

$$Q_{ijk} = \begin{pmatrix} Q_{ijk}^1 & I & B & PE_A^T & R_j^T \Lambda_k^T E_B^T \\ * & -\Sigma_k & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\sigma_k I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\omega_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\omega_{2k} I \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

$$Q_{ijk}^1 = PA_i^T + A_i P - R_j^T \Lambda_k^T B_i^T - B_i \Lambda_k R_j + \omega_1 AA^T + \omega_{2k} BB^T \quad (4.85)$$

pour $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ et $k = 1, \dots, 3^{n_u}$.

Les gains du contrôleur sont alors donnés par

$$K_j = R_j P^{-1} \quad (4.86)$$

Démonstration. On considère la même fonction de Lyapunov que celle donnée en (4.47). Sa dérivée par rapport au temps s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \mu_k^{sat}(t) \mathbb{S}(x^T(t) P^{-1} B_i \Gamma_k + x^T(t) P^{-1} \Delta B(t) \Gamma_k) \\ & + x^T(t) (P^{-1} (A_i - B_i \Lambda_k K_j) + P^{-1} (\Delta A(t) - \Delta B(t) \Lambda_k K_j)) x(t) \end{aligned} \quad (4.87)$$

A partir du Lemme 1, pour $\Sigma_k = \Sigma_k^T > 0$, on utilise la majoration :

$$\mathbb{S}(\Gamma_k^T B_i^T P^{-1} x(t)) \leq \Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k + x^T(t) P^{-1} \Sigma_k^{-1} P^{-1} x(t) \quad (4.88)$$

A partir du lemme 7, de la définition (4.75) et de la contrainte (4.77), pour un scalaire positif σ_k , on utilise la majoration :

$$\mathbb{S}(x^T(t) P^{-1} \Delta B(t) \Gamma_k) \leq \sigma_k \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k + \sigma_k^{-1} x^T(t) P^{-1} BB^T P^{-1} x(t) \quad (4.89)$$

En considérant les majorations (4.88) et (4.89), la dérivée de la fonction de Lyapunov (4.87) est elle-même majorée sous la forme :

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \mu_k^{sat}(t) (\Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k + \sigma_k \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k + x^T(t) Q_{ijk} x(t)) \quad (4.90)$$

avec

$$Q_{ijk} = \mathbb{S}(P^{-1} (A_i - B_i \Lambda_k K_j) + P^{-1} (\Delta A(t) - \Delta B(t) \Lambda_k K_j)) + \sigma_k^{-1} P^{-1} BB^T P^{-1} + P^{-1} \Sigma_k^{-1} P^{-1} \quad (4.91)$$

Afin d'étudier le signe de $\dot{V}(x(t))$ (4.90), définissons :

$$\varepsilon = \min_{i=1:n, j=1:n, k=1:3^{n_u}} \lambda_{\min}(-Q_{ijk}) \quad (4.92)$$

$$\delta = \max_{i=1:n, k=1:3^{n_u}} \Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k + \sigma_k \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k \quad (4.93)$$

De (4.90), nous déduisons que $\dot{V}(x(t)) < -\varepsilon \|x(t)\|^2 + \delta$. Ceci conduit à $\dot{V}(x(t)) < 0$ si

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{ijk} < 0 \\ \text{et} \\ \|x(t)\|^2 > \frac{\delta}{\varepsilon} \end{cases} \quad (4.94)$$

Cela implique, suivant la théorie de stabilité de Lyapunov (Zhang et al. [2009]), que $x(t)$ est borné et converge vers la boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$.

En appliquant le principe de congruence (lemme 6) et les changements de variables :

$$R_j = K_j P \quad (4.95)$$

et compte tenu de la définition (4.91), l'inégalité $\mathcal{Q}_{ijk} < 0$ devient :

$$\mathbb{S}(A_i P - B_i \Lambda_k R_j + \Delta A(t) P - \Delta B(t) \Lambda_k R_j) + \sigma_k^{-1} B B^T + \Sigma_k^{-1} < 0 \quad (4.96)$$

Des relations (4.74-4.76), en appliquant le lemme 7, nous déduisons :

$$\mathbb{S}(\Delta A(t) P) \leq \omega_1^{-1} P E_A^T E_A P + \omega_1 A A^T \quad (4.97)$$

ainsi que :

$$\mathbb{S}(-\Delta B(t) \Lambda_k R_j) \leq \omega_{2k}^{-1} R_j^T \Lambda_k^T E_B^T E_B \Lambda_k R_j + \omega_{2k} B B^T \quad (4.98)$$

où ω_1 et ω_{2k} sont des scalaires positifs.

En utilisant (4.97) et (4.98), (4.96) est satisfaite si :

$$\mathbb{S}(A_i P - B_i \Lambda_k R_j) + \Sigma_k^{-1} + \sigma_k^{-1} B B^T + \omega_1^{-1} P E_A^T E_A P + \omega_1 A A^T + \omega_{2k}^{-1} R_j^T \Lambda_k^T E_B^T E_B \Lambda_k R_j + \omega_{2k} B B^T < 0 \quad (4.99)$$

A partir du complément de Schur appliqué à (4.99), l'inégalité $\mathcal{Q}_{ijk} < 0$ avec \mathcal{Q}_{ijk} définie en (4.91) est impliquée par la LMI $\mathcal{Q}_{ijk} < 0$ avec \mathcal{Q}_{ijk} donnée par (4.84).

La condition $\mathcal{Q}_{ijk} < 0$, avec \mathcal{Q}_{ijk} donnée par (4.84), assure la convergence de l'état du système non linéaire incertain saturé (4.73) vers la boule centrée en zéro de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$. Comme pour les cas précédents, l'objectif est à présent d'optimiser le résultat obtenu en minimisant le rayon de la boule $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$.

Comme montré dans la démonstration du théorème 8, le rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ est majoré par β si les conditions (4.82) et (4.83) sont satisfaites, ce qui achève la démonstration.

4.5.5 Commande de systèmes non linéaires incertains saturés, approche descripteur

Dans cette section, on utilise l'approche descripteur pour représenter le système en boucle fermée. Cette représentation appliquée à la synthèse de la commande consiste à introduire une dynamique virtuelle sur l'entrée et se base sur une ré-écriture matricielle du modèle descripteur conduisant à une expression de la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov facile à analyser. Cette approche permet non seulement de réduire le nombre de LMIs à résoudre, mais également de supprimer certains couplages entre les gains de retour d'état et les éléments de la matrice de Lyapunov sources de conservatisme (Lin et al. [1999], Taniguchi et al. [2001] et Guelton et al. [2009]).

La dynamique virtuelle de la commande déduite de (4.79) est la suivante :

$$0.\dot{u}(t) = - \sum_{i=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_i x(t) - u(t) \quad (4.100)$$

Considérons le vecteur d'état augmenté $x_a^T(t) = (x^T(t) \quad u^T(t))^T$, le regroupement des équations (4.80) et (4.112) conduit à la forme descripteur :

$$E\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t) [\mathcal{A}_{ik}(t)x_a(t) + \mathcal{B}_{ik}(t)] \quad (4.101)$$

avec :

$$E = \text{diag}(I, 0) \quad (4.102)$$

$$\mathcal{A}_{ik}(t) = \begin{pmatrix} A_i + \Delta A(t) & B_i \Lambda_k + \Delta B(t) \Lambda_k \\ -K_i & -I \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

$$\mathcal{B}_{ik}(t) = \mathcal{B}_{ik}^1 + \mathcal{B}_{ik}^2(t) \quad (4.104)$$

$$\mathcal{B}_{ik}^1 = \begin{pmatrix} B_i \Gamma_k \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_{ik}^2(t) = \begin{pmatrix} \Delta B(t) \Gamma_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

Théorème 10. *Il existe un contrôleur par retour d'état (4.79) pour un système T-S non linéaire incertain, en présence de saturation de commande (4.73), assurant la convergence de l'état du système vers une boule centrée à l'origine dont le rayon est borné par β , s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_4 > 0$, R_i , $\Sigma_k^1 = (\Sigma_k^1)^T > 0$ et des scalaires positifs $\sigma_k^2, \omega_1, \omega_2$ solutions du problème d'optimisation :*

$$\min_{P_1, P_4, R_i, \Sigma_k^1, \sigma_k^2, \omega_1, \omega_2} \beta \quad (4.106)$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} \Xi_{ik} & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.107)$$

$$\Gamma_k^T \Sigma_k^1 \Gamma_k + \sigma_k^2 \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k < \beta \quad (4.108)$$

avec Ξ_{ik} définie par :

$$\Xi_{ik} = \begin{pmatrix} \Xi_{ik}^1 & -R_i + P_1 B_i \Lambda_k & P_1 A & P_1 B & P_1 B & P_1 B \\ * & \Xi_{ik}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\omega_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\sigma_k^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Sigma_k^1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\omega_2 I \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

$$\Xi_{ik}^1 = A_i^T P_1 + P_1 A_i + \omega_1 E_A^T E_A \quad (4.110)$$

$$\Xi_{ik}^2 = -P_4 - P_4^T + \omega_2 \Lambda_k^T E_B^T E_B \Lambda_k \quad (4.111)$$

pour $i = 1, \dots, n$ et $k = 1, \dots, 3^{n_u}$.

Les gains K_j du contrôleur (4.112) sont donnés par :

$$K_i = P_4^{-1} R_i \quad (4.112)$$

Démonstration. *Considérons la fonction de Lyapunov :*

$$V(x_a(t)) = x_a^T(t) E^T P x_a(t) \quad (4.113)$$

avec la condition de symétrie : $E^T P = P^T E \geq 0$.

Cette condition, compte tenu de la structure de la matrice E (4.102) et avec $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$ se traduit par :

$$\begin{pmatrix} P_1^T & 0 \\ P_2^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.114)$$

De ce fait, la forme de la matrice de Lyapunov (4.113) est donnée par $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = 0$, P_3 et P_4 étant des matrices de décision libres de choix. Nous choisissons ainsi P matrice bloc diagonale $P = \text{diag}(P_1, P_4)$, avec $P_1 = P_1^T > 0$.

Compte tenu de (4.101) et (4.113), la dérivée de $V(x_a(t))$ par rapport au temps est donnée par l'expression suivante :

$$\dot{V}(x_a(t)) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t) \mathbb{S}(\mathcal{B}_{ik}^T(t) P x_a(t) + x_a^T(t) \mathcal{A}_{ik}^T(t) P x_a(t)) \quad (4.115)$$

où les matrices $\mathcal{A}_{ik}(t)$ et $\mathcal{B}_{ik}(t)$ sont définies en (4.103) et (4.104).

Pour étudier le signe de $\dot{V}(x_a(t))$, il convient de s'affranchir des variations temporelles inconnues mais bornées des matrices $\mathcal{A}_{ik}(t)$ et $\mathcal{B}_{ik}(t)$. Pour cela, à partir de l'équation (4.104), nous avons :

$$\mathbb{S}((\mathcal{B}_{ik}^T(t) P x_a(t)) = \mathbb{S}((\mathcal{B}_{ik}^1)^T P x_a(t) + (\mathcal{B}_{ik}^2)^T(t) P x_a(t)) \quad (4.116)$$

Des lemmes 5 et 7, compte tenu des définitions (4.105) et de la structure de la matrice P , avec Σ_k^1 matrice symétrique positive et σ_k^2 scalaire positif, on déduit les majorations :

$$\mathbb{S}((\mathcal{B}_{ik}^1)^T P x_a(t)) \leq \Gamma_k^T \Sigma_k^1 \Gamma_k + x^T(t) P_1 B_i (\Sigma_k^1)^{-1} B_i^T P_1 x(t) \quad (4.117)$$

$$\mathbb{S}((\mathcal{B}_{ik}^2)^T(t) P x_a(t)) \leq \sigma_k^2 \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k + (\sigma_k^2)^{-1} x^T(t) P_1 B B^T P_1 x(t) \quad (4.118)$$

A partir de la définition des matrices $\mathcal{A}_{ik}(t)$ en (4.103), la forme décomposée du terme $\mathcal{A}_{ik}^T(t) P + P^T \mathcal{A}_{ik}(t)$ est donnée par :

$$\mathbb{S}(P \mathcal{A}_{ik}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i + P_1 \Delta A(t)) & -K_i^T P_4 + P_1 B_i \Lambda_k + P_1 \Delta B(t) \Lambda_k \\ * & -P_4 + P_4^T \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

Pour majorer les termes variants dans le temps, du lemme 7, nous déduisons pour des scalaires positifs ω_1 et ω_2 que :

$$\mathbb{S}(x^T(t) P_1 \Delta A(t) x(t)) \leq \omega_1 x^T(t) E_A^T E_A x(t) + \omega_1^{-1} x^T(t) P_1 A A^T P_1 x(t) \quad (4.120)$$

$$\mathbb{S}(x^T(t) P_1 \Delta B(t) \Lambda_k u(t)) \leq \omega_2^{-1} x^T(t) P_1 B B^T P_1 x(t) + \omega_2 u^T(t) \Lambda_k^T E_B^T E_B \Lambda_k u(t) \quad (4.121)$$

En utilisant les majorations (4.117-4.118) et (4.120-4.121), la dérivée de la fonction de Lyapunov (4.115) est elle même bornée par :

$$\dot{V}(x_a(t)) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{3^{n_u}} \mu_i(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t) (x_a^T(t) \mathcal{M}_{ik} x_a(t) + \Gamma_k^T \Sigma_k^1 \Gamma_k + \sigma_k^2 \Gamma_k^T E_B^T E_B \Gamma_k) \quad (4.122)$$

avec

$$\mathcal{M}_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{ik}^1 & -K_i^T P_4 + P_1 B_i \Lambda_k \\ * & -P_4 - P_4^T + \omega_2 \Lambda_k^T E_B^T E_B \Lambda_k \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

$$\mathcal{M}_{ik}^1 = \mathbb{S}(P_1 A_i) + \omega_1 E_A^T E_A + \omega_1^{-1} P_1 A A^T P_1 + (\sigma_k^2)^{-1} P_1 B B^T P_1 + P_1 B (\Sigma_k^1)^{-1} B^T P_1 + \omega_2^{-1} P_1 B B^T P_1 \quad (4.124)$$

En appliquant le complément de Schur à (4.123), la condition de stabilité $\dot{V}(x_a(t)) < 0$ est vraie si $\Xi_{ik} < 0$ et $\|x(t)\|^2 > \frac{\delta}{\varepsilon}$. La matrice Ξ_{ik} étant donnée par (4.109). La minimisation du majorant du rayon de la boule de convergence β résulte du raisonnement utilisé dans les cas précédents.

Exemple numérique

Afin d'illustrer l'approche proposée, nous considérons un exemple académique de faible dimension. Soit le système T-S incertain, soumis à des saturations d'actionneurs, avec deux entrées et deux états mesurables :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} -0.80 & 0.02 \\ 0.20 & -1.40 \end{pmatrix} \\
 A &= \begin{pmatrix} 0.1 & 1 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix}, & E_A &= \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix} \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ -0.5 & 0.75 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}, & E_B &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Les incertitudes $\Sigma_A(t) = \Sigma_B(t) = \sigma(t)I$ sont représentées au cours du temps par la figure 4.4.

Le vecteur d'entrées est soumis aux saturations d'actionneurs avec les caractéristiques $u_{1max} = u_{2max} = 2$,

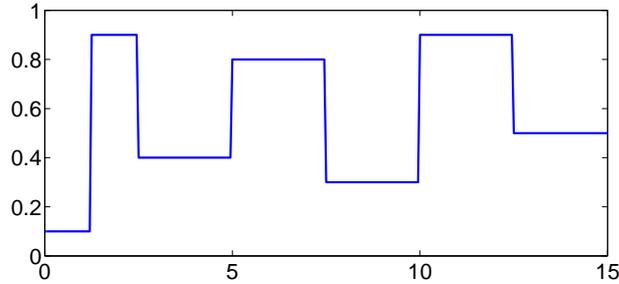


Figure 4.4 – Incertitudes $\sigma(t)$

$$u_{1min} = u_{2min} = -2.$$

Les fonctions d'activation sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \mu_1(x(t)) = \frac{1 - \tanh(x_1(t) + x_2(t))}{2} \\ \mu_2(x(t)) = 1 - \mu_1(x(t)) \end{cases} \tag{4.126}$$

Afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée ainsi que l'effet de la saturation sur l'état du système, un contrôleur nominal est tout d'abord synthétisé sans tenir compte de la saturation de commande. Puis, une comparaison est établie entre la réponse en boucle fermée du système avec correcteur nominal sans saturation, celle du système en boucle fermée avec le correcteur nominal saturé, et finalement celle obtenue avec l'approche T-S proposée où le gain du contrôleur dépend des bornes de saturation.

Pour l'exemple numérique considéré, les gains nominaux sont calculés de la manière présentée dans la section 2.7.1 du chapitre 2.

$$K_{n1} = \begin{pmatrix} 1.10 & 1.11 \\ 0.93 & 0.94 \end{pmatrix}, \quad K_{n2} = \begin{pmatrix} 1.64 & 1.64 \\ 1.39 & 1.39 \end{pmatrix} \tag{4.127}$$

Les gains K_1, K_2 calculés grâce au théorème 9 sont les suivants :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 9.73 & 8.97 \\ 11.52 & 10.72 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 9.73 & 8.97 \\ 11.52 & 10.72 \end{pmatrix} \tag{4.128}$$

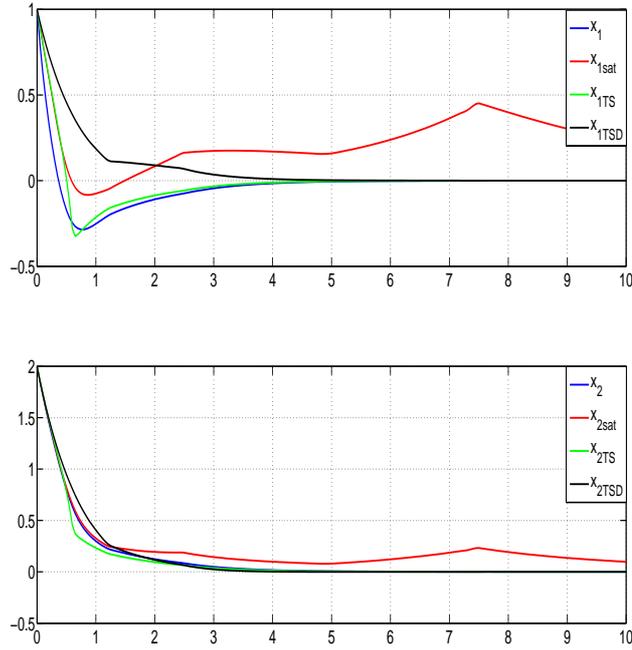


Figure 4.5 – Etats du système incertain

Et finalement, les gains obtenus avec l'approche descripteur (10) sont :

$$K_{1d} = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.02 \\ 0.062 & 0.42 \end{pmatrix}, \quad K_{2d} = \begin{pmatrix} 0.58 & 0.36 \\ 0.37 & 0.61 \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

Les figures 4.5 et 4.6 représentent les états du système ainsi que les entrées pour le cas nominal sans saturation (respectivement notés x_1 , x_2 , u_1 et u_2), ceux du cas nominal avec saturation subie (respectivement notés x_{1sat} , x_{2sat} , u_{1sat} et u_{2sat}), ceux de l'approche T-S proposée en section 4.5.4 (respectivement notés x_{1TS} , x_{2TS} , u_{1TS} et u_{2TS}) et finalement ceux de la saturation T-S avec approche descripteur (respectivement notés x_{1TSD} , x_{2TSD} , u_{1TSD} et u_{2TSD}).

A partir des figures obtenues, on peut observer que la saturation de commande a un effet déstabilisant sur l'état du système si cette dernière n'est pas prise en considération dans la synthèse de la commande. En revanche, avec l'approche proposée, la convergence de l'état vers une boule centrée à l'origine est assuré malgré la présence d'incertitudes.

Concernant l'approche descripteur énoncée dans le théorème 10, le nombre de conditions à résoudre est ($n \times 3^{n_u} = 18$), qui est moindre que le nombre de LMIs du théorème 9 ($n^2 \times 3^{n_u} = 36$). On note également que la réponse obtenue est légèrement meilleure. Le temps de descente est quasiment le même (2s), mais le rayon de la boule centrée à l'origine est égal à 4.20 pour la première approche et à 3.24 pour la seconde (approche descripteur).

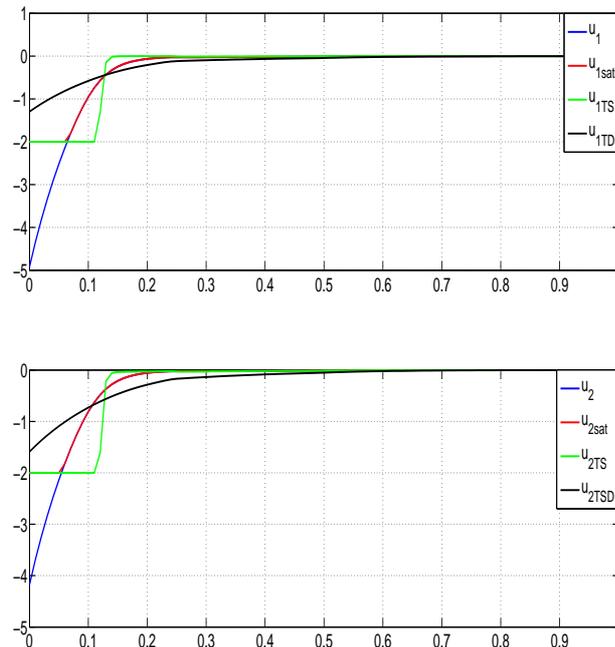


Figure 4.6 – Entrées de commande

4.6 Commande par retour de sortie

Les méthodes de synthèse auxquelles nous nous sommes intéressés jusqu'à présent permettent de générer un retour d'état (statique pour le cas linéaire et de type PDC pour le cas non linéaire). Des conditions de stabilisation et de recalage à l'origine des états du système ont été établies. Cependant, ces résultats ne sont valables que dans le cas où les états du système sont mesurables. Une solution pour contrer cette restriction consiste en l'ajout d'un observateur permettant l'estimation du vecteur d'état sur la base des mesures des signaux d'entrée et de sortie. Une autre solution est de considérer une commande par retour de sortie comme cela est proposé dans différents travaux. Un contrôleur dynamique permet notamment d'améliorer les performances en boucle fermée d'un système dynamique et a souvent été utilisé dans le cadre de la commande robuste (Li *et al.* [2000], Yoneyama *et al.* [2001], Yoneyama [2006]). Le contrôleur statique quant à lui s'avère particulièrement intéressant dans le cadre d'applications nécessitant un faible coût de calcul puisque, contrairement aux lois de commande à base d'observateurs ou par retour de sortie dynamique, sa conception ne nécessite pas la résolution d'équations différentielles en ligne (Chadli *et al.* [2002], Huang et Nguang [2006]). Notons cependant que ce type de lois de commande par retour de sortie fait apparaître de nombreux termes croisés (couplage entrées-sorties) et conduit donc à des conditions de stabilisation LMI assez conservatives (Bouarar [2009]).

Comme citée dans la section précédente, l'approche descripteur présente l'intérêt de non seulement réduire le nombre de LMIs à résoudre, mais également d'éliminer certains couplages entre les gains de retour d'état et les matrices de Lyapunov, ces couplages pouvant constituer des sources importantes de conservatisme (Tanaka *et al.* [2007] et Guelton *et al.* [2009]). Dans la suite du chapitre, nous proposons la formulation de conditions de stabilisation et de recalage à l'origine de systèmes non linéaires, sous forme de modèles T-S, soumis à des saturations de commande, par retour de sortie et basées sur l'ap-

proche descripteur.

4.6.1 Commande par retour de sortie statique

Cette section est dédiée à la synthèse de commande par retour de sortie statique avec l'approche descripteur, l'objectif étant de synthétiser une loi de commande fonction des niveaux de saturation des actionneurs.

Soit le système non linéaire T-S sous contrainte de saturation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t))(A_j x(t) + B_j u_{sat}(t)) \\ y(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t))(C_j x(t) + D_j u_{sat}(t)) \end{cases} \quad (4.130)$$

A partir du résultat donné par (4.10) explicitant la commande saturée $u_{sat}(t)$, le système (4.130) s'écrit comme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t))(A_j x(t) + B_j(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t))(C_j x(t) + D_j(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)) \end{cases} \quad (4.131)$$

où la commande par retour de sortie statique est donnée par :

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j^s y(t) \quad (4.132)$$

En se basant sur l'approche descripteur et en introduisant une dynamique virtuelle sur l'entrée et la sortie du système, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} 0 \cdot \dot{u}(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j y(t) - u(t) \\ 0 \cdot \dot{y}(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) (C_j x(t) + D_j u(t)) - y(t) \end{cases} \quad (4.133)$$

Considérons le vecteur augmenté :

$$x_a(t) = (x^T(t) \quad u^T(t) \quad y^T(t))^T \quad (4.134)$$

Par simple agrégation de (4.130) et (4.133), le système saturé en boucle fermée s'écrit sous la forme descripteur suivante :

$$E^s \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) (\mathcal{A}_{ij}^s x_a(t) + \mathcal{B}_{ij}^s) \quad (4.135)$$

avec

$$E^s = \text{diag}(I_{n_x}, 0_{n_u+m}), \quad \mathcal{A}_{ij}^s = \begin{pmatrix} A_j & B_j \Lambda_i & 0 \\ 0 & -I_{n_u} & K_j^s \\ C_j & D_j \Lambda_i & -I_m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ij}^s = \begin{pmatrix} B_j \Gamma_i \\ 0 \\ D_j \Gamma_i \end{pmatrix} \quad (4.136)$$

Les gains du contrôleur assurant la stabilité du système (4.135) sont ainsi donnés par le théorème suivant.

Théorème 11. *Il existe un contrôleur par retour de sortie statique (4.132) pour le système non linéaire saturé (4.130) tel que les états du système en boucle fermée convergent vers une boule centrée à l'origine d'un rayon borné par β_s , s'il existe des matrices $P_1^s = (P_1^s)^T > 0, P_2^s > 0, P_{31}^s, P_{32}^s, P_{33}^s, R_j^s, \Sigma_{ij}^{1s} = (\Sigma_{ij}^{1s})^T > 0, \Sigma_{ij}^{3s} = (\Sigma_{ij}^{3s})^T > 0$, solutions du problème d'optimisation suivant (pour $i = 1, \dots, 3^{n_u}$ et $j = 1, \dots, n$)*

$$\min_{P_1^s, P_2^s, P_{31}^s, P_{32}^s, P_{33}^s, R_j^s, \Sigma_{ij}^{1s}, \Sigma_{ij}^{3s}} \beta_s \quad (4.137)$$

sous les contraintes

$$\begin{pmatrix} Q_{ij}^{s1} & Q_{ij}^{s12} & C_j^T P_{33}^s - P_{31}^{sT} & P_1^s & P_{31}^{sT} & I_{n_x} & 0 & 0 \\ * & Q_{ij}^{s2} & R_j^s + \Lambda_i D_j^T P_{33}^s - P_{32}^{sT} & 0 & P_{32}^{sT} & 0 & I_{n_u} & 0 \\ * & * & -P_{33}^s - (P_{33}^s)^T & 0 & P_{33}^{sT} & 0 & 0 & I_m \\ * & * & * & -\Sigma_{ij}^{1s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Sigma_{ij}^{3s} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_s I_{n_x} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\beta_s I_{n_u} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\beta_s I_m \end{pmatrix} < 0 \quad (4.138)$$

$$\Gamma_i^T D_j^T \Sigma_{ij}^{3s} D_j \Gamma_i + \Gamma_i^T B_j^T \Sigma_{ij}^{1s} B_j \Gamma_i < \beta_s \quad (4.139)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{s1} &= \mathbb{S}(P_1^s A_j + C_j^T P_{31}^s) \\ Q_{ij}^{s12} &= P_1^s B_j \Lambda_i + C_j^T P_{32}^s + P_{31}^{sT} D_j \Lambda_i^T \\ Q_{ij}^{s2} &= \mathbb{S}(-P_2^s + P_{32}^{sT} D_j \Lambda_i) \end{aligned} \quad (4.140)$$

Les gains du contrôleur sont obtenus par $K_j^s = ((P_2^s)^T)^{-1} R_j^s$, $j = 1, \dots, n$.

Démonstration. *Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :*

$$V(x_a(t)) = x_a^T(t) (E^s)^T P^s x_a(t) \quad (4.141)$$

sous les conditions

$$(E^s)^T P^s = (P^s)^T E^s \geq 0 \quad (4.142)$$

Des définitions (4.136), pour respecter les contraintes (4.142), la matrice P^s est choisie sous la forme (4.143), avec $P_1^s = (P_1^s)^T > 0$ et $P_2^s > 0$

$$P^s = \begin{pmatrix} P_1^s & 0 & 0 \\ 0 & P_2^s & 0 \\ P_{31}^s & P_{32}^s & P_{33}^s \end{pmatrix} \quad (4.143)$$

A partir des équations (4.135), la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov (4.141) s'explique :

$$\dot{V}(x_a(t)) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_j^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) \mathbb{S}(x_a^T(t) (P^s)^T \mathcal{B}_{ij}^s + x_a^T(t) (\mathcal{A}_{ij}^s)^T P^s x_a(t)) \quad (4.144)$$

Du lemme 5, compte tenu des définitions (4.143) et (4.136), $\dot{V}(x_a(t))$ est bornée par la quantité suivante :

$$\dot{V}(x_a(t)) \leq \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_j^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) (\Gamma_i^T B_j^T \Sigma_{ij}^{1s} B_j \Gamma_i + \Gamma_i^T D_j^T \Sigma_{ij}^{3s} D_j \Gamma_i + x_a^T(t) \mathcal{Q}_{ij}^s x_a(t)) \quad (4.145)$$

avec

$$\mathcal{Q}_{ij}^s = (\mathcal{A}_{ij}^s)^T P^s + (P^s)^T \mathcal{A}_{ij}^s + \text{diag}(P_1^s (\Sigma_{ij}^{1s})^{-1} P_1^s, 0, 0) + \begin{pmatrix} P_{31}^s & P_{32}^s & P_{33}^s \end{pmatrix}^T (\Sigma_{ij}^{3s})^{-1} \begin{pmatrix} P_{31}^s & P_{32}^s & P_{33}^s \end{pmatrix} \quad (4.146)$$

Notons :

$$\varepsilon^s = \min_{i=1:3^{n_u}, j=1:n} \lambda_{\min}(-\mathcal{Q}_{ij}^s) \quad (4.147)$$

$$\delta^s = \max_{i=1:3^{n_u}, j=1:n} (\Gamma_i^T B_j^T \Sigma_{ij}^{1s} B_j \Gamma_i + \Gamma_i^T D_j^T \Sigma_{ij}^{3s} D_j \Gamma_i) \quad (4.148)$$

Ainsi, de (4.145) avec la propriété de somme convexe (B.2), $\dot{V}(x_a(t)) < -\varepsilon^s \|x_a\|_2^2 + \delta^s$. Il en découle que $\dot{V}(x_a(t)) < 0$ pour

$$\mathcal{Q}_{ij}^s < 0 \quad \text{et} \quad \|x_a\|_2^2 > \frac{\delta^s}{\varepsilon^s} \quad (4.149)$$

impliquant, selon la théorie de Lyapunov (Zhang et al. [2009]), que $x_a(t)$ est borné et converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta^s}{\varepsilon^s}}$.

En appliquant la technique du complément de Schur à l'inégalité $\mathcal{Q}_{ij}^s < 0$ et avec le changement de variables

$$R_j^s = (P_2^s)^T K_j^s \quad (4.150)$$

il apparait que (4.138) implique $\dot{V}(t) < 0$ pour $\|x_a\|_2^2 > \frac{\delta^s}{\varepsilon^s}$.

L'objectif à présent est de minimiser le rayon $\sqrt{\frac{\delta^s}{\varepsilon^s}}$. De la définition (4.148) et de la condition (4.139), δ^s est borné par β_s . Nous pouvons également montrer que $1/\varepsilon^s < \beta_s$. De (4.147), on déduit :

$$-\mathcal{Q}_{ij}^s > (1/\beta_s) I, \quad i = 1, \dots, 3^{n_u}, j = 1, \dots, n \quad (4.151)$$

Toutes les valeurs propres de $(-\mathcal{Q}_{ij}^s)$, incluant ε^s , sont plus grandes que $1/\beta_s$. Ainsi, $1/\varepsilon^s < \beta_s$ et le rayon $\sqrt{\frac{\delta^s}{\varepsilon^s}}$ est borné par β_s .

Remarque 10. Comme pour le retour d'état, la remarque 7 concernant la stabilité des sous-modèles est également vraie pour le retour de sortie statique. Cependant, afin d'améliorer les résultats obtenus et de relaxer cette contrainte de stabilité, un contrôleur par retour de sortie dynamique est proposé dans la section suivante.

Remarque 11. L'approche classique par Lyapunov peut également être considérée pour la synthèse du correcteur par retour de sortie statique. Cependant, en comparaison avec l'approche descripteur, le nombre de contraintes à satisfaire est plus élevé et leur linéarisation sous forme de LMI plus délicate. En effet, en considérant le système non linéaire T-S sous contrainte de saturation suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) (A_j x(t) + B_j (\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) C_j x(t) \end{cases} \quad (4.152)$$

où la commande par retour de sortie statique est donnée par :

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) K_j^s y(t) \quad (4.153)$$

avec la fonction de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, $P = P^T > 0$. La dérivée de cette dernière est alors bornée par la quantité :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) \mu_k(\xi(t)) \mu_l(\xi(t)) (\Gamma_i^T B_j^T \Sigma_{ij}^{1s} B_j \Gamma_i \\ & + x^T(t) (A_j^T P + P A_j + C_j^T K_k \Lambda_i B_j^T P + P B_j \Lambda_i K_k C_l + P (\Sigma_{ij}^{1s})^{-1} P) x(t)) \end{aligned} \quad (4.154)$$

Etant donné la triple somme, le nombre de contraintes LMI à satisfaire évolue en n^3 avec le nombre de sous modèles. De plus, les termes $P B_j \Lambda_i K_k C_l$ sont difficiles à linéariser sans introduire un conservatisme important. La condition $\dot{V}(t) < 0$ est donc plus difficile à exploiter qu'avec l'approche descripteur où $\dot{V}(t) < 0$ est bornée par la quantité (4.145), ce qui illustre bien l'avantage de l'approche adoptée.

4.6.2 Commande par retour de sortie dynamique

L'objectif est de synthétiser un contrôleur stabilisant par retour de sortie dynamique malgré la présence de contraintes de saturation sur la commande. Comme précédemment, la solution est obtenue en représentant le système saturé sous forme T-S et en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

Considérons le contrôleur par retour de sortie dynamique d'ordre n_c défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) (A_j^c x_c(t) + B_j^c y(t)) \\ u(t) &= \sum_{j=1}^n \mu_j(\xi(t)) (C_j^c x_c(t) + D_j^c y(t)) \end{cases} \quad (4.155)$$

Les matrices $A_j^c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_j^c \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$, $C_j^c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$ et $D_j^c \in \mathbb{R}^{n_u \times m}$ sont à déterminer. L'ordre n_c du contrôleur peut être adapté en fonction des objectifs de la commande et de la dynamique du système.

Considérons le vecteur d'état augmenté $x_a(t)$:

$$x_a(t) = (x^T(t) \quad x_c^T(t) \quad u^T(t) \quad y^T(t))^T \quad (4.156)$$

La concaténation des équations (4.130) et (4.155) conduit au système descripteur :

$$E^d \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \sum_{j=1}^n \mu_i^{sat}(t) \mu_j(\xi(t)) (\mathcal{A}_{ij}^d x_a(t) + \mathcal{B}_{ij}^d) \quad (4.157)$$

avec

$$E^d = \text{diag}(I_{n_x+n_c}, 0_{n_u+m}), \quad \mathcal{A}_{ij}^d = \begin{pmatrix} A_j & 0 & B_j \Lambda_i & 0 \\ 0 & A_j^c & 0 & B_j^c \\ 0 & C_j^c & -I_{n_u} & D_j^c \\ C_j & 0 & D_j \Lambda_i & -I_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{ij}^d = \begin{pmatrix} B_j \Gamma_i \\ 0 \\ 0 \\ D_j \Gamma_i \end{pmatrix} \quad (4.158)$$

La détermination des gains A_j^c , B_j^c , C_j^c et D_j^c du correcteur (4.155) est détaillée dans le théorème suivant.

Théorème 12. *Il existe un contrôleur par retour de sortie dynamique (4.155) pour le système non linéaire saturé (4.130) tel que l'état du système en boucle fermée converge vers une boule centrée à l'origine dont le rayon est borné par β_d , s'il existe des matrices $P_{11}^d = (P_{11}^d)^T > 0$, $P_{22}^d = (P_{22}^d)^T > 0$, $P_{33}^d > 0$, P_{41}^d , P_{42}^d , P_{43}^d , P_{44}^d , \bar{A}_j^c , \bar{B}_j^c , \bar{C}_j^c , \bar{D}_j^c , $\Sigma_{ij}^{1d} = (\Sigma_{ij}^{1d})^T > 0$ et $\Sigma_{ij}^{2d} = (\Sigma_{ij}^{2d})^T > 0$, solutions du problème d'optimisation suivant (pour $i = 1, \dots, 3^{n_u}$ et $j = 1, \dots, n$)*

$$\min_{P_{11}^d, P_{22}^d, P_{33}^d, P_{41}^d, P_{42}^d, P_{43}^d, P_{44}^d, \bar{A}_j^c, \bar{B}_j^c, \bar{C}_j^c, \bar{D}_j^c, \Sigma_{ij}^{1d}, \Sigma_{ij}^{2d}} \beta_d \quad (4.159)$$

sous les contraintes

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} Q_{ij}^1 & C_j^T P_{42}^d & Q_{ij}^{13} & C_j^T P_{44}^d - (P_{41}^d)^T & P_{11}^d & (P_{41}^d)^T & I & 0 & 0 & 0 \\ * & \bar{A}_j^c + (\bar{A}_j^c)^T & Q_{ij}^{23} & \bar{B}_j^c - (P_{42}^d)^T & 0 & (P_{42}^d)^T & 0 & I & 0 & 0 \\ * & * & Q_{ij}^3 & Q_{ij}^{34} & 0 & (P_{43}^d)^T & 0 & 0 & I & 0 \\ * & * & * & -P_{44}^d - (P_{44}^d)^T & 0 & (P_{44}^d)^T & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline * & * & * & * & -\Sigma_{ij}^{1d} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Sigma_{ij}^{2d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * & * & * & -\beta_d I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\beta_d I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\beta_d I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\beta_d I \end{array} \right) < 0 \quad (4.160)$$

$$\Gamma_i^T B_j^T \Sigma_{ij}^{1d} B_j \Gamma_i + \Gamma_i^T D_j^T \Sigma_{ij}^{2d} D_j \Gamma_i < \beta_d \quad (4.161)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{ij}^1 &= A_j^T P_{11}^d + P_{11}^d A_j + C_j^T P_{41}^d + (P_{41}^d)^T C_j \\ Q_{ij}^{13} &= P_{11}^d B_j \Lambda_i + C_j^T P_{43}^d + (P_{41}^d)^T D_j \Lambda_i \\ Q_{ij}^{23} &= (\bar{C}_j^c)^T + (P_{42}^d)^T D_j \Lambda_i \\ Q_{ij}^3 &= -P_{33}^d - (P_{33}^d)^T + (P_{43}^d)^T D_j \Lambda_i + \Lambda_i D_j^T P_{43}^d \\ Q_{ij}^{34} &= \bar{D}_j^c - (P_{43}^d)^T + \Lambda_i D_j^T P_{44}^d \end{aligned}$$

Les matrices définissant le contrôleur (4.155) sont données par

$$\begin{cases} A_j^c = (P_{22}^d)^{-1} \bar{A}_j^c & B_j^c = (P_{22}^d)^{-1} \bar{B}_j^c \\ C_j^c = ((P_{33}^d)^{-1})^T \bar{C}_j^c & D_j^c = ((P_{33}^d)^{-1})^T \bar{D}_j^c \end{cases} \quad (4.162)$$

Démonstration. La démonstration est similaire à la preuve du théorème 11. La seule modification est la structure de la fonction de Lyapunov adaptée au système descripteur (4.157)-(4.158). La fonction de Lyapunov est :

$$V(x_a(t)) = x_a^T(t) (E^d)^T P^d x_a(t) \quad (4.163)$$

avec E^d définie comme en (4.158) et les conditions

$$(E^d)^T P^d = (P^d)^T E^d \geq 0 \quad (4.164)$$

Compte tenu de (4.164), la matrice P^d est choisie sous la forme :

$$P^d = \begin{pmatrix} P_{11}^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{22}^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33}^d & 0 \\ P_{41}^d & P_{42}^d & P_{43}^d & P_{44}^d \end{pmatrix} \quad (4.165)$$

avec $P_{11}^d = (P_{11}^d)^T > 0$, $P_{22}^d = (P_{22}^d)^T > 0$ et $P_{33} > 0$.

La suite de la démonstration est identique à celle du théorème 11 et est donc omise.

4.6.3 Exemple numérique

Considérons à nouveau l'exemple du chariot-pendule donné dans la section 4.5.3 et représenté par le modèle T-S (4.69). Les deux contrôleurs statique et dynamique sont synthétisés, puis leurs performances comparées. Nous supposons que seules les positions horizontales et angulaires sont mesurées, donc les matrices de sortie sont données par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.166)$$

La saturation de commande est définie par les limites $u_{min} = 0$ et $u_{max} = 3$.

En résolvant le problème d'optimisation LMI énoncé au théorème 11, les gains du contrôleur statique sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_1^s &= \begin{pmatrix} -0.002 & -10.86 \end{pmatrix} \\ K_2^s &= \begin{pmatrix} -0.002 & -11.13 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.167)$$

Le théorème 12 permet d'obtenir les gains du contrôleur dynamique suivants :

$$\begin{aligned} A_1^c &= \begin{pmatrix} -0.67 & -0.13 & -0.15 & -0.15 \\ -0.13 & -0.80 & -0.16 & -0.16 \\ -0.15 & -0.16 & -0.75 & -0.16 \\ -0.15 & -0.16 & -0.16 & -0.77 \end{pmatrix}, B_1^c = \begin{pmatrix} -0.0194 & -0.262 \\ -0.0194 & -0.280 \\ -0.0194 & -0.274 \\ -0.0194 & -0.279 \end{pmatrix} \\ A_2^c &= \begin{pmatrix} -0.77 & -0.15 & -0.18 & -0.17 \\ -0.15 & -0.79 & -0.17 & -0.17 \\ -0.17 & -0.17 & -0.73 & -0.16 \\ -0.17 & -0.17 & -0.16 & -0.74 \end{pmatrix}, B_2^c = \begin{pmatrix} -0.0035 & -0.283 \\ -0.0035 & -0.240 \\ -0.0035 & -0.236 \\ -0.0035 & -0.236 \end{pmatrix} \\ C_1^c &= \begin{pmatrix} 0.41 & -1.17 & -0.10 & -0.11 \end{pmatrix}, D_1^c = \begin{pmatrix} -0.004 & -0.25 \end{pmatrix} \\ C_2^c &= \begin{pmatrix} 0.46 & -1.18 & -0.09 & -0.08 \end{pmatrix}, D_2^c = \begin{pmatrix} -0.004 & -0.22 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.168)$$

La condition initiale est $x_0 = (0 \ 0 \ 15\pi/180 \ 0)^T$. La figure 4.7 représente les variables suivantes :

- x_N , les états du système avec commande nominale non saturée (même commande appliquée pour le retour d'état de l'exemple précédent)
- $x_{N,sat}$, les états du système avec commande nominale saturée (même commande appliquée pour le retour d'état de l'exemple précédent)
- $x_{sat,Ts}$, les états du système pour l'approche T-S proposée avec le contrôleur statique
- $x_{sat,Tsd}$, les états du système pour l'approche T-S proposée avec le contrôleur dynamique.

L'effet de la saturation est bien mis en évidence sur les figures obtenues. Il est clair qu'avec l'approche T-S proposée, la convergence de l'état du système en boucle fermée vers une boule centrée à l'origine est assurée. Il apparaît également que les résultats obtenus avec le contrôleur dynamique sont légèrement meilleurs que ceux obtenus avec le contrôleur statique, puisque pour le premier état, la convergence est assurée avec des amplitudes d'oscillations plus faibles.

Afin de comparer les deux contrôleurs, leurs diagrammes de phase respectifs des états x_2 et x_1 sont tracés dans la figure 4.8 (rappelons que la valeur initiale de (x_1, x_2) est $(0, 0)$). On remarque que pour le cas dynamique, l'état converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\beta^d = 1.5 \times 10^{-5}$, quant à la réponse pour le cas statique, le rayon calculé est $\beta^s = 4.9 \times 10^{-3}$, valeur très largement supérieure à la précédente.

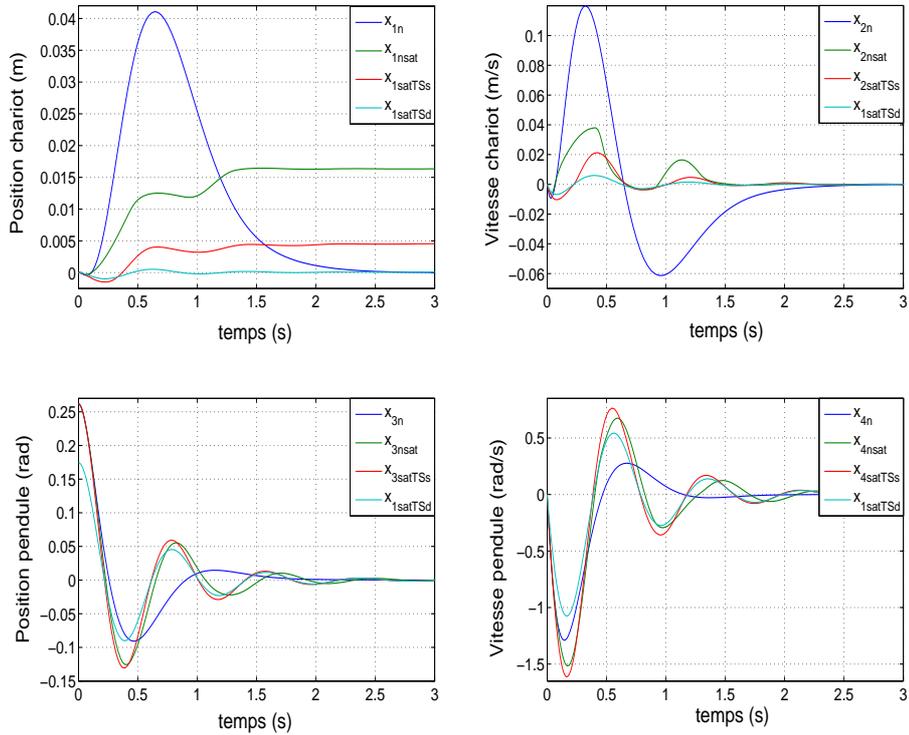


Figure 4.7 – Etats du système par retour de sortie

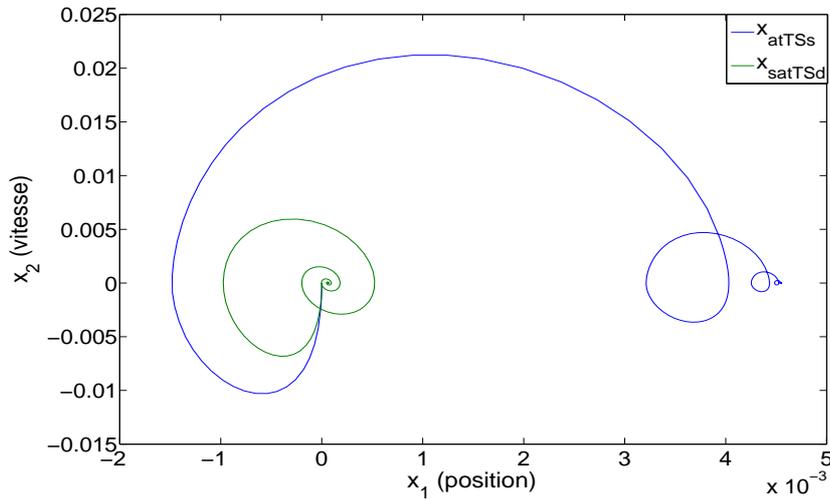


Figure 4.8 – Diagrammes de phase en BF avec correcteurs par retour de sortie statique et dynamique

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilisation des systèmes soumis à des contraintes de saturation de commande a été abordée. Sur la base de la ré-écriture de la fonction non linéaire saturation sous forme de modèle

T-S, plusieurs lois de commande ont été proposées. Le cas de systèmes linéaires avec une commande par retour d'état statique a été traité, puis le cas des systèmes non linéaires sous forme T-S avec des commandes de type PDC par retour d'état. Les résultats obtenus ont été étendus au cas des systèmes non linéaires incertains sous forme T-S. Finalement, des lois de commande par retour de sortie statique et dynamique ont été mises au point.

Afin d'illustrer l'apport des méthodes proposées, le cas d'un système non linéaire chariot-pendule a été traité. Pour cet exemple numérique, il a clairement été montré que la non-prise en compte de la saturation entraîne une instabilité du système, alors qu'avec la méthode proposée, la stabilité du système non linéaire est assurée et l'on notera que les gains de commande dépendent directement des limites de saturation.

5

Poursuite de consigne générée par un modèle de référence

Sommaire

5.1	Introduction	89
5.2	Etude bibliographique	90
5.2.1	Poursuite de modèle de référence des systèmes linéaires	90
5.2.2	Poursuite d'un modèle de référence par un système non linéaire	93
5.2.3	Poursuite de modèle de référence des systèmes T-S : contribution du chapitre	94
5.3	Conditions structurelles de poursuite	95
5.3.1	Modèle et objectif	95
5.3.2	Loi de commande prédéfinie	95
5.3.3	Loi de commande à structure non prédéfinie	98
5.4	Choix du critère de poursuite	99
5.4.1	Variables de décision indépendantes de la commande	99
5.4.2	Variables de décision fonction de la commande	100
5.4.3		100
5.5	Commande prédictive non linéaire d'un système sous forme T-S	106
5.5.1	Variables de décision indépendantes de la commande	107
5.5.2	Variables de décision fonction de la commande	107
5.6	Poursuite de modèle de référence tolérante aux défauts	110
5.6.1	Poursuite de modèle de référence tolérante aux défauts de capteurs	110
5.6.2	Poursuite de modèle de référence sous contrainte de saturation : cas discret	122
5.6.3	Conclusion	126

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la poursuite d'une consigne générée par un modèle de référence pour un système non linéaire représenté par un modèle de Takagi-Sugeno. Tout

au long du chapitre, l'accent est mis sur les difficultés rencontrées pour assurer l'objectif de poursuite ainsi que les solutions proposées. Nous étudions les propriétés des systèmes de commande en matière de stabilité et de performance en poursuite ainsi que la dynamique des systèmes considérés (système et son modèle de référence). Nous montrons également l'influence du choix du critère de contrôle relatif aux objectifs et aux conditions structurelles.

Pour commencer, une étude bibliographique sur les méthodes de poursuite existantes dans la littérature pour les systèmes linéaires et non linéaires est présentée. Nous nous intéressons par la suite aux systèmes non linéaires représentés par les modèles T-S. Les conditions structurelles de poursuite ainsi que des stratégies de contrôle sont proposées afin de mettre en évidence les liens entre l'objectif de poursuite désiré, le choix du critère de commande approprié et les conditions structurelles qui en découlent.

Nous nous intéressons également à la commande tolérante aux défauts avec optimisation de critère de performance pour les modèles T-S. Dans un premier temps, la commande optimale pour les systèmes continus affectés par des bruits de mesure, avec synthèse d'observateurs et variables de décision non mesurables est considérée. Puis, dans un second temps, nous étudions les systèmes discrets. Pour ce dernier point, des algorithmes de calcul itératif sont proposés et mis en oeuvre et, grâce à des exemples numériques, l'effet d'anticipation et de compensation de la saturation est mis en évidence.

Remarque 12. *A noter que le choix des systèmes discrets est motivé par la nature des lois de commande considérées (commandes prédictives). En effet, pour cette famille de lois de commandes, le cas des systèmes discrets est plus facile à traiter que le cas des systèmes continus.*

5.2 Etude bibliographique

5.2.1 Poursuite de modèle de référence des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire représenté par le modèle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $y \in \mathbb{R}^{n_y}$.

Le modèle de référence donnant la dynamique désirée est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \\ y_r(t) = C x_r(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $u_r(t)$ choisie en fonction de la dynamique de référence recherchée.

La synthèse de la loi de commande consiste à déterminer $u(t)$ assurant la poursuite entre le système à commander et le modèle de référence désiré. L'objectif recherché est de faire correspondre l'état du système $x(t)$ (ou la sortie $y(t)$) avec celui du modèle de référence $x_r(t)$ (ou $y_r(t)$).

Trois approches peuvent être distinguées, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients pour le suivi de modèle de référence.

La première approche, l'approche classique, a été introduite dans (Erzberger [1967]). Elle a pour objectif d'assurer une erreur de poursuite nulle sous réserve de satisfaire aux conditions proposées par cet auteur (Erzberger's perfect model matching conditions). Cette approche utilise une commande par retour d'état assurant le "matching" entre le système et le modèle de référence, sous réserve qu'un ensemble de conditions structurelles, pouvant s'avérer restrictives, soient vérifiées. Ces conditions imposent des similitudes structurelles entre le système et le modèle de référence, par exemple entre leurs représentations sous forme canonique (Guo *et al.* [2009]). A noter que l'un des problèmes principaux de cette approche est le choix de la structure du contrôleur. Sur ce point, nous distinguons deux procédures différentes.

- Première procédure

La structure de la loi de commande est préalablement fixée et les conditions structurelles de poursuite ainsi que les gains du contrôleur sont alors déduits. Dans (Curran [1971], Sastry et Bodson [1989], Khalil [1992] et Tao [2003]) par exemple, la commande par retour d'état est donnée sous la forme :

$$u(t) = Kx(t) + K_r u_r(t), K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, K_r \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u} \quad (5.3)$$

où K et K_r sont des matrices constantes à déterminer pour que l'état du système $x(t)$ suive celui du modèle de référence $x_r(t)$ donnés respectivement par (5.1) et (5.2). Pour cette commande, en reportant (5.3) dans (5.1), nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BK_r u_r(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

En comparant ce système d'équations avec (5.2), on aboutit aux conditions de *matching* suivantes pour le régime permanent :

$$(A + BK)^{-1} BK_r = A_r^{-1} B_r \quad (5.5)$$

Le système (5.5) peut ainsi s'écrire :

$$B \begin{pmatrix} K_r & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -A_r^{-1} B_r \end{pmatrix} = A A_r^{-1} B_r \quad (5.6)$$

Dans ce cas, les gains K et K_r sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} K_r & K \end{pmatrix} = B^+ C_0 B_0^+ \quad (5.7)$$

avec :

$$C_0 = A A_r^{-1} B_r, B_0 = \begin{pmatrix} I \\ -A_r^{-1} B_r \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

et la condition :

$$B B^+ C_0 B_0^+ B_0 = C_0 \quad (5.9)$$

De la même façon, en régime dynamique, les conditions de *matching* sont :

$$\begin{cases} A + BK & = & A_r \\ BK_r & = & B_r \end{cases} \quad (5.10)$$

Bien évidemment, les conditions (5.10) impliquent (5.5).

A noter que pour satisfaire les conditions de *matching* (5.10), les matrices du système A et B , mais également celles du modèle de référence A_r et B_r doivent être sous une certaine forme canonique restrictive. Ainsi, si les conditions de rang

$$\begin{cases} \text{rang}[B|A_r - A] & = & \text{rang}[B] \\ \text{rang}[B|B_r] & = & \text{rang}[B] \end{cases} \quad (5.11)$$

sont vérifiées, alors les gains K et K_r sont donnés par :

$$\begin{cases} K_r & = & B^+ B_r \\ K & = & B^+ (A_r - A) \end{cases} \quad (5.12)$$

avec B^+ la matrice pseudo-inverse de la matrice B .

Il est également important de souligner le fait que fixer la structure de la loi de commande n'assure pas

l'existence d'une solution. En effet, le choix d'une structure a priori peut conduire au non-respect des conditions de rang.

Le fait d'imposer des gains constants peut également être sujet à critique. Pour cette raison, une forme plus générale, avec des gains dynamiques $K(t)$ et $K_r(t)$ peut être considérée (Guo *et al.* [2009] et Yang *et al.* [2006]). Dans (Joshi *et al.* [2011]), la synthèse d'une loi de commande adaptative en présence d'incertitudes est considérée.

- Seconde procédure

Cette procédure tend à assurer une erreur de poursuite nulle sans aucune structure de commande pré-requis. Dans (Nie et Patton [2011]), la loi de commande est déduite de l'erreur de poursuite sur l'état $e(t) = x(t) - x_r(t)$. Compte tenu de (5.1) et (5.2) la dynamique de cette erreur s'explique :

$$\dot{e}(t) = A_r e(t) + (A - A_r)x(t) + Bu(t) - B_r u_r(t) \quad (5.13)$$

Afin de réduire cette équation à $\dot{e}(t) = A_r e(t)$ pour garantir la convergence de l'erreur vers zéro, le signal de commande est choisi de façon à rendre la quantité $(A - A_r)x(t) + Bu(t) - B_r u_r(t)$ nulle ou à défaut, aussi petite que possible, ou/et avec une atténuation minimale sur la dynamique de l'erreur.

Une autre approche est basée sur la théorie de la commande optimale. Cette technique, à l'inverse des procédures classiques abordées ci-dessus, peut être appliquée à n'importe quel système et assure toujours l'existence d'une commande minimisant une fonction (quadratique par exemple) de l'erreur de poursuite entre le système et son modèle de référence (Erzberger [1967], Tseng *et al.* [2001], Tong *et al.* [2002]).

Bien que la commande optimale quadratique tende à proposer une procédure générale pour la poursuite de modèle de référence, on trouve pour certaines combinaisons système/modèle de référence une erreur de suivi importante qui ne peut pas être réduite au delà d'une certaine valeur en jouant simplement sur les matrices poids du critère d'optimisation choisi (Erzberger [1967]). Pour cette approche, à l'inverse de la première, au lieu de chercher un *matching* parfait, il est plus efficace de décrire l'objectif de poursuite en terme de proximité du système et de son modèle de référence.

A cet effet, le critère de poursuite suivant peut être considéré :

$$\int_0^{t_f} e^T(t) Q e(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} u_r^T(t) u_r(t) dt \quad (5.14)$$

où Q est une matrice poids, définie positive et η le niveau d'atténuation considéré. La matrice Q peut être choisie de façon à privilégier le suivi de certains états par rapport à d'autres. Dans (5.14), la limite supérieure de l'atténuation \mathcal{L}_2 de $u_r(t)$ vers $e_r(t)$ notée $\frac{\eta}{\sqrt{\lambda(Q)}}$ quantifie l'effet de l'entrée de référence sur l'erreur de poursuite. Il est évident que l'un des objectifs est de minimiser l'atténuation η . Un autre point de la commande optimale pouvant être soumis aux critiques est le fait que les gains de la commande sont constants pour tous les états.

Un point majeur à considérer dans cette approche est l'horizon de temps, qui peut être infini ou fini et glissant, ce dernier cas étant adapté à une optimisation en ligne. Cette dernière procédure est fréquemment appelée commande prédictive (ou Model Predictive Control MPC) et est basée sur l'optimisation dans un temps fini et glissant. Autrement dit, à chaque instant, un problème de commande optimale est traité sur un horizon futur de N pas. L'approche consiste à calculer une commande, à un instant t , assurant un coût minimal en terme de poursuite et d'énergie sur un horizon de taille N (Maciejowski et Jones [2003], Kerrigan et Maciejowski [1999], Nikolaou [2001]) :

$$\Phi_t = \sum_{i=t}^{t+N-1} (\|x_{i+1} - x_{r,i+1}\|^2 Q + \rho \|u_i\|^2) \quad (5.15)$$

avec $x_t = x(t)$ et $x_{r,t} = x_r(t)$.

A chaque instant d'échantillonnage, on résout un problème de commande optimale sur horizon fini. Seul le premier élément u_t de la séquence de commandes calculées sur cet horizon est appliqué au système. A l'instant suivant, l'horizon d'optimisation est translaté d'un pas d'échantillonnage et un nouveau critère Φ_{t+1} est considéré. Le problème de contrôle optimal est à nouveau résolu pour les nouvelles valeurs d'état mesurées (Balandat [2010]).

Dans les deux précédentes stratégies de commande, la longueur N de l'horizon de temps considéré peut affecter le comportement du système en régime transitoire et, de ce fait, ce point mérite une attention particulière. En effet, pour toutes les méthodes de poursuite listées ci-dessus, le comportement asymptotique est bien assuré et l'erreur de suivi tend vers zéro en régime permanent. Un point intéressant pour améliorer les performances du contrôleur serait de considérer aussi bien le régime permanent que le transitoire. Dans (Stepanyan *et al.* [2009]), le contrôleur est basé non seulement sur l'erreur de poursuite, mais également sur son intégrale afin d'améliorer les performances du système en régime transitoire. L'algorithme de commande génère un filtre passe bas, ce qui permet de prévenir les oscillations en hautes fréquences pour une classe de systèmes incertains. Il est également important de souligner qu'il existe des travaux portant sur la commande prédictive dans le domaine fréquentiel comme (Stepanyan et Krinshnakumar [2010]).

L'approche par apprentissage itératif à base d'un modèle de référence (connue également sous le nom d'Iterative Learning Control (ILC)) peut également être considérée. Cette approche est basée sur un calcul itératif de la commande et peut être résumée de la façon suivante.

A la $k^{\text{ième}}$ itération, la commande $u_k(t)$ est appliquée au système :

$$\dot{x}_k(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.16)$$

où $[0, T]$ est l'horizon d'optimisation. L'état qui en résulte est comparé à l'état du modèle de référence :

$$e_k(t) = x_r(t) - x_k(t) \quad (5.17)$$

A l'itération suivante ($k + 1$), la loi de commande est calculée à partir de l'erreur de l'itération précédente :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L e_k(t) \quad (5.18)$$

La commande ILC mémorise donc les informations de commande précédentes et les exploite pour calculer la prochaine commande afin d'améliorer les résultats. Par un choix judicieux du gain L , les résultats de la poursuite sont progressivement améliorés d'itération en itération (voir (Yu *et al.* [2002]) et les références associées pour plus de détails).

Malgré son efficacité, l'inconvénient de cette méthode en comparaison avec celles listées ci-dessus, est que la loi de commande se fait généralement off-line, sur un intervalle de temps fini et en supposant que tous les états sont disponibles. Cependant, quelques travaux récents tentent de présenter une loi de commande par ILC, prédictive, pouvant garantir une implémentation on-line (Bouakrif [2012]).

5.2.2 Poursuite d'un modèle de référence par un système non linéaire

Nous nous intéressons dans cette section aux stratégies de commande les plus répandues pour la poursuite de modèle de référence des systèmes non linéaires, en particulier, la linéarisation exacte par retour d'état, les techniques de commande par modes glissants et le contrôle adaptatif.

Introduite pour l'étude des systèmes non linéaires, la technique de linéarisation par retour d'état présente un algorithme de contrôle relativement compliqué. De plus, la stabilité du contrôleur n'est pas assurée pour les systèmes à non minimum de phase et son application à des systèmes non linéaires reste complexe

et fastidieuse (Chen *et al.* [1998]). Dans (Isidori et Byrnes [1990]), le problème de régulation de sortie de systèmes non linéaires a été abordé, l'objectif étant la synthèse d'un contrôleur dynamique stabilisant et dont l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro. Bien que la théorie d'Isidori-Byrnes utilisée soit efficace, elle requiert cependant pour la synthèse du régulateur, la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires, souvent plus difficiles à résoudre que les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (Shimizu *et al.* [2005]).

La commande par modes glissants présente l'avantage d'être robuste par rapport aux incertitudes du modèle (Wang et Lin [1999]). Dans (Yan et Xu [2004]) par exemple, une commande par modes glissants utilisant un retour de sortie pour la poursuite de systèmes non linéaires incertains a été proposée. Cette méthode est une extension du travail proposé dans (Yan *et al.* [2003]), basée sur l'erreur de poursuite en sortie. Dans (Yan *et al.* [2003]) et (Yan et Xu [2004]) seuls les systèmes de degré relatif égal à un ont été considérés. Dans ce cas, malgré l'efficacité prouvée de la commande par modes glissants, ce contrôleur peut être trop sensible au phénomène de *chattering*. Une solution proposée est de considérer un ordre plus élevé pour le contrôle des systèmes non linéaires (Edwards et Spurgeon [1994], Edwards *et al.* [2000], Tan et Edwards [2003], Fridman et Levant [2002]), mais à cause de la complexité engendrée et la non-applicabilité de la méthode directe de Lyapunov, peu de résultats sont disponibles à ce sujet (Hsu *et al.* [2006]).

La commande prédictive non linéaire (NMPC) est une extension de la commande linéaire introduite dans la section précédente. Elle est caractérisée par l'utilisation du modèle non linéaire dans la synthèse de la commande (Alamir [2006], Alessio et Bemporad [2008]). A l'instar de la commande prédictive linéaire, la NMPC requiert la résolution itérative d'un problème de commande optimale sur un intervalle de prédiction fini. Ces problèmes convexes dans le cas linéaire, ne le sont plus dans le cas non linéaire ce qui entraîne certaines difficultés pour la stabilisation et la résolution numérique (Allgöwer et Zhen [2000], Findeisen *et al.* [2007]).

Il est également important de rappeler que la liste des approches citées n'est pas exhaustive. Parmi une littérature abondante, nous nous sommes seulement intéressés aux méthodes les plus répandues.

5.2.3 Poursuite de modèle de référence des systèmes T-S : contribution du chapitre

L'étude bibliographique présentée ci-dessus a pour objectif d'introduire le point principal de ce chapitre : la commande pour la poursuite de modèle de référence des systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno. Malgré une littérature abondante sur l'étude de la stabilité de ces modèles, peu de travaux se sont intéressés au problème de poursuite de modèle de référence. On peut citer par exemple quelques travaux sur le retour d'état ou de sortie avec la commande H_∞ (Taniguchi *et al.* [1999], Tseng et Chen [2001] et Mansouri *et al.* [2009]). Dans ce cas, la solution du problème de poursuite non linéaire est exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires et de structure de commande de type PDC (Mansouri *et al.* [2009], Tseng *et al.* [2001]) par exemple). Cependant, dans ces références, on se réfère simplement à un choix "adéquat" pour justifier la structure du modèle de référence à suivre mais sans toujours légitimer ce choix.

Cette dernière remarque a motivé le présent travail. En effet, que ce soit pour le cas linéaire ou non linéaire, peu de travaux détaillent l'importance du choix du modèle de référence, alors que la structure de ce dernier et les valeurs numériques de ses paramètres conditionnent de façon forte la faisabilité de la poursuite. Dans (Nie et Patton [2011]) par exemple, les auteurs ont cité les conditions d'Erzberger sans expliquer ou motiver ce choix. Pour cette raison, dans le présent travail, nous nous intéressons non seulement à la synthèse de la loi de commande, mais également aux conditions de poursuite (*matching*). Comme il a été mentionné au début du chapitre, nous commençons par aborder l'aspect structurel et les conditions à satisfaire pour assurer la poursuite du modèle de référence par des systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S. Le point suivant concerne le choix du critère de poursuite en fonction

des performances désirées (poursuite exacte ou issue d'une recherche d'optimum). Puis, nous nous intéressons à la commande prédictive et finalement à la commande tolérante aux défauts (cas continu avec bruit de mesure, cas discret avec saturation de commande).

5.3 Conditions structurelles de poursuite

5.3.1 Modèle et objectif

Considérons le système sous forme T-S suivant ($x_k \in R^{n_x}$ et $u_k \in R^{n_u}$) :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (5.19)$$

avec :

$$A_k = \sum_{i=1}^r \mu_{i,k} A_i, B_k = \sum_{i=1}^r \mu_{i,k} B_i \quad (5.20)$$

où les fonctions poids $\mu_{i,k}$ ($\mu_{i,k} = \mu_i(\xi_k)$) avec ξ_k connu) vérifient la propriété de somme convexe :

$$0 \leq \mu_{i,k} \leq 1, \sum_{i=1}^r \mu_{i,k} = 1 \quad (5.21)$$

Le modèle de référence à suivre est défini par l'équation suivante ($x_{r,k} \in R^{n_x}$ et $u_{r,k} \in R^{n_u}$) :

$$x_{r,k+1} = A_r x_{r,k} + B_r u_{r,k} \quad (5.22)$$

avec l'entrée de référence $u_{r,k}$ choisie pour avoir la dynamique désirée du modèle de référence.

L'objectif de poursuite idéale consiste à ajuster, à chaque instant k , la commande u_k de sorte que l'état du système x_k suive l'état du modèle de référence $x_{r,k}$ avec une erreur de poursuite nulle. Pour cela, deux procédures peuvent être considérées. La première tend à fixer la structure de la loi de commande, puis en fonction de cette dernière, trouver les conditions de poursuite et les valeurs des gains de commande qui lui sont attachées. La seconde stratégie n'utilise pas de structure a priori fixée de la loi de commande mais, tend à trouver l'expression analytique de cette dernière à appliquer sous des conditions structurelles adéquates.

Dans les deux cas de figure, si les conditions structurelles assurant la poursuite s'avèrent impossibles à satisfaire, il faut alors faire des compromis comme restreindre la poursuite à une partie des états (sorties) seulement ou accepter une poursuite approchée des états.

5.3.2 Loi de commande prédéfinie

Dans le but de satisfaire l'objectif de poursuite, la loi de commande suivante est considérée :

$$u_k = K_k x_k + K_{r,k} u_{r,k} \quad (5.23)$$

où les gains K_k et $K_{r,k}$ dépendent du temps.

En reportant (5.23) dans (5.19), le système devient :

$$x_{k+1} = (A_k + B_k K_k) x_k + B_k K_{r,k} u_{r,k} \quad (5.24)$$

Les conditions de *matching* en régime dynamique sont alors obtenues en comparant (5.24) et (5.22). Elles sont données par :

$$\begin{cases} A_k + B_k K_k & = & A_r \\ B_k K_{r,k} & = & B_r \end{cases} \quad (5.25)$$

Afin d'avoir une solution de (5.25) en K_k et $K_{r,k}$, les conditions de rang suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} \text{rang}[B_k] = \text{rang}[B_k|A_r - A_k] \\ \text{rang}[B_k] = \text{rang}[B_k|B_r] \end{cases} \quad (5.26)$$

Compte tenu des définitions (5.20), ces conditions s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} \text{rang} \left[\sum_{i=1}^r \mu_{i,k} B_i \right] = \text{rang} \left[\sum_{i=1}^r \mu_{i,k} B_i \mid \sum_{i=1}^r \mu_{i,k} (A_r - A_i) \right] \\ \text{rang} \left[\sum_{i=1}^r \mu_{i,k} B_i \right] = \text{rang} \left[\sum_{i=1}^r \mu_{i,k} B_i \mid B_r \right] \end{cases} \quad (5.27)$$

Si les conditions (5.26) sont vérifiées, alors les gains K_k et $K_{r,k}$ sont donnés à chaque instant par :

$$\begin{cases} K_{r,k} = B_k^+ B_r \\ K_k = B_k^+ (A_r - A_k) \end{cases} \quad (5.28)$$

avec B_k^+ la pseudo-inverse de la matrice plein rang colonne B_k et où il faut rappeler que les matrices A_k et B_k varient au cours du temps selon les expressions (5.20).

A noter que pour satisfaire les conditions de *matching* (5.26), puisque les matrices du système A_k et B_k sont fonctions du temps (5.20), une condition suffisante consiste à partitionner les matrices A_i , B_i et A_r , B_r sous la forme :

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} A_0 \\ \bar{A}_i \end{pmatrix}, A_r = \begin{pmatrix} A_0 \\ \bar{A}_r \end{pmatrix} \\ B_i &= \begin{pmatrix} 0_{n_x - n_u} \\ b_i \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0_{n_x - n_u} \\ b_r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec A_0 est une matrice de dimension $(n_x - n_u) \times n_x$, \bar{A}_i et \bar{A}_r (des matrices de dimensions $n_u \times n_x$), b_i et b_r (de dimensions $n_u \times n_u$) sont des matrices quelconques (degrés de liberté). La structure (5.29) impose donc les contraintes suivantes :

1. les $(n_x - n_u)$ premières lignes des matrices A_i sont égales aux $(n_x - n_u)$ premières lignes de la matrice A_r
2. les $(n_x - n_u)$ premières lignes des matrices B_i et B_r sont nulles

ce qui permet de satisfaire les conditions de rang (5.26). Ces contraintes de rang montrent donc que la poursuite parfaite exige un choix particulier du modèle de référence. Le modèle de référence conserve néanmoins quelques degrés de liberté apparaissant dans \bar{A}_r et b_r dont les coefficients peuvent être ajustés en fonction de spécifications sur le modèle de référence.

Afin d'illustrer l'utilisation des conditions ci-dessus, considérons l'exemple académique suivant :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 0.99 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 0.99 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 0.99 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec comme fonctions d'activation :

$$\mu_{1,k} = \frac{2 - \sin(x_{1,k}) - \tanh(x_{2,k})}{4}, \quad \mu_{2,k} = 1 - \mu_{1,k} \quad (5.31)$$

En appliquant la loi de commande (5.23) avec les définitions (5.28) des gains de la commande, les états du système et ceux du modèle de référence sont représentés à la figure 5.1 (respectivement notés x_i et x_{ir} , $i = 1, \dots, 3$). Les commandes $u_{r,k}$ et u_k sont représentées à la la figure 5.2.

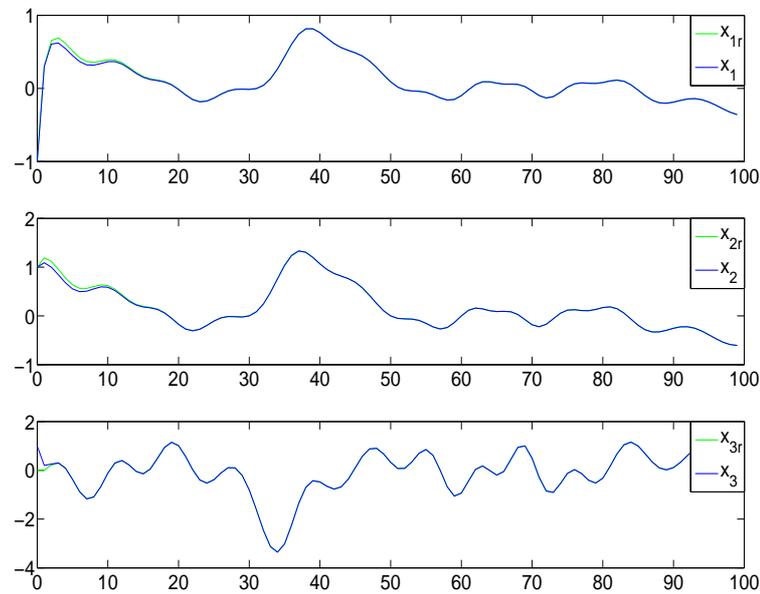


Figure 5.1 – Etats du système et du modèle de référence

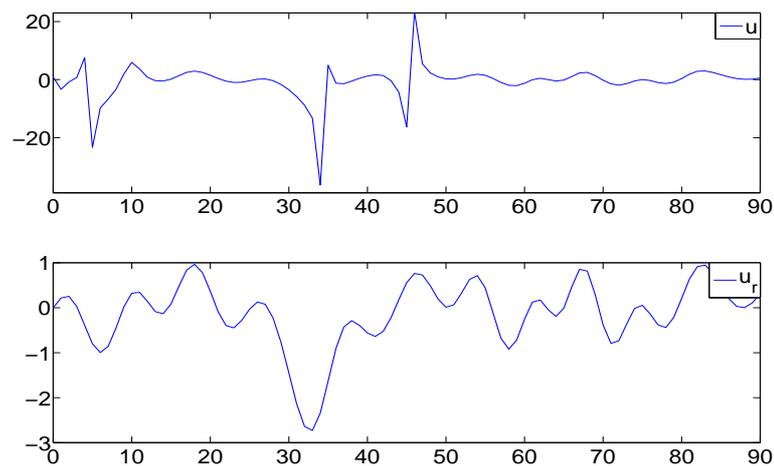
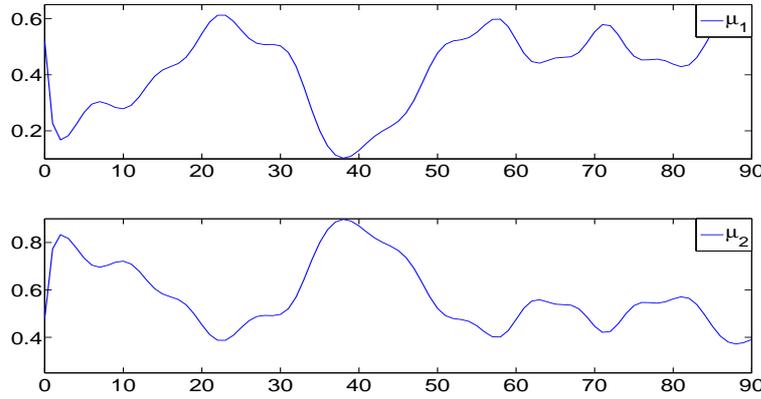


Figure 5.2 – Commandes $u_{r,k}$ et u_k calculée

On constate sur les figures obtenues que la loi de commande proposée (5.23) est efficace, la poursuite des trois états étant parfaite abstraction faite de l'influence des conditions initiales, sous réserve que les conditions structurelles (5.27) soient vérifiées ce qui est le cas dans l'exemple présenté.

Figure 5.3 – Fonctions d'activation $\mu_{1,k}$ et $\mu_{2,k}$

5.3.3 Loi de commande à structure non prédéfinie

Dans cette section, la structure de la loi de commande, utilisée pour la poursuite d'un modèle de référence par un système non linéaire T-S, n'est pas prédéfinie.

Ainsi, à chaque instant k , afin d'assurer la poursuite du modèle de référence à l'instant $k+1$ avec une erreur de suivi nulle, c'est-à-dire :

$$A_k x_k + B_k u_k = x_{r,k+1} \quad (5.32)$$

la loi de commande u_k doit vérifier :

$$B_k u_k = x_{r,k+1} - A_k x_k \quad (5.33)$$

A noter que, dans ce cas de figure, la poursuite parfaite de l'état de référence est assurée si les conditions de *matching* suivantes sont vérifiées :

$$\text{rang}[B_k] = \text{rang}[B_k | x_{r,k+1} - A_k x_k] \quad (5.34)$$

La loi de commande est alors déduite et donnée par les équations suivantes :

$$u_k = (B_k^T B_k)^{-1} B_k^T (x_{r,k+1} - A_k x_k) \quad (5.35)$$

On retrouve donc une loi de commande qui dépend de l'état du système et de celui du modèle de référence, avec ici un phénomène d'anticipation sur l'état de référence, mais sans faire appel explicitement à la commande du modèle de référence comme en (5.32).

Remarque 13. Si les variables de décision des fonctions d'activation μ_k sont fonction de la commande u_k , les matrices A_k et B_k (5.20) dépendent elles-mêmes de u_k . La loi de commande (5.35) sera alors sous une forme implicite $u_k = F(u_k)$:

$$u_k = \left(\sum_{i=1}^r \mu_{i,k}(u_k) B_i \right)^+ \left(A_r - \sum_{i=1}^r \mu_{i,k}(u_k) A_i \right) x_k + \left(\sum_{i=1}^r \mu_{i,k}(u_k) B_i \right)^+ B_r u_{r,k} \quad (5.36)$$

La résolution de cette équation par rapport à u_k ne permet pas d'exhiber une forme explicite de la commande. Pour contourner cette difficulté, un algorithme itératif est alors proposé :

$$\begin{aligned} u_k^{(j+1)} &= ((B_k^{(j)})^T B_k^{(j)})^{-1} (B_k^{(j)})^T (x_{r,k+1} - A_k^{(j)} x_k) \\ &= ((B_k^{(j)})^T B_k^{(j)})^{-1} B_k^{(j)} (x_{r,k+1} - A_k^{(j)} x_k) \end{aligned} \quad (5.37)$$

avec $B_k^{(j)} = \sum_{i=1}^r \mu_i(u_k^{(j)}) B_i$, $A_k^{(j)} = \sum_{i=1}^r \mu_i(u_k^{(j)}) A_i$, $j = 0, \dots, N$ avec N le nombre d'itérations et u_k^0 l'initialisation de la commande qui peut être prise égale à $u_{r,k}$ par exemple.

La convergence de cet algorithme peut être démontrée localement, mais comme cela n'est pas l'objet de notre étude, le lecteur peut se référer aux travaux (Allgöwer et Georg [1980], Axelsson [1994], Kelley [1995]) pour plus d'explications.

5.4 Choix du critère de poursuite

En fonction des objectifs de commande à assurer et de la tolérance acceptée pour la qualité de la poursuite des états du système, deux critères peuvent être considérés :

1. La poursuite exacte où chaque composante du vecteur d'état du système doit suivre une référence donnée. Pour répondre à cet objectif, le système et le modèle de référence doivent être mis sous une certaine forme canonique issue de conditions structurelles et de rangs.
2. La poursuite optimale vis-à-vis d'un critère de distance entre l'état du système et l'état du modèle de référence. Cette distance peut être traduite par la norme de l'erreur de poursuite. Ce critère concerne la commande quadratique optimale comme introduction de la commande prédictive MPC pour les modèles non linéaires T-S.

Comme le premier critère a été traité dans la section précédente, seul le deuxième point sera développé dans cette partie.

Comme indiqué précédemment, en raison du conservatisme imposé par les conditions structurelles nécessaires à la poursuite exacte de modèle de référence, nous nous sommes intéressés à d'autres approches pouvant relaxer ces conditions. La solution retenue est la commande quadratique optimale pour les modèles T-S. En effet, les conditions de poursuite exacte étant difficiles à assurer, il est possible de considérer le problème de poursuite en minimisant l'erreur de poursuite entre le système et son modèle de référence. Cette approche admet toujours une solution, mais bien évidemment la qualité de la poursuite ne peut être imposée a priori.

5.4.1 Variables de décision indépendantes de la commande

L'objectif est alors de minimiser la fonction coût pondérée suivante :

$$\Phi = \| B_k u_k - x_{r,k+1} + A_k x_k \|_W^2 \quad (5.38)$$

sachant la définition

Definition 1. Pour un signal à temps discret v_k , on définit la norme 2 pondérée par W comme :

$$\| v_k \|_W^2 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^T W v_k \quad (5.39)$$

où W est une matrice poids définie positive choisie en fonction de spécifications (privilégier la poursuite d'un état par rapport à un autre par exemple).

La loi de commande est alors donnée par :

$$u_k = (B_k^T W B_k)^{-1} B_k^T W (x_{r,k+1} - A_k x_k) \quad (5.40)$$

où les matrices A_k et B_k définies en (5.20) dépendent des variables de décision ξ_k connues.

5.4.2 Variables de décision fonction de la commande

La remarque 8 est valable pour la loi de commande (5.40). En effet, dans le cas où les fonctions d'activation dépendent de la commande, une solution itérative pour la recherche de la commande est à considérer.

Dans ce cas, à l'étape $j + 1$ de la procédure itérative, la fonction coût à minimiser est choisie sous la forme :

$$\Phi^{(j+1)} = \| B_k^{(j)} u_k^{(j+1)} - x_{r,k+1} + A_k^{(j)} x_k \|_W^2 \quad (5.41)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_k^{(j)} &= \sum_{i=1}^r \mu_{i,k}(u_k^{(j)}) A_i \\ B_k^{(j)} &= \sum_{i=1}^r \mu_{i,k}(u_k^{(j)}) B_i \end{aligned} \quad (5.42)$$

et où $u_k^{(j)}$ est la commande calculée à l'étape j . La solution est alors donnée par l'algorithme itératif $u_k^{(j+1)} = f(u_k^{(j)})$ suivant (pour $j = 0, \dots, N$) :

$$u_k^{(j+1)} = ((B_k^{(j)})^T W B_k^{(j)})^{-1} (B_k^{(j)})^T W (x_{r,k+1} - A_k^{(j)} x_k) \quad (5.43)$$

Le test de convergence pour décider de l'arrêt des itérations à l'étape N peut être réalisé en analysant l'amplitude du résidu $u_k^{(j+1)} - f(u_k^{(j+1)})$.

5.4.3

Considérons à présent les exemples illustratifs suivants. Le modèle de référence et le système sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 0.99 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, & B_r &= \begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ 1 & 0.11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 1.19 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 1.5 & 0.61 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & 1.09 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} -0.8 & -0.5 \\ 0.5 & -0.39 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

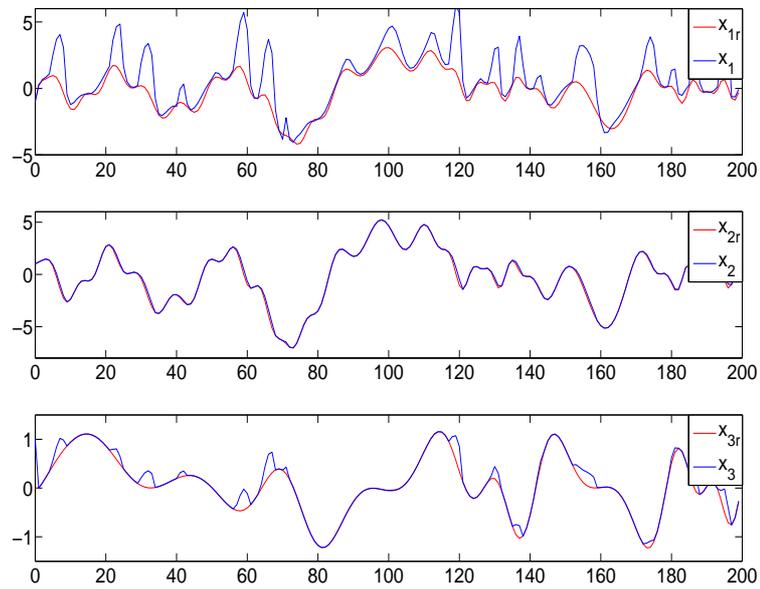
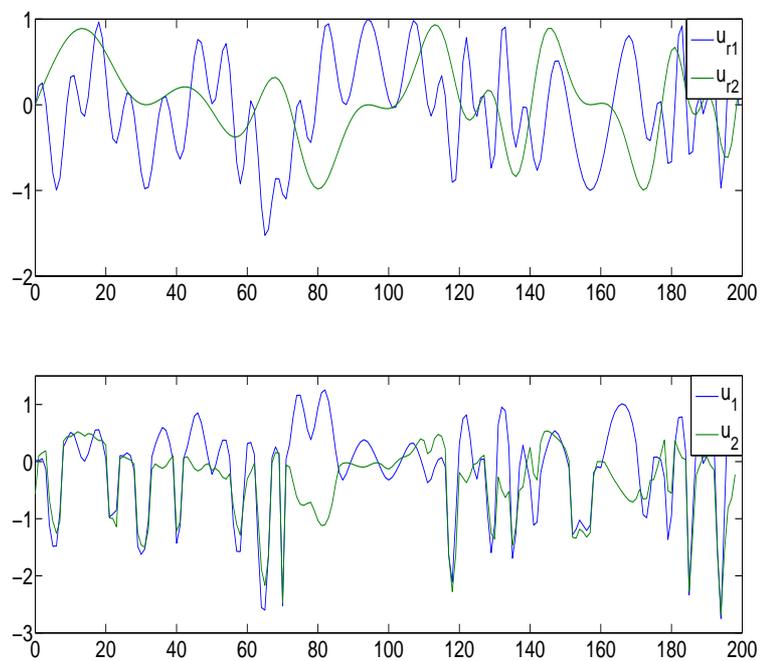
On se place dans le cas où les fonctions d'activation dépendent de la commande et sont données par :

$$\mu_{1,k} = \frac{1 + 2 \tanh(u_{1,k})}{2}, \quad \mu_{2,k} = 1 - \mu_{1,k} \quad (5.45)$$

Les matrices définies en (5.44) ne vérifiant pas les conditions de poursuite exacte (5.27), on applique une commande quadratique optimale. Comme les fonctions d'activation dépendent de la commande, la procédure itérative (5.43) est mise en oeuvre.

Dans un premier temps, l'objectif est d'assurer la poursuite pour les états x_2 et x_3 . La matrice de pondération est donc donnée par $W = \text{diag}(0.01, 1, 1)$ de façon à favoriser la poursuite de ces deux états. Les états du système et du modèle de référence respectivement notés x_i et x_{ir} , $i = 1, \dots, 3$ sont représentés à la figure 5.4. Les commandes $u_{r,k}$ (commandes choisies) et u_k (commandes calculées) sont représentées à la figure 5.5.

A l'examen des figures, on constate bien que les états x_2 et x_3 suivent de façon optimale au sens du critère (5.38) les états de référence x_{2r} et x_{3r} bien que les conditions structurelles de poursuite ne soient pas vérifiées.

Figure 5.4 – Etats du système et du modèle de référence avec $W = \text{diag}(0.01, 1, 1)$ Figure 5.5 – Commandes $u_{r,k}$ et u_k

Afin d'illustrer l'influence de la fonction poids W et son rôle dans la poursuite des états, W est maintenant choisie égale à $\text{diag}(0.01, 0.1, 1)$. Les états du système et du modèle de référence sont représentés à la figure 5.6, les commandes $u_{r,k}$ et u_k à la figure 5.7.

On observe que la loi de commande proposée est efficace et que la poursuite est assurée. La poursuite

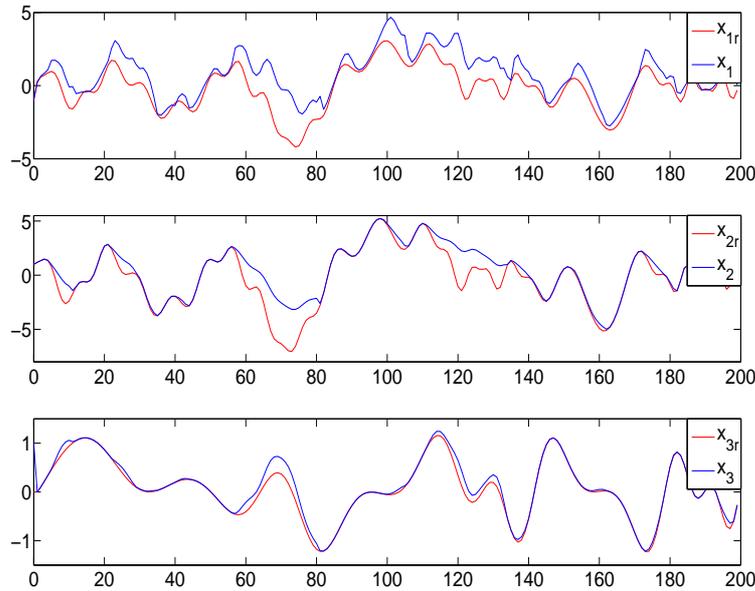


Figure 5.6 – Etats du système et du modèle de référence avec $W = \text{diag}(0.01, 0.1, 1)$

pour les premier et troisième états a été améliorée, au détriment du deuxième grâce à ce nouveau choix de W .

Le tableau 5.1 quantifie ces constats. Nous avons calculé les quantités

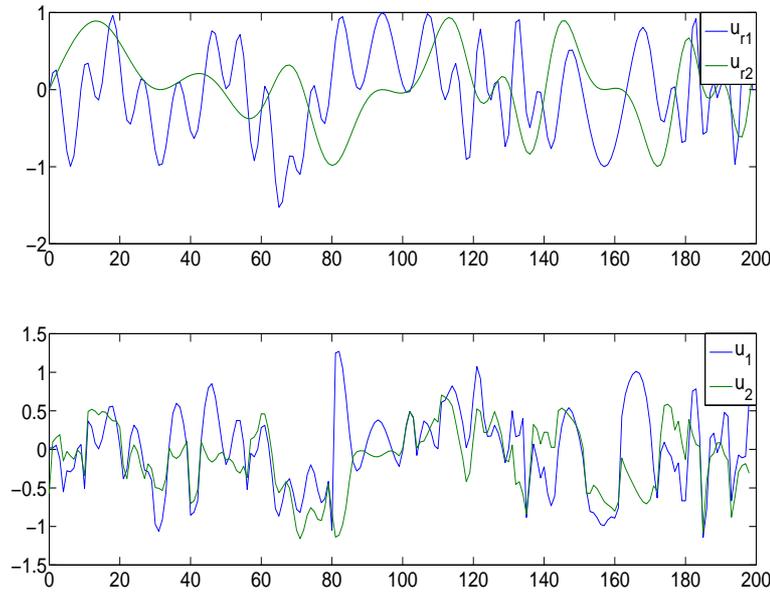
$$\phi_i = \sum_{k=0}^N |x_{r,k,i} - x_{k,i}|, \quad i = 1, 2, 3$$

pour les deux situations proposées. L'indice i désigne la $i^{\text{ième}}$ composante d'un vecteur et N est l'horizon d'optimisation.

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
$W = \text{diag}(0.01, 1, 1)$	189.26	13.23	12.36
$W = \text{diag}(0.01, 0.1, 1)$	176.18	128.16	10.95

Tableau 5.1 – Influence du poids W

Lorsque les modèles du système à contrôler et de référence, non seulement ne vérifient pas les conditions de *matching* parfait, mais sont de plus très différents, la poursuite de trajectoire pour tous les états ne peut

Figure 5.7 – Commandes $u_{r,k}$ et u_k avec $W = \text{diag}(0.01, 0.1, 1)$

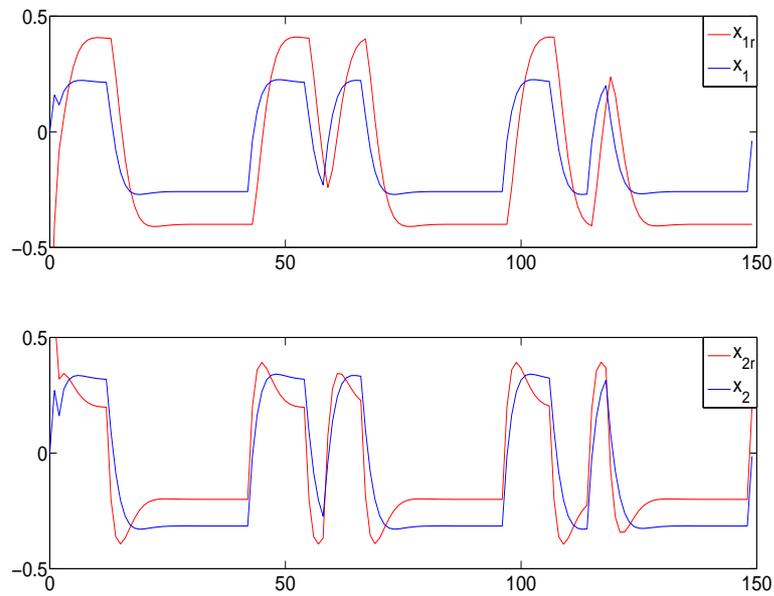
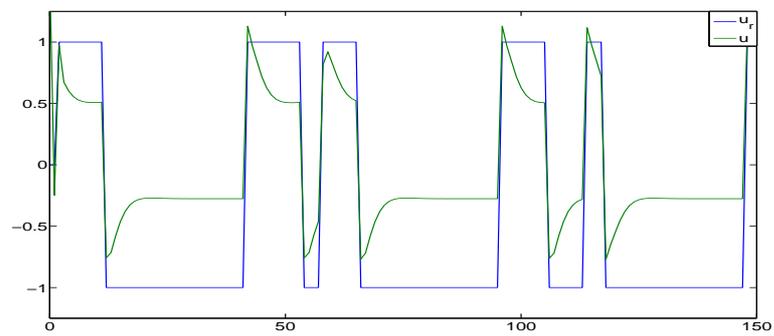
être précise. Relâcher la qualité de cette poursuite (par le choix de la matrice W) sur un (ou plusieurs) état(s) peut permettre d'améliorer la poursuite des autres.

Une illustration de ce constat est donnée par l'exemple suivant. Le système et le modèle de référence sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, & B_r &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}, & A_1 &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.17 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.23 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Les fonctions d'activation dépendent de l'entrée de commande et sont données par (5.45).

Dans un premier temps, les spécifications de poursuite sont les mêmes pour les deux états du système. La matrice W est donc donnée par $W = \text{diag}(1, 1)$. Les états du système et du modèle de référence (respectivement notés x_i et x_{ir} , $i = 1, 2$) sont représentés à la figure 5.8. Les commandes $u_{r,k}$ et u_k sont données à la figure 5.9.

Figure 5.8 – Etats du système et du modèle de référence avec $W = I_2$ Figure 5.9 – Commandes $u_{r,k}$ et u_k avec $W = I_2$

On observe sur ces figures que la poursuite des deux états n'est pas très performante (cela provient du modèle de référence assez éloigné du système à contrôler et du non respect des conditions de "matching").

Sachant que la poursuite des deux états est délicate, on considère pour la deuxième simulation une matrice poids W égale à $\text{diag}(0.1, 1)$, ce qui permet de favoriser a priori la poursuite du deuxième état au détriment de la poursuite du premier. Les états du système et du modèle de référence sont alors représentés à la figure 5.10 et les commandes $u_{r,k}$ et u_k à la figure 5.11.

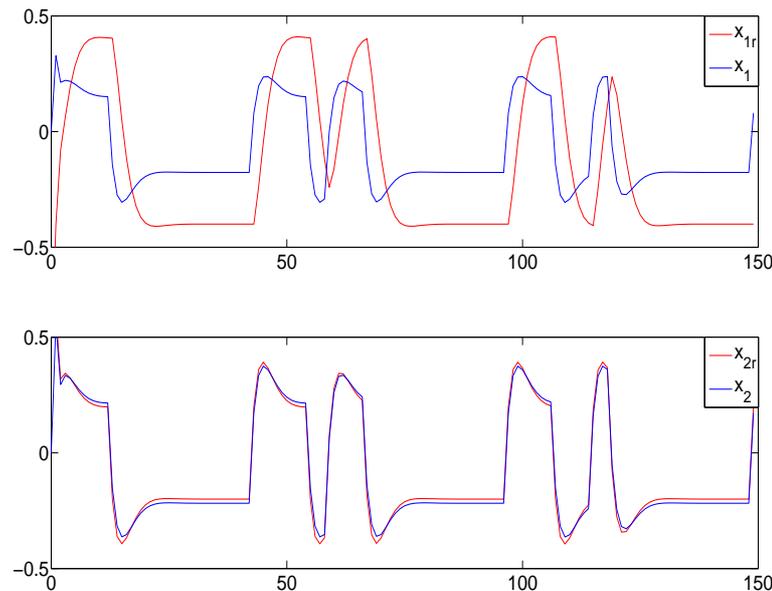


Figure 5.10 – Etats du système et du modèle de référence

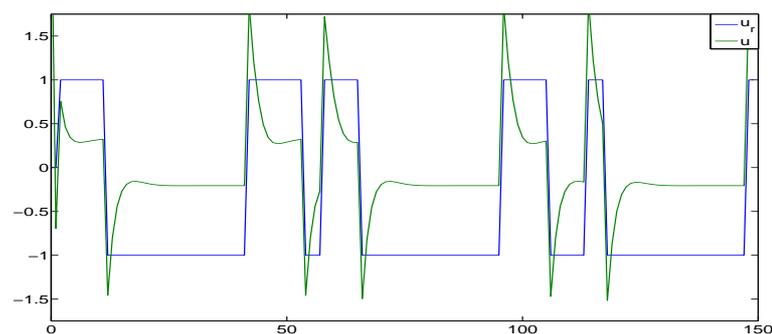


Figure 5.11 – Commandes $u_{r,k}$ et u_k

On remarque que la poursuite a été sensiblement améliorée pour le deuxième état. En effet, puisque les conditions de poursuite ne sont pas vérifiées, donc la commande ne peut être totalement efficace pour les deux états avec la même pondération. Par contre la poursuite est précise lorsque l'exigence porte sur un seul état.

Afin de justifier cette constatation, considérons l'exemple d'un système T-S de dimension $n_x = 2$ avec une commande $n_u = 1$. Les matrices W et B_k sont choisies respectivement sous les formes suivantes $W = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_k = (b_{1k} \ b_{2k})^T$. Nous rappelons que la commande est donnée par (5.43). En remplaçant W et B_k par leurs expressions, nous avons :

$$u_k = \frac{1}{b_{1,k}^2 w + b_{2k}^2} (b_{1k} w \ b_{2k}) (x_{r,k+1} - A_k x_k) \quad (5.47)$$

En reportant maintenant la commande obtenue dans le système d'équation (5.32), il s'ensuit :

$$x_{k+1} = A_k x_k + \frac{1}{b_{1,k}^2 w + b_{2k}^2} \begin{pmatrix} b_{1k}^2 w & b_{1k} b_{2k} \\ b_{2k} b_{1k} w & b_{2k}^2 \end{pmatrix} (x_{r,k+1} - A_k x_k) \quad (5.48)$$

La condition de poursuite à atteindre est $x_{k+1} = x_{r,k+1}, \forall k$. Elle est satisfaite si

$$\frac{1}{b_{1,k}^2 w + b_{2k}^2} \begin{pmatrix} b_{1k}^2 w & b_{1k} b_{2k} \\ b_{2k} b_{1k} w & b_{2k}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

ce qui ne peut être réalisé. Etant donné que b_{1k} et b_{2k} varient dans le temps, une solution serait d'avoir w petit ($w \rightarrow 0$), ce qui assurerait au moins la poursuite du deuxième état (comme nous pouvons le constater pour l'exemple précédent).

Remarque 14. *La méthode d'optimisation quadratique proposée est basée sur la minimisation, sur un horizon fini à chaque étape d'une procédure itérative, du critère entre le système et son modèle de référence. L'erreur de poursuite est calculée et minimisée étape par étape en se basant sur le résultat de l'étape précédente. Une alternative serait de minimiser la norme de l'erreur de poursuite sur un horizon de temps infini (Bezzaoucha et al. [2013b]) (voir la section suivante 5.6.1).*

5.5 Commande prédictive non linéaire d'un système sous forme T-S

Comme pour les cas linéaire et non linéaire, la commande prédictive pour la poursuite de modèle de référence, tend à assurer une erreur de poursuite minimale sur un horizon fini glissant. La procédure proposée pour les modèles T-S est inspirée de la commande prédictive classique, autrement dit, en considérant un horizon d'optimisation fini de $p + 1$ pas $[k, k + p]$. Les états du système au cours du temps peuvent s'exprimer en fonction d'un état initial x_k de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k \\ x_{k+p+1} &= A_{k+p} x_{k+p} + B_{k+p} u_{k+p} \\ &= \left(\prod_{i=0}^p A_{k+i} \right) x_k + \sum_{i=0}^p \left(\prod_{j=i+1}^p A_{k+j} \right) B_{k+i} u_{k+i} \end{aligned} \quad (5.50)$$

où les matrices A_k et B_k sont définies en (5.20).

Notons :

$$\bar{x}_{k+p} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{k+p+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{k+p} = \begin{bmatrix} A_k \\ A_{k+1}A_k \\ \vdots \\ \prod_{i=0}^p A_{k+p-i} \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_{k+p} = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+p} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\mathcal{B}_{k+p} = \begin{bmatrix} B_k & 0 & \dots & 0 \\ A_{k+1}B_k & B_{k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{i=0}^{p-1} A_{k+p-i}B_k & \prod_{i=0}^{p-2} A_{k+p-i}B_{k+1} & \dots & B_{k+p} \end{bmatrix}$$

Compte tenu de (5.50), l'état du système sur l'horizon considéré s'explique en fonction de l'état initial x_k et des commandes successives appliquées \bar{u} :

$$\bar{x}_{k+p} = \mathcal{A}_{k+p}x_k + \mathcal{B}_{k+p}\bar{u}_{k+p}, \quad \bar{x}_{k+p} \in \mathbb{R}^{n(p+1)} \quad (5.52)$$

5.5.1 Variables de décision indépendantes de la commande

Pour assurer la poursuite du modèle de référence, la commande \bar{u} est ajustée afin de minimiser le critère :

$$\Phi_k = \|\bar{x}_{r,k+p} - \mathcal{A}_{k+p}x_k - \mathcal{B}_{k+p}\bar{u}_{k+p}\|_W^2 \quad (5.53)$$

avec $\bar{x}_{r,k+p} = \begin{bmatrix} x_{r,k+1} \\ x_{r,k+2} \\ \vdots \\ x_{r,k+p+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$, ce qui conduit à l'expression explicite de la commande :

$$\bar{u}_{k+p} = (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} \mathcal{B}_{k+p}^T W (\bar{x}_{r,k+p} - \mathcal{A}_{k+p}x_k) \quad (5.54)$$

Seule la première composante u_k de \bar{u} est appliquée, ce qui génère l'état x_{k+1} . Le processus d'optimisation est ensuite repris sur l'horizon $[k+1, k+p+1]$.

5.5.2 Variables de décision fonction de la commande

Les matrices \mathcal{A}_{k+p} et \mathcal{B}_{k+p} peuvent dépendre de la commande u_k dans les fonctions d'activation, l'équation (5.54) est donc implicite en la commande. Ceci implique de définir un algorithme itératif de calcul de la commande minimisant le critère :

$$\Phi_{k+1} = \|\bar{x}_{r,k+p} - \mathcal{A}_{k+p}^{(j)}x_k - \mathcal{B}_{k+p}^{(j)}\bar{u}_{k+p}^{(j+1)}\|_W^2 \quad (5.55)$$

où les matrices $A_k^{(j)}$ et $B_k^{(j)}$ sont données par (5.42) en fonction de la commande $u_k^{(j)}$.

Définissons à l'étape j la quantité $F^{(j)}$ dépendant de l'état initial sur l'horizon $[k, k+p]$ et de la commande calculée à l'étape j :

$$F^{(j)} = ((\mathcal{B}_{k+p}^{(j)})^T W \mathcal{B}_{k+p}^{(j)})^{-1} \times (\mathcal{B}_{k+p}^{(j)})^T W (\bar{x}_{r,k+p} - \mathcal{A}_{k+p}^{(j)}x_k) \quad (5.56)$$

Sur l'horizon temporel $[k, k+p]$, l'algorithme itératif considéré est ainsi décrit par les étapes suivantes :

1. Initialisation : $j = 0$, définir $\bar{u}_{k+p}^{(j)}$ (on peut choisir par exemple la commande calculée sur l'horizon précédent $[k-1, k+p-1]$).
2. Calculer $\mathcal{A}_{k+p}^{(j)}$ et $\mathcal{B}_{k+p}^{(j)}$ (5.57).
3. Mettre à jour la commande en utilisant l'algorithme à itération directe : $\bar{u}_{k+p}^{(j+1)} = F^{(j)}\bar{u}_{k+p}^{(j)}$
4. Test de convergence :
si $\|\bar{u}_{k+p}^{(j+1)} - \bar{u}_{k+p}^{(j)}\| > \delta$, $j = j + 1$, aller à l'étape 2 sinon, fin de l'algorithme.

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{k+p}^{(j)} = \begin{bmatrix} A_k^{(j)} \\ A_{k+1}^{(j)} A_k^{(j)} \\ \vdots \\ \prod_{i=0}^p A_{k+p-i}^{(j)} \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_{k+p}^{(j)} = \begin{bmatrix} B_k^{(j)} & 0 & \dots & 0 \\ A_{k+1}^{(j)} B_k^{(j)} & B_{k+1}^{(j)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{i=0}^{p-1} A_{k+p-i}^{(j)} B_k^{(j)} & \prod_{i=0}^{p-2} A_{k+p-i}^{(j)} B_{k+1}^{(j)} & \dots & B_{k+p}^{(j)} \end{bmatrix} \\ A_k^{(j)} = \sum_{i=1}^r \mu_i(u^{(j)}(k)) A_i \\ B_k^{(j)} = \sum_{i=1}^r \mu_i(u^{(j)}(k)) B_i \end{array} \right. \quad (5.57)$$

Après convergence de l'algorithme, la commande

$$u_k = [I_{n_u} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \bar{u}_{k+p} \quad (5.58)$$

est appliquée au système. Lors de l'étape suivante, l'horizon est décalé d'un pas d'échantillonnage et le critère Φ_{k+1} est optimisé pour obtenir u_{k+1} .

Exemples

Considérons à présent l'exemple décrit en (5.44) avec la matrice poids $W = \text{diag}(0.01, 1, 1)$. La commande MPC est synthétisée pour trois pas (horizon prédictif $p = 2$). L'algorithme itératif proposé est implémenté et les résultats obtenus sont illustrés par les figures 5.12 et 5.13 pour les trajectoires d'état et les commandes respectivement.

Si l'on compare les résultats de la poursuite des états avec la commande sans action prédictive (figures 5.4 et 5.5), il est clair que l'objectif de poursuite a été amélioré.

Afin de quantifier cette amélioration pour chaque état, considérons l'indicateur suivant caractérisant l'erreur de poursuite :

$$\phi_i = \sum_{k=0}^N |x_{r,k,i} - x_{k,i}|$$

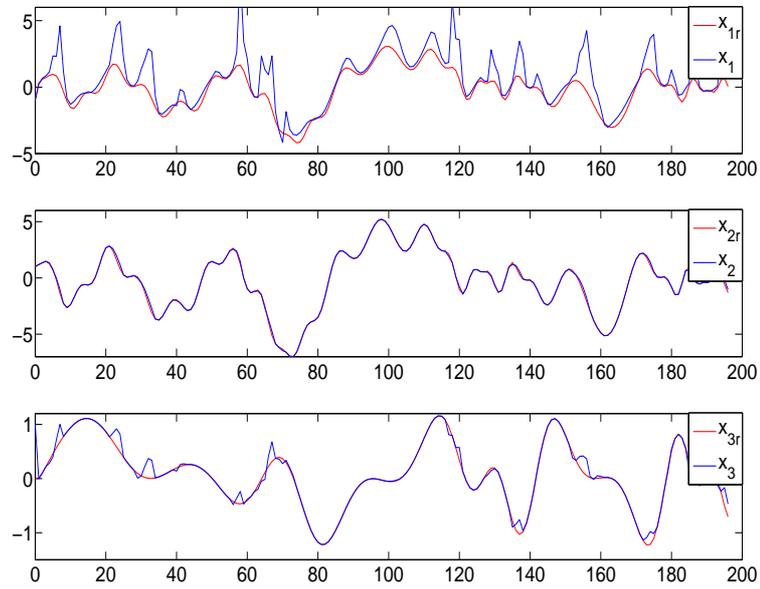
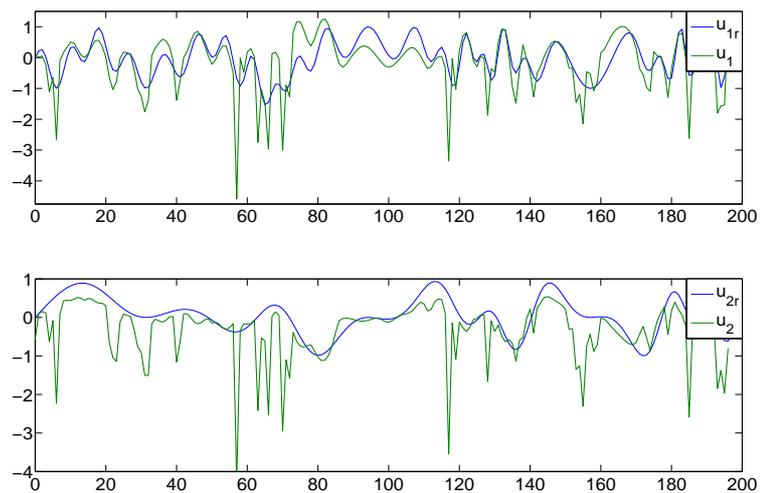


Figure 5.12 – Etats du système obtenus par la commande prédictive et ceux du modèle de référence

Figure 5.13 – Commande du modèle de référence $u_r(k)$ et commande MPC $u(k)$

où i désigne le numéro de la composante d'un vecteur, N est l'horizon d'optimisation et $x_{k,i}$ l'état obtenu avec la commande non prédictive (5.43). Le critère ϕ_{ip} est défini de manière analogue à celui de la commande MPC mais pour l'état obtenu par la commande prédictive. Finalement, l'amélioration relative de l'erreur de poursuite τ_i est définie par

$$\tau_i = 100 \frac{\phi_i - \phi_{ip}}{\phi_i}$$

Pour l'exemple considéré avec $p = 2$, nous obtenons grâce à la commande prédictive, l'amélioration suivante, pour chaque état : $\tau_1 = 12.34\%$, $\tau_2 = 31.24\%$, et $\tau_3 = 30.06\%$.

Afin de souligner l'influence de la taille de l'horizon d'optimisation N ($N = p + 1$), les taux τ_i d'amélioration ou dégradation dus à la commande MPC, sont calculés pour $N \in \{2, 3, 4, 5\}$ pour le même exemple et les résultats sont rassemblés dans le tableau 5.2.

On observe ainsi que, pour l'exemple considéré, la taille de l'horizon $N = 3$ est celle qui donne le meilleur

	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
τ_1	10.22%	12.34%	11.51%	12.53%
τ_2	27.44%	31.24%	27.37%	28.51%
τ_3	25.40%	30.06%	25.42%	27.55%

Tableau 5.2 – Influence de la taille de l'horizon

résultat. De ces observations, mais aussi des nombreux essais que nous avons effectués, il est important de souligner l'influence importante de la taille de l'horizon sur la qualité de la commande prédictive en terme de poursuite. Un horizon trop court, tout comme un horizon trop long peuvent ne pas donner de bons résultats. Un compromis est alors nécessaire. Pour choisir la taille de l'horizon adapté pour le système considéré, une étude comparative comme celle proposée ci-dessus peut s'avérer utile et simple à mettre en oeuvre.

Les différents essais effectués mais non rapportés ici, montrent également que le choix de la taille de l'horizon est lié à la dynamique des états de référence à suivre. Cette dépendance serait intéressante à étudier dans des travaux futurs.

5.6 Poursuite de modèle de référence tolérante aux défauts

Dans cette section, nous nous intéressons à la commande tolérante aux défauts pour la poursuite de modèle de référence. Deux cas de figure sont considérés selon la nature des défauts :

1. Défauts de capteurs additifs.
2. Commande saturée.

Le premier cas est présenté pour les systèmes continus et le second pour les systèmes discrets.

5.6.1 Poursuite de modèle de référence tolérante aux défauts de capteurs

Le calcul d'une loi de commande pour la poursuite de modèle de référence de systèmes non linéaires exprimés sous forme de modèle T-S est traité ici sous forme de problème d'optimisation LMI. Basé sur

les structures T-S et PDC, avec un choix judicieux du modèle de référence, une atténuation \mathcal{L}_2 des variables exogènes sur l'erreur de poursuite est considérée. Un observateur T-S à variables de décision non mesurables est également synthétisé pour la minimisation de cette erreur.

La contribution majeure du travail proposé par rapport aux travaux existants est, d'une part, la considération de VDNM, ce qui complique la synthèse de l'observateur et du contrôleur mais en étend la portée (d'autres travaux considèrent uniquement les VDM ou le retour de sortie (Mansouri *et al.* [2009], Tseng *et al.* [2001])) et, d'autre part, l'utilisation du formalisme descripteur qui permet de réduire le coût calculatoire et évite l'apparition de termes croisés entre les éléments de la matrice de Lyapunov et les gains (observateur et contrôleur) dans la formalisation des relations exprimant la stabilité des erreurs de poursuite.

Dans un premier temps, on étudiera la poursuite de trajectoire d'état dans le cas sans défaut. On considérera ensuite un défaut capteur et on cherchera une loi de commande assurant le suivi de trajectoire malgré la présence de défaut. La stratégie adoptée est de minimiser son influence sur les erreurs d'estimation et de poursuite. Un exemple numérique est proposé pour illustrer les résultats obtenus.

Critère de poursuite

Pour la synthèse de la commande de systèmes non linéaires assurant la poursuite d'un modèle de référence, une représentation T-S du système est considérée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (5.59)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ l'entrée de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ la sortie du système. Dans la suite, nous considérons les modèles à VDNM ($\xi(t) \in \mathbb{R}^g$ dépendent de l'état $x(t)$). Compte tenu de cette dépendance, notons

$$\mu_i(\xi(t)) = h_i(x(t)) \quad (5.60)$$

Ces fonctions d'activation satisfont, bien entendu, la propriété de somme convexe :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n h_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(x(t)) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.61)$$

Considérons à présent le modèle de référence stable suivant :

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u_r(t) \quad (5.62)$$

où $x_r(t)$ est l'état de référence que doit suivre $x(t)$ et $u_r(t)$ une entrée de référence bornée. Les matrices A_r et B_r sont choisies de manière à améliorer les performances du système en boucle fermée (amélioration du régime transitoire par exemple) et répondent aux conditions de suivi abordées dans les sections précédentes.

L'objectif étant le suivi de l'état du système (5.62) par celui de (5.59), la grandeur à réguler est l'erreur de poursuite $e_r(t)$:

$$e_r(t) = x(t) - x_r(t) \quad (5.63)$$

L'état du système n'étant pas disponible, le correcteur PDC est construit à partir de l'estimation de l'erreur de poursuite. Les fonctions d'activation dépendent de $x(t)$ non mesurable, son estimée est alors

utilisée. Le correcteur compte donc, outre le modèle de référence (5.62), un observateur d'état

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t))(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (5.64)$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état estimé, $L_i \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ les gains à déterminer. Le contrôleur PDC est défini par la commande

$$u(t) = -\sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t))K_i(x_r(t) - \hat{x}(t)) \quad (5.65)$$

où $K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ sont les gains du contrôleur.

Sa structure est représentée à la figure 5.14. L'objectif est à présent de synthétiser ce contrôleur PDC,

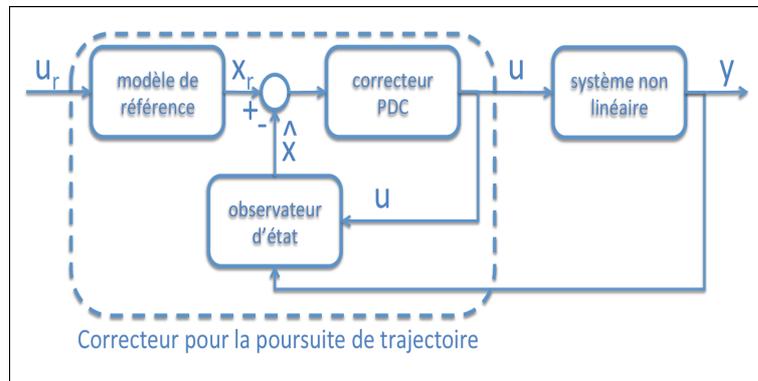


Figure 5.14 – Structure du contrôleur

stabilisant le système non linéaire (5.59) et vérifiant le critère de performance \mathcal{L}_2 (Tseng *et al.* [2001], Chen *et al.* [1996], Tong *et al.* [2002]) :

$$\int_0^{t_f} e_r^T(t) Q e_r(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} u_r^T(t) u_r(t) dt \quad (5.66)$$

où Q est une matrice poids définie positive permettant de privilégier certaines composantes de l'erreur de poursuite, η est le niveau d'atténuation désiré. Dans (5.66), la limite supérieure du gain du transfert \mathcal{L}_2 de $u_r(t)$ vers $e_r(t)$ notée $\frac{\eta}{\lambda(Q)}$ quantifie l'effet de l'entrée de référence sur l'erreur de poursuite. Il apparaît clairement qu'un des objectifs de la poursuite est de minimiser η .

Synthèse d'observateur

L'observateur choisi (5.64) est un multi-observateur proportionnel classique. La synthèse proposée peut également être généralisée à des observateurs plus sophistiqués de type proportionnel intégral ou multi-intégral [Duan *et al.* [2001], Busawon et Kabore [2001], Marx *et al.* [2003]].

Définissons l'erreur d'estimation d'état $e_x(t)$:

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.67)$$

Sa dynamique ne peut pas être calculée directement à partir de (5.67) puisque dans l'équation (5.59) les fonctions d'activation dépendent des variables non mesurables $x(t)$ et celles de l'équation (5.64)

dépendent de leurs estimées $\hat{x}(t)$. Pour cette raison, en se basant sur la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, l'équation d'état (5.59) se ré-écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n [h_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + (h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t))] \quad (5.68)$$

Cette forme permet une comparaison plus aisée entre $x(t)$ et $\hat{x}(t)$, puisque $h_i(\hat{x}(t))$ apparaît non seulement dans (5.64), mais également dans (5.68). Définissons à présent :

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^n [h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))] A_i \\ &= \mathcal{A} \Sigma_A(t) E_A \end{aligned} \quad (5.69)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta B(t) &= \sum_{i=1}^n [h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t))] B_i \\ &= \mathcal{B} \Sigma_B(t) E_B \end{aligned} \quad (5.70)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [A_1 \quad \dots \quad A_n] \quad \mathcal{B} = [B_1 \quad \dots \quad B_n], \\ E_A &= [I_{n_x} \quad \dots \quad I_{n_x}]^T, \quad E_B = [I_{n_u} \quad \dots \quad I_{n_u}]^T \\ \Sigma_A(t) &= \text{diag}(\delta_1(t)I_{n_x}, \dots, \delta_n(t)I_{n_x}), \quad \Sigma_B(t) = \text{diag}(\delta_1(t)I_{n_u}, \dots, \delta_n(t)I_{n_u}) \\ \delta_i(t) &= h_i(x(t)) - h_i(\hat{x}(t)) \end{aligned} \quad (5.71)$$

De (5.61) et (5.71), nous avons :

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1 \quad (5.72)$$

ce qui implique :

$$\Sigma_A^T(t) \Sigma_A(t) \leq I, \quad \Sigma_B^T(t) \Sigma_B(t) \leq I \quad (5.73)$$

Se basant sur (5.69) et (5.70), le système (5.68) est représenté sous la forme du système incertain suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t))(A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t) \quad (5.74)$$

Des équations (5.74), (5.67) et (5.64), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t))((A_i - L_i C)e_x(t) + \Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)u(t)) \quad (5.75)$$

Synthèse de la commande PDC par retour d'état

L'objectif est à présent de trouver les gains du contrôleur K_i (5.65) et ceux de l'observateur L_i (5.64) assurant la stabilité asymptotique du modèle en boucle fermée (5.77) et garantissant une performance de poursuite \mathcal{L}_2 (5.66).

Pour cela, l'approche descripteur est considérée. La commande (5.65) est alors ré-écrite comme suit :

$$0 \cdot \dot{u}(t) = - \sum_{j=1}^n h_j(\hat{x}(t)) K_j (x_r(t) - \hat{x}(t)) - u(t) \quad (5.76)$$

A l'aide des définitions (5.63), (5.75), (5.62) et (5.76), définissons le vecteur d'état augmenté

$$x_a(t) = (e_r^T(t) \quad e_x^T(t) \quad x_r^T(t) \quad u^T(t))^T$$

dont la dynamique s'écrit :

$$E\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t))(\bar{A}_i(t)x_a(t) + \bar{B}u_r(t)) \quad (5.77)$$

avec

$$\bar{A}_i(t) = \begin{pmatrix} A_i + \Delta A(t) & 0 & A_i - A_r + \Delta A(t) & B_i + \Delta B(t) \\ \Delta A(t) & A_i - L_i C & \Delta A(t) & \Delta B(t) \\ 0 & 0 & A_r & 0 \\ K_i & -K_i & 0 & -I_{n_u} \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

$$E = \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} -B_r \\ 0 \\ B_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

A noter que pour le vecteur augmenté $x_a(t)$, le critère de suivi (5.66) devient :

$$\int_0^{t_f} x_a^T(t) Q_a x_a(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} u_r^T(t) u_r(t) dt \quad (5.79)$$

avec $Q_a = \text{diag}(Q, 0, 0, 0)$. La solution du problème de suivi (calcul des gains K_i et L_i sous la contrainte (5.79)) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 13. *Il existe un contrôleur PDC par retour d'état (5.65) et un observateur (5.64) pour le système non linéaire décrit sous forme d'un modèle T-S   VDNM (5.59) garantissant la poursuite avec l'atténuation \mathcal{L}_2 (5.66) pour une valeur donnée de η^2 , s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, $P_3 = P_3^T > 0$, $P_4 > 0$, F_i , R_i , des scalaires positifs λ_1^1 , λ_3^1 , λ_5^1 , λ_1^2 , λ_3^2 et λ_4^2 satisfaisant les LMIs (5.80) pour $i = 1, \dots, n$,*

$$\begin{pmatrix} M_i^1 & 0 & P_1(A_i - A_r) & R_i^T + P_1 B_i & -P_1 B_r & P_1 A & P_1 A & P_1 B & 0 & 0 & 0 \\ * & M_i^2 & 0 & -R_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 A & P_2 A & P_2 B \\ * & * & M^3 & 0 & P_3 B_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & M^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\eta^2 I_{n_u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda_1^1 I_{n_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_3^1 I_{n_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_4^1 I_{n_u} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_1^2 I_{n_x} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_3^2 I_{n_x} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_1^2 I_{n_u} \end{pmatrix} < 0 \quad (5.80)$$

avec

$$\begin{aligned} M_i^1 &= A_i^T P_1 + P_1 A_i + Q + (\lambda_1^1 + \lambda_1^2) E_A^T E_A \\ M_i^2 &= P_2 A_i + A_i^T P_2 - C^T F_i^T - F_i C \\ M^3 &= A_r^T P_3 + P_3 A_r + (\lambda_3^1 + \lambda_3^2) E_A^T E_A \\ M^4 &= -P_4 - P_4^T + (\lambda_4^1 + \lambda_4^2) E_B^T E_B \end{aligned}$$

Les gains de l'observateur et du contrôleur sont donnés par (pour $i = 1, \dots, n$) :

$$\begin{aligned} K_i &= (P_4^T)^{-1} R_i \\ L_i &= P_2^{-1} F_i \end{aligned} \quad (5.81)$$

Remarque 15. La solution du problème de poursuite proposée est basée sur une atténuation \mathcal{L}_2 avec une valeur η^2 fixée. On peut également assurer la poursuite et rechercher la plus petite valeur admissible de η en résolvant le problème d'optimisation (5.82)

$$\min_{\{P_1, P_2, P_3, P_4, F_i, R_i, \lambda_1^1, \lambda_3^1, \lambda_5^1, \lambda_1^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2\}} \bar{\eta} \quad (5.82)$$

telle que la condition (5.80) soit garantie avec $\bar{\eta} = \eta^2$.

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V(x_a(t)) = x_a^T(t) E^T P x_a(t) \quad (5.83)$$

avec la condition :

$$E^T P = P^T E \geq 0 \quad (5.84)$$

Compte tenu de la structure de E (5.78) et de la contrainte (5.84), la matrice P est choisie sous forme bloc diagonale $P = \text{diag}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ avec :

$$P_1 = P_1^T > 0, P_2 = P_2^T > 0, P_3 = P_3^T > 0$$

En utilisant (5.77), la dérivée par rapport au temps de $V(x_a(t))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_a(t)) &= \dot{x}_a^T(t) E^T P x_a(t) + x_a^T(t) P^T E \dot{x}_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t)) (x_a^T(t) (\bar{A}_i^T(t) P + P^T \bar{A}_i(t)) x_a(t) + x_a^T(t) P^T \bar{B} u_r(t) + u_r^T(t) \bar{B}^T P x_a(t)) \end{aligned} \quad (5.85)$$

Pour assurer la stabilité du système en boucle fermée (5.77) ainsi que l'atténuation \mathcal{L}_2 (5.79), avec la fonction de Lyapunov (5.83), la condition à vérifier est :

$$\dot{V}(x_a(t)) + x_a^T(t) Q_a x_a(t) - \eta^2 u_r^T(t) u_r(t) < 0 \quad (5.86)$$

Grâce aux relations (5.85), (5.78) et (5.79), (5.86) se ré-écrit :

$$\sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t)) \begin{pmatrix} x_a^T(t) & u_r^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_i^T(t) P + P^T \bar{A}_i(t) + Q_a & P^T \bar{B} \\ \bar{B}^T P & -\eta^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a(t) \\ u_r(t) \end{pmatrix} < 0 \quad (5.87)$$

qui est vérifiée si :

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_i^T(t) P + P^T \bar{A}_i(t) + Q_a & P^T \bar{B} \\ \bar{B}^T P & -\eta^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.88)$$

Pour résoudre l'inégalité matricielle (5.88), une solution consiste à faire apparaître deux termes distincts : un terme constant et un terme dépendant du temps. De plus, en considérant les définitions (5.69) et (5.70) avec la propriété (5.73), le terme variant dans le temps va être borné.

Des définitions (5.78) reportées dans (5.88) et compte tenu de la structure de la matrice P , la BMI (inégalité matricielle bilinéaire) à résoudre par rapport à P , R_i et F_i est donc :

$$\bar{A}_i + Q(t) + Q^T(t) < 0 \quad (5.89)$$

avec les définitions :

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \bar{M}_i^1 & 0 & P_1(A_i - A_r) & R_i^T + P_1 B_i & -P_1 B_r \\ 0 & \bar{M}_i^2 & 0 & -R_i^T & 0 \\ * & * & \bar{M}_i^3 & 0 & P_3 B_r \\ * & * & * & -P_4 - P_4^T & 0 \\ * & * & * & * & -\eta^2 I_{n_u} \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_i^1 &= A_i^T P_1 + P_1 A_i + Q \\
\bar{M}_i^2 &= P_2 A_i + A_i^T P_2 - C^T F_i^T - F_i C \\
\bar{M}_i^3 &= A_r^T P_3 + P_3 A_r \\
R_i &= P_4^T K_i \\
F_i &= P_2 L_i
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} P_1 \Delta A(t) & 0 & P_1 \Delta A(t) & P_1 \Delta B(t) & 0 \\ P_2 \Delta A(t) & 0 & P_2 \Delta A(t) & P_2 \Delta B(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.92}$$

En utilisant la structure des termes variants dans le temps définie en (5.69) et (5.70), $Q(t)$ se ré-écrit :

$$Q(t) = X_A \Sigma_A(t) Y_A^T + X_B \Sigma_B(t) Y_B^T \tag{5.93}$$

avec

$$X_A = \begin{pmatrix} P_1 \mathcal{A} \\ P_2 \mathcal{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_B = \begin{pmatrix} P_1 \mathcal{B} \\ P_2 \mathcal{B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_A = \begin{pmatrix} E_A^T \\ 0 \\ E_A^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_B^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant le lemme 5 du "Carré matriciel", le terme $Q(t) + Q^T(t)$ peut être borné comme suit :

$$Q(t) + Q^T(t) < \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.94}$$

avec

$$\begin{aligned}
Q_1 &= (\lambda_1^1 + \lambda_1^2) E_A^T E_A + ((\lambda_1^1)^{-1} + (\lambda_3^1)^{-1}) P_1 \mathcal{A} \mathcal{A}^T P_1 + (\lambda_4^1)^{-1} P_1 \mathcal{B} \mathcal{B}^T P_1 \\
Q_2 &= ((\lambda_1^2)^{-1} + (\lambda_3^2)^{-1}) P_2 \mathcal{A} \mathcal{A}^T P_2 + (\lambda_4^2)^{-1} P_2 \mathcal{B} \mathcal{B}^T P_2 \\
Q_3 &= (\lambda_3^1 + \lambda_3^2) E_A^T E_A \\
Q_4 &= (\lambda_4^1 + \lambda_4^2) E_B^T E_B
\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant (5.90) et (5.94) dans (5.89) et en appliquant un complément de Schur, la condition (5.86) assurant la poursuite avec une atténuation \mathcal{L}_2 et une estimation des états du système est impliquée par la LMI (5.80), ce qui achève la preuve.

Simulation numérique

La commande proposée ainsi que la synthèse de l'observateur assurant la poursuite du modèle de référence est illustrée par l'exemple d'un système non linéaire T-S (5.59) avec $n = 2$ et

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.2 & -1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0)
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Les fonctions d'activation dépendent de l'état du système et sont définies par :

$$h_1(x(t)) = \frac{2 - \sin(x_1(t)) - \tanh(x_2(t))}{4}, \quad h_2(x(t)) = 1 - h_1(x(t)) \quad (5.96)$$

Le modèle de référence (5.62) est défini par les matrices suivantes :

$$A_r = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

L'observateur et le contrôleur sont respectivement définis par les équations (5.64) et (5.65), leurs gains sont calculés en résolvant les LMIs (5.80). Les résultats obtenus sont les suivants :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 20.6280 & -381.3725 & -47.2350 \\ 10.0786 & -90.8162 & -137.3001 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 13.4233 & -320.8239 & -858.9901 \\ -56.9571 & 863.5566 & 66.2848 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} -0.6914 & -3.2299 & 3.1567 \end{pmatrix}^T, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -0.6954 & -0.1777 & -0.8158 \end{pmatrix}^T \quad (5.98)$$

Les figures 5.15 et 5.16 représentent les états du système et ceux de l'observateur respectivement notés x et \hat{x} , ainsi que les états du système et ceux du modèle de référence respectivement notés x et x_r . La figure 5.17 représente l'entrée du système et du modèle de référence respectivement notées u_r et u .

Les trajectoires d'état ont été obtenues avec la condition initiale $x(0) = (0.1 \ 0.1 \ 0)^T$ pour le

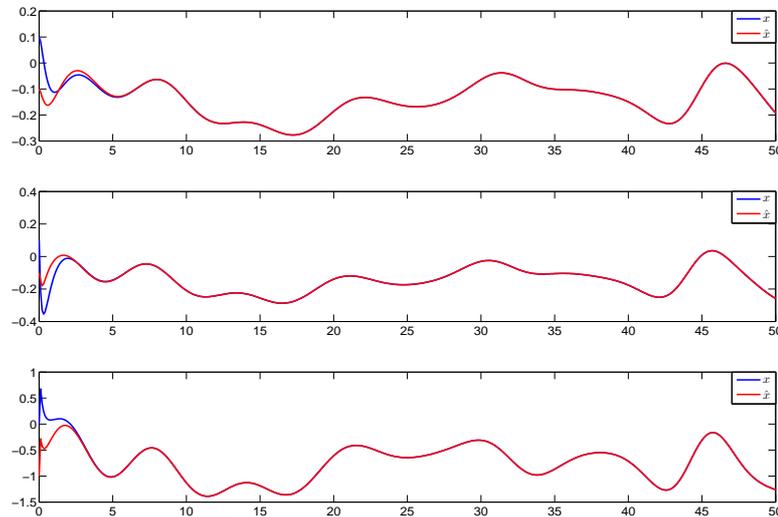


Figure 5.15 – Etats du système et de l'observateur

système, $\hat{x}(0) = (-0.1 \ -0.1 \ -1)^T$ pour l'observateur et $x_r(0) = (0.2 \ 0 \ 0)^T$ pour le modèle de référence. La poursuite est assurée en fixant $Q = 10^{-3}I_3$ et en optimisant le niveau d'atténuation η^2 . Les figures obtenues montrent bien que la trajectoire d'état du système suit celle du modèle de référence avec une bonne précision bien que le système à contrôler soit à VDNM.

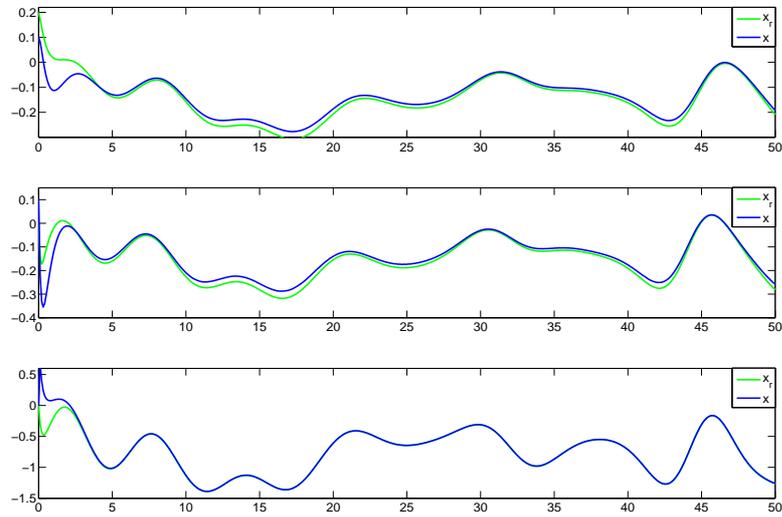


Figure 5.16 – Etats du système et du modèle de référence

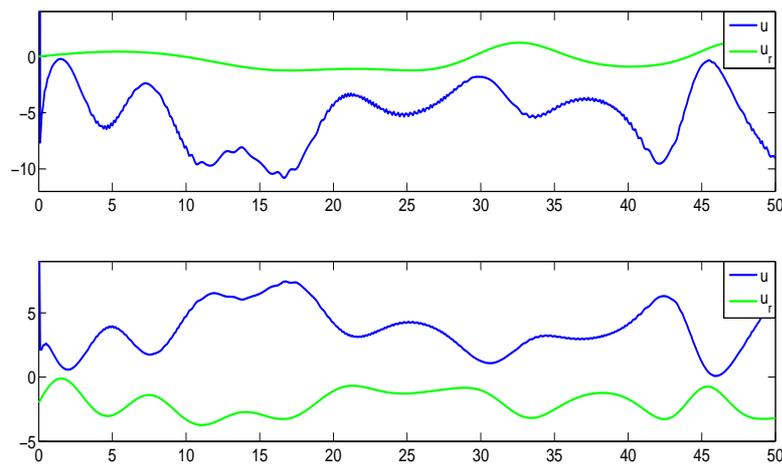


Figure 5.17 – Entrées du système et du modèle de référence

Présence de défauts capteur

Afin d'étendre les performances de l'approche proposée, nous considérons le même système que précédemment, mais en présence de défaut additif de capteur. Le système est alors décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gf(t) \end{cases} \quad (5.99)$$

où $f(t)$ est le défaut de capteur, les matrices A_i, B_i et C sont les mêmes que précédemment définies en (5.59) et où la matrice G indique la direction d'influence des défauts.

Le modèle de référence ainsi que l'observateur sont donnés par (5.62) et (5.64). La commande avec une structure dynamique virtuelle est toujours prise sous la forme :

$$0.\dot{u}(t) = - \sum_{j=1}^n h_j(\hat{x}(t))K_j(x_r(t) - \hat{x}(t)) - u(t) \quad (5.100)$$

Considérons à présent le vecteur augmenté $x_a(t)$

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} e_r^T(t) & e_x^T(t) & x_r^T(t) & u^T(t) \end{pmatrix}^T \quad (5.101)$$

et l'entrée augmentée $u_a(t)$, qui prend en compte le défaut $f(t)$

$$u_a(t) = \begin{pmatrix} u_r^T(t) & f^T(t) \end{pmatrix}^T \quad (5.102)$$

Se basant sur l'approche descripteur, nous avons :

$$E\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^n h_i(\hat{x}(t))(\bar{A}_i(t)x_a(t) + \bar{B}_i u_a(t)) \quad (5.103)$$

avec

$$\bar{A}_i(t) = \begin{pmatrix} A_i + \Delta A(t) & 0 & A_i - A_r + \Delta A(t) & B_i + \Delta B(t) \\ \Delta A(t) & A_i - L_i C & \Delta A(t) & \Delta B(t) \\ 0 & 0 & A_r & 0 \\ K_i & -K_i & 0 & -I_{n_u} \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

$$E = \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{B}_i = \begin{pmatrix} -B_r & 0 \\ 0 & -L_i G \\ B_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces équations généralisent celles obtenues en (5.78) afin de prendre en compte la présence de défauts de capteurs. L'objectif est à présent de synthétiser une loi de commande tolérante aux défauts et atténuant leurs effets sur l'estimation d'état et la poursuite, telle que l'état du système soit aussi proche que possible de l'état de référence. La synthèse de l'observateur et du contrôleur est donnée par le théorème suivant.

Théorème 14. *Il existe un contrôleur de type PDC par retour d'état (5.100) muni d'un observateur non linéaire (5.64), appliqué à un système non linéaire représenté sous forme d'un modèle T-S à VDNM (5.99) et affecté par un défaut de capteur $f(t)$, garantissant une atténuation \mathcal{L}_2 (5.66) de valeur η^2 , s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, $P_3 = P_3^T > 0$, $P_4 > 0$, F_i , R_i , des scalaires positifs λ_1^1 , λ_3^1 , λ_4^1 , λ_1^2 , λ_3^2 et λ_1^2 satisfaisant les LMIs (5.105) pour $i = 1, \dots, n$*

$$\left(\begin{array}{c|c} C_i^1 & C_2 \\ * & C_3 \end{array} \right) < 0 \quad (5.105)$$

où les matrices C_i^1 , C_2 et C_3 sont définies par :

$$C_i^1 = \begin{pmatrix} M_i^1 & 0 & P_1(A_i - A_r) & R_i^T + P_1 B_i & -P_1 B_r & 0 \\ * & M_i^2 & 0 & -R_i^T & 0 & -F_i G \\ * & * & M^3 & 0 & P_3 B_r & 0 \\ * & * & * & M^4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\eta^2 I_{n_u} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\eta^2 I_{n_y} \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} P_1 \mathcal{A} & P_1 \mathcal{A} & P_1 \mathcal{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 \mathcal{A} & P_2 \mathcal{A} & P_2 \mathcal{B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

$$C_3 = \text{diag}(-\lambda_1^1 I_{n_x}, -\lambda_3^1 I_{n_x}, -\lambda_4^1 I_{n_u}, -\lambda_1^2 I_{n_x}, -\lambda_3^2 I_{n_x}, -\lambda_1^2 I_{n_u}) \quad (5.108)$$

avec

$$\begin{aligned} M_i^1 &= A_i^T P_1 + P_1 A_i + Q + (\lambda_1^1 + \lambda_1^2) E_A^T E_A \\ M_i^2 &= P_2 A_i + A_i^T P_2 - C^T F_i^T - F_i C \\ M^3 &= A_r^T P_3 + P_3 A_r + (\lambda_3^1 + \lambda_3^2) E_A^T E_A \\ M^4 &= -P_4 - P_4^T + (\lambda_4^1 + \lambda_4^2) E_B^T E_B \end{aligned}$$

Les gains du contrôleur et de l'observateur sont donnés par (pour $i = 1, \dots, n$) :

$$\begin{aligned} K_i &= (P_4^T)^{-1} R_i \\ L_i &= P_2^{-1} F_i \end{aligned} \quad (5.109)$$

Remarque 16. On peut formuler la même remarque que pour le théorème précédent à propos de l'optimisation de η^2 .

Démonstration. La comparaison des LMIs (5.80) et (5.105) met en évidence la façon dont le défaut de capteur intervient. La différence avec le résultat précédent étant la définition de la matrice \bar{B}_i . La démonstration du théorème 14, identique à celle du théorème 13, est donc omise.

Simulation numérique

Considérons à présent le même exemple que précédemment, avec un défaut capteur (bruit de mesure issu d'une distribution normale à moyenne nulle et de variance de l'ordre de 20% de l'amplitude de la sortie) affectant le système (5.95) avec $G = 1$.

En appliquant le théorème 14, les gains d'observateur et du contrôleur sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{pmatrix} 6.5964 & -661.8742 & -153.4759 \\ 50.6975 & -183.0979 & -236.4476 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -31.6748 & -61.0740 & -1338.78 \\ -41.4662 & 1519.11 & 214.5846 \end{pmatrix} \\ L_1 &= \begin{pmatrix} -0.3159 & -0.9728 & 1.2097 \end{pmatrix}^T, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -0.3331 & 0.2301 & -1.0032 \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (5.110)$$

Afin de montrer l'efficacité de la commande FTC proposée, les gains de l'observateur (5.64) et ceux du contrôleur (5.65) ont été d'abord calculés sans prendre en compte le défaut capteur (théorème 13) alors que le défaut intervient dans la mesure $y(t)$. Les résultats obtenus sont donnés à la figure 5.18.

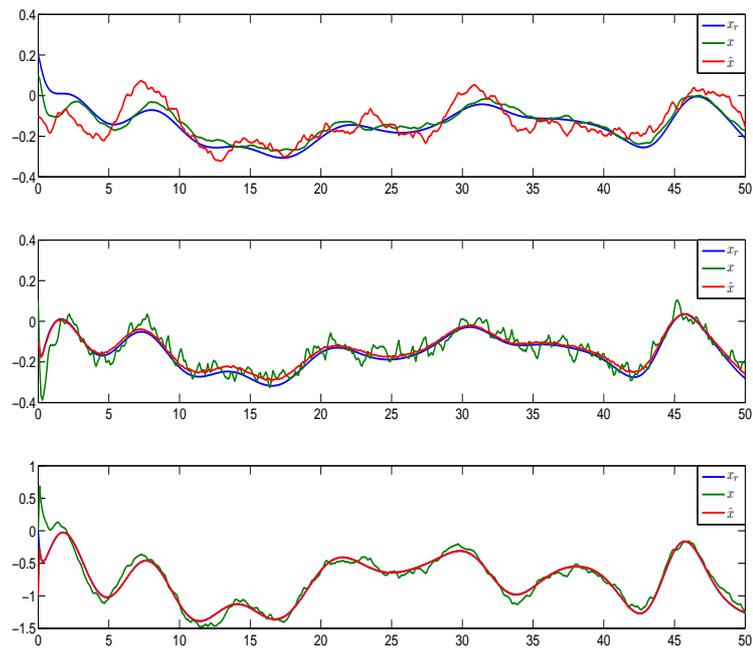


Figure 5.18 – Etats du système, de l'observateur et du modèle de référence

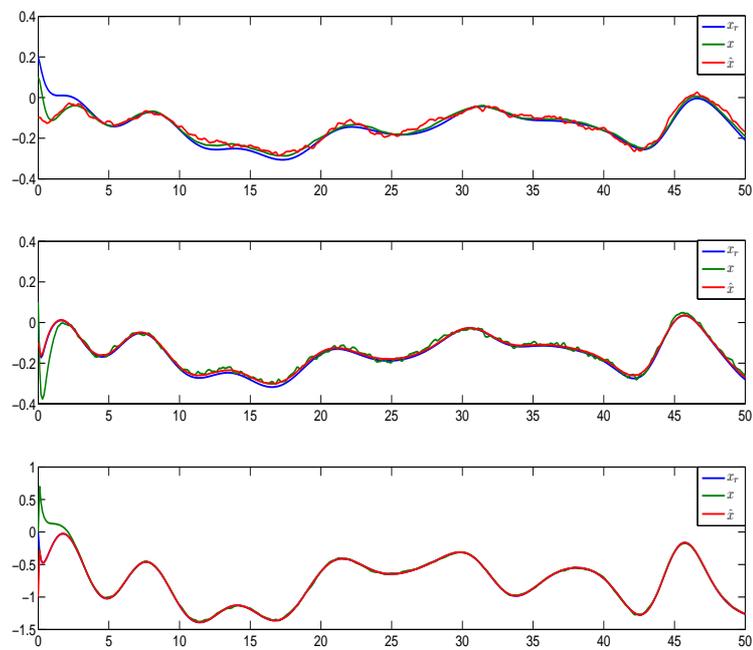


Figure 5.19 – Etats du système, de l'observateur et du modèle de référence

Les états du système, de l'observateur et du modèle de référence obtenus grâce au théorème 14 avec prise en compte du défaut dans la procédure de synthèse du contrôle sont représentés à la figure 5.19.

Il apparaît donc clairement une amélioration de la poursuite et de l'estimation dans le second cas. En effet, si le défaut n'est pas pris en compte dans la synthèse du régulateur et de l'observateur, cela affecte clairement les performances de poursuite. Alors que dans le second cas, même si les mesures sont en défaut, la poursuite et l'estimation des états sont tout à fait satisfaisantes.

Pour l'exemple considéré, afin de quantifier les améliorations constatées sur l'erreur de poursuite, les critères suivants sont considérés :

$$\Phi_i = \sum_t |x_{ri}(t) - \hat{x}_i(t)| \quad (5.111)$$

pour les états estimés obtenus du théorème 14 (figure 5.19) et

$$\bar{\Phi}_i = \sum_t (x_{ri}(t) - \hat{x}_i(t)) \quad (5.112)$$

pour les résultats représentés à la figure 5.18 et obtenus avec le théorème 13.

Le critère de comparaison τ_i pour chaque état est alors défini par :

$$\tau_i = \frac{\bar{\Phi}_i - \Phi_i}{\bar{\Phi}_i} 100\% \quad (5.113)$$

Pour l'exemple précédent, nous avons obtenu $\tau_1 = 33.97\%$, $\tau_2 = 58.05\%$ et $\tau_3 = 28.62\%$ respectivement pour chaque état.

Ainsi, compte tenu des résultats présentés, nous constatons l'efficacité de la commande proposée dans cette section pour les systèmes non linéaires représentés sous forme de modèles T-S assurant la poursuite de modèle de référence malgré la présence de défaut.

5.6.2 Poursuite de modèle de référence sous contrainte de saturation : cas discret

Dans cette section, nous nous intéressons à l'établissement de lois de commande assurant la poursuite de modèle de référence en présence de saturation d'actionneurs. La solution retenue est une extension de la commande prédictive pour les modèles non linéaires T-S introduite précédemment.

Chaque entrée de commande présente une saturation (de bornes $u_{min,i}$ et $u_{max,i}$). L'objectif est de montrer que l'aspect prédictif de la commande permet de mieux compenser l'effet de la saturation. La prédiction introduisant un effet d'anticipation, nous montrerons par des exemples que la saturation est mieux prise en compte, ce qui permet ainsi d'améliorer la poursuite de trajectoire.

La stratégie adoptée est la suivante :

1. Synthèse sur un horizon de taille p de la commande nominale assurant la poursuite sans tenir compte des contraintes de saturation (équation (5.54) ou l'algorithme itératif si les fonctions d'activation dépendent de l'entrée de commande)
2. Détection et localisation des composantes du vecteur de commande dépassant les limites de saturation au nombre de n_{cm} pour la limite supérieure et n_{cm} pour la limite inférieure. Construction des matrices de contrainte notées $F_1 \in \mathbb{R}^{n_u(p+1) \times n_{cm}}$ et $F_2 \in \mathbb{R}^{n_u(p+1) \times n_{cm}}$ localisant les composantes à saturer.

Ces dernières sont définies comme suit (pour $i = 1, \dots, n_u$ et $j = 0, \dots, p$) :

$$F_{1,i+jn_u} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{i,k+j} \geq u_{max,i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.114)$$

$$F_{2,i+jn_u} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{i,k+j} \leq u_{min,i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Mise à jour de la commande compte tenu des contraintes $F_{1,i+jn_u}$ et $F_{2,i+jn_u}$, le critère à minimiser étant maintenant pris sous la forme :

$$\Phi = \|x_{r,k+p+1} - \mathcal{A}_{k+p}x_k - \mathcal{B}_{k+p}\bar{u}_{k+p}\|_W^2 + \lambda^T (F^T \bar{u}_{k+p} - \bar{U}) \quad (5.115)$$

où les matrices \mathcal{A}_{k+p} , \mathcal{B}_{k+p} et \bar{u}_{k+p} ont déjà été définies en (5.51),

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}, \bar{U} = \begin{bmatrix} U_{max} \\ U_{min} \end{bmatrix},$$

$U_{max} \in \mathbb{R}^{n_{cm} \times 1}$ est le vecteur dont chaque composante est égale à u_{max}

$U_{min} \in \mathbb{R}^{n_{cm} \times 1}$ est le vecteur dont chaque composante est égale à u_{min}

W est une matrice de pondération

et λ le vecteur des paramètres de Lagrange associé aux contraintes.

4. Analyse de l'amplitude de la nouvelle commande et reprise à l'étape (3) si des commandes dépassent le niveau de saturation.

Comme précédemment, seule la première composante u_k de \bar{u}_{k+p} est appliquée au système et la procédure d'optimisation est reprise après translation d'un pas de l'horizon d'optimisation.

Remarque 17. *Le nombre de vérifications à faire sur l'amplitude de la commande dépend des objectifs de poursuite à atteindre, du système et du niveau de saturation considéré.*

En dérivant Φ , l'équation d'optimalité pour \bar{u}_{k+p} et λ s'explique :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{k+p}^T W (\mathcal{B}_{k+p} \bar{u}_{k+p} + \mathcal{A}_{k+p} x_k - x_{r,k+p+1}) + F \lambda = 0 \\ F^T \bar{u}_{k+p} - \bar{U} = 0 \end{cases} \quad (5.116)$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} \bar{u}_{k+p} = (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} \times ((\mathcal{B}_{k+p}^T W (x_{r,k+p+1} - \mathcal{A}_{k+p} x_k) - F \lambda) \\ \lambda = (F^T (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} F)^{-1} (F^T (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} \times \mathcal{B}_{k+p}^T W (x_{r,k+p+1} - \mathcal{A}_{k+p} x_k) - \bar{U}) \end{cases} \quad (5.117)$$

Rappelons qu'en l'absence de saturation, l'entrée de commande est donnée par :

$$\bar{u}_{k+p}^0 = (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} \mathcal{B}_{k+p}^T W (x_{r,k+p+1} - \mathcal{A}_{k+p} x_k) \quad (5.118)$$

ce qui simplifie (5.117) sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{u}_{k+p} = \bar{u}^0 - (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} F \lambda \\ \lambda = (F^T (\mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p})^{-1} F)^{-1} (F^T \bar{u}_{k+p}^0 - \bar{U}) \end{cases} \quad (5.119)$$

dont la solution explicite s'exprime :

$$\begin{cases} \bar{u}_{k+p} = (I - Q_{k+p}^{-1} F (F^T Q_{k+p}^{-1} F)^{-1} F^T) \bar{u}_{k+p}^0 + Q_{k+p}^{-1} F (F^T Q_{k+p}^{-1} F)^{-1} \bar{U} \\ Q_{k+p} = \mathcal{B}_{k+p}^T W \mathcal{B}_{k+p} \end{cases} \quad (5.120)$$

Remarque 18. *Comme pour la commande prédictive, si les fonctions d'activation dépendent de l'entrée, les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} dépendent également de l'entrée et la loi de commande (5.120) est alors calculée de manière itérative.*

Exemple illustratif

Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} A_r &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, & B_r &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}, & A_1 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.17 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.23 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Les fonctions d'activation dépendent de l'entrée et sont données par :

$$\mu_{1,k} = \frac{1 + 2 \tanh(u_k)}{2}, \quad \mu_{2,k} = 1 - \mu_{1,k} \quad (5.122)$$

La saturation est caractérisée par les bornes $u_{min} = -1$ et $u_{max} = 0.5$. Les simulations sont présentées pour différentes tailles de l'horizon d'optimisation afin de souligner l'importance de ce paramètre dans la qualité de poursuite du modèle de référence.

Définissons les deux critères de performance pour chaque composante i des états $\phi_{s,i}$ et $\phi_{sc,i}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_{s,i} &= \sum_k |x_{r,k,i} - x_{s,k,i}| \\ \phi_{sc,i} &= \sum_k |x_{r,k,i} - x_{sc,k,i}| \end{aligned} \quad (5.123)$$

Le critère $\phi_{s,i}$ correspond au cas nominal saturé (sans prendre en compte la saturation dans la synthèse de la commande), $x_{r,k,i}$ est l'état du modèle de référence et $x_{s,k,i}$ est l'état obtenu en appliquant la commande prédictive (5.54) avec saturation subie (la saturation n'est pas prise en compte dans la synthèse de la commande). Le second critère $\phi_{sc,i}$ concerne la loi de commande prenant en compte, dans son élaboration, la contrainte de saturation (i.e. l'approche proposée (5.120)), $x_{sc,k,i}$ est l'état correspondant. Le critère de comparaison des performances des deux types de commande (avec et sans prise en compte de la saturation dans sa synthèse) est donné par :

$$\tau_i = 100 \frac{\phi_{s,i} - \phi_{sc,i}}{\phi_{s,i}} \quad (5.124)$$

Pour l'exemple considéré, les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.3. On observe que la taille d'horizon $N = 3$ assure les meilleurs résultats en poursuite.

La figure 5.20 représente les états du système pour le cas nominal (poursuite sans saturation x_n), le

	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
τ_1	28.8%	36.4%	29.5%	24.6%
τ_2	16.8%	21.2%	16.0%	13.7%

Tableau 5.3 – Comparaison des performances en poursuite pour différentes tailles d'horizon

cas nominal saturé x_s (commande calculée sans prendre en compte la saturation, la saturation étant ensuite appliquée à cette commande) et ceux de l'approche proposée (commande synthétisée en prenant en

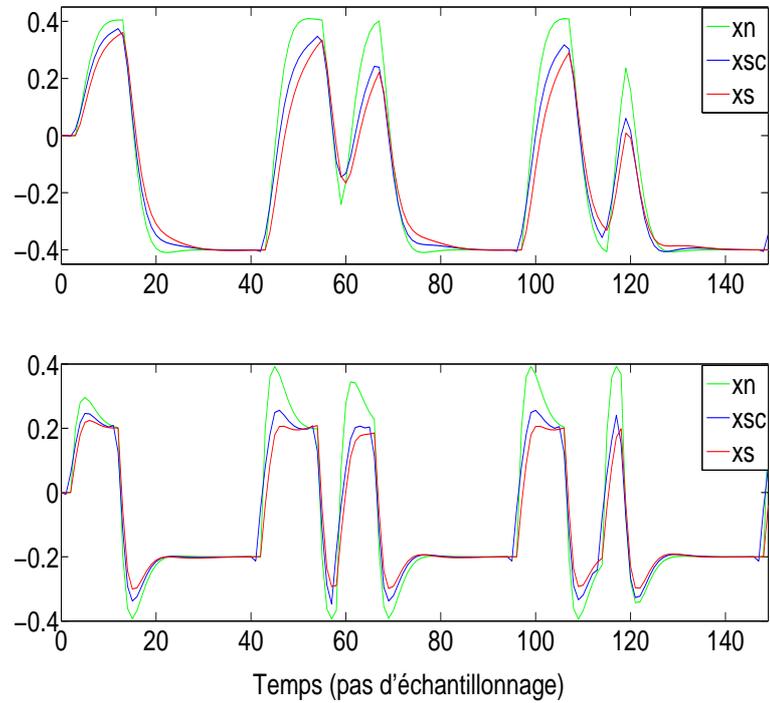


Figure 5.20 – Etats du système pour le cas nominal avec commande non saturée, nominal avec saturation subie et saturation prise en compte dans le calcul de la commande

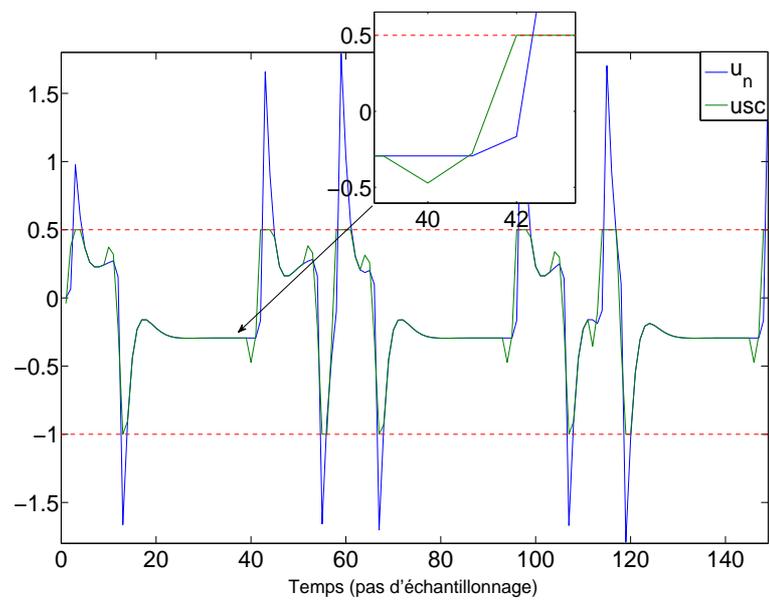


Figure 5.21 – Commandes avec et sans prise en compte de la saturation

compte la saturation) x_{sc} . La figure 5.21 représente les entrées de commande avec et sans prise en compte de la saturation.

Les résultats obtenus montrent que l'objectif de poursuite est amélioré grâce à l'action de prédiction qui joue un rôle d'anticipation avant l'apparition de la saturation et de compensation après (36% d'amélioration pour le premier état et 21% pour le second).

5.6.3 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre porte sur la commande assurant la poursuite de modèle de référence pour les systèmes non linéaires représentés par des modèles T-S. Après un bref état de l'art sur les méthodes utilisées dans les contextes linéaire et non linéaire, le cas de la structure T-S a été introduit. Une généralisation des méthodes existantes a été proposée en mettant l'accent sur les conditions structurelles à respecter pour assurer une poursuite parfaite d'un modèle de référence.

La commande prédictive sur un horizon de temps fini a été développée en précisant l'influence de la taille de l'horizon d'optimisation sur la qualité de la poursuite du modèle de référence.

Finalement, la commande tolérante aux défauts a été développée dans deux cas :

- les systèmes continus soumis à des défauts de capteur avec commande par atténuation \mathcal{L}_2 de l'effet des défauts de capteurs sur l'estimation d'état et la poursuite du modèle de référence.
- les systèmes discrets soumis à des contraintes de saturation de commande.

Pour chaque cas, des exemples ont été présentés pour illustrer l'apport des approches proposées. Ces dernières se sont avérées efficaces en termes de performance en poursuite et simple d'implémentation en utilisant des algorithmes classiques d'optimisation LMI ou itératifs.

6

Perspectives et conclusions

Sommaire

6.1 Perspectives	127
6.1.1 Estimation paramétrique	127
6.1.2 Saturation T-S de la commande	128
6.1.3 Poursuite de modèle de référence	132
6.2 Conclusions	133

6.1 Perspectives

A l'issue de ce travail, même si de nombreux résultats ont été présentés, des pistes restent ouvertes et peuvent être explorées afin d'améliorer les approches proposées dans ce manuscrit concernant l'estimation de défauts et la synthèse de commandes tolérantes à ces défauts. Dans ce qui suit, quelques directions de recherche sont formalisées en matière d'estimation paramétrique, d'analyse de saturation de commande et de poursuite de modèle de référence.

6.1.1 Estimation paramétrique

Résumé. *Une nouvelle approche basée sur la ré-écriture par secteurs non linéaires et la décomposition polytopique a été proposée pour assurer l'estimation d'état et de paramètres de systèmes non linéaires variants dans le temps et représentés sous forme de modèles T-S. Cette représentation s'est révélée efficace pour la détection et l'estimation de défauts multiplicatifs affectant aussi bien le système, ses actionneurs, que ses capteurs.*

Dans la continuité du travail sur l'estimation paramétrique, nous cherchons à présent à améliorer les résultats obtenus, notamment concernant le système non linéaire considéré. En effet, dans l'approche proposée, le système non linéaire est initialement considéré sous forme de modèle T-S à paramètres variants, ceci n'est bien évidemment pas le cas en réalité. En effet, comme nous l'avons constaté dans l'exemple de la station d'épuration présentée, le modèle du système de départ se présente sous la forme

d'équations d'état non linéaires ; c'est à partir de cette représentation qu'il faudrait considérer le problème d'estimation.

Le but de l'extension envisagée est de présenter une généralisation de la méthode proposée, en partant d'un système non linéaire de structure quelconque. Considérons à cet effet le système non linéaire à paramètres variants dans le temps représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \theta(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (6.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ l'entrée de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ la sortie. $\theta(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les paramètres variant dans le temps, $f(x(\cdot), \theta(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $g(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^m$ des fonctions non linéaires.

Sous l'hypothèse que $f(x(t), \theta(t), u(t))$ et $g(x(t), u(t))$ soient continues et bornées, le système (6.1) peut être représenté sous la forme quasi-LPV (6.2) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\phi(x(t), u(t))) + A_\theta(\psi(x(t), u(t), \theta(t))) & B(\phi(x(t), u(t))) + B_\theta(\psi(x(t), u(t), \theta(t))) \\ C(\phi(x(t), u(t))) & D(\phi(x(t), u(t))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} A(\phi(x(t), u(t))), A_\theta(\psi(x(t), u(t), \theta(t))) &\in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, B(\phi(x(t), u(t))), B_\theta(\psi(x(t), u(t), \theta(t))) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u} \\ C(\phi(x(t), u(t))) &\in \mathbb{R}^{m \times n_x} \quad \text{et} \quad D(\phi(x(t), u(t))) \in \mathbb{R}^{m \times n_u} \end{aligned}$$

où $\phi(x(t), u(t)) \in C^1(\mathbb{R}^{n_x+n_u}, \mathbb{R}^{n_{x1}+n_{u1}})$ et $\psi(x(t), u(t)) \in C^1(\mathbb{R}^{n_x+n_u+n}, \mathbb{R}^{n_{x1}+n_{u1}+n})$ avec $n_{x1} + n_{u1} < n_x + n_u$ contiennent une partie ou la totalité des composantes des vecteurs d'état et d'entrée.

En supposant que les matrices $A_\theta(\psi(x, u, \theta))$ et $B_\theta(\psi(x, u, \theta))$ sont affines en θ , elles peuvent alors être mises sous la forme :

$$\begin{cases} A_\theta(\psi(x, u, \theta)) = \sum_{i=1}^n \theta_i(t) \bar{A}_i(\psi(x(t), u(t), \theta(t))) \\ B_\theta(\psi(x, u, \theta)) = \sum_{i=1}^n \theta_i(t) \bar{B}_i(\psi(x(t), u(t), \theta(t))) \end{cases} \quad (6.3)$$

L'idée à développer serait de ré-écrire le système quasi-LPV (6.2) sous forme T-S en appliquant une succession de transformations polytopiques convexes grâce à la SNT. Ainsi, nous devrions être capables de mettre, de façon systématique, le système non linéaire à paramètres variants dans le temps sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \mu_i(z(t)) \tilde{\mu}_j^k(\theta_j(t)) (\mathcal{A}_{ij}^k x(t) + \mathcal{B}_{ij}^k u(t)) \quad (6.4)$$

en rejetant les paramètres $\theta_j(t)$ ainsi que les non-linéarités dans les fonctions d'activation à définir.

6.1.2 Saturation T-S de la commande

Résumé. Une représentation de la saturation sous forme de modèle de Takagi-Sugeno (T-S) à trois sous-modèles affines en $u(t)$ est proposée. Cette nouvelle écriture permet d'intégrer les contraintes de saturation d'un signal dans la synthèse d'une loi de commande et de ce fait, d'assurer non seulement la stabilité du système bouclé, mais également de calculer les gains du contrôleur en fonction des limites de saturation.

Dans la continuité du travail sur la synthèse de commande sous contrainte de saturation présenté précédemment, nous cherchons à améliorer les résultats obtenus, notamment concernant le nombre de conditions LMIs à résoudre, le recalage à zéro de l'état du système et la convergence vers une boule centrée à l'origine. Le but de l'amélioration envisagée est de diminuer le volume calculatoire pour les systèmes de grande dimension et d'assurer une convergence vers ou autour de zéro de l'état du système. Pour cela, une modification de la précédente représentation T-S de la saturation peut être envisagée. Une première solution consisterait à choisir une représentation de la saturation en deux sous-modèles au lieu de trois. Une deuxième solution consisterait à représenter la saturation grâce à une fonction tangente hyperbolique ce qui éliminerait le terme constant de la représentation actuelle. La nouvelle forme obtenue peut être ainsi utilisée pour la synthèse de commande par retour d'état ou de sortie des systèmes non linéaires saturés.

Représentation T-S avec deux sous-modèles

Comme pour la représentation à trois sous-modèles, il est possible de proposer une représentation T-S de la saturation mais cette fois-ci limitée à deux sous-modèles. Pour les composantes $u_j(t)$ du vecteur $u(t)$, elle est donnée par l'équation suivante :

$$u_{sat,j}(t) = \sum_{i=1}^2 v_i^j(u_j(t)) \omega_i^j, \quad j = 1, \dots, n_u \quad (6.5)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_1^j = u_{min,j} \\ \omega_2^j = u_{max,j} \end{cases} \quad (6.6)$$

et les fonctions d'activation :

$$\begin{cases} v_1^j(u_j(t)) = \frac{u_{max,j} - \min(u_{max,j}, \max(u_j(t), u_{min,j}))}{u_{max,j} - u_{min,j}} \\ v_2^j(u_j(t)) = \frac{\min(u_{max,j}, \max(u_j(t), u_{min,j})) - u_{min,j}}{u_{max,j} - u_{min,j}} \end{cases} \quad (6.7)$$

Ainsi, plus généralement, le vecteur de commande $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ soumis aux contraintes de saturation est modélisé sous la forme :

$$u_{sat}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 v_i^1(u_1(t)) \omega_i^1, \dots, \sum_{i=1}^2 v_i^{n_u}(u_{n_u}(t)) \omega_i^{n_u} \right)^T \quad (6.8)$$

En suivant les étapes établies pour le cas à trois sous-modèles et en se basant sur la propriété de somme convexe, (6.8) se ré-écrit afin de faire apparaître les mêmes fonctions d'activation pour les n_u composantes du vecteur de commande conduisant à la génération de 2^{n_u} sous modèles :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{2^{n_u}} v_{sat,i}(t) \Omega_i \quad (6.9)$$

Les fonctions d'activation globales $v_{sat,i}(t)$ ainsi que les vecteurs $\Omega_i \in \mathbb{R}^{n_u \times 1}$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} v_{sat,i}(t) = \prod_{j=1}^{n_u} v_{\tau_i^j}^j(u_j(t)) \\ \Omega_i = \left(\omega_{\tau_i^1}^1 \dots \omega_{\tau_i^{n_u}}^{n_u} \right)^T \end{cases} \quad (6.10)$$

où les indices τ_i^j ($i = 1, \dots, 2^{n_u}$ et $j = 1, \dots, n_u$), égaux à 1 ou 2, indiquent quelle partition (v_1^j ou v_2^j) de la $j^{\text{ième}}$ entrée est considérée dans le $i^{\text{ième}}$ sous-modèle.

La relation liant le $i^{\text{ième}}$ sous-modèle et les indices τ_i^j est donnée par l'expression suivante :

$$i = 2^{n_u-1} \tau_i^1 + 2^{n_u-2} \tau_i^2 + \dots + 2^0 \tau_i^{n_u} - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n_u-1}) \quad (6.11)$$

Inversement, on peut également retrouver les τ_i^j en fonction du $i^{\text{ième}}$ sous modèle, les quantités $((\tau_i^1 - 1), \dots, (\tau_i^{n_u} - 1))$ correspondent à l'écriture de $(i - 1)$ en base 2.

Remarque 19. Les deux représentations proposées pour la contrainte de saturation (deux ou trois sous-modèles) sont équivalentes et identiques à la définition initiale de la saturation (6.12). Cela témoigne de l'intérêt majeur des modèles T-S qui proposent une représentation exacte des non-linéarités sans perte d'information.

Cependant, entre les deux formules (4.10) et (6.9), deux différences peuvent être soulignées, dont les effets doivent être soigneusement analysés.

1. la réduction du nombre de sous-modèles : on passe ainsi de 3^{n_u} pour le cas à trois partitions à 2^{n_u} pour le cas à deux partitions.
2. l'intervention explicite de la commande $u(t)$ dans l'équation du modèle : en effet, pour le cas à trois sous-modèle, la commande intervient explicitement dans le modèle ($u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_{sat,i}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$). Par contre, dans la seconde représentation (6.9), la commande est rejetée dans les fonctions d'activation, ce qui nous obligerait à considérer une dynamique virtuelle de l'entrée pour la synthèse de la commande (approche descripteur par exemple).

A noter également que les stratégies de commande proposée dans le chapitre 4 peuvent être déduites pour le cas deux sous-modèles.

Représentation de la saturation avec la fonction tangente hyperbolique

La fonction non linéaire saturation pour un signal $u(t)$ s'écrit :

$$u_{sat}(t) := \begin{cases} u(t) & \text{si } |u(t)| \leq \bar{u} \\ \bar{u} & \text{si } u(t) > \bar{u} \\ -\bar{u} & \text{si } u(t) < -\bar{u} \end{cases} \quad (6.12)$$

où \bar{u} est la limite de saturation.

Nous pouvons également considérer une autre forme de la fonction saturation (pour $\varepsilon > 0$ et petit) :

$$u_{sat}(t) = \bar{u} \tanh(u(t)) = \bar{u} \left(\left(\frac{\tanh(u(t))}{u(t)} - \varepsilon \right) u(t) + \varepsilon u(t) \right) \quad (6.13)$$

Soit $z(t)$ la fonction non linéaire suivante :

$$z(t) = \frac{\tanh(u(t))}{u(t)} - \varepsilon \quad (6.14)$$

que l'on exprime sous forme T-S :

$$z(t) = \frac{z(t) - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} z_{max} + \frac{z_{max} - z(t)}{z_{max} - z_{min}} z_{min} \quad (6.15)$$

avec $z_{max} = \max_{u(t)} \{z(t)\} = 1 - \varepsilon$ et $z_{min} = \min_{u(t)} \{z(t)\} = -\varepsilon$.

Nous pouvons ainsi écrire la fonction de saturation sous la forme :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(u(t)) (\alpha_i + \varepsilon \bar{u}) u(t) \quad (6.16)$$

avec :

$$\mu_1(u(t)) = \frac{z(t) - z_{min}}{z_{max} - z_{min}}, \quad \mu_2(u(t)) = \frac{z_{max} - z(t)}{z_{max} - z_{min}} \quad (6.17)$$

$$\alpha_1 = \bar{u} z_{max}, \quad \alpha_2 = -\bar{u} z_{min} \quad (6.18)$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation est bien vérifiée :

$$\mu_1(u(t)) + \mu_2(u(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(u(t)) \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad (6.19)$$

Ainsi, pour n_u entrées de commande, 2^{n_u} sous modèles sont obtenus. Il est aussi important de souligner que nous obtenons une expression analytique de la commande saturée $u_{sat}(t)$, exprimée en fonction du signal d'entrée $u(t)$. L'équation (6.13) peut ainsi s'exprimer sous la forme :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{2^{n_u}} \mu_{sat,i}(t) \Lambda_i u(t) \quad (6.20)$$

où les fonctions d'activation globales $\mu_{sat,i}(t)$ ainsi que les matrices $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \mu_{sat,i}(t) &= \prod_{j=1}^{n_u} \mu_{\sigma_j^i}^j(u_j(t)) \\ \Lambda_i &= \text{diag}(\alpha_{\sigma_1^i}^1 + \varepsilon, \dots, \alpha_{\sigma_{n_u}^i}^{n_u} + \varepsilon \bar{u}) \end{cases} \quad (6.21)$$

A partir de la nouvelle ré-écriture de la saturation proposée (6.20), comparée à la version précédente, il est important de noter qu'à présent, nous avons un nombre moindre de sous-modèles (2^{n_u} contre 3^{n_u}). De plus, avec la nouvelle forme, le recalage à l'origine de l'état du système est possible, ce qui n'était pas le cas précédemment (convergence vers une boule centrée en zéro puisque l'expression polytopique de la commande saturée ne fait plus apparaître de terme constant Γ_i). L'inconvénient de la seconde ré-écriture est que les bornes de saturation doivent être symétriques $\pm \bar{u}$, alors que pour la première, elles sont quelconques.

Relaxation des bornes

L'écriture proposée de la saturation avec la fonction tangente hyperbolique fixe les bornes de saturation à $\pm \bar{u}$. Si nous cherchons à avoir des bornes non symétriques \bar{u} et \underline{u} , une solution serait d'ajouter une translation et une homothétie $= \frac{\bar{u} + \underline{u}}{2}$. La nouvelle fonction de saturation est donnée par :

$$u_{sat}(t) = \frac{\bar{u} + \underline{u}}{2} \tanh(u(t)) + \frac{\bar{u} - \underline{u}}{2} = \left(\frac{\frac{\bar{u} + \underline{u}}{2} \tanh(u(t)) + \frac{\bar{u} - \underline{u}}{2}}{u(t)} \right) u(t) \quad (6.22)$$

Ainsi, la représentation T-S de $sat(u(t))$ se ré-écrit :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(u(t)) \alpha_i u(t) \quad (6.23)$$

avec :

$$z(t) = \frac{\frac{\bar{u}+u}{2} \tanh(u(t)) + \frac{\bar{u}-u}{2}}{u(t)} \quad (6.24)$$

$$\mu_1(u(t)) = \frac{z(t) - z_{min}}{z_{max} - z_{min}}, \quad \mu_2(u(t)) = \frac{z_{max} - z(t)}{z_{max} - z_{min}} \quad (6.25)$$

$$\alpha_1 = z_{max}, \quad \alpha_2 = z_{min} \quad (6.26)$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation est bien vérifiée :

$$\mu_1(u(t)) + \mu_2(u(t)) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(u(t)) \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad (6.27)$$

Pour un vecteur de commande de dimension n_u , (6.22) peut ainsi s'exprimer sous la forme :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{2^{n_u}} \mu_{sat,i}(t) \Lambda_i u(t) \quad (6.28)$$

où les fonctions d'activation globales $\mu_{sat,i}(t)$ ainsi que les matrices $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \mu_{sat,i}(t) &= \prod_{j=1}^{n_u} \mu_{\sigma_j^i}^j(u_j(t)) \\ \Lambda_i &= \text{diag}(\alpha_{\sigma_i^1}^1, \dots, \alpha_{\sigma_i^{n_u}}^{n_u}) \end{cases} \quad (6.29)$$

Ainsi, avec l'expression (6.28) nous réduirions non seulement le nombre de sous-modèles (de 3^{n_u} à 2^{n_u}), mais nous serions également capables d'assurer la convergence de l'état du système vers l'origine.

6.1.3 Poursuite de modèle de référence

Résumé. *Pour la poursuite de modèle de référence, plusieurs points ont été abordés, notamment les conditions structurelles de suivi, le choix du critère de commande ainsi que la synthèse de commande (poursuite exacte, poursuite optimale et prédictive). La commande a également été considérée en présence de bruits de mesure et de saturation.*

Dans la continuité du travail proposé, il serait intéressant d'approfondir l'étude sur les conditions de poursuite pour les systèmes non linéaires et tout particulièrement pour les modèles T-S. En effet, comme souligné dans le chapitre précédent, peu de travaux publiés traitent de ce point précis. Une étude comparative entre les différentes conditions de poursuite et les résultats obtenus selon qu'elles sont vérifiées ou non serait un bon point de départ.

Pour la commande tolérante aux fautes, il serait également intéressant de combiner les résultats des trois chapitres, c'est-à-dire la synthèse d'une commande pour la poursuite de trajectoire pour des systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S à paramètres variants dans le temps et soumis à des contraintes de saturation (elles mêmes représentées sous forme T-S). En effet, en prenant avantage de la remarque 3 portant sur l'équivalence entre la stabilisation par retour d'état à base d'observateurs et la stabilisation par retour de sortie dynamique ainsi que la commande tolérante aux fautes proposée en 5.6.1, la combinaison de tous ces résultats est à envisager.

6.2 Conclusions

Les résultats proposés à l'issue de la rédaction de ce mémoire de thèse apportent une contribution aux problèmes de représentation (modélisation) des non-linéarités, d'estimation d'état, de diagnostic et de commande tolérante aux défauts des systèmes non linéaires représentés sous la forme de modèles de Takagi-Sugeno.

- Dans le contexte de la modélisation, l'approche T-S a été choisie pour les nombreux avantages qu'elle présente, notamment pour la simplicité d'utilisation de ce modèle pour l'étude de la stabilité et la synthèse d'observateurs/contrôleurs. De ce fait, les systèmes non linéaires considérés ont tous été représentés sous forme T-S (station d'épuration d'eaux usées, bioréacteur, chariot-pendule). Cette représentation a également été appliquée à certaines non-linéarités, à des systèmes à paramètres variants dans le temps (avec défauts affectant les systèmes, leurs actionneurs et leurs capteurs) et à la saturation de commande.
- Dans le contexte de l'estimation et de la détection de défauts, une nouvelle approche pour l'estimation simultanée de l'état et de paramètres variants dans le temps a été proposée. Cette dernière repose sur la décomposition polytopique de chaque paramètre, puis en se basant sur la transformation par secteurs non linéaires, une représentation T-S du système est proposée. De là, en appliquant des résultats connus sur la synthèse d'observateurs à variables de décision non mesurables, un observateur simultané de l'état et des paramètres est synthétisé. Cette approche présente également une application intéressante dans le domaine de la détection de défauts.
- Dans le contexte de la commande, la stabilisation sous contrainte de saturation de commande a été développée. Cette approche nouvelle présente l'intérêt d'intégrer la saturation dans la synthèse de la commande. En effet, les gains calculés (pour différentes structures de lois de commande) s'ajustent en fonction des limites de commande et assurent la stabilité des systèmes non linéaires, même incertains et pour lesquels la saturation de commande peut apporter dans certains cas un effet déstabilisant.
- Dans le contexte de la poursuite de modèle de référence, la nouveauté apportée est l'intérêt porté aux conditions structurelles de poursuite. En effet, jusqu'à présent peu de travaux s'y sont intéressés, et tout particulièrement pour les systèmes non linéaires sous forme de modèles T-S. La contribution de nos travaux de recherche portent sur la commande optimale, la commande prédictive (en proposant un algorithme itératif simple et efficace) ainsi que la commande tolérante aux défauts (prenant en compte des défauts de capteur et la saturation de commande).

Annexes



Outils pour l'analyse des systèmes T-S

L'objectif de cette annexe est de présenter quelques définitions et lemmes utiles à l'analyse des modèles T-S.

Le lemme suivant permet de transformer certaines inégalités matricielles non linéaires en LMI. Ainsi :

Lemme 4. *Complément de Schur (Golub et Van Loan [1983]).*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

est équivalente à :

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Lemme 5. *Carré matriciel (Zhou et Khargonekar [1988]). Soient X et Y deux matrices de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est vérifiée pour toutes matrices G et Σ définies positives :*

$$-X^T \Sigma X - Y^T \Sigma^{-1} Y \leq X^T Y + Y^T X \leq X^T G X + Y^T G^{-1} Y \quad (\text{A.3})$$

Lemme 6. *(Propriété de congruence). Soit X une matrice symétrique et Y une matrice non singulière de dimensions compatibles avec celle de X . Si X est définie positive (resp. négative) et si Y est de plein rang colonne, alors le produit YXY^T est défini positif (resp. défini négatif).*

Lemme 7. *(Zhou et Khargonekar [1988]). Soient deux matrices X et Y de dimensions appropriées, une matrice $\Delta(t)$ fonction du temps et un scalaire positif ε . La propriété suivante est vraie :*

$$X^T \Delta^T(t) Y + Y^T \Delta(t) X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y \quad (\text{A.4})$$

pour $\Delta^T(t) \Delta(t) \leq I$.

Définition 2. *Stabilité quadratique (Rotea et al. [1993], Gérard [2008]). Considérons le système LTV (linéaire à temps variant) décrit par*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (\text{A.5})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est un vecteur d'état. Le système est quadratiquement stable s'il existe une matrice P symétrique positive $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ telle que, pour tout $x(t) \neq 0$:

$$PA(t) + A^T(t)P < 0 \quad (\text{A.6})$$

Definition 3. Norme H_∞ (Francis [1987]) Considérons le système :

$$G := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de sortie et $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur d'entrée. La norme H_∞ du système (A.7) est définie par :

$$\|G\|_\infty := \begin{cases} \max_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \|u\|_2 \neq 0 & \text{avec } \|y\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y^T(t)y(t)dt \right)^{1/2} \\ \equiv \\ \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max} \left(\sqrt{G(j\omega)G^T(-j\omega)} \right) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

dans le cas où le système (A.7) n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire.

Definition 4. Gain \mathcal{L}_2 (Green et Limebeer [1995]) Si le système (A.7) est asymptotiquement stable, alors, pour $x(0) = 0$, le gain \mathcal{L}_2 du système est donné par les définitions équivalentes suivantes :

$$\|G\|_2 := \begin{cases} \sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \|u\|_2 \neq 0 \\ \equiv \\ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(G(j\omega)G^T(-j\omega))d\omega \right)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Le gain \mathcal{L}_2 sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système. Ainsi, la notion de gain \mathcal{L}_2 est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes.

Pour un système linéaire stable, la norme H_∞ de la fonction de transfert est la norme induite \mathcal{L}_2 de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain \mathcal{L}_2 du système.

Le lemme borné réel, qui fournit une majoration du gain \mathcal{L}_2 entre l'entrée et la sortie d'un système, peut être utilisé pour quantifier l'atténuation des perturbations sur le système.

Lemme 8. Lemme réel borné ou lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (Yakubovich [1962], Popov [1962], Kalman [1963]). Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- la matrice A est stable et $\|G\|_\infty < \gamma$.
- il existe pour une matrice $X = X^T > 0$ (Willems [1971]) :

$$\begin{cases} R = \gamma^2 I_{n_u} - D^T D > 0, \\ A^T X + XA + C^T C + (XB + C^T D)R^{-1}(XB + C^T D)^T < 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

- il existe pour une matrice $X = X^T > 0$ (Boyd et al. [1994]) :

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ * & -\gamma^2 I_{n_u} & D^T \\ * & * & -I_m \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.11})$$

Dans le cas où les matrices (A, B, C, D) du système (A.7) dépendent du temps, nous ne pouvons pas parler de norme H_∞ , mais nous pouvons considérer le gain \mathcal{L}_2 induit suivant :

$$J = \sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \|u\|_2 \neq 0 \quad (\text{A.12})$$

Le lemme borné réel pour ces systèmes LTV (linéaires variants dans le temps) est alors le suivant :

Lemme 9. (*Lemme borné réel pour les systèmes LTV*) Sous l'hypothèse $x(0) = 0$, le système (A.7) avec les matrices (A, B, C, D) variant dans le temps vérifie $J < \gamma$ dans le cas continu, avec $\gamma > 0$ donné, s'il existe une matrice symétrique définie positive $(P = P^T > 0)$ telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) & P(t)B(t) & C^T(t) \\ * & -\gamma^2 I_{n_u} & D^T(t) \\ * & * & -I_m \end{pmatrix} < 0, \forall t \quad (\text{A.13})$$

B

Comparaison entre différentes structures non linéaires et la représentation T-S

Considérons la formulation suivante des modèles T-S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ l'entrée du système et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sa sortie. Les paramètres $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ représentent les variables de décision qui peuvent être mesurables (entrée ou sortie du système) ou non mesurables (états du système). Les fonctions d'activation $\mu_i(\xi(t))$ des n sous modèles satisfont la propriété de somme convexe

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) = 1, \forall t \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

De nombreuses techniques de modélisation de systèmes non linéaires partagent la même structure (B.1). Il est donc possible de mettre en évidence des relations entre la représentation T-S et quelques autres. En effet, nous illustrerons par le biais d'exemples simples que les modèles T-S peuvent être considérés comme une représentation générale, englobant d'autres représentations comme les modèles ARX et les systèmes LPV.

B.1 Les modèles ARX

Il est possible d'établir une relation entre la représentation d'état d'un système T-S et un modèle ARX à paramètres variants (Auto Regressive model with eXternal Inputs). En effet, si nous considérons le modèle ARX suivant :

$$\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = bu(t) \quad (\text{B.3})$$

Pour $a_1(t)$ et $a_0(t)$ bornés on peut trouver des constantes a_{01} , a_{02} , a_{11} et a_{12} ainsi que des fonctions μ_{01} , μ_{02} , μ_{11} et μ_{12} vérifiant (B.2) telles que :

$$\begin{cases} a_1(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_{1i}(t) a_{1i} \\ a_0(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_{0i}(t) a_{0i} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

La représentation T-S de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mu_{1i}(t) \mu_{0j}(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_{0i} & -a_{1j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) x(t) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

pour $x_1(t) = y(t)$ et $x_2(t) = \dot{y}(t)$.

Après quelques développements, il est possible de regrouper les fonctions d'activation en une seule somme de fonctions (avec 2^2 sous-modèles) vérifiant la propriété de somme convexe (B.2).

Ainsi, nous pouvons considérer que la représentation d'état (B.5) est bien sous forme T-S (B.1) et que les systèmes à paramètres variants sous forme ARX peuvent être traités comme une famille des modèles T-S (à condition bien évidemment que les fonctions d'activation $\mu_{1i}(t)$, $\mu_{0i}(t)$ et $\mu_{bi}(t)$ soient convexes). Il est important de noter que la transformation inverse, c-à-d, le passage d'un modèle T-S (B.1) à une forme ARX n'est pas toujours possible, la structure T-S étant plus générale que la forme ARX.

B.2 Les modèles LPV

La structure LPV peut être utilisée pour représenter le comportement de plusieurs systèmes dynamiques, mais également des défauts et des erreurs de modélisation. Un système LPV peut généralement s'écrire de manière équivalente, au moins sur un compact de l'espace d'état, sous forme T-S. Inversement, un système T-S peut être vu comme un système LPV. En effet, si les paramètres varient dans un ensemble compact, il est possible de manière directe et systématique (comme il est démontré dans le chapitre 3), de ré-écrire ces modèles sous forme T-S. Cette idée est exploitée dans le chapitre 3 (estimation paramétrique) et y est largement détaillée.

Considérons la matrice d'état d'un système sous la forme LPV suivante :

$$M(\theta(t)) = M_0 + \theta_1(t)M_1 + \theta_2(t)M_2 \quad (\text{B.6})$$

avec $\theta(t) = (\theta_1(t) \ \theta_2(t))^T$ un vecteur de paramètres bornés et M_0 , M_1 et M_2 des matrices constantes. Après quelques transformations élémentaires (voir chapitre 3), cette équation se met sous la forme :

$$M(\theta(t)) = \sum_{i=1}^{2^2} \mu_i(\theta_i(t)) \bar{M}_i \quad (\text{B.7})$$

où $\mu_i(\theta_i(t))$ et \bar{M}_i s'obtiennent à partir de $F_{1,i}$, $F_{2,j}$, M_0 , M_1 et M_2 .

L'équation (B.7) correspond bien à une écriture T-S. Ceci permet bien de montrer le lien existant entre les modèles LPV et les modèles T-S.

B.3 Les réseaux de fonctions à base radiale

Il a été montré que, sous certaines restrictions, les réseaux de fonctions à base radiale (Radial basis function networks) sont équivalents aux modèles T-S. (Jang et Sun [1993], Hunt *et al.* [1996]). L'équivalence entre les modèles est assurée si les fonctions de pondération utilisées sont de type gaussien et si chaque sous-modèle se réduit à une constante w_i (sous-modèle d'ordre 0). Ce type de modèle possède en outre la propriété d'approximation universelle, c'est-à-dire que n'importe quel système non linéaire peut être représenté par cette structure. Cette approche présente néanmoins deux inconvénients principaux, à savoir le nombre important de sous-modèles nécessaires à l'obtention d'une approximation satisfaisante du système non linéaire et l'exploitation délicate du modèle obtenu (Orjuela [2008]).

B.4 Exemples illustratifs

Afin d'illustrer l'avantage (simplicité et généralité) du formalisme T-S pour le traitement des systèmes non linéaires, nous proposons de montrer à partir d'exemples simples des alternatives basées sur l'approche T-S pour la représentation et la synthèse d'observateur robuste.

B.4.1 Représentation des systèmes

Dans cette section, nous montrons en nous basant sur un exemple physique simple que le formalisme T-S est bien adapté au traitement des systèmes incertains et peut être considéré comme une alternative intéressante à la représentation LFT (Transformation Linéaire Fractionnaire). Considérons l'exemple du mouvement d'une masse m soumise à une force $F(t)$ dont l'équation dynamique est donnée par :

$$m\ddot{x}(t) + c(t)\dot{x}(t) + k(t)x(t) = F(t) \quad (\text{B.8})$$

où $c(t)$ et $k(t)$ correspondent respectivement aux frottement visqueux et sec de la masse sur le support de translation. Considérons le cas où les coefficients c et k sont variants dans le temps, ce qui correspond à un modèle soumis à des incertitudes, c'est-à-dire :

$$c(t) = \bar{c}(1 + 0.2\delta_c(t)) \quad \text{et} \quad k(t) = \bar{k}(1 + 0.1\delta_k(t)) \quad (\text{B.9})$$

où \bar{c} et \bar{k} sont des constantes et représentent les valeurs nominales des coefficients $c(t)$ et $k(t)$, $\delta_c(t)$ et $\delta_k(t)$ des incertitudes bornées telles que :

$$\begin{aligned} |\delta_c(t)| < 1 \quad \text{et} \quad |\delta_k(t)| < 1 \\ \equiv \\ c(t) \in [0.8\bar{c}, 1.2\bar{c}] \quad \text{et} \quad k(t) \in [0.9\bar{k}, 1.1\bar{k}] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Représentation LFT

Nous proposons de représenter le système (B.8) affecté par les incertitudes (B.10) en nous basant sur la transformation LFT. Cette dernière permet de séparer les parties certaines et incertaines du modèle en écrivant le modèle global $G(s)$ comme un système certain $P(s)$ bouclé par des incertitudes $\Delta(s)$ bornées.

Le système (B.8) est ainsi représenté par le diagramme bloc de la figure (B.2) dans lequel les variables auxiliaires d_c, e_c, d_k et e_k vont permettre d'isoler les termes incertains dans la représentation du système.

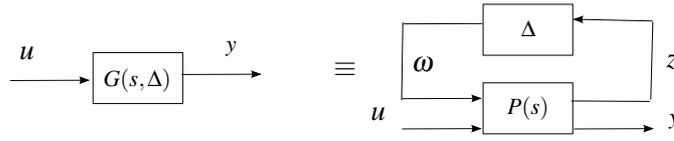


Figure B.1 – Représentation linéaire fractionnaire haute des incertitudes

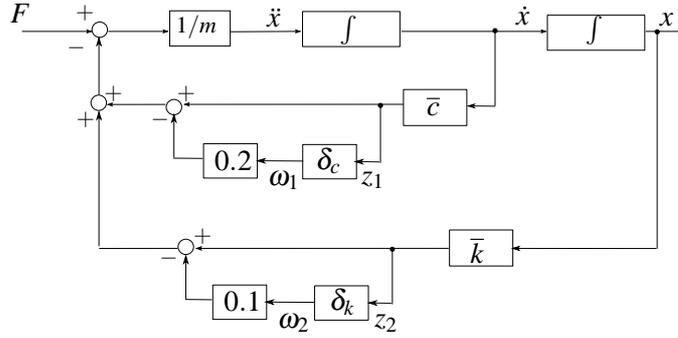


Figure B.2 – Représentation LFT du système

Une représentation LFT du système est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{k}/m & \bar{c}/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} F(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.2/m & -0.1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_c(t) & 0 \\ 0 & \delta_k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c} \\ \bar{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Ainsi, les outils développés pour les systèmes LFT peuvent maintenant être appliqués pour l'analyse du système non linéaire incertain (B.8) (Henry *et al.* [2001], Henry et Zolghari [2006]).

Représentation T-S

Nous cherchons à présent à représenter le système (B.8) sous les contraintes (B.10) sous la forme d'un modèle T-S. En effet, à partir des équations (B.9) et (B.10) et de la transformation par secteurs non linéaires, les paramètres $c(t)$ et $k(t)$ se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} c(t) &= F_{c,1}(c(t))c_M + F_{c,2}(c(t))c_m \\ k(t) &= F_{k,1}(k(t))k_M + F_{k,2}(k(t))k_m \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

avec :

$$\begin{cases} c_M = \max \{c(t)\} = 1.2\bar{c}, & c_m = \min \{c(t)\} = 0.8\bar{c} \\ k_M = \max \{k(t)\} = 1.1\bar{k}, & k_m = \min \{k(t)\} = 0.9\bar{k} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{cases} F_{c,1}(c(t)) = \frac{c(t) - c_m}{c_M - c_m}, & F_{c,2}(c(t)) = \frac{c_M - c(t)}{c_M - c_m} \\ F_{k,1}(k(t)) = \frac{k(t) - k_m}{k_M - k_m}, & F_{k,2}(k(t)) = \frac{k_M - k(t)}{k_M - k_m} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Cette décomposition nous permet d'écrire, de manière systématique, le système non linéaire incertain (B.8)-(B.9) sous la forme T-S suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{X}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{m} & -\frac{c(t)}{m} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F_{k,1}(k(t))\frac{k_M}{m} & -F_{c,1}(c(t))\frac{c_M}{m} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F_{k,1}(k(t))\frac{k_M}{m} & -F_{c,2}(c(t))\frac{c_m}{m} \end{pmatrix} X(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F_{k,2}(k(t))\frac{k_m}{m} & -F_{c,1}(c(t))\frac{c_M}{m} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F_{k,2}(k(t))\frac{k_m}{m} & -F_{c,2}(c(t))\frac{c_m}{m} \end{pmatrix} X(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\
&= \sum_{i=1}^4 \mu_i(t) (A_i X(t) + B u(t))
\end{aligned} \tag{B.16}$$

où $X(t) = (x(t) \quad \dot{x}(t))^T$ est le vecteur d'état et $u(t) = F(t)$ l'entrée de commande. Les fonctions d'activation $\mu_i(t)$ s'explicitent :

$$\mu_1(t) = F_{k,1}(t)F_{c,1}(t), \mu_2(t) = F_{k,1}(t)F_{c,2}(t), \mu_3(t) = F_{k,2}(t)F_{c,1}(t), \mu_4(t) = F_{k,2}(t)F_{c,2}(t) \tag{B.17}$$

Les matrices constantes A_i sont données par

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_M}{m} & -\frac{c_M}{m} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_M}{m} & -\frac{c_m}{m} \end{pmatrix} \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m}{m} & -\frac{c_M}{m} \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m}{m} & -\frac{c_m}{m} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

La matrice B est définie par $B = (0 \quad 1/m)^T$.

Les outils développés pour les systèmes T-S peuvent maintenant être appliqués pour l'analyse du système non linéaire incertain (B.8). Ainsi, la représentation T-S peut constituer une alternative intéressante à la transformation LFT pour le traitement des systèmes incertains.

B.4.2 Synthèse d'observateur

Nous nous limitons à la comparaison entre deux approches pour la synthèse d'observateur d'état des systèmes bilinéaires. La première approche est la méthode du grand gain, la seconde consiste à représenter le même système (bilinéaire) sous forme T-S, puis à synthétiser l'observateur correspondant en utilisant les outils présentés dans la section précédente. Considérons le modèle bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{n_u} A_i u_i(t) x(t) + R u(t) + B w(t) \\ y(t) = C x(t) + D w(t) \end{cases} \tag{B.19}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur des entrées de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des sorties mesurées. Le vecteur $w(t) \in \mathbb{R}^q$ représente le vecteur des perturbations à énergie bornée et valeur moyenne nulle. Sans perte de généralité, la commande $u(t)$ est supposée continue et bornée.

Observateur à grand gain bilinéaire

Pour la classe des systèmes bilinéaires soumis à des perturbations à énergie bornée, l'observateur à grand gain fait partie des approches les plus couramment utilisées pour l'estimation d'état. Cette classe d'observateurs et de système ne représentant pas le sujet principal de ce mémoire, nous nous contenterons de présenter le cas le plus simple, qui est celui à un degré de liberté. Cela consiste, pour un système donné, à synthétiser l'observateur à partir du choix d'un réel positif généralement noté θ .

La stratégie adoptée a pour objectif d'assurer la stabilité exponentielle de l'erreur d'estimation avec un niveau d'atténuation au sens \mathcal{L}_2 du gain entre les perturbations et cette erreur. Les conditions ainsi obtenues sont données sous forme LMI.

L'observateur d'état pour le système (B.19) est ainsi défini par le lemme 10 :

Lemme 10. (Gérard [2008], Deza et Gauthier [1991], Deza et al. [1992]) *Le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \mathcal{A}(u)\hat{x}(t) + Ru(t) - S_\infty^{-1}C^T(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ \mathcal{A}(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_u} A_i u_i(t) \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

est un observateur exponentiel pour le système (B.19) avec $S_\infty(\theta) = Q^{-1}\bar{S}_\infty(\theta)Q^T$ où la matrice $\bar{S}_\infty(\theta) = \bar{S}_\infty^T(\theta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ est solution de l'équation de Riccati :

$$-\theta\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{A}^T\bar{S}_\infty(\theta) - \bar{S}_\infty(\theta)\bar{A} + C^TC = 0 \quad (\text{B.21})$$

avec $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_x-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et $\theta \in \mathbb{R}^{*+}$ suffisamment grand. La matrice Q est une matrice de changement de base ($x_h = Qx$) qui permet de mettre le système (B.19) sous une forme canonique.

La procédure de synthèse d'observateur consiste ainsi à trouver un paramètre positif θ assurant simultanément la stabilité de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ et une atténuation de perturbation inférieure à un scalaire γ donné (ou à optimiser).

Une solution proposée ramène la synthèse de l'observateur à une résolution de LMI en minimisant γ conjointement avec le calcul de $S_\infty(\theta)$ pour un paramètre θ donné. Le théorème 11 résume la procédure.

Lemme 11. (Gérard [2008], Gérard et al. [2010]) *Pour un paramètre θ donné, le système (B.20) est un observateur quadratique pour le système (B.19) et présente une atténuation de perturbation inférieure à un réel donné γ s'il existe des matrices $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ (pour $i = 0, \dots, n_u$) et une matrice $F \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, telles que pour $j = i = 1, \dots, 2^{n_u}$*

$$\begin{pmatrix} L^i(\theta, \beta) & \tilde{P}(\beta) - F + \hat{A}_\infty^T(\theta, \beta)F^T & FB(\theta) \\ * & -F - F^T & FB(\theta) \\ * & * & -\gamma^2 I_{n_x} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\tilde{P}(\beta) > 0 \quad (\text{B.23})$$

avec

$$\begin{aligned} L^i(\theta, \beta) &= \sum_{i=1}^{n_u} \beta P_i + F\hat{A}_\infty(\theta, \beta) + \hat{A}_\infty^T(\theta, \beta)F^T + I_{n_x} \\ \tilde{P}(\beta) &= \sum_{i=0}^{n_u} \beta P_i \\ \hat{A}_\infty(\theta, \beta) &= \sum_{i=0}^{n_u} \beta A_i - S_\infty^{-1}C^TC \\ \mathcal{B}(\theta) &= B - S_\infty^{-1}(\theta)C^TD \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

pour $\beta \in \mathcal{S}$ et \mathcal{S} l'ensemble défini par :

$$\mathcal{S} = \left\{ \beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{2n_u} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n_u} \mid \forall i \in [1, n_u], \alpha_i \in \{u_{imin}, u_{imax}\} \right. \\ \left. \text{et } \forall i \in [n_u + 1, 2n_u], \alpha_i \in \{\mu_{imin}, \mu_{imax}\} \right\} \quad (\text{B.25})$$

où u_{imin} , μ_{imin} , u_{imax} et μ_{imax} correspondent respectivement aux bornes min et max des entrées de commande $u_i(t)$ et de leurs dérivées $\dot{u}_i(t)$.

Des résultats présentés ci-dessus (10 et 11), nous constatons que la synthèse d'un observateur pour le système bilinéaire (B.19) reste assez complexe dans certains cas.

Observateur T-S

La procédure proposée consiste à ré-écrire le système (B.19) sous forme T-S, puis d'appliquer de manière systématique et simple les résultats disponibles pour les observateurs des systèmes linéaires. Ainsi, nous pouvons écrire le système (B.19) sous la forme quasi-LPV suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(u(t))x(t) + Ru(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

avec $A(u(t)) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n_u} A_i u_i(t) \right)$. Afin d'obtenir le modèle T-S correspondant, il suffit d'appliquer la transformation par secteurs non linéaires détaillée plus haut. En effet, puisque les entrées de commande sont bornées, il est possible de les considérer comme variables de prémisse connues, leur nombre étant égal au nombre de commandes n_u . Le système T-S à 2^{n_u} sous-modèles obtenu est sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{2^{n_u}} \mu_i(u(t)) (A_i x(t)) + Ru(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

L'observateur assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ ainsi que l'atténuation \mathcal{L}_2 du transfert de $w(t)$ vers $e(t)$ est donné sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{2^{n_u}} \mu_i(u(t)) (A_i \hat{x}(t) + Ru(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Les gains L_i sont donnés par la solution du problème d'optimisation LMI suivant :

$$\begin{pmatrix} A_i^T P + PA_i - K_i C - C^T K_i + I_{n_x} & PB - K_i D \\ * & -\gamma^2 I_q \end{pmatrix} < 0 \\ P = P^T > 0 \quad (\text{B.29})$$

avec $L_i = P^{-1} K_i$, $i = 1, \dots, 2^{n_u}$.

Comme pour l'exemple précédent, nous constatons que l'approche T-S peut être considérée comme une alternative intéressante pour l'étude des systèmes bilinéaires.

Bibliographie

- AKHENAK, A. (2004). *Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèles : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- AKHENAK, A., CHADLI, M., RAGOT, J. et MAQUIN, D. (2007). Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model. In *15th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Athens, Greece.
- ALAMIR, M. (2006). *La commande prédictive non linéaire*. La commande Prédictive, Hermes-Lavoisier.
- ALCORTA GARCIA, E. et FRANK, P. (1997). Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis : a survey. *Control Engineering Practice*, 5(5):663–670.
- ALESSIO, A. et BEMPORD, A. (2008). A survey on explicit model predictive control. assessment and future directions of nonlinear model predictive control. In *International Workshop on Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, Pavia, Italy.
- ALEX, J., BETEAU, J. F., COPP, J. B., HELLINGA, C., JEPPSSON, U., MARSILI-LIBELLI, S., PONS, M. N., SPANJERS, H. et VANHOOREN, H. (1999). Benchmark for evaluating control strategies in wastewater treatment plants. In *European Control Conference*, Karlsruhe, Germany.
- ALLGÖWER, E. L. et GEORG, K. (1980). Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 22:28–85.
- ALLGÖWER, F. et ZHEN, A. (2000). *Nonlinear Model Predictive Control*. Birkhäuser Verlag, Boston, Massachusetts, USA.
- ANGELIS, G. (2001). *System analysis, modeling and control with Polytopic Linear Models*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven, Netherland.
- AXELSSON, O. (1994). *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, Australia.
- BACCIOTTI, A. et BOIERI, P. (1991). A characterization of single input planar nonlinear systems. *Systems and Control letters*, 16(2):139–143.
- BALANDAT, M. (2010). *Constrained Robust Optimal Trajectory Tracking : Model Predictive Control Approaches*. Thèse de doctorat, Technische Universität Darmstadt, Institute of Flight Systems and Automatic Control, Darmstadt, Germany.
- BANKS, S. (1986). Stabilizability of finite and infinite-dimensional bilinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 3(4):255–271.
- BASILE, G. et MARRO, J. (1969). On the observability of linear, time-invariant systems with unknown inputs. *Journal of optimization theory and applications*, 3:410–415.

- BERGSTEN, P. et PALM, R. (2000). Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. *In 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Antonio, Texas, USA.
- BESANÇON, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems and Control Letters*, 41(4):271–280.
- BESANÇON, G. (2007). *Nonlinear Observers and Applications*. Springer.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2011a). On the unknown input observer design : a decoupling class approach with application to sensor fault diagnosis. *In 1st International Conference on Automation and Mechatronics*, Oran, Algeria.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2011b). On the unknown input observer design : a decoupling class approach. *In 9th IEEE International Conference on Control and Automation*, Santiago, Chile.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2012). Linear feedback control input under actuator saturation : A Takagi-Sugeno approach. *In 2nd International Conference on Systems and Control*, Marrakech, Morocco.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013a). Contribution to the constrained output feedback control. *In American Control Conference*, Washington, DC, USA.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013b). Model reference tracking control for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno structure. *In IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Hyderabad, India.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013c). Nonlinear joint state and parameter estimation. Application to a wastewater treatment plant. *Control Engineering Practice. Accepted paper in May 2013*, 21(10):1377–1385.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013d). Stabilization of nonlinear systems subject to actuator saturation. *In IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Hyderabad, India.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013e). Stabilization of nonlinear systems subject to uncertainties and actuator saturation. *In American Control Conference*, Washington, DC, USA.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013f). State and multiplicative sensor fault estimation for nonlinear systems. *In 2nd International Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, Nice, France.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013g). State and parameter estimation for nonlinear systems : a Takagi-Sugeno approach. *In American Control Conference*, Washington, DC, USA.
- BEZZAOUCHA, S., MARX, B., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2013h). State and parameter estimation for time-varying systems : a Takagi-Sugeno approach. *In IFAC Joint Conference. 5th Symposium on System Structure and Control*, Grenoble, France.
- BLANCHINI, F. et MIANI, S. (2008). *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhauser Boston, Massachusetts, USA.

-
- BLANKE, M., KINNAERT, M., LUNZE, J. et STAROSWIECKI, M. (2003). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- BOUAKRIF, F. (2012). *Commande par apprentissage itératif des robots manipulateurs*. Editions universitaires europeennes, Sarrebrück, Germany.
- BOUARAR, T. (2009). *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, France.
- BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E. et BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Ed., Philadelphia, USA.
- BUSAWON, K. et KABORE, P. (2001). Disturbance attention using proportional integral observers. *International Journal of control*, 74(6):618–627.
- CARLOS-HERNANDEZ, S., SANCHEZ, E. et BÉTEAU, J. (2009). Fuzzy observers for anaerobic WWTP : development and implementation. *Control Engineering Practice*, 17(6):690–702.
- CELIKOVSKY, S. (1993). On the stabilization of homogeneous bilinear systems. *Systems and Control Letters*, 21(6):503–510.
- CHABOUR, R., SALLET, G. et VIVALDA, J. (1993). Stabilization of nonlinear two dimensional systems : a bilinear approach. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 6(3):224–246.
- CHADLI, M., MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2002). Static output feedback for Takagi-Sugeno systems : an LMI approach. In *10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisbon, Portugal.
- CHAMILOTHORIS, G. (1987). *Techniques Adaptatives pour le suivi et la Conduite des Processus de Fermentation*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse, France.
- CHANG, S. (1997). Design of general structured observers for linear systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 334(2):213–232.
- CHEN, B., LEE, C. et CHANG, Y. (1996). H_∞ tracking design for uncertain nonlinear SISO systems : Adaptive fuzzy approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):32–43.
- CHEN, B., UANG, H. et TSENG, C. (1998). Robust tracking enhancement of robot systems including motor dynamics : a fuzzy-based dynamic game approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4):538–552.
- CHEN, J. et PATTON, R. (1999). *Robust model based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London.
- CHEN, M. et CHEN, C. (2010). Unknown input observer for linear non-minimum phase systems. *Journal of the Franklin Institute*, 347(2):577–588.
- CHO, Y. et RAJAMANI (1997). A systematic approach to adaptive synthesis for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4):534–537.
- CURRAN, R. (1971). Equicontrollability and the model-following problem. Rapport technique, Stanford University, California, USA.

- DAAFOUZ, J. (1997). *Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains. Placement de pôles et coût garanti*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France.
- DAROUACH, M., ZASADZINSKI, M. et XU, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):606–609.
- DE DONA, J. A., MOHEIMANI, S. O. R., GOODWIN, G. C. et FEUER, A. (1999). Robust hybrid control incorporating over-saturation. *Systems and Control Letters*, 38(3):179–185.
- de OLIVEIRA, M., BERNUSSOU, J. et GEROMEL, J. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, 37(4):261–265.
- DEZA, F., BUSVELLE, E., GAUTHIER, J. et RAKOTOPARA, D. (1992). High gain estimation for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 18(4):295–299.
- DEZA, F. et GAUTHIER, J. (1991). A simple and robust nonlinear estimator. In *30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, UK.
- DIMITRATOS, J., GEORGAKIS, C., EL-AASSER, M. et KLEIN, A. (1991). An experimental study of adaptive Kalman filtering in emulsion copolymerization. *Chemical Engineering Science*, 46(12):3203–3218.
- DING, S. (2008). *Model-Based Fault Diagnosis Techniques Design Schemes, Algorithms and tools*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- DIOP, S. et FLIESS, M. (1991). On nonlinear observability. In *1st European Control Conference*, Grenoble, France.
- DO, A. L., Gomes da SILVA JR., J. M., SENAME, O. et DUGARD, L. (2011). Control design for LPV systems with input saturation and state constraints : an application to a semi-active suspension. In *50th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA.
- DOCHAIN, D. (1986). *On line parameters estimation, adaptive state estimation and adaptive control of fermentation processes*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, Belgique.
- DUAN, G., LIU, G. et S., T. (2001). Eigenstructure assignment design for proportional-integral observers : continuous time case. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 148(3):263(267).
- EBENBAUER, C. et ALLGÖWER, F. (2006). Analysis and design of polynomial control systems using dissipation inequalities and sum of squares. *Computers and Chemical Engineering*, 30(10):1590–1602.
- EDWARDS, C. et SPURGEON, S. (1994). On the development of discontinuous observers. *International Journal of Control*, 59(1):1211–1229.
- EDWARDS, C., SPURGEON, S. et PATTON, R. (2000). Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4):541–553.
- ERZBERGER, H. (1967). *Analysis and design of model following control systems by state space techniques*. NASA techdocs.
- FILEV, D. (1991). Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3):281–290.

-
- FINDEISEN, R., ALLGÖWER, F. et BIEGLER, L. (2007). *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, Berlin, Germany.
- FOSSARD, A. et NORMAND-CYROT, D. (1993). *Systèmes non linéaires : Modélisation - Estimation (Tome I)*. Masson.
- FRANCIS, B. (1987). *A course in H_∞ Control Theory, volume 88 of Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, USA.
- FRIDMAN, L. et LEVANT, A. (2002.). *Higher Order Sliding Modes*. in *Sliding Mode Control in Engineering* (W. Perruquetti and J.B. Barbot, eds.), ch. 3, Marcel Dekker.
- GASSO, G. (2000). *Identification de systèmes dynamiques non linéaires : approche multi-modèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- GAUTHIER, J. P., HAMMOURI, H. et OTHMANN, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems : Application to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):875–880.
- GÉRARD, B. (2008). *Observateurs et commande basée sur un observateur pour les systèmes bilinéaires*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré- Nancy 1, France.
- GÉRARD, B., SOULEY ALI, H., ZASADZINSKI, M. et DAROUACH, M. (2010). H_∞ filter for bilinear systems using LPV approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(7):1688–1674.
- GERTLER, J. (1988). Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. *IEEE Control Systems Magazine*, 8(6):3–11.
- GERTLER, J. (1991). Analytical redundancy methods in fault detection and isolation. In *1st International Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Baden-Baden, Germany.
- GERTLER, J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker.
- GILBERT, E. G. et TAN, K. T. (1991). Linear systems with state and control constraints : The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36:1008–1020.
- GOLUB, G. et VAN LOAN, C. (1983). *Matrix Computations*. The Johns Hopkins university press, Baltimore, Maryland, USA.
- Gomes da SILVA JR, J. M. et TARBOURIECH, S. (2005). Antiwindup design with guaranteed regions of stability : An LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):106–111.
- GREEN, M. et LIMEBEER, D. (1995). *Robust Linear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- GRIMM, G., HATFIELD, J., POSTLETHWAITE, I., TEEL, A., TURNER, M. et ZACCARIAN, L. (2003). Antiwindup for stable linear systems with input saturation : an LMI-based synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9):1509–1525.
- GUELTON, K., BOUARAR, T. et MANAMANNI, N. (2009). Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems- a descriptor redundancy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19):2796–2811.

- GUERRA, T., KRUSZEWSKI, A., VERMEIREN, L. et TIRMANT, H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9):1248–1259.
- GUO, J., LIU, Y. et TAO, G. (2009). Multivariable MRAC with state feedback for output tracking. *In American Control Conference*, St. Louis, USA.
- HAMMOURI, H. et TMAR, Z. (2010). Unknown input observer for state affine systems : A necessary and sufficient condition. *Automatica*, 46:271–278.
- HENRION, D. (1999). *Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, France.
- HENRION, D. et TARBOURIECH, S. (1999). Relaxations LMI pour la stabilité robuste des systèmes linéaires à commande saturée. *In Journées Doctorales d'Automatique*, Nancy, France.
- HENRY, D. et ZOLGHARI, A. (2006). Norm-based design of robust FDI schemes for uncertain systems under feedback control : comparison of two approaches. *Control Engineering Practice*, 14(9):1081–1097.
- HENRY, D., ZOLGHARI, A., GASTANG, F. et MONSION, M. (2001). A new multi-objective filter design for guaranteed robust FDI performance. *In 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA.
- HENZE, M., LESLIE GRADY JR, C. P., GUJER, W., MARAIS, G. V. R. et MATSUO, T. (1987). Activated sludge model. Rapport technique, no.1. I.A.W.Q. Scientific and Technical Report, London, UK.
- HOU, M. et MULLER, P. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):871–875.
- HSU, L., OLIVEIRA, M. et PEIXOTO, A. (2006). Sliding mode control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction. *In International Workshop on Variable Structure Systems*, Alghero, Sardinia, Italy.
- HU, T. et LIN, Z. (2003). Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):440–450.
- HUANG, D. et NGUANG, S. K. (2006). Robust H_∞ static output feedback control of fuzzy systems : An ILMI approach. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 36(1):216–222.
- HUNT, K., HAAS, R. et MURRAY-SMITH, R. (1996). Extending the functional equivalence of radial basis function networks and fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(3):776–781.
- ICHALAL, D. (2009). *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- ICHALAL, D., MARX, B., RAGOT, J. et MAQUIN, D. (2009a). Simultaneous state and unknown inputs estimation with PI and PMI observers for Takagi-Sugeno model with unmeasurable premise variables. *In 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Thessaloniki, Greece.
- ICHALAL, D., MARX, B., RAGOT, J. et MAQUIN, D. (2009b). State and unknown input estimation for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno models with unmeasurable premise variables. *In 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Thessaloniki, Greece.

-
- ICHALAL, D., MARX, B., RAGOT, J. et MAQUIN, D. (2010). State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory & Applications*, 4(5):897–908.
- ICHALAL, D., MARX, B., RAGOT, J. et MAQUIN, D. (2012). Advances in observer design for Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. In *20th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Barcelona, Spain.
- ISERMANN, R. (1997). Supervision, fault detection et fault diagnosis methods : an introduction. *Control Engineering Practice*, 5(5):639–652.
- ISERMANN, R. (2006). *Fault-Diagnosis Systems : An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer, Berlin, Germany.
- ISIDORI, A. et BYRNES, C. (1990). Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2):131–140.
- JANG, J.-S. et SUN, C.-T. (1993). Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4(1):156–159.
- JOSHI, S., TAO, G. et PATRE, P. (2011). Direct adaptive control using an adaptive reference model. *International Journal of Control*, 84(1):180–196.
- KALMAN, R. (1963). Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. *Proceeding of the National Academy of Science of the USA*, 49(2):201–205.
- KAMIDI, R. (2000). Controllability and observability of polytopic linear models. Mémoire de D.E.A., Eindhoven University of Technology, The Netherlands.
- KAPASOURIS, P. et ATHANS, M. (1988). Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuator. In *27th Conference on Decision and Control*, Austin, Texas, USA.
- KAPOOR, N., TEEL, A. R. et DAOUTIDIS, P. (1998). An anti-windup design for linear systems with input saturation. *Automatica*, 34(5):559–574.
- KAWAMOTO, S., TADA, K., ISHIGAME, A. et TANIGUCHI, T. (1992). An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Diego, California, USA.
- KELLEY, C. T. (1995). *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvanie, USA.
- KENNE, G., AHMED-ALI, T., LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. et ARZANDE, A. (2008). Nonlinear systems time-varying parameter estimation : Application to induction motors. *Electric Power Systems Research*, 78(11):1881–1888.
- KERRIGAN, E. et MACIEJOWSKI, J. (1999). Fault-tolerant control of a ship propulsion system using model predictive control. In *Proceedings of European Control Conference*, Karlsruhe, Germany.
- KHALIL, H. (1992). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- KRUSZEWSKI, A. (2006). *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, France.

- LENDEK, Z., LAUBER, J., GUERRA, T., BABUSKA, R. et DE SCHUTTER, B. (2010). Adaptive observers for T-S fuzzy systems with unknown polynomial inputs. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(15):2043–2065.
- LI, J., WANG, H. O., NEWMANN, D. et TANAKA, K. (2000). Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno systems : An LMI approach. *Information Sciences*, 123(4):201–221.
- LI, X., ZHANG, Q. et SU, H. (2011). An adaptive observer for joint estimation of states and parameters in both state and output equations. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25(9):765–854.
- LIN, C., WANG, Q. G. et LEE, T. H. (1999). H_∞ -control for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems. In *International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, Tokyo, Japan.
- LJUNG, L. (1979). Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(1):36–50.
- LJUNG, L. et SODESTRÖM, T. (1983). *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press.
- LUBENOVA, V. (1999). Stable adaptive algorithm for simultaneous estimation of time-varying parameters and state variables in aerobic bioprocesses. *Bioprocess Engineering*, 21:219–226.
- LUENBERGER, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596–602.
- MACIEJOWSKI, J. et JONES, C. (2003). MPC fault-tolerant flight control case study : flight 1862. In *Proceedings of SAFEPROCESS'2003*, Washington D.C., USA.
- MANSOURI, B., MANAMANNI, N., GUELTON, K., KRUSZEWSKI, A. et GUERRA, T. (2009). Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models. *Information Sciences*, 179(4):446–457.
- MAQUIN, D. et RAGOT, J. (2000). *Diagnostic des Systèmes Linéaires*. Hermes Science Publications, France.
- MARX, B., KOENIG, D. et GEORGES, D. (2003). Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA.
- MARX, B., KOENIG, D. et RAGOT, J. (2007). Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis. *IET Control Theory and Applications*, 1(5): 1487–1495.
- MOHAMMADPOUR, J. et SCHERER, C. (2012). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer, New York, USA.
- MORÈRE, Y. (2001). *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France.
- MULDER, E., KOTHARE, M. et MORARI, M. (2001). Multivariable antiwindup controller synthesis using linear matrix inequalities. *Automatica*, 37(9):1407–1416.
- MURRAY-SMITH, R. et JOHANSEN, T. (1997). *Multiple model approaches to modeling and control*. Taylor & Francis, London, UK.

-
- NAGY, A., MARX, B., MOUROT, G. and SCHUTZ, G. et RAGOT, J. (2011). Observers design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant. *Journal of Process Control*, 21(7):1105–1114.
- NAGY, A., MOUROT, G., MARX, B., RAGOT, J. et SCHUTZ, G. (2010). Systematic multimodeling methodology applied to an activated sludge reactor model. *Industrial Engineering Chemical Research*, 49(6):2790–2799.
- NIE, C. et PATTON, R. (2011). Fault estimation and MRC-based active FTC. In *18th IFAC World Congress*, Milano, Italy.
- NIKOLAOU, M. (2001). Model predictive controllers : A critical synthesis of theory and industrial needs. *Advances in Chemical Engineering*, 26(34):131–204.
- NOURA, H., SAUTER, D., HAMELON, F. et THEILLIOL, D. (2000). Fault-tolerant control in dynamic systems : Application to a winding machine. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(1):33–49.
- ORJUELA, R. (2008). *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.
- ORJUELA, R., MARX, B., RAGOT, J. et MAQUIN, D. (2013). Nonlinear system identification using heterogeneous multiple models. *Applied Mathematics and Computer Science*, 23(1):103–115.
- PARK, J.-K. et CHOI, C.-H. (1995). Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(9):1635–1640.
- PATTON, R., CHEN, J. et LOPEZ-TORIBIO, C. (1998). Fuzzy observers for nonlinear dynamic systems fault diagnosis. In *37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA.
- POPOV, V. (1962). Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation and Remote Control*, 22(8):857–875.
- RAGOT, J., DAROUACH, M., MAQUIN, D. et BLOCH, G. (1990). *Validation de données et diagnostic*. Hermes Science Publications, France.
- RAJAMANI, R. et HEDRICH, J. (1995). Adaptive observer for active automotive suspensions- theory and experiment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(1):86–93.
- RODRIGUES, M. (2005). *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, France.
- ROTEA, M., CORLESS, M., DA, D. et PETERSEN, I. (1993). Systems with structured uncertainty : relations between quadratic and robust stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(5):799–803.
- SALA, A. et ARINO, C. (2007). Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polyá's theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(24): 2671–2686.
- SASTRY, S. et BODSON, M. (1989). *Adaptive control : Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, New Jersey, USA.
- SCORLETTI, G. et EL GHAOU, L. (1998). Improved lmi conditions for gain scheduling and related control problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(10):845–877.

- SENAME, O. et DUGARD, L. (2012). Quelques développements sur le contrôle de la dynamique de véhicule : une approche LPV du problème. In *7^{me} Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2012*, Grenoble, France.
- SHIMIZU, K., ITO, S. et SUZUKI, S. (2005). Tracking control of general nonlinear systems by a direct gradient descent method. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 5(1):91–105.
- SHUMSKY, A. (2008). Algebraic approach to the problem of fault accommodation in nonlinear systems. In *17th World Congress*, Seoul, South Korea.
- STAROSWIECKI, M. et GEHIN, A.-L. (2001). From control to supervision. *Annual Reviews in Control*, 25:1–11.
- STEIN, G. (1989). Respect the unstable. Bode lecture. In *28th Conference on Decision and Control*, Tampa, Floride, USA.
- STEPANYAN, V. et KRINSHNAKUMAR, K. (2010). MRAC revisited : guaranteed performance with reference model modification. In *American Control Conference*, Maryland, Baltimore, USA.
- STEPANYAN, V., KRISHNAKUMAR, K. et NGUYEN, N. (2009). Transient performance and asymptotic tracking with filtering robust adaptive control. In *IEEE Aerospace Conference*, Bigsky, Montana, USA.
- SYAICHU-ROHMAN, A. (2005). *Optimisation Based Feedback Control of Input Constrained Linear Systems*. Thèse de doctorat, The University of Newcastle Callaghan, Australia.
- SYAICHU-ROHMAN, A. et MIDDLETON, R. (2004). Anti-windup schemes for discrete time systems : An LMI-based design. In *5th Asian Control Conference*, Melbourne, Victoria, Australia.
- TAKAGI, T. et SUGENO, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1):116–132.
- TAN, C. et EDWARDS, C. (2003). Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(5):443–446.
- TANAKA, K., HORI, T. et WANG, H. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11:582–589.
- TANAKA, K., IKEDA, T. et WANG, H. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2):250–265.
- TANAKA, K., OHTAKE, H. et WANG, H. (2007). A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(3):333–341.
- TANAKA, K. et WANG, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, Inc.
- TANIGUCHI, T., TANAKA, K., OTHAKE, H. et WANG, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Transactions on Fuzzy Systems*, 9(4):525–537.
- TANIGUCHI, T., TANAKA, K., YUMAFUJI, K. et WANG, H. (1999). A new PDC fuzzy reference models. In *IEEE International Fuzzy Systems Conference*, Seoul, South Korea.

-
- TAO, G. (2003). *Adaptive Control Design and Analysis*. John Wiley and Sons, New York, USA.
- TONG, S., WANG, T. et LI, H.-X. (2002). Fuzzy robust tracking control for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 30(2):73–90.
- TSENG, C. et CHEN, B. (2001). H_∞ decentralized fuzzy model reference tracking control design for nonlinear interconnected systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(6):795–809.
- TSENG, C.-S., CHEN, B.-S. et UANG, H. (2001). Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(3):381–392.
- TUAN, H. D., APKARIAN, P., NARIKIYO, T. et YAMAMOTO, Y. (2001). Parameterized Linear Matrix Inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2):324–332.
- VALDES-GONZALEZ, H.-M. (2002). *Contribution à l'Estimation d'Etat à Horizon Glissant par Méthodes Ensemblistes : Applications à la Surveillance et Détection des Dysfonctionnements sur des Bioprocédés*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, France.
- WALGAMA, K. S. et STERNBY, J. (1993). Conditioning technique for multiinput multioutput processes with input saturation. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 140(4):231–241.
- WANG, H. O., TANAKA, K. et GRIFFIN, M. (1996). An approach to fuzzy control of non linear systems : Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23.
- WANG, W. et LIN, H. (1999). Fuzzy control design for the trajectory tracking on uncertain nonlinear system. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(1):53–62.
- WEIJERS, S. (2000). *Modelling, identification and control of activated sludge plants for nitrogen removal*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, The Netherlands.
- WILLEMS, J. (1971). Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):621–634.
- WU, F., GRIGORIADIS, K. M. et PACKARD, A. (2000). Anti-windup controller design using linear parameter-varying control methods. *International Journal of Control*, 73(12):1104–1114.
- YAKUBOVICH, V. (1962). Solution of certain matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems. *Soviet Mathematics-Doklady*, 3:620–623.
- YAN, L., HSU, L., COSTA, R. R. et LIZARRALDE, F. (2003). Variable structure model reference adaptive control for systems with unknown high frequency gain. In *42th Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA.
- YAN, L. et XU, J. (2004). A model reference robust control with unknown high frequency gain. In *43th Conference on Decision and Control*, Atlantis, Bahamas, USA.
- YANG, F. et WILDE, R. (1988). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7):677–681.
- YANG, L., NEILD, S., WAGG, D. et VIRDEN, D. (2006). Model reference adaptive control of a nonsmooth dynamical system. *Nonlinear Dynamics*, 46(3):323–335.

-
- YONEYAMA, J., NISHIKAWA, M., KATAYAMA, H. et ICHIKAWA, A. (2001). Design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 121(1):127–148.
- YONEYAMA, Y. (2006). Output feedback stabilization of fuzzy systems with unobservable premise variables. *In International Conference on System of Systems Engineering*, Los Angeles, CA, USA.
- YONEYAMA, Y. (2008). H_∞ filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables : An uncertain system approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 39(10):1033–1040.
- YU, H., DENG, M., YANG, T. C. et OWENS, D. H. (2002). Model reference parametric adaptive iterative learning control. *In 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- ZACCARIAN, L. et TEEL, A. (2002). A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable design. *Automatica*, 38(10):1735–1744.
- ZHANG, K., JIANG, B. et SHI, P. (2009). A new approach to observer-based fault-tolerant controller design for Takagi-Sugeno fuzzy systems with state delay. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 28(5):679–697.
- ZHANG, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3):525–529.
- ZHANG, Q. et XU, A. (2001). Implicit adaptive observers for a class of nonlinear systems. *In American Control Conference, ACC*, Arlington, Virginia, USA.
- ZHOU, K., DOYLE, J. et GLOVER, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- ZHOU, K. et KHARGONEKAR, P. (1988). Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, 10(1):17–20.

Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno

Résumé : Cette thèse porte sur la représentation T-S des systèmes non linéaires et les non-linéarités qui leur sont associées (saturation et paramètres variants dans le temps) pour la commande et le diagnostic. Ainsi, une nouvelle approche utilisant la transformation par secteurs non linéaires permet de ré-écrire le système sous forme polytopique en prenant en compte la présence de paramètres variants dans le temps. Cette forme polytopique est ensuite utile pour la synthèse d'observateurs assurant l'estimation simultanée de l'état et des paramètres du système. Une application au diagnostic est également considérée en comparant les valeurs des paramètres estimés en ligne avec leurs valeurs nominales supposées connues et représentatives du mode de fonctionnement non défaillant. Concernant la commande, la contrainte de saturation est représentée sous forme de modèle T-S et est intégrée au modèle du système. La synthèse de plusieurs lois de commande assurant la stabilité du système bouclé, en prenant en compte les limites de saturation est proposée. La poursuite de modèle de référence est également traitée avec la mise en évidence des conditions structurelles de poursuite pour les modèles non linéaires sous forme T-S. L'accent est mis sur les différents critères de choix de commande en fonction des buts recherchés.

Mots-clés : Systèmes non linéaires, modèle de Takagi-Sugeno, estimation d'état et de paramètres, diagnostic, saturation et commande tolérante aux défauts, poursuite de modèle de référence.

Abstract:

Fault tolerant control for Takagi-Sugeno nonlinear systems

A first contribution of this thesis is to propose a systematic procedure to deal with the state and parameter estimation for nonlinear time-varying systems. It consists in transforming the original system into a T-S model with unmeasurable premise variables using the sector nonlinearity transformation. Then a joint state and parameter observer is designed and the convergence conditions of the joint state and parameter estimation errors are established. The second contribution of this thesis is the stabilization problem under saturation constraints. In fact, we aim to present a new approach for the saturation nonlinearity study, where the sector nonlinearity transformation is used to represent the nonlinear behaviour of a saturated actuator under a T-S form. The T-S representation of the saturation is used to integrate the limitation constraints into the control synthesis, such that the system stability is ensured and the controller gains are calculated according to the saturation level. The model reference tracking control problem is also addressed. It aims to highlight the encountered difficulties and the proposed solutions to achieve the tracking objective. Through analytical studies, by presenting clear structural conditions and control strategies, we try to point and answer some major interrogations, that are : "how the model reference is to be chosen ? " and "which tracking criterion to consider to achieve a certain objective ? ". The case of constrained control input is also considered with a special focus on the anticipation for the saturated control.

Keywords: Nonlinear systems, Takagi-Sugeno model, joint state and parameter estimation, faults diagnosis, saturation and fault tolerant control, model reference tracking.