

# Introduction aux multimodèles. Obtention de multimodèles.

-  
Session S1

-  
Benoît MARX et José RAGOT

**Ecole MACS, Strasbourg, 9-10 juillet.**

Université de Lorraine



Centre de Recherche en Automatique de Nancy



Centre National de la Recherche Scientifique



1. Introduction aux multimodèles
  - Objectif et principe général
  - Définition d'un multimodèle
  - Tentative de classification
  - Limites et avantages de l'approche multimodèle
  - Liens avec d'autres classes de systèmes
2. Comment obtenir un multimodèle ?
  - Identification de MM à partir de données
  - Linéarisations multiples d'un modèle NL
  - Transformation par secteurs non linéaires
3. Transformation par secteurs non linéaires
  - Une écriture équivalente, mais des résultats différents
  - Comment choisir parmi les différents MM possibles ?
  - Application à un modèle simplifié de station d'épuration

1. Introduction aux multimodèles
  - Objectif et principe général
  - Définition d'un multimodèle
  - Tentative de classification
  - Limites et avantages de l'approche multimodèle
  - Liens avec d'autres classes de systèmes
2. Comment obtenir un multimodèle ?
3. Transformation par secteurs non linéaires

# Objectif et principe général

- ▶ **Objectif :**

analyse, observation, contrôle, diagnostic ... de  **systèmes non linéaires**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = g(x(t), u(t))$$

avec des méthodes proches de celles des  **systèmes linéaires**

→ algèbre linéaire, optimisation sous contraintes LMI, etc

- ▶ **Principe : généraliser la linéarisation d'un système non linéaire**

# Objectif et principe général

## ► Objectif :

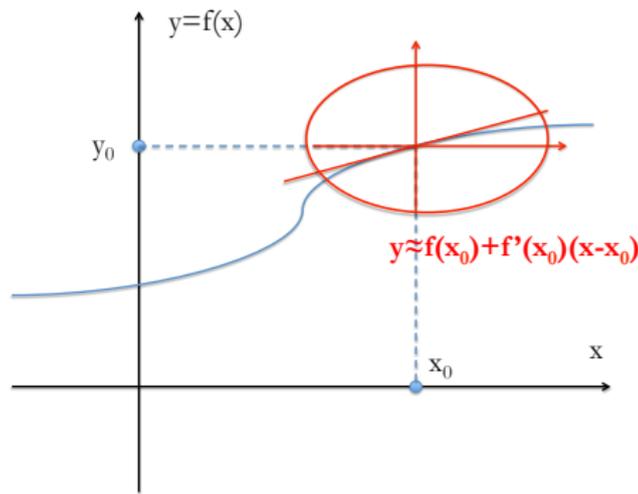
analyse, observation, contrôle, diagnostic ... de  **systèmes non linéaires**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = g(x(t), u(t))$$

avec des méthodes proches de celles des  **systèmes linéaires**

→ algèbre linéaire, optimisation sous contraintes LMI, etc

## ► Principe : généraliser la linéarisation d'un système non linéaire autour d'un point



# Objectif et principe général

## ► Objectif :

analyse, observation, contrôle, diagnostic ... de  **systèmes non linéaires**

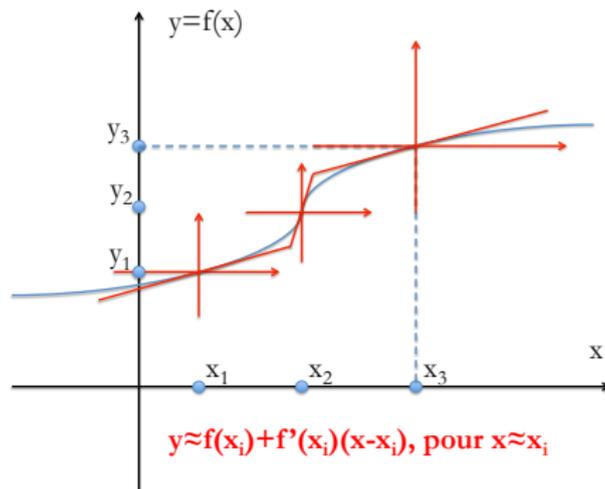
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = g(x(t), u(t))$$

avec des méthodes proches de celles des  **systèmes linéaires**

→ algèbre linéaire, optimisation sous contraintes LMI, etc

## ► Principe : généraliser la linéarisation d'un système non linéaire

par la linéarisation autour de plusieurs points



# Objectif et principe général

## ► Objectif :

analyse, observation, contrôle, diagnostic ... de  **systèmes non linéaires**

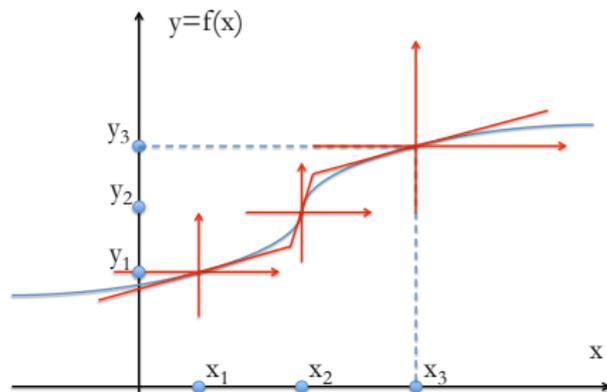
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = g(x(t), u(t))$$

avec des méthodes proches de celles des  **systèmes linéaires**

→ algèbre linéaire, optimisation sous contraintes LMI, etc

## ► Principe : généraliser la linéarisation d'un système non linéaire

par l' **interpolation**  entre la linéarisation autour de plusieurs points



$$y \approx \sum_i \mu_i(x) [f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)]$$

$$\text{avec } \mu_i(x) \approx 1 \text{ si } x \approx x_i$$

# Illustration du principe

- ▶ On considère la fonction

$$f(x) = x^3$$

- ▶ On peut linéariser en 2 points  $x_i$  :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$  et  $x_2 = 2$

- ▶ En pondérant avec :

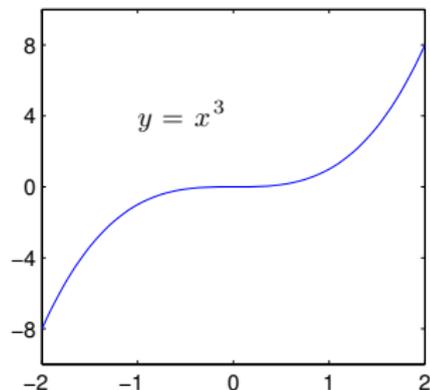
$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{\frac{-(x-x_i)^2}{p}}$ ,  $p = 4.5$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^2 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$

- ▶ Optimisation des paramètres  $x_1, x_2, p$



# Illustration du principe

- ▶ On considère la fonction

$$f(x) = x^3$$

- ▶ On peut linéariser en 2 points  $x_i$  :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$  et  $x_2 = 2$

- ▶ En pondérant avec :

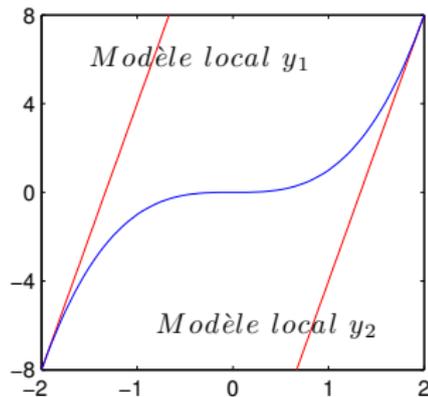
$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{p}}$ ,  $p = 4.5$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^2 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$

- ▶ Optimisation des paramètres  $x_1, x_2, p$



# Illustration du principe

- ▶ On considère la fonction

$$f(x) = x^3$$

- ▶ On peut linéariser en 2 points  $x_i$  :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$  et  $x_2 = 2$

- ▶ En pondérant avec :

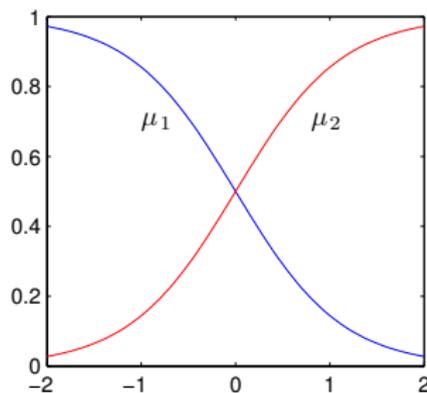
$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{p}}$ ,  $p = 4.5$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^2 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$

- ▶ Optimisation des paramètres  $x_1, x_2, p$



# Illustration du principe

- ▶ On considère la fonction

$$f(x) = x^3$$

- ▶ On peut linéariser en 2 points  $x_i$  :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$  et  $x_2 = 2$

- ▶ En pondérant avec :

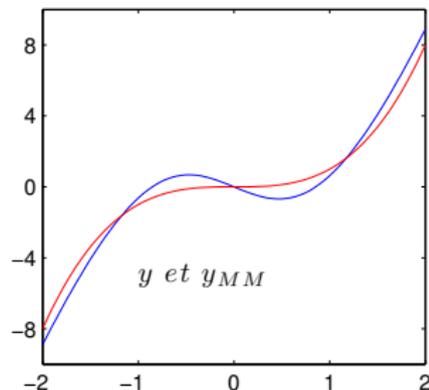
$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{\frac{-(x-x_i)^2}{p}}$ ,  $p = 4.5$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^2 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$

- ▶ Optimisation des paramètres  $x_1, x_2, p$



# Illustration du principe (suite)

- ▶ Approximation moyenne en  $x \approx 0$
- ▶ Nombre de sous-modèles ↗
- ▶ On peut linéariser en 3 points :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 2$

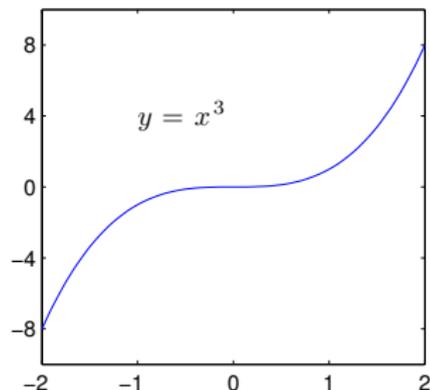
- ▶ En pondérant avec :

$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{5}}$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^3 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$



# Illustration du principe (suite)

- ▶ Approximation moyenne en  $x \approx 0$
- ▶ Nombre de sous-modèles ↗
- ▶ On peut linéariser en 3 points :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 2$

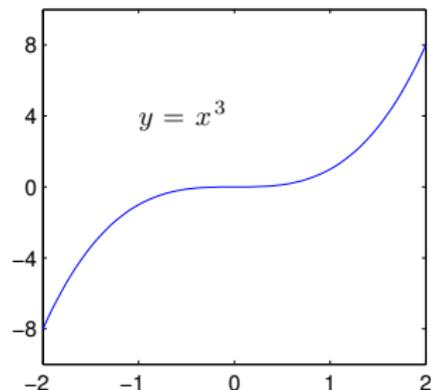
- ▶ En pondérant avec :

$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{5}}$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^3 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$



# Illustration du principe (suite)

- ▶ Approximation moyenne en  $x \approx 0$
- ▶ Nombre de sous-modèles ↗
- ▶ On peut linéariser en 3 points :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 2$

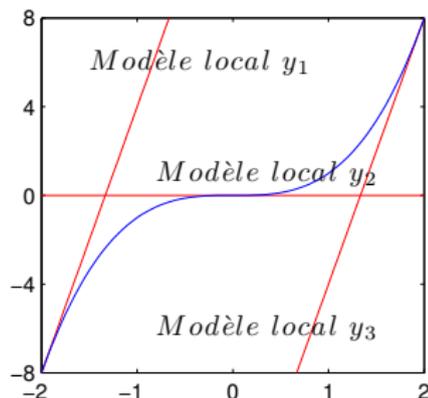
- ▶ En pondérant avec :

$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{5}}$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^3 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$



# Illustration du principe (suite)

- ▶ Approximation moyenne en  $x \approx 0$
- ▶ Nombre de sous-modèles ↗
- ▶ On peut linéariser en 3 points :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 2$

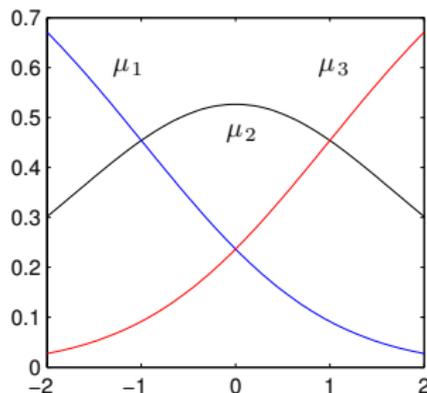
- ▶ En pondérant avec :

$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{5}}$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^3 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$



# Illustration du principe (suite)

- ▶ Approximation moyenne en  $x \approx 0$
- ▶ Nombre de sous-modèles ↗
- ▶ On peut linéariser en 3 points :

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

avec  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 2$

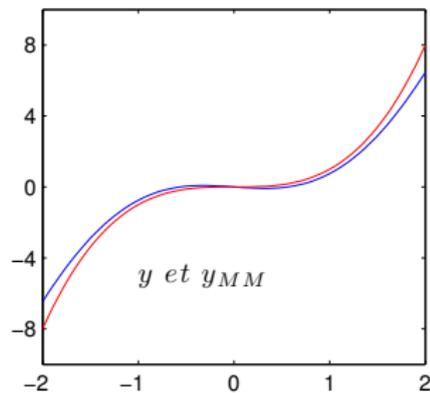
- ▶ En pondérant avec :

$$\mu_i(x) = \frac{\lambda_i(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x)}$$

où  $\lambda_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i)^2}{5}}$

- ▶ On obtient l'approximation :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^3 \mu_i(x)(f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i))$$



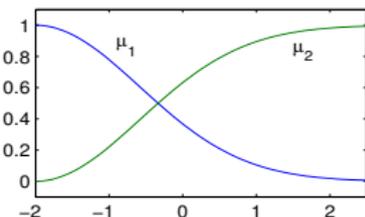
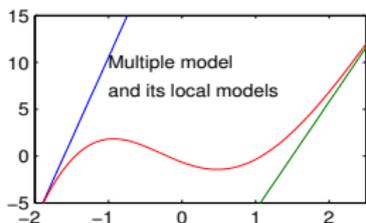
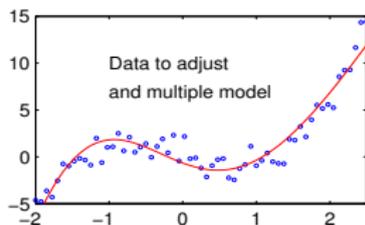
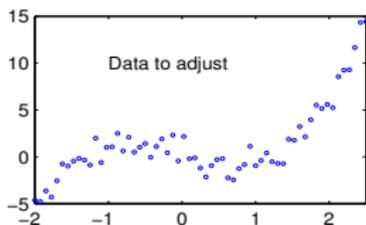
# Illustration du principe (fin)

- ▶ On pourrait en conclure que :
  - ▶ les sous-modèles ont un sens physique
  - ▶ les sous-modèles correspondent à des modèles locaux
  - ▶ l'augmentation du nombre de sous-modèles améliore la précision
  - ▶ le multimodèle est une approximation
- ▶ ce n'est pas toujours vrai

# Illustration du principe (fin)

- ▶ On pourrait en conclure que :
  - ▶ les sous-modèles ont un sens physique
  - ▶ les sous-modèles correspondent à des modèles locaux
  - ▶ l'augmentation du nombre de sous-modèles améliore la précision
  - ▶ le multimodèle est une approximation
- ▶ ce n'est pas toujours vrai

# Multimodèle et fonctionnement local



Modèle local 1 :  $y_1 = 17.4x + 27.9$

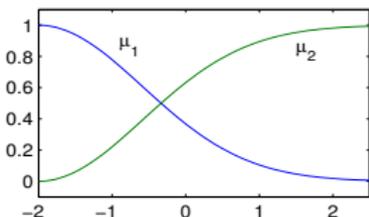
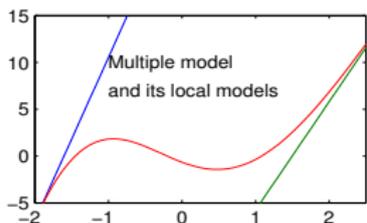
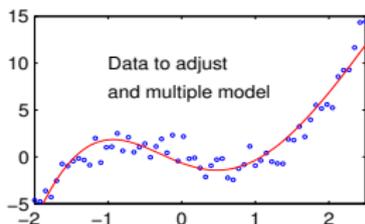
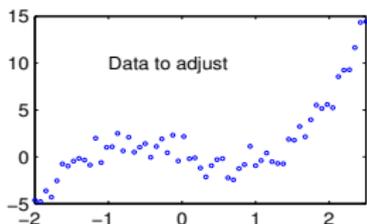
Modèle local 2 :  $y_2 = 11.5x - 17.3$

Fonction poids :  $\mu_1 = \exp\left(-\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right)$

$$y(x) = \mu_1(x) \cdot y_1(x) + \mu_2(x) \cdot y_2(x)$$

Chaque modèle local a un sens physique. De plus, l'approximation des points expérimentaux est satisfaisante

# Multimodèle et fonctionnement local



Modèle local 1 :  $y_1 = 17.4x + 27.9$

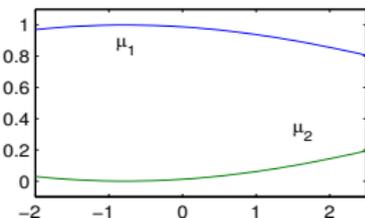
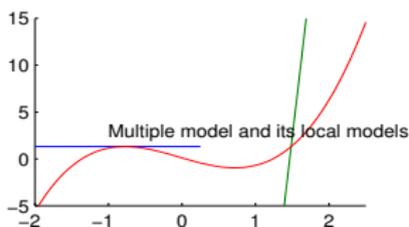
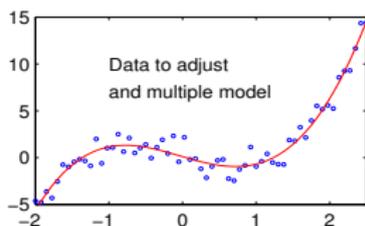
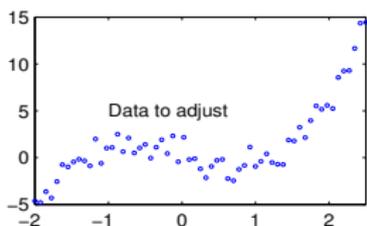
Modèle local 2 :  $y_2 = 11.5x - 17.3$

Fonction poids :  $\mu_1 = \exp\left(-\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right)$

$$y(x) = \mu_1(x) \cdot y_1(x) + \mu_2(x) \cdot y_2(x)$$

Chaque modèle local a un sens physique. De plus, l'approximation des points expérimentaux est satisfaisante

# Multimodèle et fonctionnement local



Modèle local 1 :  $y_1 = 0.0001x + 1.32$

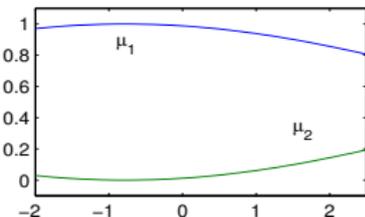
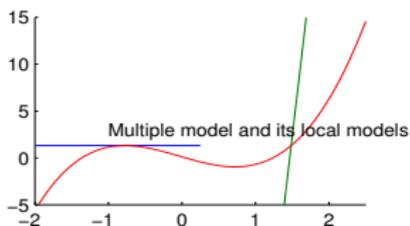
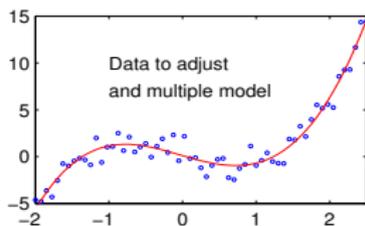
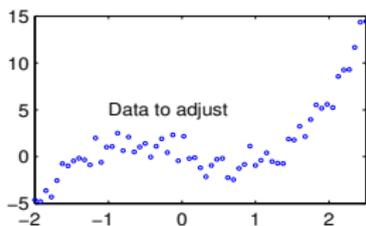
Modèle local 2 :  $y_2 = 67.4x - 98.77$

Fonction poids :  $\mu_1 = \exp\left(-\left(\frac{x+0.77}{7.06}\right)^2\right)$

$$y(x) = \mu_1(x) \cdot y_1(x) + \mu_2(x) \cdot y_2(x)$$

Les modèles locaux n'ont pas de sens physique. Cependant, l'approximation des points expérimentaux est satisfaisante.

# Multimodèle et fonctionnement local



Modèle local 1 :  $y_1 = 0.0001x + 1.32$

Modèle local 2 :  $y_2 = 67.4x - 98.77$

Fonction poids :  $\mu_1 = \exp\left(-\left(\frac{x+0.77}{7.06}\right)^2\right)$

$y(x) = \mu_1(x).y_1(x) + \mu_2(x).y_2(x)$

Les modèles locaux n'ont pas de sens physique. Cependant, l'approximation des points expérimentaux est satisfaisante.

# Définition d'un multimodèle

- ▶ Un multimodèle est défini par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶  $x(t)$  est le vecteur d'état
  - ▶  $u(t)$  est le vecteur de commande
  - ▶  $y(t)$  est le vecteur de sortie
  - ▶ les quadruplets  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  sont les **sous modèles**
  - ▶  $r$  est le nombre de sous modèles
  - ▶ les fonctions  $\mu_i$  sont les **fonctions d'activation** (ou de **pondération**)
  - ▶  $z(t)$  est la **variable de décision**
- ▶ Les fonctions d'activation vérifient la **propriété de somme convexe**

$$0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$$

# Définition d'un multimodèle

- ▶ Un multimodèle est défini par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶  $x(t)$  est le vecteur d'état
  - ▶  $u(t)$  est le vecteur de commande
  - ▶  $y(t)$  est le vecteur de sortie
  - ▶ les quadruplets  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  sont les **sous modèles**
  - ▶  $r$  est le nombre de sous modèles
  - ▶ les fonctions  $\mu_i$  sont les **fonctions d'activation** (ou de **pondération**)
  - ▶  $z(t)$  est la **variable de décision**
- ▶ Les fonctions d'activation vérifient la **propriété de somme convexe**

$$0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$$

# Essai de classification : MM découplés / homogènes (1)

Les sous-modèles peuvent partager le même espace d'état ou non

- ▶ **espace d'état commun** à tous les sous-modèles :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$   
modèle polytopique, ou Takagi-Sugeno<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶ **espace d'état distinct** pour chaque sous-modèle :  $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$   
multimodèles découplés<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i u(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) y_i(t) \end{cases}$$

---

1. T. Takagi, M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 15, 116-132, 1985.

2. D. Filev. Fuzzy modeling of complex systems, Int. J. of Approximate Reasoning, 5(3), 281-290, 1991

# Essai de classification : MM découplés / homogènes (1)

Les sous-modèles peuvent partager le même espace d'état ou non

- ▶ **espace d'état commun** à tous les sous-modèles :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$   
modèle polytopique, ou Takagi-Sugeno<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- ▶ **espace d'état distinct** pour chaque sous-modèle :  $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$   
multimodèles découplés<sup>2</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i u(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) y_i(t) \end{cases}$$

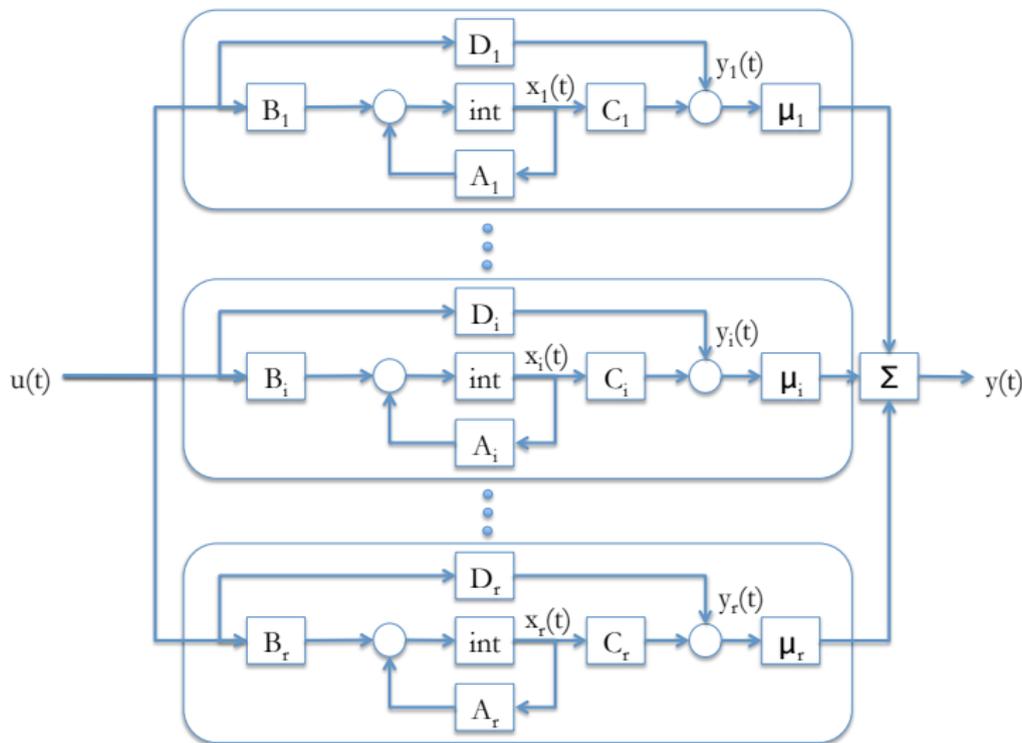
---

1. T. Takagi, M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 15, 116-132, 1985.

2. D. Filev. Fuzzy modeling of complex systems, Int. J. of Approximate Reasoning, 5(3), 281-290, 1991

# Essai de classification : MM découplés / homogènes (2)

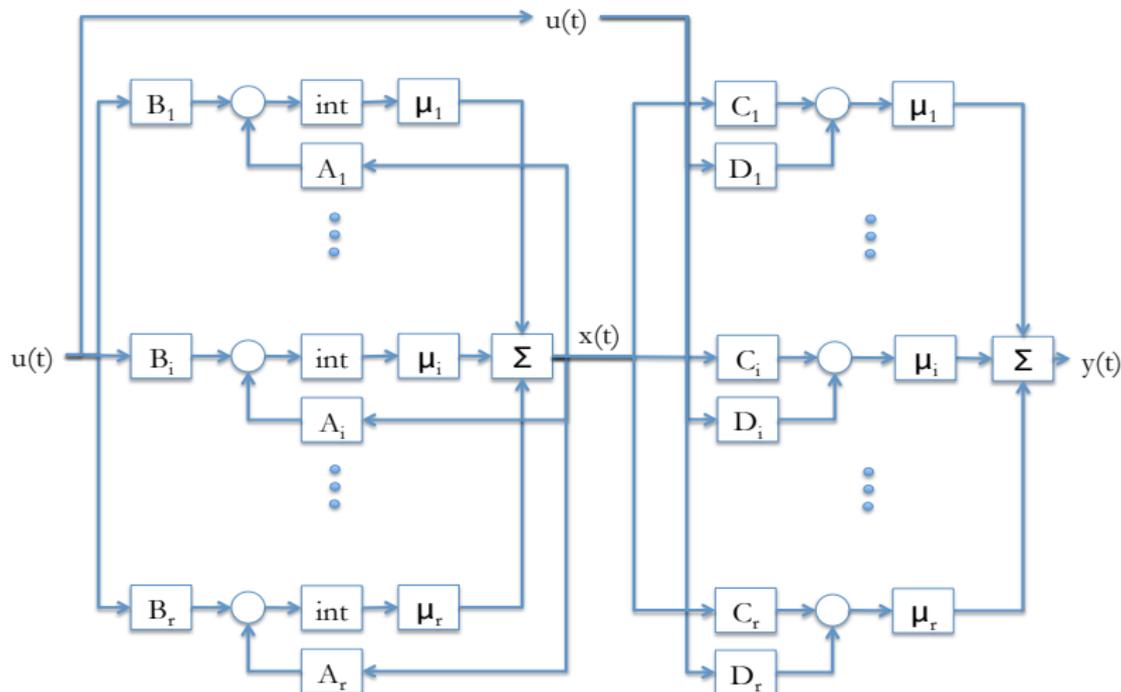
## Structure des multimodèles découplés



- ▶ un vecteur d'état  $x_i(t)$  par sous-modèle ( $A_i, B_i, C_i, D_i$ )
- ▶ interpolation des équations statiques de sortie ( $y = \sum_i \mu_i(\dots)$ )

# Essai de classification : MM découplés / homogènes (3)

## Structure des multimodèles de Takagi-Sugeno (T-S)



- ▶ un vecteur d'état  $x(t)$  commun à tous les sous-modèles
- ▶ interpolations des équations dynamiques ( $\dot{x} = \sum_i \mu_i(\dots)$ ) et statiques ( $y = \sum_i \mu_i(\dots)$ )

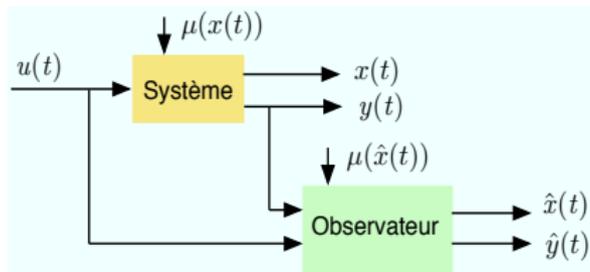
## Comparaison entre les MM découplés et T-S

- ▶ étude de la stabilité plus simple pour les MM découplés  
MM stable  $\Leftrightarrow$  tous les sous-modèles stables
- ▶ en identification, possibilité d'adapter la dimension  $n_i$  des sous-modèles au comportement local pour éviter de sur-paramétrer
- ▶ les MM découplés peuvent s'écrire comme un cas particulier des T-S

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \left( \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix} u(t) \right)$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \left( \begin{bmatrix} 0 & C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_r(t) \end{bmatrix} + D_i u(t) \right)$$

Les variables de décision  $z(t)$  peuvent dépendre

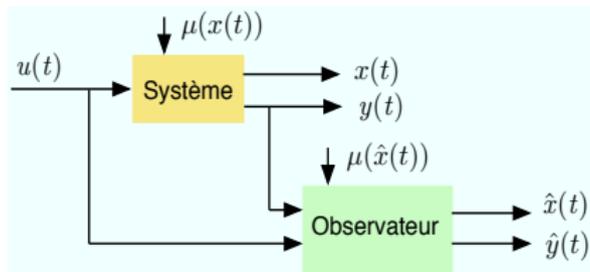
- ▶ de grandeurs mesurées : entrée  $u(t)$ , sortie  $y(t)$ , etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état  $x(t)$ , etc



# Essai de classification : Variables de décision mesurables ou non

Les variables de décision  $z(t)$  peuvent dépendre

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée  $u(t)$ , sortie  $y(t)$ , etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état  $x(t)$ , etc



Le cas de variables de décision non mesurables

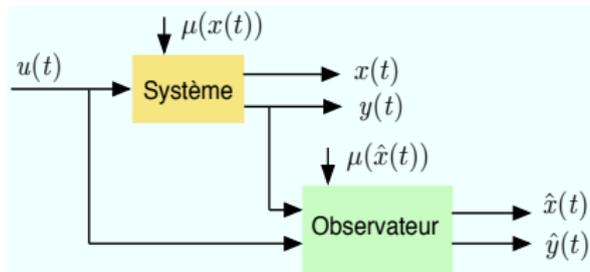
- ▶ est moins étudié
- ▶ est plus complexe, par exemple pour l'estimation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_i \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_i \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \end{cases}$$

- ▶ apparaît pourtant naturellement quand le MM est obtenu par transformation par secteurs non linéaires

Les variables de décision  $z(t)$  peuvent dépendre

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée  $u(t)$ , sortie  $y(t)$ , etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état  $x(t)$ , etc



Le cas de variables de décision non mesurables

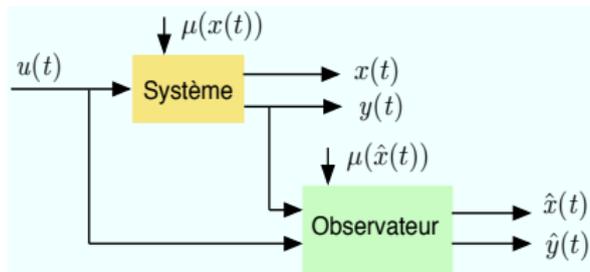
- ▶ est moins étudié
- ▶ est plus complexe, par exemple pour l'estimation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_i \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_i \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \end{cases}$$

- ▶ apparaît pourtant naturellement quand le MM est obtenu par transformation par secteurs non linéaires

Les variables de décision  $z(t)$  peuvent dépendre

- ▶ de grandeurs mesurées : entrée  $u(t)$ , sortie  $y(t)$ , etc
- ▶ de grandeurs non mesurées : état  $x(t)$ , etc



Le cas de variables de décision non mesurables

- ▶ est moins étudié
- ▶ est plus complexe, par exemple pour l'estimation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_i \mu_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \sum_i \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))) \end{cases}$$

- ▶ apparaît pourtant naturellement quand le MM est obtenu par transformation par secteurs non linéaires

- ▶ MM à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

analyse de stabilité et synthèse basées sur des fonctions de Lyapunov  $V(x(t))$  et des conditions de type  $\frac{d}{dt}(V(x(t))) < 0$

- ▶ MM à temps discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(z_k)(A_i x_k + B_i u_k) \\ y_k = \sum_{i=1}^r \mu_i(z_k)(C_i x_k + D_i u_k) \end{cases}$$

analyse de stabilité et synthèse basées sur des fonctions de Lyapunov  $V(x_k)$  et des conditions de type  $V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0$

- ▶ MM à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

analyse de stabilité et synthèse basées sur des fonctions de Lyapunov  $V(x(t))$  et des conditions de type  $\frac{d}{dt}(V(x(t))) < 0$

- ▶ MM à temps discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i(z_k)(A_i x_k + B_i u_k) \\ y_k = \sum_{i=1}^r \mu_i(z_k)(C_i x_k + D_i u_k) \end{cases}$$

analyse de stabilité et synthèse basées sur des fonctions de Lyapunov  $V(x_k)$  et des conditions de type  $V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ Le gain  $\mathcal{L}_2$  de  $u(t)$  vers  $y(t)$  est borné par  $\gamma$  s'il existe une fonction de Lyapunov telle que :

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))) + y(t)^T y(t) - \gamma^2 u^T(t) < 0$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ Le gain  $\mathcal{L}_2$  de  $u(t)$  vers  $y(t)$  est borné par  $\gamma$  s'il existe une fonction de Lyapunov telle que :

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))) + y(t)^T y(t) - \gamma^2 u^T(t) < 0$$

- ▶ Fonction de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P = P^T > 0$$

- ▶ Trajectoire du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases} \quad A_\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i \dots$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ Fonction de Lyapunov

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P = P^T > 0$$

- ▶ Trajectoire du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases} \quad A_\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))A_i \dots$$

- ▶ L'inégalité  $\dot{V} + y^T y - \gamma^2 u^T u < 0$  est équivalente à

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA_\mu + A_\mu^T P + C_\mu^T C_\mu & C_\mu^T D_\mu + PB_\mu \\ * & -\gamma^2 I + D_\mu^T D_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ L'inégalité  $\dot{V} + y^T y - \gamma^2 u^T u < 0$  est **équivalente** à

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA_\mu + A_\mu^T P + C_\mu^T C_\mu & C_\mu^T D_\mu + PB_\mu \\ * & -\gamma^2 I + D_\mu^T D_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0$$

- ▶ Par congruence, une **condition équivalente** (sans  $x(t)$  et  $u(t)$ ) est

$$\begin{bmatrix} PA_\mu + A_\mu^T P + C_\mu^T C_\mu & C_\mu^T D_\mu + PB_\mu \\ * & -\gamma^2 I + D_\mu^T D_\mu \end{bmatrix} < 0$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ Par congruence, une **condition équivalente** (sans  $x(t)$  et  $u(t)$ ) est

$$\begin{bmatrix} PA_\mu + A_\mu^T P + C_\mu^T C_\mu & C_\mu^T D_\mu + PB_\mu \\ * & -\gamma^2 I + D_\mu^T D_\mu \end{bmatrix} < 0$$

- ▶ Par complément de Schur, une **condition équivalente** est

$$\begin{bmatrix} PA_\mu + A_\mu^T P & PB_\mu & C_\mu^T \\ * & -\gamma^2 I & D_\mu^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ Par complément de Schur, une **condition équivalente** est

$$\begin{bmatrix} PA_\mu + A_\mu^T P & PB_\mu & C_\mu^T \\ * & -\gamma^2 I & D_\mu^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

- ▶ On obtient alors la **condition équivalente** suivante

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P & PB_i & C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & D_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ On obtient alors la **condition équivalente** suivante

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P & PB_i & C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & D_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

- ▶ les fonctions  $\mu_i$  étant positives, il **suffit** que

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P & PB_i & C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & D_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, r$$

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Illustrons l'approche MM par la recherche du gain  $\mathcal{L}_2$  entrée / sortie

- ▶ les fonctions  $\mu_i$  étant positives, il suffit que

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P & PB_i & C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & D_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, r$$

- ▶ On obtient  $r$  conditions LMI suffisantes
  - ▶ en les inconnues  $P$  et  $\bar{\gamma} = \gamma^2$
  - ▶ évaluées aux sommets du polytope définis par les sous modèles  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$
  - ▶ indépendantes des fonctions  $\mu_i(z(t))$  positives de somme unitaire

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Pour résumer :

- ▶ **Avantages** de l'approche MM
  - système non linéaire décrit par une structure très proche du linéaire
  - outils de résolution issus du formalisme linéaire : LMI
- ▶ **Limite** de l'approche MM
  - rejet des non-linéarités dans les fonctions  $\mu_j(z(t))$
  - évaluation des conditions aux sommets
  - conditions suffisantes donc conservatives
- ▶ **Améliorations** possibles
  - choix de fonctions de Lyapunov particulières (plus de degrés de liberté mais plus de calculs)
  - connaissances supplémentaires sur les fonctions  $\mu_j(z(t))$  (par exemple bornes sur les variations)
- ▶ **Difficulté**
  - le cas des variables de décision non mesurables
  - la présence de paramètres mal connus

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Pour résumer :

- ▶ **Avantages** de l'approche MM
  - système non linéaire décrit par une structure très proche du linéaire
  - outils de résolution issus du formalisme linéaire : LMI
- ▶ **Limite** de l'approche MM
  - rejet des non-linéarités dans les fonctions  $\mu_i(z(t))$
  - évaluation des conditions aux sommets
  - conditions suffisantes donc conservatives
- ▶ **Améliorations** possibles
  - choix de fonctions de Lyapunov particulières (plus de degrés de liberté mais plus de calculs)
  - connaissances supplémentaires sur les fonctions  $\mu_i(z(t))$  (par exemple bornes sur les variations)
- ▶ **Difficulté**
  - le cas des variables de décision non mesurables
  - la présence de paramètres mal connus

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Pour résumer :

- ▶ **Avantages** de l'approche MM
  - système non linéaire décrit par une structure très proche du linéaire
  - outils de résolution issus du formalisme linéaire : LMI
- ▶ **Limite** de l'approche MM
  - rejet des non-linéarités dans les fonctions  $\mu_i(z(t))$
  - évaluation des conditions aux sommets
  - conditions suffisantes donc conservatives
- ▶ **Améliorations** possibles
  - choix de fonctions de Lyapunov particulières (plus de degrés de liberté mais plus de calculs)
  - connaissances supplémentaires sur les fonctions  $\mu_i(z(t))$  (par exemple bornes sur les variations)
- ▶ **Difficulté**
  - le cas des variables de décision non mesurables
  - la présence de paramètres mal connus

# Limites et avantages de l'approche multimodèle

Pour résumer :

- ▶ **Avantages** de l'approche MM
  - système non linéaire décrit par une structure très proche du linéaire
  - outils de résolution issus du formalisme linéaire : LMI
- ▶ **Limite** de l'approche MM
  - rejet des non-linéarités dans les fonctions  $\mu_i(z(t))$
  - évaluation des conditions aux sommets
  - conditions suffisantes donc conservatives
- ▶ **Améliorations** possibles
  - choix de fonctions de Lyapunov particulières (plus de degrés de liberté mais plus de calculs)
  - connaissances supplémentaires sur les fonctions  $\mu_i(z(t))$  (par exemple bornes sur les variations)
- ▶ **Difficulté**
  - le cas des variables de décision non mesurables
  - la présence de paramètres mal connus

- ▶ La classe des **systèmes linéaires à paramètres variant** (LPV)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{cases}$$

contient celle des MM, en effet :  $A(\theta) = \sum_i \mu_i(z(t))A_i, \dots$

- ▶ La classe des **systèmes linéaires à commutations**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \\ \sigma(t) \in \{1, 2, \dots, r\} \end{cases}$$

est contenue dans celle des MM avec  $\mu_i(z(t)) \in \{0, 1\}$ .

- ▶ La classe des **systèmes linéaires à paramètres variant** (LPV)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{cases}$$

contient celle des MM, en effet :  $A(\theta) = \sum_i \mu_i(z(t))A_i, \dots$

- ▶ La classe des **systèmes linéaires à commutations**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \\ \sigma(t) \in \{1, 2, \dots, r\} \end{cases}$$

est contenue dans celle des MM avec  $\mu_i(z(t)) \in \{0, 1\}$ .

1. Introduction aux multimodèles
2. Comment obtenir un multimodèle ?
  - Identification de MM à partir de données
  - Linéarisations multiples d'un modèle NL
  - Transformation par secteurs non linéaires
3. Transformation par secteurs non linéaires

# Comment obtenir un multimodèle ?

On peut distinguer deux classes de méthodes

## ► Identification à partir de données collectées sur le système

- **données** : relevés entrées / sorties
- **hypothèses** : fixer la structure du MM (découplé / homogène), des fonctions  $\mu_j$ , leur nombre, la dimension des sous modèles, etc.
- **résolution** : optimisation non linéaire pour déterminer les paramètres minimisant l'erreur de modélisation

## ► Écriture MM à partir d'un modèle non linéaire existant

- Linéarisation du modèle en plusieurs points
  - données : le modèle non linéaire
  - hypothèses : choix des points de linéarisation et des fonctions de pondérations
  - résolution : approximation par développements de Taylor du modèle
- Écriture équivalente par secteurs non linéaires
  - données : le modèle non linéaire
  - hypothèses : non-linéarités bornées ou  $x(t)$  appartenant à un compact de l'espace d'état
  - résolution : ré-écriture MM exacte des équations du modèle

# Comment obtenir un multimodèle ?

On peut distinguer deux classes de méthodes

## ► Identification à partir de données collectées sur le système

- **données** : relevés entrées / sorties
- **hypothèses** : fixer la structure du MM (découplé / homogène), des fonctions  $\mu_i$ , leur nombre, la dimension des sous modèles, etc.
- **résolution** : optimisation non linéaire pour déterminer les paramètres minimisant l'erreur de modélisation

## ► Écriture MM à partir d'un modèle non linéaire existant

- Linéarisation du modèle en plusieurs points
  - **données** : le modèle non linéaire
  - **hypothèses** : choix des points de linéarisation et des fonctions de pondérations
  - **résolution** : **approximation** par développements de Taylor du modèle
- Écriture équivalente par secteurs non linéaires
  - **données** : le modèle non linéaire
  - **hypothèses** : non-linéarités bornées ou  $x(t)$  appartenant à un compact de l'espace d'état
  - **résolution** : ré-écriture MM **exacte** des équations du modèle

# Comment obtenir un multimodèle ?

On peut distinguer deux classes de méthodes

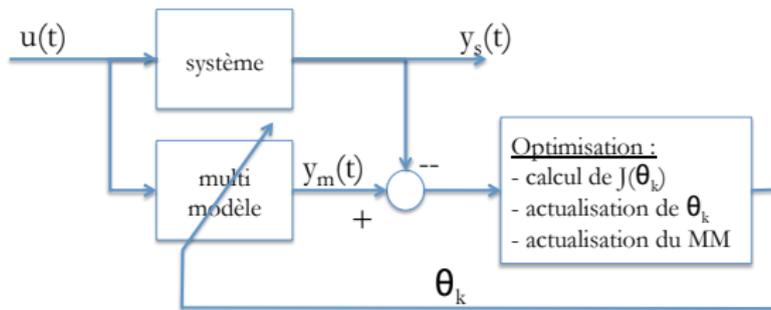
## ► Identification à partir de données collectées sur le système

- **données** : relevés entrées / sorties
- **hypothèses** : fixer la structure du MM (découplé / homogène), des fonctions  $\mu_j$ , leur nombre, la dimension des sous modèles, etc.
- **résolution** : optimisation non linéaire pour déterminer les paramètres minimisant l'erreur de modélisation

## ► Écriture MM à partir d'un modèle non linéaire existant

- Linéarisation du modèle en plusieurs points
  - **données** : le modèle non linéaire
  - **hypothèses** : choix des points de linéarisation et des fonctions de pondérations
  - **résolution** : **approximation** par développements de Taylor du modèle
- Écriture équivalente par secteurs non linéaires
  - **données** : le modèle non linéaire
  - **hypothèses** : non-linéarités bornées ou  $x(t)$  appartenant à un compact de l'espace d'état
  - **résolution** : ré-écriture MM **exacte** des équations du modèle

# Identification de MM à partir de données (principe)



- ▶ Paramètres à déterminer :  $\theta = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}, i = 1, \dots, r$
- ▶ Critère à minimiser : erreur d'identification

$$\text{global : } J_G(\theta) = \int_0^{\infty} (y_m(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

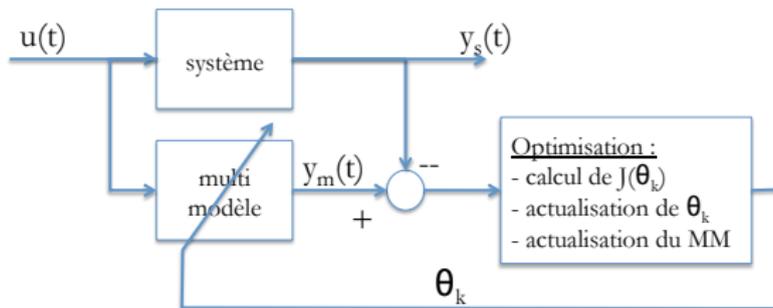
$$\text{local : } J_L(\theta) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (y_{m,i}(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

$$\text{mixte : } J_M(\theta) = \alpha J_G(\theta) + (1 - \alpha) J_L(\theta), \alpha \in [0, 1]$$

- ▶ Calcul itératif de  $\theta$  (Newton-Raphson) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \left( \frac{\partial^2 J_*(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)_{\theta_k}^{-1} \left( \frac{\partial J_*(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta_k}$$

# Identification de MM à partir de données (principe)



- ▶ Paramètres à déterminer :  $\theta = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}, i = 1, \dots, r$
- ▶ Critère à minimiser : erreur d'identification

$$\text{global : } J_G(\theta) = \int_0^{\infty} (y_m(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

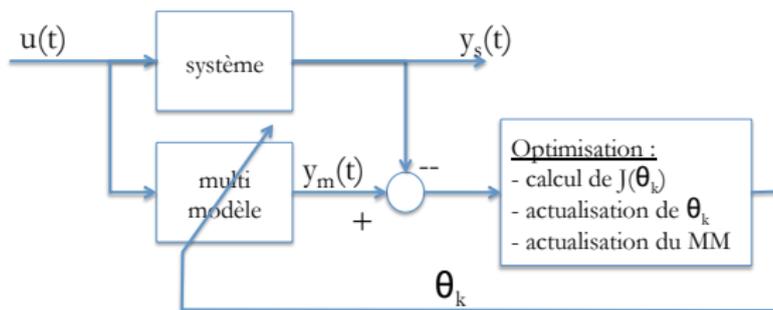
$$\text{local : } J_L(\theta) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (y_{m,i}(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

$$\text{mixte : } J_M(\theta) = \alpha J_G(\theta) + (1 - \alpha) J_L(\theta), \alpha \in [0, 1]$$

- ▶ Calcul itératif de  $\theta$  (Newton-Raphson) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \left( \frac{\partial^2 J_*(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)_{\theta_k}^{-1} \left( \frac{\partial J_*(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta_k}$$

# Identification de MM à partir de données (principe)



- ▶ Paramètres à déterminer :  $\theta = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}, i = 1, \dots, r$
- ▶ Critère à minimiser : erreur d'identification

$$\text{global : } J_G(\theta) = \int_0^{\infty} (y_m(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

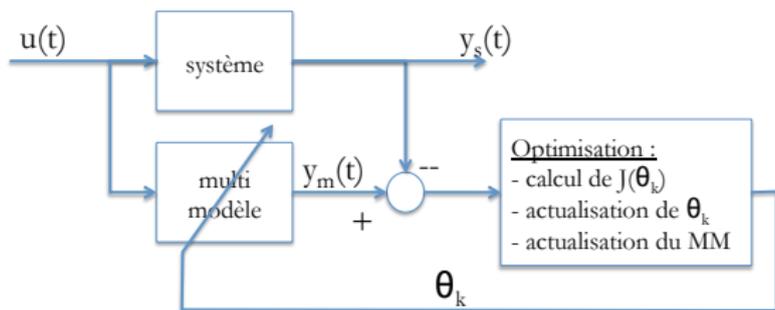
$$\text{local : } J_L(\theta) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (y_{m,i}(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

$$\text{mixte : } J_M(\theta) = \alpha J_G(\theta) + (1 - \alpha) J_L(\theta), \alpha \in [0, 1]$$

- ▶ Calcul itératif de  $\theta$  (Newton-Raphson) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \left( \frac{\partial^2 J_*(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)_{\theta_k}^{-1} \left( \frac{\partial J_*(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta_k}$$

# Identification de MM à partir de données (principe)



- ▶ Paramètres à déterminer :  $\theta = \{A_i, B_i, C_i, D_i\}, i = 1, \dots, r$
- ▶ Critère à minimiser : erreur d'identification

$$\text{global : } J_G(\theta) = \int_0^{\infty} (y_m(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

$$\text{local : } J_L(\theta) = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (y_{m,i}(t, \theta) - y_s(t))^2 dt$$

$$\text{mixte : } J_M(\theta) = \alpha J_G(\theta) + (1 - \alpha) J_L(\theta), \alpha \in [0, 1]$$

- ▶ Calcul itératif de  $\theta$  (Newton-Raphson) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \left( \frac{\partial^2 J_*(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)_{\theta_k}^{-1} \left( \frac{\partial J_*(\theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta_k}$$

# Identification de MM à partir de données (exemple)

- ▶ Génération des données :

$$\begin{cases} y_{k+1} = (0.6 - 0.1\alpha_k)y_k + \alpha_k u_k \\ \alpha_k = \frac{0.6 - 0.06y_k}{1 + 0.2y_k} \end{cases}$$

- ▶ Multi-modèle découplé :

$$\begin{cases} x_{i,k} = a_i x_{i,k} + b_i u_k, \\ y_{i,k} = x_{i,k} \\ y_{m,k} = \mu_1(u_k)y_{1,k} + \mu_2(u_k)y_{2,k} \\ \mu_i(u_k) = \frac{w_i(u_k)}{w_1(u_k) + w_2(u_k)} \\ w_1(u_k) = e^{-(u_k + 0.9)^2 / 0.9} \\ w_2(u_k) = e^{-(u_k - 0.9)^2 / 0.9} \end{cases}$$

- ▶ Paramètres à identifier :

$$\theta = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]$$

# Identification de MM à partir de données (exemple)

- ▶ Génération des données :

$$\begin{cases} y_{k+1} = (0.6 - 0.1\alpha_k)y_k + \alpha_k u_k \\ \alpha_k = \frac{0.6 - 0.06y_k}{1 + 0.2y_k} \end{cases}$$

- ▶ Multi-modèle découplé :

$$\begin{cases} x_{i,k} = a_i x_{i,k} + b_i u_k, \\ y_{i,k} = x_{i,k} \\ y_{m,k} = \mu_1(u_k)y_{1,k} + \mu_2(u_k)y_{2,k} \\ \mu_i(u_k) = \frac{w_i(u_k)}{w_1(u_k) + w_2(u_k)} \\ w_1(u_k) = e^{-(u_k + 0.9)^2 / 0.9} \\ w_2(u_k) = e^{-(u_k - 0.9)^2 / 0.9} \end{cases}$$

- ▶ Paramètres à identifier :

$$\theta = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]$$

# Identification de MM à partir de données (exemple)

- Génération des données :

$$\begin{cases} y_{k+1} = (0.6 - 0.1\alpha_k)y_k + \alpha_k u_k \\ \alpha_k = \frac{0.6 - 0.06y_k}{1 + 0.2y_k} \end{cases}$$

- Multi-modèle découplé :

$$\begin{cases} x_{i,k} = a_i x_{i,k} + b_i u_k, \\ y_{i,k} = x_{i,k} \\ y_{m,k} = \mu_1(u_k)y_{1,k} + \mu_2(u_k)y_{2,k} \\ \mu_i(u_k) = \frac{w_i(u_k)}{w_1(u_k) + w_2(u_k)} \\ w_1(u_k) = e^{-(u_k + 0.9)^2 / 0.9} \\ w_2(u_k) = e^{-(u_k - 0.9)^2 / 0.9} \end{cases}$$

- Paramètres à identifier :

$$\theta = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]$$

# Identification de MM à partir de données (exemple)

- Génération des données :

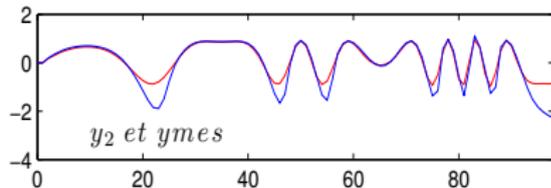
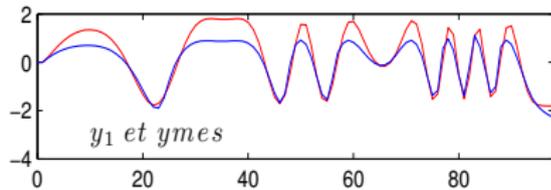
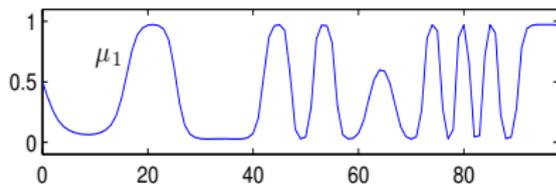
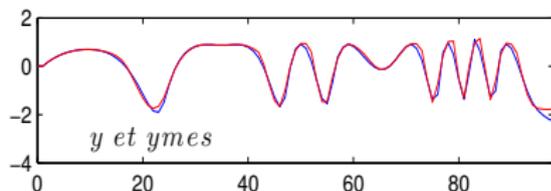
$$\begin{cases} y_{k+1} = (0.6 - 0.1\alpha_k)y_k + \alpha_k u_k \\ \alpha_k = \frac{0.6 - 0.06y_k}{1 + 0.2y_k} \end{cases}$$

- Multi-modèle découplé :

$$\begin{cases} x_{i,k} = a_i x_{i,k} + b_i u_k, \\ y_{i,k} = x_{i,k} \\ y_{m,k} = \mu_1(u_k)y_{1,k} + \mu_2(u_k)y_{2,k} \\ \mu_i(u_k) = \frac{w_i(u_k)}{w_1(u_k) + w_2(u_k)} \\ w_1(u_k) = e^{-(u_k + 0.9)^2 / 0.9} \\ w_2(u_k) = e^{-(u_k - 0.9)^2 / 0.9} \end{cases}$$

- Paramètres à identifier :

$$\theta = [a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2]$$



# Linéarisations multiples d'un modèle NL (1)

- ▶ On considère un modèle non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- ▶ Le développement de Taylor de  $f$  autour de  $z_0 = (x_0, u_0)$  s'écrit

$$f(x(t), u(t)) = f(x_0, u_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_0} (x(t) - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_0} (u(t) - u_0)$$

- ▶ ou encore

$$f(x(t), u(t)) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + F_0$$

avec

$$A_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_0} \quad B_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_0} \quad F_0 = f(x_0, u_0) - A_0 x_0 - B_0 u_0$$

# Linéarisations multiples d'un modèle NL (1)

- ▶ On considère un modèle non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- ▶ Le développement de Taylor de  $f$  autour de  $z_0 = (x_0, u_0)$  s'écrit

$$f(x(t), u(t)) = f(x_0, u_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_0} (x(t) - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_0} (u(t) - u_0)$$

- ▶ ou encore

$$f(x(t), u(t)) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + F_0$$

avec

$$A_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_0} \quad B_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_0} \quad F_0 = f(x_0, u_0) - A_0 x_0 - B_0 u_0$$

# Linéarisations multiples d'un modèle NL (1)

- ▶ On considère un modèle non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- ▶ Le développement de Taylor de  $f$  autour de  $z_0 = (x_0, u_0)$  s'écrit

$$f(x(t), u(t)) = f(x_0, u_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_0} (x(t) - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_0} (u(t) - u_0)$$

- ▶ ou encore

$$f(x(t), u(t)) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + F_0$$

avec

$$A_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_0} \quad B_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_0} \quad F_0 = f(x_0, u_0) - A_0 x_0 - B_0 u_0$$

## Linéarisations multiples d'un modèle NL (2)

Pour linéariser en plusieurs points, il faut :

- ▶ choisir les  $r$  points de linéarisation

$$z_i = (x_i, u_i) \text{ pour } i = 1, \dots, r$$

- ▶ définir des fonctions d'activation  $\mu_i(z(t))$

- quantifiant la proximité de  $z(t) = (x(t), u(t))$  à  $z_i = (x_i, u_i)$
- vérifiant les propriétés de somme convexe :

$$0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$$

- par exemple :

$$\mu_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad \text{et} \quad w_i(z(t)) = e^{-\frac{(z(t)-z_i)^T(z(t)-z_i)}{2}}$$

# Linéarisations multiples d'un modèle NL (2)

Pour linéariser en plusieurs points, il faut :

- ▶ choisir les  $r$  points de linéarisation

$$z_i = (x_i, u_i) \text{ pour } i = 1, \dots, r$$

- ▶ définir des fonctions d'activation  $\mu_i(z(t))$

- quantifiant la proximité de  $z(t) = (x(t), u(t))$  à  $z_i = (x_i, u_i)$
- vérifiant les propriétés de somme convexe :

$$0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$$

- par exemple :

$$\mu_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad \text{et} \quad w_i(z(t)) = e^{-\frac{(z(t)-z_i)^T(z(t)-z_i)}{2}}$$

On obtient finalement

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} A_i &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{z_i} & B_i &= \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_{z_i} & F_i &= f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \\ C_i &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{z_i} & D_i &= \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)_{z_i} & G_i &= g(x_i, u_i) - C_i x_i - D_i u_i \end{aligned}$$

# Transformation par secteurs non linéaires (principe général)

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$

- ▶ On peut alors écrire :

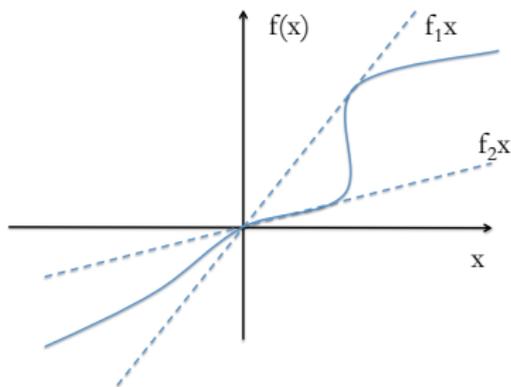
# Transformation par secteurs non linéaires (principe général)

- On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- Il est possible de trouver des bornes  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- On peut alors écrire :

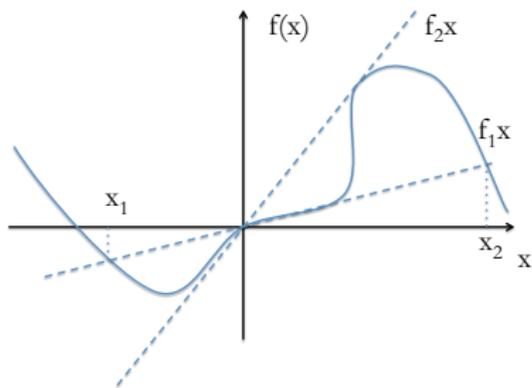
# Transformation par secteurs non linéaires (principe général)

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



(ou au moins localement pour  $x_1 \leq x(t) \leq x_2$ )

- ▶ On peut alors écrire :

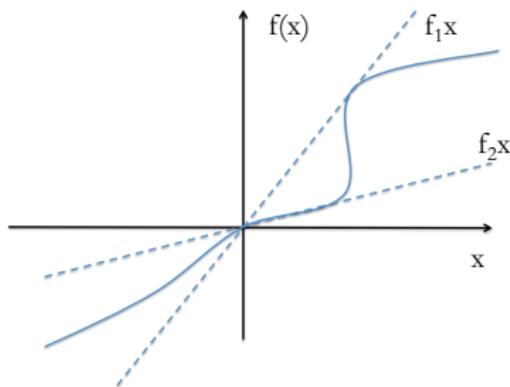
# Transformation par secteurs non linéaires (principe général)

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- ▶ On peut alors écrire :

$$\dot{x}(t) = \left( \frac{\frac{f(x(t))}{x(t)} - f_2}{f_1 - f_2} f_1 + \frac{f_1 - \frac{f(x(t))}{x(t)}}{f_1 - f_2} f_2 \right) x(t)$$

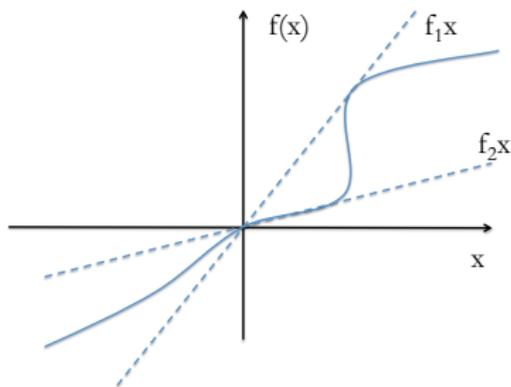
# Transformation par secteurs non linéaires (principe général)

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- ▶ On peut alors écrire :

$$\dot{x}(t) = \left( \underbrace{\frac{\frac{f(x)}{x} - f_2}{f_1 - f_2}}_{\mu_1(x)} \underbrace{f_1}_{A_1} + \underbrace{\frac{f_1 - \frac{f(x)}{x}}{f_1 - f_2}}_{\mu_2(x)} \underbrace{f_2}_{A_2} \right) x(t)$$

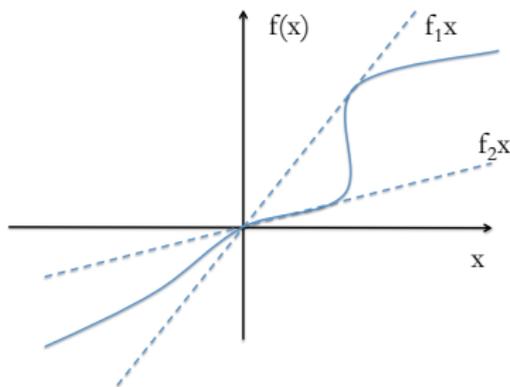
# Transformation par secteurs non linéaires (principe général)

- ▶ On considère le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{avec} \quad f(0) = 0$$

- ▶ Il est possible de trouver des bornes  $f_1$  et  $f_2$  telles que

$$f_2 x \leq f(x) \leq f_1 x, \forall x$$



- ▶ On peut alors écrire :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(x(t)) A_i x(t)$$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- Système non-linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t)^2 - 1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1(t)^2 \end{cases}$$

avec  $(x_1(t), x_2(t)) \in [-1 \ 1] \times [-1 \ 1]$

- Système sous forme affine en l'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t)x_2(t) \\ (3 + x_2(t))x_1(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Variables de décision et leurs bornes

$$\boxed{z_1(t) = x_1(t)x_2(t)} \in [-1 \ 1] \quad \text{et} \quad \boxed{z_2(t) = (3 + x_2(t))x_1(t)} \in [-4 \ 4]$$

- Étant bornées, elles s'écrivent

$$z_i(t) = h_{i,1}(t)z_{i,1} + h_{i,2}(t)z_{i,2}, \quad i = 1, 2$$
$$h_{i,1}(t) = \frac{z_1(t) - z_{i,2}}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,2}(t) = \frac{z_{i,1} - z_i(t)}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,1}(t) + h_{i,2}(t) = 1$$
$$z_{i,1} = \max z_i(t), \quad z_{i,2} = \min z_i(t)$$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- Système non-linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t)^2 - 1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1(t)^2 \end{cases}$$

avec  $(x_1(t), x_2(t)) \in [-1 \ 1] \times [-1 \ 1]$

- Système sous forme affine en l'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t)x_2(t) \\ (3 + x_2(t))x_1(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Variables de décision et leurs bornes

$$z_1(t) = x_1(t)x_2(t) \in [-1 \ 1] \quad \text{et} \quad z_2(t) = (3 + x_2(t))x_1(t) \in [-4 \ 4]$$

- Étant bornées, elles s'écrivent

$$z_i(t) = h_{i,1}(t)z_{i,1} + h_{i,2}(t)z_{i,2}, \quad i = 1, 2$$
$$h_{i,1}(t) = \frac{z_1(t) - z_{i,2}}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,2}(t) = \frac{z_{i,1} - z_i(t)}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,1}(t) + h_{i,2}(t) = 1$$
$$z_{i,1} = \max z_i(t), \quad z_{i,2} = \min z_i(t)$$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- Système non-linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t)^2 - 1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1(t)^2 \end{cases}$$

avec  $(x_1(t), x_2(t)) \in [-1 \ 1] \times [-1 \ 1]$

- Système sous forme affine en l'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t)x_2(t) \\ (3 + x_2(t))x_1(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Variables de décision et leurs bornes

$$\boxed{z_1(t) = x_1(t)x_2(t)} \in [-1 \ 1] \quad \text{et} \quad \boxed{z_2(t) = (3 + x_2(t))x_1(t)} \in [-4 \ 4]$$

- Étant bornées, elles s'écrivent

$$z_i(t) = h_{i,1}(t)z_{i,1} + h_{i,2}(t)z_{i,2}, \quad i = 1, 2$$
$$h_{i,1}(t) = \frac{z_1(t) - z_{i,2}}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,2}(t) = \frac{z_{i,1} - z_i(t)}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,1}(t) + h_{i,2}(t) = 1$$
$$z_{i,1} = \max z_i(t), \quad z_{i,2} = \min z_i(t)$$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- Système non-linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)(x_2(t)^2 - 1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1(t)^2 \end{cases}$$

avec  $(x_1(t), x_2(t)) \in [-1 \ 1] \times [-1 \ 1]$

- Système sous forme affine en l'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t)x_2(t) \\ (3 + x_2(t))x_1(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Variables de décision et leurs bornes

$$\boxed{z_1(t) = x_1(t)x_2(t)} \in [-1 \ 1] \quad \text{et} \quad \boxed{z_2(t) = (3 + x_2(t))x_1(t)} \in [-4 \ 4]$$

- Étant bornées, elles s'écrivent

$$z_i(t) = h_{i,1}(t)z_{i,1} + h_{i,2}(t)z_{i,2}, \quad i = 1, 2$$
$$h_{i,1}(t) = \frac{z_1(t) - z_{i,2}}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,2}(t) = \frac{z_{i,1} - z_i(t)}{z_{i,1} - z_{i,2}}, \quad h_{i,1}(t) + h_{i,2}(t) = 1$$
$$z_{i,1} = \max z_i(t), \quad z_{i,2} = \min z_i(t)$$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

► On a alors

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & (h_{1,1}(t)z_{1,1} + h_{1,2}(t)z_{1,2}) \\ (h_{2,1}(t)z_{2,1} + h_{2,2}(t)z_{2,2}) & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

► En définissant

$$\mu_1(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_2(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$\mu_3(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_4(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

► On a finalement

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t)) A_i x(t)$$

où  $z(t)$  sont est fonction de  $x(t)$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- ▶ On a alors

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & (h_{1,1}(t)z_{1,1} + h_{1,2}(t)z_{1,2})(h_{2,1}(t) + h_{2,2}(t)) \\ (h_{2,1}(t)z_{2,1} + h_{2,2}(t)z_{2,2})(h_{1,1}(t) + h_{2,1}(t)) & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ En définissant

$$\mu_1(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_2(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$\mu_3(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_4(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

- ▶ On a finalement

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t)) A_i x(t)$$

où  $z(t)$  sont est fonction de  $x(t)$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- ▶ On a alors

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & (h_{1,1}(t)z_{1,1} + h_{1,2}(t)z_{1,2})(h_{2,1}(t) + h_{2,2}(t)) \\ (h_{2,1}(t)z_{2,1} + h_{2,2}(t)z_{2,2})(h_{1,1}(t) + h_{2,1}(t)) & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ En définissant

$$\mu_1(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_2(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$\mu_3(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_4(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

- ▶ On a finalement

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t)) A_i x(t)$$

où  $z(t)$  sont est fonction de  $x(t)$

# Transformation par secteurs non linéaires (exemple)

- ▶ On a alors

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & (h_{1,1}(t)z_{1,1} + h_{1,2}(t)z_{1,2})(h_{2,1}(t) + h_{2,2}(t)) \\ (h_{2,1}(t)z_{2,1} + h_{2,2}(t)z_{2,2})(h_{1,1}(t) + h_{2,1}(t)) & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ En définissant

$$\mu_1(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_2(z(t)) = h_{1,1}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$\mu_3(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,1}(z(t)), \quad \mu_4(z(t)) = h_{1,2}(z(t))h_{2,2}(z(t))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,1} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & z_{1,2} \\ z_{2,2} & -1 \end{bmatrix}$$

- ▶ On a finalement

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(z(t))A_i x(t)$$

où  $z(t)$  sont est fonction de  $x(t)$

Quelques premières remarques sur la TSNL :

- le choix des variables de décision n'est pas unique
- les variables d'état apparaissent souvent dans les variables de décision
- le nombre de sous-modèles est  $r = 2^{n_z}$ , où  $n_z$  est le nombre de variables de décision
- + la TSNL est une ré-écriture **exacte** du modèle non linéaire
- + la TSNL est toujours possible, au moins sur un compact de l'espace d'état.

Quelques premières remarques sur la TSNL :

- le choix des variables de décision n'est pas unique
- les variables d'état apparaissent souvent dans les variables de décision
- le nombre de sous-modèles est  $r = 2^{n_z}$ , où  $n_z$  est le nombre de variables de décision
- + la TSNL est une ré-écriture **exacte** du modèle non linéaire
- + la TSNL est toujours possible, au moins sur un compact de l'espace d'état.

Quelques premières remarques sur la TSNL :

- le choix des variables de décision n'est pas unique
- les variables d'état apparaissent souvent dans les variables de décision
- le nombre de sous-modèles est  $r = 2^{n_z}$ , où  $n_z$  est le nombre de variables de décision
- + la TSNL est une ré-écriture **exacte** du modèle non linéaire
- + la TSNL est toujours possible, au moins sur un compact de l'espace d'état.

- ① 1. Introduction aux multimodèles
- ② 2. Comment obtenir un multimodèle ?
- ③ 3. Transformation par secteurs non linéaires
  - Une écriture équivalente, mais des résultats différents
  - Comment choisir parmi les différents MM possibles ?
  - Application à un modèle simplifié de station d'épuration

La TSNL est une réécriture équivalente du système non linéaire

- ▶ plusieurs écritures sont possibles suivant le choix des variables de décisions
- ▶ à chaque ensemble de variables de décision correspond un ensemble de sous modèles  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$
- ▶ la plupart des résultats en analyse et synthèse sont sous forme de LMI, évaluées aux sommets du polytope  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  (les fonctions d'activations devant simplement vérifier :  $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$ )
- ▶ les résultats obtenus en analyse ou synthèse peuvent donc être différents bien que les écritures soient équivalentes

La TSNL est une réécriture équivalente du système non linéaire

- ▶ plusieurs écritures sont possibles suivant le choix des variables de décisions
- ▶ à chaque ensemble de variables de décision correspond un ensemble de sous modèles  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$
- ▶ la plupart des résultats en analyse et synthèse sont sous forme de LMI, évaluées aux sommets du polytope  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  (les fonctions d'activations devant simplement vérifier :  $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$ )
- ▶ les résultats obtenus en analyse ou synthèse peuvent donc être différents bien que les écritures soient équivalentes

La TSNL est une réécriture équivalente du système non linéaire

- ▶ plusieurs écritures sont possibles suivant le choix des variables de décisions
- ▶ à chaque ensemble de variables de décision correspond un ensemble de sous modèles  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$
- ▶ la plupart des résultats en analyse et synthèse sont sous forme de LMI, évaluées aux sommets du polytope  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  (les fonctions d'activations devant simplement vérifier :  $0 \leq \mu_i(z(t)) \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1$ )
- ▶ les résultats obtenus en analyse ou synthèse peuvent donc être différents bien que les écritures soient équivalentes

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ Système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 - 4z(t) & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :

- ▶ instable ( $A_2$  pas hurwitz)
- ▶ non commandable ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ Système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2-4z(t) & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :

- ▶ instable ( $A_2$  pas hurwitz)
- ▶ non commandable ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ Système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 - 4z(t) & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :

- ▶ instable ( $A_2$  pas hurwitz)
- ▶ non commandable ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ Système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 - 4z(t) & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :

- ▶ instable ( $A_2$  pas hurwitz)
- ▶ non commandable ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ Système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 - 4z(t) & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :

- ▶ instable ( $A_2$  pas hurwitz)
- ▶ non commandable ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère encore le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_1(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4z(t) \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :
  - ▶ **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
  - ▶ **non commandable** ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère encore le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_1(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4z(t) \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :
  - ▶ **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
  - ▶ **non commandable** ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère encore le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_1(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4z(t) \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :
  - ▶ **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
  - ▶ **non commandable** ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère encore le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_1(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4z(t) \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :
  - ▶ **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
  - ▶ **non commandable** ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère encore le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = u(t)x_1(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4z(t) \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que le système est :
  - ▶ **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
  - ▶ **non commandable** ( $B_1 = B_2 = 0$ )

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère toujours le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = x_1(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -4z(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que

- ▶ le système est **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
- ▶ les sous modèles sont **commandables**

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère toujours le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = x_1(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -4z(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que

- ▶ le système est **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
- ▶ les sous modèles sont **commandables**

# Écriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère toujours le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = x_1(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -4z(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que

- ▶ le système est **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
- ▶ les sous modèles sont **commandables**

# Ecriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère toujours le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = x_1(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -4z(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que

- ▶ le système est **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
- ▶ les sous modèles sont **commandables**

# Ecriture équivalente, mais résultats différents (illustration)

- ▶ On considère toujours le système non linéaire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1(t) - 4u(t)x_1(t)x_2(t) \\ x_1(t) - 4x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x_i(t) \in [-1 \ 1], \quad u(t) \in [0 \ 1]$$

- ▶ Variable de décision  $z(t) = x_1(t)x_2(t) \in [-1 \ 1]$

$$z(t) = \mu_1(z(t))z_1 + \mu_2(z(t))z_2$$

avec  $\mu_1(z(t)) = \frac{z(t)-z_2}{z_1-z_2}$ ,  $\mu_2(z(t)) = \frac{z_2-z(t)}{z_2-z_1}$ ,  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ .

- ▶ Le système devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -4z(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- ▶ Le système devient  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$  avec

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ On peut conclure que

- ▶ le système est **stable** (il existe  $P = P^T > 0$ , t.q.  $PA_i + A_i^T P < 0$ )
- ▶ les sous modèles sont **commandables**

# Comment choisir parmi les différents MM possibles ?

On peut donner des critères de choix<sup>3</sup> :

- ▶ choisir les formes avec un minimum de **sous modèles instables**
- ▶ choisir les formes **sans colonne de  $B_i$  (reps. ligne de  $C_i$ ) nulle**  
→ commandabilité (reps. observabilité) locale nécessaire à la synthèse de correcteur (reps. observateur)
- ▶ choisir les formes avec le **minimum de variables de décision différentes**  
→ limiter le nombre de sous-modèles  
→ limiter le nombre de contraintes LMI à satisfaire (polynomial en  $r$ )
- ▶ choisir les formes avec un **minimum de variables de décision non mesurables**  
→ simplifier la synthèse de correcteur / observateur

---

3. A.M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, J. Ragot, G. Schutz, Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model, Industrial & Engineering Chemistry Research, 46(6), 2790-2799, 2010.

# Comment choisir parmi les différents MM possibles ?

On peut donner des critères de choix<sup>3</sup> :

- ▶ choisir les formes avec un minimum de **sous modèles instables**
- ▶ choisir les formes **sans colonne de  $B_i$  (reps. ligne de  $C_i$ ) nulle**  
→ commandabilité (reps. observabilité) locale nécessaire à la synthèse de correcteur (reps. observateur)
- ▶ choisir les formes avec le **minimum de variables de décision différentes**  
→ limiter le nombre de sous-modèles  
→ limiter le nombre de contraintes LMI à satisfaire (polynomial en  $r$ )
- ▶ choisir les formes avec un **minimum de variables de décision non mesurables**  
→ simplifier la synthèse de correcteur / observateur

---

3. A.M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, J. Ragot, G. Schutz, Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model, Industrial & Engineering Chemistry Research, 46(6), 2790-2799, 2010.

# Comment choisir parmi les différents MM possibles ?

On peut donner des critères de choix<sup>3</sup> :

- ▶ choisir les formes avec un minimum de **sous modèles instables**
- ▶ choisir les formes **sans colonne de  $B_i$  (reps. ligne de  $C_i$ ) nulle**  
→ commandabilité (reps. observabilité) locale nécessaire à la synthèse de correcteur (reps. observateur)
- ▶ choisir les formes avec le **minimum de variables de décision différentes**  
→ limiter le nombre de sous-modèles  
→ limiter le nombre de contraintes LMI à satisfaire (polynomial en  $r$ )
- ▶ choisir les formes avec un **minimum de variables de décision non mesurables**  
→ simplifier la synthèse de correcteur / observateur

---

3. A.M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, J. Ragot, G. Schutz, Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model, Industrial & Engineering Chemistry Research, 46(6), 2790-2799, 2010.

# Comment choisir parmi les différents MM possibles ?

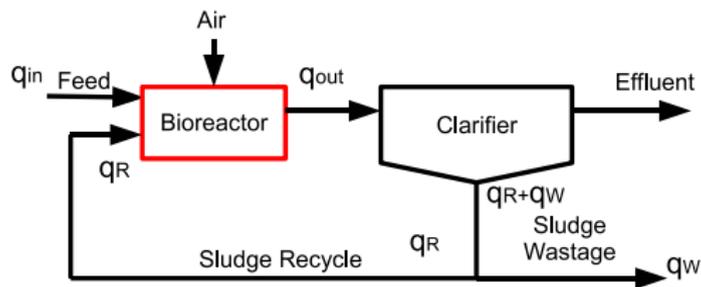
On peut donner des critères de choix<sup>3</sup> :

- ▶ choisir les formes avec un minimum de **sous modèles instables**
- ▶ choisir les formes **sans colonne de  $B_i$  (reps. ligne de  $C_i$ ) nulle**  
→ commandabilité (reps. observabilité) locale nécessaire à la synthèse de correcteur (reps. observateur)
- ▶ choisir les formes avec le **minimum de variables de décision différentes**  
→ limiter le nombre de sous-modèles  
→ limiter le nombre de contraintes LMI à satisfaire (polynomial en  $r$ )
- ▶ choisir les formes avec un **minimum de variables de décision non mesurables**  
→ simplifier la synthèse de correcteur / observateur

---

3. A.M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, J. Ragot, G. Schutz, Systematic multi-modeling methodology applied to an activated sludge reactor model, Industrial & Engineering Chemistry Research, 46(6), 2790-2799, 2010.

# Application à un modèle simplifié de station d'épuration



- ▶ Modèle simplifié :
  - ▶ seule la pollution carbonée,  $S_S(t)$ , est considérée
- ▶ hypothèses simplificatrices :
  - ▶ le volume du bio-réacteur est constant :

$$q_{out}(t) = q_{in}(t) + q_R(t)$$

- ▶ le clarifieur est parfait :
  - toute la biomasse est recirculée ou stockée
  - rien n'est rejeté dans le milieu naturel

$$(q_{in}(t) + q_R(t))X_{BH}(t) = (q_W(t) + q_R(t))X_{BH,R}(t)$$
$$S_S(t) = S_{S,R}(t)$$

# Application à un modèle simplifié de station d'épuration

## Modèle ASM1 (Activated Sludge Model 1)

$$\begin{aligned}\dot{S}_S &= \frac{q_{in}}{V} (S_{S,in} - S_S) + (1-f)b_H X_{BH} - \frac{\mu_H}{Y_H} \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \\ \dot{S}_O &= -\frac{q_{in}}{V} S_O + K q_a (S_{O,sat} - S_O) - \frac{1-Y_H}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} \\ \dot{X}_{BH} &= \frac{q_{in}}{V} X_{BH,in} - \frac{q_{in}}{V} \frac{f_W(1+f_R)}{f_W + f_R} X_{BH} + \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} - b_H X_{BH}\end{aligned}$$

où l'état, l'entrée et la sortie sont définis par

$$x(t) = \begin{bmatrix} S_S(t) \\ S_O(t) \\ X_{BH}(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} q_{in}(t) \\ q_a(t) \\ S_{S,in}(t) \\ X_{BH,in}(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} s_S(t) \\ S_O(t) \end{bmatrix}$$

où  $(V, \mu_H, b_H, f, Y_H, S_{O,sat}, K_S, K_{OH}, K)$  sont des paramètres constants connus.

# Application à un modèle simplifié de station d'épuration

- ▶ Trois variables de décision :

$$z_1(u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V}$$

$$z_2(x(t)) = \frac{1}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t)$$

$$z_3(u(t)) = q_a(t)$$

- ▶ Modèle non linéaire

$$\dot{S}_S = \frac{q_{in}}{V} (S_{S,in} - S_S) + (1-f)b_H X_{BH} - \frac{\mu_H}{Y_H} \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH}$$

$$\dot{S}_O = -\frac{q_{in}}{V} S_O + K q_a (S_{O,sat} - S_O) - \frac{1-Y_H}{Y_H} \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH}$$

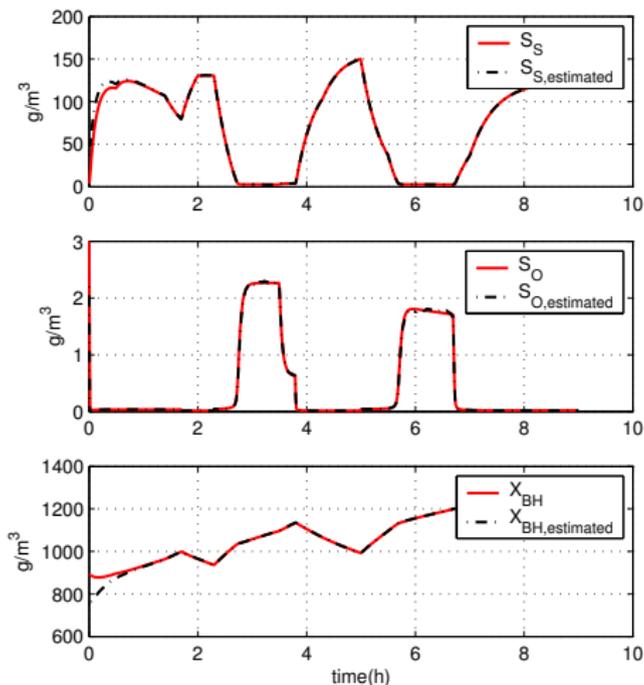
$$\dot{X}_{BH} = \frac{q_{in}}{V} X_{BH,in} - \frac{q_{in}}{V} \frac{f_W(1+f_R)}{f_W + f_R} X_{BH} + \mu_H \frac{S_S}{K_S + S_S} \frac{S_O}{K_{OH} + S_O} X_{BH} - b_H X_{BH}$$

- ▶ devient un MM à  $2^3 = 8$  sous-modèles à partir de l'écriture suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -z_1 - \frac{\mu_H}{Y_H} z_2 & 0 & (1-f)b_H \\ -\frac{1-Y_H}{Y_H} \mu_H z_2 & z_1 - K z_3 & 0 \\ \mu_H z_2 & 0 & -b_H - z_1 \frac{f_W(1+f_R)}{f_W + f_R} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & K S_{O,sat} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix} u$$

# Application à un modèle simplifié de station d'épuration

Cette écriture permet la synthèse d'un observateur d'état <sup>4</sup>



4. A.M. Nagy, B. Marx, G. Mourot, G. Schutz, J. Ragot, State estimation of two-time scale multiple models with unmeasurable premise variables. Application to biological reactors, 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'10, 2010.

## Intérêt de la structure multimodèle

- ▶ Principe physique du partitionnement
- ▶ Structure simple
- ▶ Degré d'approximation nul ou contrôlable
- ▶ Outils de l'automatique linéaire adaptables

## Des idées pour la suite !

- ▶ Multimodèles pour les systèmes à dérivées partielles ?
- ▶ Multimodèles pour les systèmes de grande dimension ?