Estimation d'état au moyen de multimodèles.

-

Session S5

-

Benoît MARX et José RAGOT

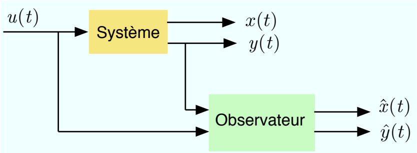
Ecole MACS, Strasbourg, 9-10 juillet.

Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy

Centre National de la Recherche Scientifique

Plan de la présentation

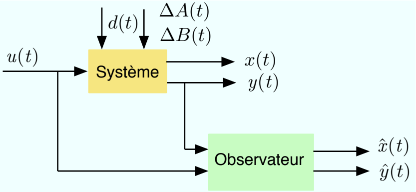


- Objectif de l'estimation :
  $\rightarrow$ reconstruire l'état du système $x(t)$
  $\rightarrow$ connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(D_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- Difficultés habituelles en estimation :
  $\rightarrow$ perturbations, incertitudes de modèle, entrées inconnues
- Difficultés propres aux MM :
  $\rightarrow$ variables de décision non mesurables (VDNM)

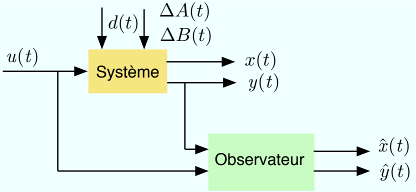
1. Objectifs et difficultés de l'observation de multimodèles



- Objectif de l'estimation :
  $\rightarrow$ reconstruire l'état du système $x(t)$
  $\rightarrow$ connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i \Delta B_i(t))u(t) + F_i d(t) \ldots) \\ y(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))((C_i + \Delta C_i(t))x(t) + (D_i \Delta D_i(t))u(t) + G_i d(t) \ldots) \end{cases}$$

- Difficultés habituelles en estimation :
  $\rightarrow$ perturbations, incertitudes de modèle, entrées inconnues
- Difficultés propres aux MM :
  $\rightarrow$ variables de décision non mesurables (VDNM)



- Objectif de l'estimation :
  → reconstruire l'état du système $x(t)$
  → connaissant l'entrée $u(t)$, la sortie $y(t)$ et un modèle les liant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- Difficultés habituelles en estimation :
  → perturbations, incertitudes de modèle, entrées inconnues
- Difficultés propres aux MM :
  → variables de décision non mesurables (VDNM)

- Le système est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$$

- Le système est stable avec un taux de décroissance, $\alpha > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + 2\alpha V(x(t)) < 0$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ du système de $u(t)$ vers $y(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + y^T(t)y(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- Le système est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$$

- Le système est stable avec un taux de décroissance, $\alpha > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + 2\alpha V(x(t)) < 0$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ du système de $u(t)$ vers $y(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + y^T(t)y(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- Le système est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que
$$\frac{dV(x(t))}{dt} < 0$$

- Le système est stable avec un taux de décroissance, $\alpha > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que
$$\frac{dV(x(t))}{dt} + 2\alpha V(x(t)) < 0$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ du système de $u(t)$ vers $y(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ positive, telle que
$$\frac{dV(x(t))}{dt} + y^T(t)y(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- Complément de Schur

$$\begin{cases} A - BC^{-1}B^T < 0 \\ C < 0 \\ A < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} < 0$$

- Majoration de carré matriciel
Pour tous X, Y et $G = G^T > 0$, on a :

$$X^TY + Y^TX \leq X^TGX + Y^TG^{-1}Y$$

- Majoration de carré matriciel incertain
Pour tous X, Y, $\Delta(t)$ vérifiant $\Delta^T(t)\Delta(t) < I$ et λ scalaire positif, on a :

$$X^T\Delta^T(t)Y + Y^T\Delta(t)X \leq \lambda X^TX + \lambda^{-1}Y^TY$$

- Complément de Schur

$$\begin{cases} A - BC^{-1}B^T < 0 \\ C < 0 \\ A < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} < 0$$

- Majoration de carré matriciel
Pour tous X, Y et $G = G^T > 0$, on a :

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T G X + Y^T G^{-1} Y$$

- Majoration de carré matriciel incertain
Pour tous X, Y, $\Delta(t)$ vérifiant $\Delta^T(t)\Delta(t) < I$ et λ scalaire positif, on a :

$$X^T \Delta^T(t) Y + Y^T \Delta(t) X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y$$

1. Quelques résultats utiles pour la suite (LMI)

- Complément de Schur

$$\begin{cases} A - BC^{-1}B^T < 0 \\ C < 0 \\ A < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} < 0$$

- Majoration de carré matriciel
  Pour tous X, Y et $G = G^T > 0$, on a :

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T G X + Y^T G^{-1} Y$$

- Majoration de carré matriciel incertain
  Pour tous X, Y, $\Delta(t)$ vérifiant $\Delta^T(t)\Delta(t) < I$ et λ scalaire positif, on a :

$$X^T \Delta^T(t) Y + Y^T \Delta(t) X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y$$

Section 2. Estimation de l'état de MM a VDM

- Pour observer le multimodèle à variable de décision $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- on propose le multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

où les gains L_i sont à déterminer afin que $\hat{x}(t) \to x(t)$

- L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est générée par le multimodèle autonome

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j) e(t)$$

- Pour observer le multimodèle à variable de décision $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- on propose le multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

où les gains L_i sont à déterminer afin que $\hat{x}(t) \to x(t)$

- L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est générée par le multimodèle autonome

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j) e(t)$$

2. Observateur d'état de multimodèles à VDM

- Pour observer le multimodèle à variable de décision $z(t)$ mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

- on propose le multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

où les gains L_i sont à déterminer afin que $\hat{x}(t) \to x(t)$

- L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est générée par le multimodèle autonome

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j) e(t)$$

2. Observateur d'état de multimodèles à VDM

- Les gains de l'observateur L_i doivent être déterminés afin de stabiliser

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t)$$

- Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La dérivée de $V(t)$ est donnée par

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))e^T(t)\Big(P(A_i - L_i C_j) + (A_i - L_i C_j)^T P\Big)e(t)$$

- Avec $\mu_i(z(t)) \geq 0$, une condition suffisante pour que $\dot{V}(t) < 0$ est

$$PA_i - PL_iC_j + A_i^T P - C_j^T L_i^T P < 0, \quad i,j = 1,\ldots,r$$

- Inégalités matricielles non linéaires en les inconnues P et L_i
- On linéarise en définissant $\bar{L}_i = PL_i$

- Les gains de l'observateur L_i doivent être déterminés afin de stabiliser

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))(A_i - L_iC_j)e(t)$$

- Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La dérivée de $V(t)$ est donnée par

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))e^T(t)\Big(P(A_i - L_iC_j) + (A_i - L_iC_j)^TP\Big)e(t)$$

- Avec $\mu_i(z(t)) \geq 0$, une condition suffisante pour que $\dot{V}(t) < 0$ est

$$PA_i - PL_iC_j + A_i^TP - C_j^TL_i^TP < 0, \quad i,j = 1,\ldots,r$$

- Inégalités matricielles non linéaires en les inconnues P et L_i
- On linéarise en définissant $\bar{L}_i = PL_i$

- Les gains de l'observateur L_i doivent être déterminés afin de stabiliser

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t)$$

- Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La dérivée de $V(t)$ est donnée par

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))e^T(t)\Big(P(A_i - L_i C_j) + (A_i - L_i C_j)^T P\Big)e(t)$$

- Avec $\mu_i(z(t)) \geq 0$, une condition suffisante pour que $\dot{V}(t) < 0$ est

$$PA_i - PL_iC_j + A_i^T P - C_j^T L_i^T P < 0, \quad i,j = 1,\dots,r$$

- Inégalités matricielles non linéaires en les inconnues P et L_i
- On linéarise en définissant $\bar{L}_i = PL_i$

- Les gains de l'observateur L_i doivent être déterminés afin de stabiliser

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t)$$

- Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La dérivée de $V(t)$ est donnée par

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))e^T(t)\Big(P(A_i - L_i C_j) + (A_i - L_i C_j)^T P\Big)e(t)$$

- Avec $\mu_i(z(t)) \geq 0$, une condition suffisante pour que $\dot{V}(t) < 0$ est

$$PA_i - PL_i C_j + A_i^T P - C_j^T L_i^T P < 0, \quad i,j = 1,\ldots,r$$

- Inégalités matricielles non linéaires en les inconnues P et L_i
- On linéarise en définissant $\bar{L}_i = PL_i$

- Les gains de l'observateur L_i doivent être déterminés afin de stabiliser

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t)$$

- Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La dérivée de $V(t)$ est donnée par

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(z(t))\mu_j(z(t))e^T(t)\Big(P(A_i - L_i C_j) + (A_i - L_i C_j)^T P\Big)e(t)$$

- Avec $\mu_i(z(t)) \geq 0$, une condition suffisante pour que $\dot{V}(t) < 0$ est

$$PA_i - PL_i C_j + A_i^T P - C_j^T L_i^T P < 0, \quad i,j = 1,\ldots,r$$

- Inégalités matricielles non linéaires en les inconnues P et L_i
- On linéarise en définissant $\bar{L}_i = PL_i$

- Les gains de l'observateur L_i doivent être déterminés afin de stabiliser

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t)$$

- Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La dérivée de $V(t)$ est donnée par

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(z(t))\mu_j(z(t))e^T(t)\Big(P(A_i - L_i C_j) + (A_i - L_i C_j)^T P\Big)e(t)$$

- Avec $\mu_i(z(t)) \geq 0$, une condition suffisante pour que $\dot{V}(t) < 0$ est

$$PA_i - PL_i C_j + A_i^T P - C_j^T L_i^T P < 0, \quad i,j = 1,\dots,r$$

- Inégalités matricielles non linéaires en les inconnues P et L_i
- On linéarise en définissant $\bar{L}_i = PL_i$

Synthèse de multiobservateur

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

où $X_\mu = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) X_i$.

L'erreur d'estimation d'état tend vers zéro s'il existe $P = P^T$ et $\bar{L}_i$ t.q.

$$\begin{aligned} P A_i - \bar{L}_i C_j + A_i^T P - C_j^T \bar{L}_i^T &< 0 \quad i,j = 1,\dots,r \\ P &> 0 \end{aligned}$$

Les gains de l'observateurs sont donnés par : $L_i = P^{-1} \bar{L}_i$.

Synthèse de multiobservateur avec taux de décroissance garanti

- Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

- L'erreur d'estimation d'état vérifie

$$e(t) \leq e(0) e^{-\alpha t}$$

s'il existe $P = P^T$ et $\bar{L}_i$ t.q.

$$\begin{aligned} PA_i - \bar{L}_i C_j + A_i^T P - C_j^T \bar{L}_i^T + 2\alpha P &< 0 \quad i,j = 1,\ldots,r \\ P &> 0 \end{aligned}$$

Les gains de l'observateurs sont donnés par : $L_i = P^{-1} \bar{L}_i$.

- Taux de décroissance garanti par $\dot{V}(t) + 2\alpha V(t) < 0$.

- $P(A_i + \alpha I) + (A_i + \alpha I)^T P - \bar{L}_i C_j - C_j^T \bar{L}_i^T < 0$

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) \end{cases}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \; A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \; B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \; B_2 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$d(t) \simeq \mathcal{N}(0,3)$$

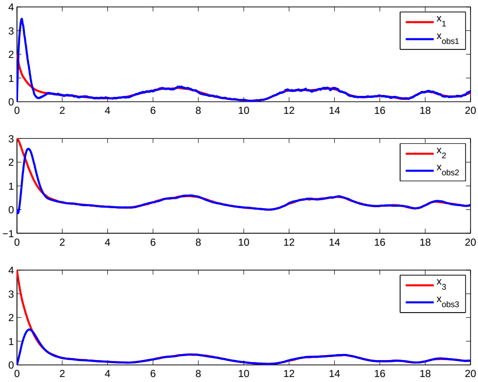
$$u(t) = (sin((2*(t/10) + ((t)/195)^2) * cos(t)) + 1)$$

$$\mu_1(u(t)) = \frac{1 - tanh(u(t))}{2} \quad \mu_2(u(t)) = \frac{tanh(u(t)) - 1}{2}$$

Un exemple de programme Matlab

```
% Déclaration des variables LMI
P=sdpvar(3,3,'symmetric');
Lb1=sdpvar(3,2,'full');
Lb2=sdpvar(3,2,'full');
% Déclaration des LMIs
LMI=set(P>0);
LMI=LMI+set(P*A1-Lb1*C1+(P*A1-Lb1*C1)'<0);
LMI=LMI+set(P*A1-Lb1*C2+(P*A1-Lb1*C2)'<0);
LMI=LMI+set(P*A2-Lb2*C1+(P*A2-Lb2*C1)'<0);
LMI=LMI+set(P*A2-Lb2*C2+(P*A2-Lb2*C2)'<0);
% Résolution des LMIs
sols=solvesdp(LMI);
P=double(P);
Lb1=double(Lb1);
Lb2=double(Lb2);
% Calcul des gains de l'observateur MM
L1=inv(P)*Lb1;
L2=inv(P)*Lb2;
```

Avec $x(0) = [2\ 3\ 4]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0\ 0]^T$ la simulation donne :
– l'état du système $x(t)$ en rouge
– l'estimée de l'état $\hat{x}(t)$ en bleu



- **Incertitudes additives :** entrées inconnues, perturbations, etc.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- **Incertitudes multiplicatives :** paramètres des modèles incertains, etc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) & = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des incertitudes sur l'erreur d'estimation

- **Incertitudes additives :** entrées inconnues, perturbations, etc.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

– Sous certaines conditions structurelles :
→ synthèse d'observateur à entrées inconnues
→ découplage parfait entre les perturbations et l'estimée de l'état

- **Incertitudes multiplicatives :** paramètres des modèles incertains, etc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) & = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

→ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des incertitudes sur l'erreur d'estimation

- **Incertitudes additives :** entrées inconnues, perturbations, etc.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

  – Sous certaines conditions structurelles :
  $\rightarrow$ synthèse d'observateur à entrées inconnues
  $\rightarrow$ découplage parfait entre les perturbations et l'estimée de l'état

  – Sinon :
  $\rightarrow$ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ de $d(t)$ sur l'erreur d'estimation

- **Incertitudes multiplicatives :** paramètres des modèles incertains, etc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) & = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

  $\rightarrow$ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des incertitudes sur l'erreur d'estimation

- **Incertitudes additives :** entrées inconnues, perturbations, etc.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

  – Sous certaines conditions structurelles :
  → synthèse d'observateur à entrées inconnues
  → découplage parfait entre les perturbations et l'estimée de l'état

  – Sinon :
  → minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ de $d(t)$ sur l'erreur d'estimation

- **Incertitudes multiplicatives :** paramètres des modèles incertains, etc

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) &= C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

  → minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des incertitudes sur l'erreur d'estimation

- Système avec entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- Observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) & = N_\mu z(t) + M_\mu u(t) + L_\mu y(t) \\ \hat{x}(t) & = z(t) + Ey(t) - EDu(t) \end{cases}$$

- Les matrices N_i, M_i, L_i et E sont à déterminer afin que :
  $\rightarrow$ $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, l'erreur d'estimation, tende vers zéro
  $\rightarrow$ $e(t)$ soit indépendante des entrées inconnues $d(t)$

- L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit

$$e(t) = (I - EC)x(t) - z(t) - EGd(t)$$

- En définissant $R = I - EC$, si $EG = 0$, il vient :

$$e(t) = Rx(t) - z(t)$$

- Système avec entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- Observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) & = N_\mu z(t) + M_\mu u(t) + L_\mu y(t) \\ \hat{x}(t) & = z(t) + Ey(t) - EDu(t) \end{cases}$$

- Les matrices N_i, M_i, L_i et E sont à déterminer afin que :
  $\rightarrow$ $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, l'erreur d'estimation, tende vers zéro
  $\rightarrow$ $e(t)$ soit indépendante des entrées inconnues $d(t)$

- L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit

$$e(t) = (I - EC)x(t) - z(t) - EGd(t)$$

- En définissant $R = I - EC$, si $EG = 0$, il vient :

$$e(t) = Rx(t) - z(t)$$

- Système avec entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- Observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) & = N_\mu z(t) + M_\mu u(t) + L_\mu y(t) \\ \hat{x}(t) & = z(t) + Ey(t) - EDu(t) \end{cases}$$

- Les matrices N_i, M_i, L_i et E sont à déterminer afin que :
  $\rightarrow$ $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, l'erreur d'estimation, tende vers zéro
  $\rightarrow$ $e(t)$ soit indépendante des entrées inconnues $d(t)$

- L'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit

$$e(t) = (I - EC)x(t) - z(t) - EGd(t)$$

- En définissant $R = I - EC$, si $EG = 0$, il vient :

$$e(t) = Rx(t) - z(t)$$

- La dynamique de $e(t)$ se développe en

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) = & N_\mu e(t) + (RA_\mu - N_\mu R - L_\mu C)x(t) + (RB_\mu - M_\mu - L_\mu D)u(t) \\ & + (RF_\mu - L_\mu G)d(t)\end{aligned}$$

- qui se réduit à :

$$\dot{e}(t) = N_\mu e(t)$$

sous les conditions :

$$\begin{cases} 0 = RA_\mu - N_\mu R - L_\mu C \\ 0 = RB_\mu - M_\mu - L_\mu D \\ 0 = RF_\mu - L_\mu G \\ I \ = R + EC \\ 0 = EG \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_\mu = RA_\mu + K_\mu C \\ K_\mu = N_\mu E - L_\mu \\ M_\mu = RB_\mu - L_\mu D \\ 0 = RF_\mu - K_\mu G \\ I = R + EC \\ 0 = EG \end{cases}$$

- Les contraintes se rassemblent en :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R & E & K_1 & \dots & K_r \end{bmatrix}}_{\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & F_1 & \dots & F_r \\ C & G & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & G & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & G \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{Y}$$

- Ce système a une solution : $\theta = YX^{+} + ZX^{\perp}$ (Z libre)

$$\Leftrightarrow rang\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = rang(X)$$

$$\Leftrightarrow rang\left(\begin{bmatrix} F_1 & \dots & F_r \\ G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix}\right) = rang\left(\begin{bmatrix} CF_1 & \dots & CF_r \\ G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix}\right)$$

- La stabilité de $\dot{e}(t) = N_\mu e(t)$ est assurée s'il existe $P = P^T > 0$ telle que

$$PN_i + (PN_i)^T < 0$$

- Les matrices N_i s'écrivent

$$N_i = \underbrace{\begin{bmatrix} R & E & K_1 & \dots & K_r \end{bmatrix}}_{\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} A_i \\ 0 \\ \vdots \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{Y_i}$$

- La condition de stabilité devient :

$$P(YX^+ + ZX^\perp)Y_i + (P(YX^+ + ZX^\perp)Y_i)^T < 0$$

Synthèse de multiobservateurs à entrées inconnues

Soit le système perturbé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = N_\mu z(t) + M_\mu u(t) + L_\mu y(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Ey(t) - EDu(t) \end{cases}$$

Si la contrainte structurelle suivante est vérifiée :

$$rang\left(\begin{bmatrix} F_1 & \dots & F_r \\ G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix}\right) = rang\left(\begin{bmatrix} CF_1 & \dots & CF_r \\ G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix}\right)$$

Synthèse de multiobservateurs à entrées inconnues

Soit le système perturbé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = N_\mu z(t) + M_\mu u(t) + L_\mu y(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) + Ey(t) - EDu(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état tend vers zéro s'il existe $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$ et $\bar{\bar{P}}$ t.q. :

$$\bar{P}YX^+Y_i + \bar{\bar{P}}X^\perp Y_i + (\bar{P}YX^+Y_i + \bar{\bar{P}}vX^\perp Y_i)^T < 0$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$Z = \bar{P}^{-1}\bar{\bar{P}}$$

$$\begin{bmatrix} P & E & K_1 & \dots & K_r \end{bmatrix} = YX^+ + ZX^\perp$$

$$N_i = PA_i + K_iC$$

$$L_i = N_iE - K_i$$

$$M_i = PB_i - L_iD$$

2. Observateur avec atténuation des incertitudes additives

- Soit le système avec entrées inconnues $d(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) = & Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- S'il ne vérifie pas la contrainte structurelle précédente
  $\rightarrow$ le découplage parfait de $d(t)$ et $\hat{x}(t)$ est impossible
  $\rightarrow$ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des entrées inconnues sur l'estimation
- On utilise le multi-observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A_\mu - L_\mu C)e(t) + (F_\mu - L_\mu G)d(t)$$

- Soit le système avec entrées inconnues $d(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) = & Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- S'il ne vérifie pas la contrainte structurelle précédente
  $\rightarrow$ le découplage parfait de $d(t)$ et $\hat{x}(t)$ est impossible
  $\rightarrow$ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des entrées inconnues sur l'estimation
- On utilise le multi-observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A_\mu - L_\mu C)e(t) + (F_\mu - L_\mu G)d(t)$$

- Soit le système avec entrées inconnues $d(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) = & Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- S'il ne vérifie pas la contrainte structurelle précédente
  $\rightarrow$ le découplage parfait de $d(t)$ et $\hat{x}(t)$ est impossible
  $\rightarrow$ minimisation du gain $\mathscr{L}_2$ des entrées inconnues sur l'estimation
- On utilise le multi-observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A_\mu - L_\mu C)e(t) + (F_\mu - L_\mu G)d(t)$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $d(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, c-à-d

$$\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt$$

s'il existe une fonction de Lyapunov $V(e(t))$ positive, vérifiant :

$$\dot{V}(e(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 d^T(t)d(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La condition devient :

- qui se linéarise en définissant : $\bar{L}_i = PL_i$.

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $d(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, c-à-d

$$\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt$$

s'il existe une fonction de Lyapunov $V(e(t))$ positive, vérifiant :

$$\dot{V}(e(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 d^T(t)d(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La condition devient :

- qui se linéarise en définissant : $\bar{L}_i = PL_i$.

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $d(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, c-à-d

$$\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt$$

s'il existe une fonction de Lyapunov $V(e(t))$ positive, vérifiant :

$$\dot{V}(e(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 d^T(t)d(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La condition devient :

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA_\mu - PL_\mu C + (PA_\mu - PL_\mu C)^T + I & PF_\mu - PL_\mu G \\ (PF_\mu - PL_\mu G)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ d(t) \end{bmatrix} < 0$$

- qui se linéarise en définissant : $\bar{L}_i = PL_i$.

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $d(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, c-à-d

$$\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt$$

s'il existe une fonction de Lyapunov $V(e(t))$ positive, vérifiant :

$$\dot{V}(e(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 d^T(t)d(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$

$$V(e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad avec \quad P = P^T > 0$$

- La condition devient :

$$\begin{bmatrix} PA_\mu - PL_\mu C + (PA_\mu - PL_\mu C)^T + I & PF_\mu - PL_\mu G \\ (PF_\mu - PL_\mu G)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

- qui se linéarise en définissant : $\bar{L}_i = PL_i$.

Synthèse de multiobservateur avec atténuation de perturbation

Soit le système perturbé :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t) + F_\mu d(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) + G_\mu d(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = & C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état tend vers zéro si $d(t) = 0$ et vérifie

$$\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt$$

s'il existe $P = P^T$ et $\bar{L}_i$ minimisant γ^2 s.c.

$$\begin{bmatrix} PA_i - \bar{L}_i C_j + A_i^T P - C_j^T \bar{L}_i^T + I & PF_i - \bar{L}_i G_j \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad i,j = 1,\dots,r$$

$$P > 0$$

Les gains de l'observateur sont donnés par : $L_i = P^{-1}\bar{L}_i$.

- Multimodèle incertain défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) & = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

où les incertitudes sont bornées et définies par

$$\begin{cases} \Delta A_i(t) & = M_i^A \Sigma_A(t) N_i^A \\ \Delta B_i(t) & = M_i^B \Sigma_B(t) N_i^B \end{cases}$$

où $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$ et $\Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) \leq I$.

- Multiobservateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) & = C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

- La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A_\mu - L_\mu C_\mu)e(t) + \Delta A_\mu x(t) + \Delta B_\mu u(t)$$

système non autonome $\rightarrow$ atténuation d'un gain $\mathscr{L}_2$

- Multimodèle incertain défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) &= C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

où les incertitudes sont bornées et définies par

$$\begin{cases} \Delta A_i(t) &= M_i^A \Sigma_A(t) N_i^A \\ \Delta B_i(t) &= M_i^B \Sigma_B(t) N_i^B \end{cases}$$

où $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$ et $\Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) \leq I$.

- Multiobservateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

- La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A_\mu - L_\mu C_\mu)e(t) + \Delta A_\mu x(t) + \Delta B_\mu u(t)$$

système non autonome $\rightarrow$ atténuation d'un gain $\mathscr{L}_2$

- Multimodèle incertain défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) &= C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

où les incertitudes sont bornées et définies par

$$\begin{cases} \Delta A_i(t) &= M_i^A \Sigma_A(t) N_i^A \\ \Delta B_i(t) &= M_i^B \Sigma_B(t) N_i^B \end{cases}$$

où $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$ et $\Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) \leq I$.

- Multiobservateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

- La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = (A_\mu - L_\mu C_\mu)e(t) + \Delta A_\mu x(t) + \Delta B_\mu u(t)$$

système non autonome $\rightarrow$ atténuation d'un gain $\mathscr{L}_2$

2. Observateur de MM incertains

- On écrit le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu - L_\mu C_\mu & \Delta A_\mu \\ 0 & A_\mu + \Delta A_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_\mu \\ B_\mu + \Delta B_\mu \end{bmatrix} u(t)$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x_a(t))$ vérifiant

$$\dot{V}(x_a(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$ et $x(t)$

$$V(e(t), x(t)) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$.

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné devient

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C) + I & * & * \\ (P_1 \Delta A_\mu)^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu + P_2 \Delta A_\mu) & * \\ (P_1 \Delta B_\mu)^T & (P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0$$

où $\mathbb{S}(M) = M + M^T$.

2. Observateur de MM incertains

- On écrit le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu - L_\mu C_\mu & \Delta A_\mu \\ 0 & A_\mu + \Delta A_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_\mu \\ B_\mu + \Delta B_\mu \end{bmatrix} u(t)$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x_a(t))$ vérifiant

$$\dot{V}(x_a(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$ et $x(t)$

$$V(e(t), x(t)) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$.

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné devient

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C) + I & * & * \\ (P_1 \Delta A_\mu)^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu + P_2 \Delta A_\mu) & * \\ (P_1 \Delta B_\mu)^T & (P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0$$

où $\mathbb{S}(M) = M + M^T$.

- On écrit le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu - L_\mu C_\mu & \Delta A_\mu \\ 0 & A_\mu + \Delta A_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_\mu \\ B_\mu + \Delta B_\mu \end{bmatrix} u(t)$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x_a(t))$ vérifiant

$$\dot{V}(x_a(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$ et $x(t)$

$$V(e(t), x(t)) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$.

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné devient

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C) + I & * & * \\ (P_1 \Delta A_\mu)^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu + P_2 \Delta A_\mu) & * \\ (P_1 \Delta B_\mu)^T & (P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0$$

où $\mathbb{S}(M) = M + M^T$.

- On écrit le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\mu - L_\mu C_\mu & \Delta A_\mu \\ 0 & A_\mu + \Delta A_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_\mu \\ B_\mu + \Delta B_\mu \end{bmatrix} u(t)$$

- Le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné par $\gamma > 0$, s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x_a(t))$ vérifiant

$$\dot{V}(x_a(t)) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)u(t) < 0$$

- On choisit la fonction de Lyapunov quadratique en $e(t)$ et $x(t)$

$$V(e(t), x(t)) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$.

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné devient

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C) + I & * & * \\ (P_1 \Delta A_\mu)^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu + P_2 \Delta A_\mu) & * \\ (P_1 \Delta B_\mu)^T & (P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0$$

où $\mathbb{S}(M) = M + M^T$.

2. Observateur de MM incertains

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C_\mu) + I & P_1 \Delta A_\mu & P_1 \Delta B_\mu \\ (P_1 \Delta A_\mu)^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu + P_2 \Delta A_\mu) & P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu \\ (P_1 \Delta B_\mu)^T & (P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

- peut s'écrire sous la forme

$$M_\mu + \mathbb{S}(X_\mu^A \Sigma_A(t) Y_\mu^A + X_\mu^B \Sigma_B(t) Y_\mu^B) < 0$$

avec

$$M_\mu = \begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C_\mu) + I & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_\mu) & * \\ 0 & (P_2 B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$X_\mu^A = \begin{bmatrix} P_1 M_\mu^A \\ P_2 M_\mu^A \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_\mu^B = \begin{bmatrix} P_1 M_\mu^B \\ P_2 M_\mu^B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_\mu^A = \begin{bmatrix} 0 & N_\mu^A & 0 \end{bmatrix} \quad Y_\mu^B = \begin{bmatrix} 0 & N_\mu^B & 0 \end{bmatrix}$$

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C_\mu) + I & P_1 \Delta A_\mu & P_1 \Delta B_\mu \\ (P_1 \Delta A_\mu)^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu + P_2 \Delta A_\mu) & P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu \\ (P_1 \Delta B_\mu)^T & (P_2 B_\mu + P_2 \Delta B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

- peut s'écrire sous la forme

$$M_\mu + \mathbb{S}(X_\mu^A \Sigma_A(t) Y_\mu^A + X_\mu^B \Sigma_B(t) Y_\mu^B) < 0$$

avec

$$M_\mu = \begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_\mu - P_1 L_\mu C_\mu) + I & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_\mu) & * \\ 0 & (P_2 B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$X_\mu^A = \begin{bmatrix} P_1 M_\mu^A \\ P_2 M_\mu^A \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_\mu^B = \begin{bmatrix} P_1 M_\mu^B \\ P_2 M_\mu^B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_\mu^A = \begin{bmatrix} 0 & N_\mu^A & 0 \end{bmatrix} \quad Y_\mu^B = \begin{bmatrix} 0 & N_\mu^B & 0 \end{bmatrix}$$

- Comme $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$ et $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$, une condition suffisante à

$$M_i + \mathbb{S}(X_i^A \Sigma_A(t) Y_i^A + X_i^B \Sigma_B(t) Y_i^B) < 0$$

est qu'il existe des réels positif λ_i^A et λ_i^B tels que

$$M_i + (\lambda_i^A)^{-1} X_i^A (X_i^A)^T + \lambda_i^A (Y_i^A)^T Y_i^A + (\lambda_i^B)^{-1} X_i^B (X_i^B)^T + \lambda_i^B (Y_i^B)^T Y_i^B < 0$$

- Avec des compléments de Shur, l'inégalité devient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - P_1 L_i C_j) + I & 0 & 0 & P_1 M_i^A & P_1 M_i^B \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_i) + N_i^{AT} \lambda_i^A N_i^A & P_2 B_i & P_2 M_i^A & P_2 M_i^B \\ 0 & (P_2 B_i)^T & -\gamma^2 I + N_i^{BT} \lambda_i^B N_i^B & 0 & 0 \\ (P_1 M_i^A)^T & (P_2 M_i^A)^T & 0 & -\lambda_i^A I & 0 \\ (P_1 M_i^B)^T & (P_2 M_i^B)^T & 0 & 0 & -\lambda_i^B I \end{bmatrix} < 0$$

- qui se linéarise en définissant $\bar{L}_i = P_1 L_i$

- Comme $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$ et $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$, une condition suffisante à

$$M_i + \mathbb{S}(X_i^A \Sigma_A(t) Y_i^A + X_i^B \Sigma_B(t) Y_i^B) < 0$$

est qu'il existe des réels positif λ_i^A et λ_i^B tels que

$$M_i + (\lambda_i^A)^{-1} X_i^A (X_i^A)^T + \lambda_i^A (Y_i^A)^T Y_i^A + (\lambda_i^B)^{-1} X_i^B (X_i^B)^T + \lambda_i^B (Y_i^B)^T Y_i^B < 0$$

- Avec des compléments de Shur, l'inégalité devient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - P_1 L_i C_j) + I & 0 & 0 & P_1 M_i^A & P_1 M_i^B \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_i) + N_i^{AT} \lambda_i^A N_i^A & P_2 B_i & P_2 M_i^A & P_2 M_i^B \\ 0 & (P_2 B_i)^T & -\gamma^2 I + N_i^{BT} \lambda_i^B N_i^B & 0 & 0 \\ (P_1 M_i^A)^T & (P_2 M_i^A)^T & 0 & -\lambda_i^A I & 0 \\ (P_1 M_i^B)^T & (P_2 M_i^B)^T & 0 & 0 & -\lambda_i^B I \end{bmatrix} < 0$$

- qui se linéarise en définissant $\bar{L}_i = P_1 L_i$

- Comme $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$ et $\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$, une condition suffisante à

$$M_i + \mathbb{S}(X_i^A \Sigma_A(t) Y_i^A + X_i^B \Sigma_B(t) Y_i^B) < 0$$

est qu'il existe des réels positif λ_i^A et λ_i^B tels que

$$M_i + (\lambda_i^A)^{-1} X_i^A (X_i^A)^T + \lambda_i^A (Y_i^A)^T Y_i^A + (\lambda_i^B)^{-1} X_i^B (X_i^B)^T + \lambda_i^B (Y_i^B)^T Y_i^B < 0$$

- Avec des compléments de Shur, l'inégalité devient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - P_1 L_i C_j) + I & 0 & 0 & P_1 M_i^A & P_1 M_i^B \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_i) + N_i^{AT} \lambda_i^A N_i^A & P_2 B_i & P_2 M_i^A & P_2 M_i^B \\ 0 & (P_2 B_i)^T & -\gamma^2 I + N_i^{BT} \lambda_i^B N_i^B & 0 & 0 \\ (P_1 M_i^A)^T & (P_2 M_i^A)^T & 0 & -\lambda_i^A I & 0 \\ (P_1 M_i^B)^T & (P_2 M_i^B)^T & 0 & 0 & -\lambda_i^B I \end{bmatrix} < 0$$

- qui se linéarise en définissant $\bar{L}_i = P_1 L_i$

Synthèse de multiobservateur pour MM incertains

Soit le système incertain :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_\mu + \Delta A_\mu)x(t) + (B_\mu + \Delta B_\mu)u(t) \\ y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

avec $\Delta X_i(t) = M_i^X \Sigma_X(t) N_i^X$ où $\Sigma_X^T(t)\Sigma_X(t) \leq I$, et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = & A_\mu \hat{x}(t) + B_\mu u(t) + L_\mu(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = & C_\mu \hat{x}(t) + D_\mu u(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état vérifie : $\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u^T(t)u(t)dt$
s'il existe $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, λ_i^A, λ_i^B et $\bar{L}_i$ minimisant γ^2 s.c.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - \bar{L}_i C_j) + I & 0 & 0 & P_1 M_i^A & P_1 M_i^B \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_i) + N_i^{AT} \lambda_i^A N_i^A & P_2 B_i & P_2 M_i^A & P_2 M_i^B \\ 0 & (P_2 B_i)^T & N_i^{BT} \lambda_i^B N_i^B - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ (P_1 M_i^A)^T & (P_2 M_i^A)^T & 0 & -\lambda_i^A I & 0 \\ (P_1 M_i^B)^T & (P_2 M_i^B)^T & 0 & 0 & -\lambda_i^B I \end{bmatrix} < 0$$

pour $i, j = 1, \ldots, r$. Les gains de l'observateur sont donnés par : $L_i = P_1^{-1} \bar{L}_i$.

Section 3

Section 3. Estimation de l'état de MM à VDNM

- On considère le multimodèle dont les fonctions d'activation dépendent de l'état $x(t)$ (fréquent lorsque le MM est obtenu par transformation par secteurs non linéaires)

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array}\right.$$

- Les fonctions d'activation de l'observateur doivent dépendre de l'état estimé

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\hat{x}}(t) & = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{array}\right.$$

- Notations :

$$X_\mu = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) X_i \quad et \quad X_{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) X_i$$

- On considère le multimodèle dont les fonctions d'activation dépendent de l'état $x(t)$ (fréquent lorsque le MM est obtenu par transformation par secteurs non linéaires)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Les fonctions d'activation de l'observateur doivent dépendre de l'état estimé

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Notations :

$$X_\mu = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) X_i \quad et \quad X_{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) X_i$$

- On considère le multimodèle dont les fonctions d'activation dépendent de l'état $x(t)$ (fréquent lorsque le MM est obtenu par transformation par secteurs non linéaires)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Les fonctions d'activation de l'observateur doivent dépendre de l'état estimé

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Notations :

$$X_\mu = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) X_i \quad et \quad X_{\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) X_i$$

- Pour faciliter l'écriture de l'erreur d'estimation, on écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}}x(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_{\mu} - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des incertitudes

$$X_{\mu} - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- On a donc

$$\begin{aligned} A_{\mu} - A_{\hat{\mu}} = \Delta A(t) = M^A \Sigma^A(t) N^A \\ B_{\mu} - B_{\hat{\mu}} = \Delta B(t) = M^B \Sigma^B(t) N^B \end{aligned}$$

- Comme $0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1$ et $0 \leq \mu_i(\hat{x}(t)) \leq 1$, il vient :

$$(\Sigma^A(t))^T \Sigma^A(t) \leq I \quad et \quad (\Sigma^B(t))^T \Sigma^B(t) \leq I$$

- Pour faciliter l'écriture de l'erreur d'estimation, on écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}}x(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + (A_\mu - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_\mu - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_\mu - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des incertitudes

$$X_\mu - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- On a donc

$$A_\mu - A_{\hat{\mu}} = \Delta A(t) = M^A \Sigma^A(t) N^A$$
$$B_\mu - B_{\hat{\mu}} = \Delta B(t) = M^B \Sigma^B(t) N^B$$

- Comme $0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1$ et $0 \leq \mu_i(\hat{x}(t)) \leq 1$, il vient :

$$(\Sigma^A(t))^T \Sigma^A(t) \leq I \quad et \quad (\Sigma^B(t))^T \Sigma^B(t) \leq I$$

- Pour faciliter l'écriture de l'erreur d'estimation, on écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}}x(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_{\mu} - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des incertitudes

$$X_{\mu} - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- On a donc

$$A_{\mu} - A_{\hat{\mu}} = \Delta A(t) = M^A \Sigma^A(t) N^A$$
$$B_{\mu} - B_{\hat{\mu}} = \Delta B(t) = M^B \Sigma^B(t) N^B$$

- Comme $0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1$ et $0 \leq \mu_i(\hat{x}(t)) \leq 1$, il vient :

$$(\Sigma^A(t))^T \Sigma^A(t) \leq I \quad et \quad (\Sigma^B(t))^T \Sigma^B(t) \leq I$$

- Pour faciliter l'écriture de l'erreur d'estimation, on écrit le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}}x(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + (A_\mu - A_{\hat{\mu}})x(t) + (B_\mu - B_{\hat{\mu}})u(t)$$

- Les termes $(X_\mu - X_{\hat{\mu}})$ peuvent s'écrire comme des incertitudes

$$X_\mu - X_{\hat{\mu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_r \end{bmatrix}}_{M^X} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1(x) - \mu_1(\hat{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_r(x) - \mu_r(\hat{x}) \end{bmatrix}}_{\Sigma^X(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{N^X}$$

- On a donc

$$A_\mu - A_{\hat{\mu}} = \Delta A(t) = M^A \Sigma^A(t) N^A$$
$$B_\mu - B_{\hat{\mu}} = \Delta B(t) = M^B \Sigma^B(t) N^B$$

- Comme $0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1$ et $0 \leq \mu_i(\hat{x}(t)) \leq 1$, il vient :

$$(\Sigma^A(t))^T \Sigma^A(t) \leq I \quad et \quad (\Sigma^B(t))^T \Sigma^B(t) \leq I$$

- Le problème d'estimation de MM à VDNM, se ramène à celui d'un MM incertain avec des variables de décision mesurables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & (A_{\hat{\mu}} + \Delta A(t))x(t) + (B_{\hat{\mu}} + \Delta B(t))u(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

par l'observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = & A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- On peut écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C & \Delta A(t) \\ 0 & A_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ B_{\mu} \end{bmatrix} u(t)$$

- Et chercher les L_i qui minimisent le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.

- Le problème d'estimation de MM à VDNM, se ramène à celui d'un MM incertain avec des variables de décision mesurables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & (A_{\hat{\mu}} + \Delta A(t))x(t) + (B_{\hat{\mu}} + \Delta B(t))u(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

par l'observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = & A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- On peut écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C & \Delta A(t) \\ 0 & A_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ B_{\mu} \end{bmatrix} u(t)$$

- Et chercher les L_i qui minimisent le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.

- Le problème d'estimation de MM à VDNM, se ramène à celui d'un MM incertain avec des variables de décision mesurables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A_{\hat{\mu}} + \Delta A(t))x(t) + (B_{\hat{\mu}} + \Delta B(t))u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

par l'observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- On peut écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C & \Delta A(t) \\ 0 & A_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ B_{\mu} \end{bmatrix} u(t)$$

- Et chercher les L_i qui minimisent le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.

- En choisissant la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t)$$

avec $P_1 = P_1 > 0$ et $P_2 = P_2{}^T > 0$

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné devient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1A_{\hat{\mu}} - P_1L_{\hat{\mu}}C) + I & P_1\Delta A(t) & P_1\Delta B(t) \\ (P_1\Delta A(t))^T & \mathbb{S}(P_2A_{\mu}) & P_2B_{\mu} \\ (P_1\Delta B(t))^T & (P_2B_{\mu})^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

- Comme pour la synthèse d'observateur pour multimodèles incertains :
  $\rightarrow$ on sépare parties certaine et incertaine (due aux $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$)
  $\rightarrow$ on utilise le fait que $\begin{cases} \Delta A(t) = M^A\Sigma_A(t)N^A, & (\Sigma_A(t))^T\Sigma_A(t) \leq I \\ \Delta B(t) = M^B\Sigma_B(t)N^B, & (\Sigma_B(t))^T\Sigma_B(t) \leq I \end{cases}$
  $\rightarrow$ majoration par *carré matriciel incertain*

3. Observateur de MM à VDNM, approche incertitudes bornées

- En choisissant la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = e^T(t)P_1 e(t) + x^T(t)P_2 x(t)$$

avec $P_1 = P_1 > 0$ et $P_2 = {P_2}^T > 0$

- La condition de gain $\mathscr{L}_2$ borné devient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_{\hat{\mu}} - P_1 L_{\hat{\mu}} C) + I & P_1 \Delta A(t) & P_1 \Delta B(t) \\ (P_1 \Delta A(t))^T & \mathbb{S}(P_2 A_\mu) & P_2 B_\mu \\ (P_1 \Delta B(t))^T & (P_2 B_\mu)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

- Comme pour la synthèse d'observateur pour multimodèles incertains :
  $\rightarrow$ on sépare parties certaine et incertaine (due aux $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$)
  $\rightarrow$ on utilise le fait que $\begin{cases} \Delta A(t) = M^A \Sigma_A(t) N^A, & (\Sigma_A(t))^T \Sigma_A(t) \leq I \\ \Delta B(t) = M^B \Sigma_B(t) N^B, & (\Sigma_B(t))^T \Sigma_B(t) \leq I \end{cases}$
  $\rightarrow$ majoration par *carré matriciel incertain*

Synthèse de multiobservateur pour MM à VDNM (approche Δ bornées)

Soit le système à variable de décision non mesurables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) & = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état vérifie : $\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u^T(t)u(t)dt$
s'il existe $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, λ^A, λ^B et $\bar{L}_i$ minimisant γ^2 s.c.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - \bar{L}_i C) + I & 0 & 0 & P_1 M_i^A & P_1 M_i^B \\ 0 & \mathbb{S}(P_2 A_i) + N^{AT} \lambda^A N^A & P_2 B_i & 0 & 0 \\ 0 & (P_2 B_i)^T & N^{BT} \lambda^B N^B - \gamma^2 I & 0 & 0 \\ (P_1 M^A)^T & 0 & 0 & -\lambda^A I & 0 \\ (P_1 M^B)^T & 0 & 0 & 0 & -\lambda^B I \end{bmatrix} < 0$$

pour $i = 1, \ldots, r$. Les gains de l'observateur sont donnés par : $L_i = P_1^{-1} \bar{L}_i$.

- D'autres ré-écritures de l'équation d'état sont possibles
- Pour éviter la majoration avec $\Delta X(t)$ on peut écrire le MM à VDNM avec des incertitudes constantes.
- On considère le MM à VDNM suivant

$$\dot{x}(t) = A_\mu x(t) + B_\mu u(t)$$
$$y(t) = C_\mu x(t) + D_\mu u(t)$$

- Pour écrire simplement la dynamique de $e(t)$ on fait apparaître les matrices $A_{\hat{\mu}}$, $B_{\hat{\mu}}$, etc

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + (A_\mu - A_{\hat{\mu}}) x(t) + (B_\mu - B_{\hat{\mu}}) u(t)$$
$$y(t) = C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + (C_\mu - C_{\hat{\mu}}) x(t) + (D_\mu - D_{\hat{\mu}}) u(t)$$

- D'autres ré-écritures de l'équation d'état sont possibles
- Pour éviter la majoration avec $\Delta X(t)$ on peut écrire le MM à VDNM avec des incertitudes constantes.
- On considère le MM à VDNM suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) &= C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{aligned}$$

- Pour écrire simplement la dynamique de $e(t)$ on fait apparaître les matrices $A_{\hat{\mu}}$, $B_{\hat{\mu}}$, etc

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + (A_\mu - A_{\hat{\mu}}) x(t) + (B_\mu - B_{\hat{\mu}}) u(t) \\ y(t) &= C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + (C_\mu - C_{\hat{\mu}}) x(t) + (D_\mu - D_{\hat{\mu}}) u(t) \end{aligned}$$

- D'autres ré-écritures de l'équation d'état sont possibles
- Pour éviter la majoration avec $\Delta X(t)$ on peut écrire le MM à VDNM avec des incertitudes constantes.
- On considère le MM à VDNM suivant

$$\dot{x}(t) = A_{\mu} x(t) + B_{\mu} u(t)$$
$$y(t) = C_{\mu} x(t) + D_{\mu} u(t)$$

- Pour écrire simplement la dynamique de $e(t)$ on fait apparaître les matrices $A_{\hat{\mu}}$, $B_{\hat{\mu}}$, etc

$$\dot{x}(t) = A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + (A_{\mu} - A_{\hat{\mu}}) x(t) + (B_{\mu} - B_{\hat{\mu}}) u(t)$$
$$y(t) = C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + (C_{\mu} - C_{\hat{\mu}}) x(t) + (D_{\mu} - D_{\hat{\mu}}) u(t)$$

- D'autres ré-écritures de l'équation d'état sont possibles
- Pour éviter la majoration avec $\Delta X(t)$ on peut écrire le MM à VDNM avec des incertitudes constantes.
- On considère le MM à VDNM suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\mu x(t) + B_\mu u(t) \\ y(t) &= C_\mu x(t) + D_\mu u(t) \end{aligned}$$

- Pour écrire simplement la dynamique de $e(t)$ on fait apparaître les matrices $A_{\hat{\mu}}$, $B_{\hat{\mu}}$, etc

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + (A_\mu - A_{\hat{\mu}}) x(t) + (B_\mu - B_{\hat{\mu}}) u(t) \\ y(t) &= C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + (C_\mu - C_{\hat{\mu}}) x(t) + (D_\mu - D_{\hat{\mu}}) u(t) \end{aligned}$$

3. Observateur de MM à VDNM, approche incertitudes constantes

- En notant $\mu_i = \mu_i(x(t))$ et $\hat{\mu}_i = \mu_i(\hat{x}(t)$, on peut remarquer que

$$\begin{aligned} X_\mu - X_{\hat{\mu}} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i X_i - \sum_{j=1}^{r} \hat{\mu}_j X_j \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{j=1}^{r} \hat{\mu}_j X_i - \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{ji=1}^{r} \hat{\mu}_j X_j \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \hat{\mu}_j (X_i - X_j) \end{aligned}$$

- On notera $\Delta X_{ij} = X_i - X_j$ et $\Delta X_{\mu\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \hat{\mu}_j (\Delta X_{ij})$.
- Le système devient

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + \Delta A_{\mu\hat{\mu}} x(t) + \Delta B_{\mu\hat{\mu}} u(t) \\ y(t) &= C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + \Delta C_{\mu\hat{\mu}} x(t) + \Delta D_{\mu\hat{\mu}} u(t) \end{aligned}$$

où les matrices ΔX_{ij} sont connues et constantes

- En notant $\mu_i = \mu_i(x(t))$ et $\hat{\mu}_i = \mu_i(\hat{x}(t)$, on peut remarquer que

$$
\begin{aligned}
X_\mu - X_{\hat{\mu}} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i X_i - \sum_{j=1}^{r} \hat{\mu}_j X_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{j=1}^{r} \hat{\mu}_j X_i - \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{ji=1}^{r} \hat{\mu}_j X_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \hat{\mu}_j (X_i - X_j)
\end{aligned}
$$

- On notera $\Delta X_{ij} = X_i - X_j$ et $\Delta X_{\mu\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \hat{\mu}_j (\Delta X_{ij})$.
- Le système devient

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + \Delta A_{\mu\hat{\mu}} x(t) + \Delta B_{\mu\hat{\mu}} u(t) \\
y(t) &= C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + \Delta C_{\mu\hat{\mu}} x(t) + \Delta D_{\mu\hat{\mu}} u(t)
\end{aligned}
$$

où les matrices ΔX_{ij} sont connues et constantes

- En notant $\mu_i = \mu_i(x(t))$ et $\hat{\mu}_i = \mu_i(\hat{x}(t)$, on peut remarquer que

$$
\begin{aligned}
X_\mu - X_{\hat{\mu}} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i X_i - \sum_{j=1}^{r} \hat{\mu}_j X_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{j=1}^{r} \hat{\mu}_j X_i - \sum_{i=1}^{r} \mu_i \sum_{ji=1}^{r} \hat{\mu}_j X_j \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \hat{\mu}_j (X_i - X_j)
\end{aligned}
$$

- On notera $\Delta X_{ij} = X_i - X_j$ et $\Delta X_{\mu\hat{\mu}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i \hat{\mu}_j (\Delta X_{ij})$.
- Le système devient

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_{\hat{\mu}} x(t) + B_{\hat{\mu}} u(t) + \Delta A_{\mu\hat{\mu}} x(t) + \Delta B_{\mu\hat{\mu}} u(t) \\
y(t) &= C_{\hat{\mu}} x(t) + D_{\hat{\mu}} u(t) + \Delta C_{\mu\hat{\mu}} x(t) + \Delta D_{\mu\hat{\mu}} u(t)
\end{aligned}
$$

où les matrices ΔX_{ij} sont connues et constantes

- On peut proposer l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t))\\ \hat{y}(t) &= C_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + D_{\hat{\mu}}u(t)\end{aligned}$$

- et écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix}\dot{e}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C_{\hat{\mu}} & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta C_{\mu\hat{\mu}}\\ 0 & A_{\mu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t)\\ x(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta B_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta D_{\mu\hat{\mu}}\\ B_{\mu}\end{bmatrix}u(t)$$

- Le système n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov
  $V(e,x) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t)$
- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2u^T(t)ut(t)$$

- Pas d'incertitudes dépendant de t $\rightarrow$ pas de majoration
- Triple somme $\rightarrow$ r^3 contraintes LMIs

- On peut proposer l'observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t))$$
$$\hat{y}(t) = C_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + D_{\hat{\mu}}u(t)$$

- et écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix}\dot{e}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C_{\hat{\mu}} & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta C_{\mu\hat{\mu}}\\ 0 & A_{\mu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t)\\ x(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta B_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta D_{\mu\hat{\mu}}\\ B_{\mu}\end{bmatrix}u(t)$$

- Le système n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov
  $V(e,x) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t)$
- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2u^T(t)ut(t)$$

- Pas d'incertitudes dépendant de t $\rightarrow$ pas de majoration
- Triple somme $\rightarrow$ r^3 contraintes LMIs

- On peut proposer l'observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + D_{\hat{\mu}}u(t)\end{aligned}$$

- et écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix}\dot{e}(t) \\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C_{\hat{\mu}} & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta C_{\mu\hat{\mu}} \\ 0 & A_{\mu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t) \\ x(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Delta B_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta D_{\mu\hat{\mu}} \\ B_{\mu}\end{bmatrix}u(t)$$

- Le système n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov
  $V(e,x) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t)$
- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Pas d'incertitudes dépendant de t $\rightarrow$ pas de majoration
- Triple somme $\rightarrow$ r^3 contraintes LMIs

- On peut proposer l'observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t))$$
$$\hat{y}(t) = C_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + D_{\hat{\mu}}u(t)$$

- et écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C_{\hat{\mu}} & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta C_{\mu\hat{\mu}} \\ 0 & A_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta D_{\mu\hat{\mu}} \\ B_{\mu} \end{bmatrix} u(t)$$

- Le système n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov
  $V(e,x) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t)$
- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Pas d'incertitudes dépendant de t $\rightarrow$ pas de majoration
- Triple somme $\rightarrow$ r^3 contraintes LMIs

- On peut proposer l'observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + B_{\hat{\mu}}u(t) + L_{\hat{\mu}}(y(t) - \hat{y}(t))$$
$$\hat{y}(t) = C_{\hat{\mu}}\hat{x}(t) + D_{\hat{\mu}}u(t)$$

- et écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}C_{\hat{\mu}} & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta C_{\mu\hat{\mu}} \\ 0 & A_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}}\Delta D_{\mu\hat{\mu}} \\ B_{\mu} \end{bmatrix} u(t)$$

- Le système n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov
  $V(e,x) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t)$
- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2u^T(t)ut(t)$$

- Pas d'incertitudes dépendant de t $\rightarrow$ pas de majoration
- Triple somme $\rightarrow$ r^3 contraintes LMIs

Synthèse de multiobservateur pour MM à VDNM (approche Δ constantes)

Soit le système à variable de décision non mesurables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état vérifie : $\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u^T(t)u(t)dt$
s'il existe $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et $\bar{L}_i$ minimisant γ^2 s.c.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - \bar{L}_i C_j) + I & * & * \\ (P_1(A_k - A_i) - \bar{L}_i(C_k - C_j))^T & \mathbb{S}(P_2 A_k) & * \\ (P_1(B_k - B_i) - \bar{L}_i(D_k - D_j))^T & (P_2 B_k)^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

pour $i, j, k = 1, \ldots, r$.
Les gains de l'observateur sont donnés par : $L_i = P_1^{-1}\bar{L}_i$.

3. Observateur de MM à VDNM incertains

- On considère un MM incertain à VDNM

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)\right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où les incertitudes vérifient $\Delta X_i(t) = M_i^X \Sigma_X(t) N_i^X$ et $\Sigma_X^T(t)\Sigma_X(t) \leq I$.

- L'observateur proposé est

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) & = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Avec la même technique que précédemment on peut écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

3. Observateur de MM à VDNM incertains

- On considère un MM incertain à VDNM

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)\right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

  où les incertitudes vérifient $\Delta X_i(t) = M_i^X \Sigma_X(t) N_i^X$ et $\Sigma_X^T(t)\Sigma_X(t) \leq I$.

- L'observateur proposé est

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) & = C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Avec la même technique que précédemment on peut écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

- On considère un MM incertain à VDNM

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)\right) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où les incertitudes vérifient $\Delta X_i(t) = M_i^X \Sigma_X(t) N_i^X$ et $\Sigma_X^T(t)\Sigma_X(t) \leq I$.

- L'observateur proposé est

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Avec la même technique que précédemment on peut écrire le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

3. Observateur de MM à VDNM incertains

- Le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

  n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.

- On utilise la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Les termes $\Delta A_{\mu}(t)$ et $\Delta B_{\mu}(t)$ sont majorés avec un carré matriciel incertain
- Double somme $\rightarrow$ r^2 contraintes LMIs

- Le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

  n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Les termes $\Delta A_{\mu}(t)$ et $\Delta B_{\mu}(t)$ sont majorés avec un carré matriciel incertain
- Double somme $\rightarrow$ r^2 contraintes LMIs

- Le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

  n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.

- On utilise la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Les termes $\Delta A_{\mu}(t)$ et $\Delta B_{\mu}(t)$ sont majorés avec un carré matriciel incertain
- Double somme $\rightarrow$ r^2 contraintes LMIs

- Le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

  n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Les termes $\Delta A_{\mu}(t)$ et $\Delta B_{\mu}(t)$ sont majorés avec un carré matriciel incertain
- Double somme $\rightarrow r^2$ contraintes LMIs

- Le système augmenté

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\hat{\mu}} - L_{\hat{\mu}} C & \Delta A_{\mu\hat{\mu}} + \Delta A_{\mu}(t) \\ 0 & A_{\mu} + \Delta A_{\mu}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_{\mu\hat{\mu}} + \Delta B_{\mu}(t) \\ B_{\mu} + \Delta B_{\mu}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

  n'est pas autonome
  $\rightarrow$ déterminer les gains L_i minimisant le gain $\mathscr{L}_2$ de $u(t)$ vers $e(t)$.
- On utilise la fonction de Lyapunov

$$V(e,x) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

- On obtient une formulation LMI de la condition

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \gamma^2 u^T(t)ut(t)$$

- Les termes $\Delta A_{\mu}(t)$ et $\Delta B_{\mu}(t)$ sont majorés avec un carré matriciel incertain
- Double somme $\rightarrow$ r^2 contraintes LMIs

Synthèse de multiobservateur pour MM à VDNM (approche Δ constantes)

Soit le système incertain à variable de décision non mesurables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

et l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C(t) + Du(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état vérifie : $\int_0^\infty e^T(t)e(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u^T(t)u(t)dt$
s'il existe $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, λ_i^A, λ_i^B et $\bar{L}_i$ minimisant γ^2 s.c.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}(P_1 A_i - \bar{L}_i C) + I & * & * & * & * \\ (P_1(A_j - A_i))^T & \mathbb{S}(P_2 A_j) + \lambda_i^A N_i^{AT} N_i^A & * & * & * \\ (P_1(B_j - B_i))^T & P_2 B_j{}^T & \lambda_i^B N_i^{BT} N_i^B - \gamma^2 I & * & * \\ (P_1 M_i^A)^T & (P_2 M_i^A)^T & 0 & -\lambda_i^A I & * \\ (P_1 M_i^B)^T & (P_2 M_i^B)^T & 0 & 0 & -\lambda_i^B I \end{bmatrix} < 0$$

pour $i, j = 1, \ldots, r$.
Les gains de l'observateur sont donnés par : $L_i = P_1^{-1}\bar{L}_i$.

3. Observation de MM à entrées inconnues

- Système à VDNM affecté par des entrées inconnues $d(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t) \right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- L'estimation d'état peut s'étendre à l'estimation de l'état et des entrées inconnues
- Pour cela on augmente l'état

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & d^T(t) \end{bmatrix}^T$$

- Avec l'hypothèse $\dot{d}(t) = 0$, le système devient

$$\dot{x}_a(t) = \begin{bmatrix} A_\mu & F_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(t) \begin{bmatrix} B_\mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & G \end{bmatrix} x_a(t) + Du(t)$$

- On est ramené au cas sans entrée inconnue en augmentant la dimension de l'état de l'observateur
- On parle alors d'observateur Proportionnel Intégral

- Système à VDNM affecté par des entrées inconnues $d(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)\right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- L'estimation d'état peut s'étendre à l'estimation de l'état et des entrées inconnues
- Pour cela on augmente l'état

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & d^T(t) \end{bmatrix}^T$$

- Avec l'hypothèse $\dot{d}(t) = 0$, le système devient

$$\dot{x}_a(t) = \begin{bmatrix} A_\mu & F_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(t) \begin{bmatrix} B_\mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & G \end{bmatrix} x_a(t) + Du(t)$$

- On est ramené au cas sans entrée inconnue en augmentant la dimension de l'état de l'observateur
- On parle alors d'observateur Proportionnel Intégral

- Système à VDNM affecté par des entrées inconnues $d(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)\right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- L'estimation d'état peut s'étendre à l'estimation de l'état et des entrées inconnues
- Pour cela on augmente l'état

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & d^T(t) \end{bmatrix}^T$$

- Avec l'hypothèse $\dot{d}(t) = 0$, le système devient

$$\dot{x}_a(t) = \begin{bmatrix} A_\mu & F_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(t) \begin{bmatrix} B_\mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & G \end{bmatrix} x_a(t) + Du(t)$$

- On est ramené au cas sans entrée inconnue en augmentant la dimension de l'état de l'observateur
- On parle alors d'observateur Proportionnel Intégral

- Système à VDNM affecté par des entrées inconnues $d(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)\right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- L'estimation d'état peut s'étendre à l'estimation de l'état et des entrées inconnues
- Pour cela on augmente l'état

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & d^T(t) \end{bmatrix}^T$$

- Avec l'hypothèse $\dot{d}(t) = 0$, le système devient

$$\dot{x}_a(t) = \begin{bmatrix} A_\mu & F_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(t) \begin{bmatrix} B_\mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & G \end{bmatrix} x_a(t) + Du(t)$$

- On est ramené au cas sans entrée inconnue en augmentant la dimension de l'état de l'observateur
- On parle alors d'observateur Proportionnel Intégral

- Système à VDNM affecté par des entrées inconnues $d(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i d(t)\right) \\ y(t) & = Cx(t) + Du(t) + Gd(t) \end{cases}$$

- L'estimation d'état peut s'étendre à l'estimation de l'état et des entrées inconnues
- Pour cela on augmente l'état

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & d^T(t) \end{bmatrix}^T$$

- Avec l'hypothèse $\dot{d}(t) = 0$, le système devient

$$\dot{x}_a(t) = \begin{bmatrix} A_\mu & F_\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(t) \begin{bmatrix} B_\mu \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & G \end{bmatrix} x_a(t) + Du(t)$$

- On est ramené au cas sans entrée inconnue en augmentant la dimension de l'état de l'observateur
- On parle alors d'observateur Proportionnel Intégral

- Dans les résultats présentés, l'estimation de différentes structures de MM a été étudiée

- mais l'accent n'a pas été mis sur la minimisation du conservatisme des LMIs. Pour cela, plusieurs techniques existent
  - relaxation de Tuan & Apkarian, pour limiter le nombre de LMIs
  - approche descripteur, pour limiter le nombre de LMIs et éviter les termes non linéaires
  - utilisation de fonctions de Lyapunov multiples ($V(t) = \sum_i \mu_i(t) V_i(t)$)

- De nombreuses extensions des résultats présentés existent
  - estimation d'état des MM singuliers
  - estimation d'entrées inconnues non constantes
  - suivi de paramètres variables
  - utilisation de l'état estimé pour la commande
  - diagnostic et / ou la commande tolérante aux fautes
  - diagnostic de systèmes à plusieurs modes de fonctionnement

- Dans les résultats présentés, l'estimation de différentes structures de MM a été étudiée

- mais l'accent n'a pas été mis sur la minimisation du conservatisme des LMIs. Pour cela, plusieurs techniques existent
  - relaxation de Tuan & Apkarian, pour limiter le nombre de LMIs
  - approche descripteur, pour limiter le nombre de LMIs et éviter les termes non linéaires
  - utilisation de fonctions de Lyapunov multiples $(V(t) = \sum_i \mu_i(t) V_i(t))$

- De nombreuses extensions des résultats présentés existent
  - estimation d'état des MM singuliers
  - estimation d'entrées inconnues non constantes
  - suivi de paramètres variables
  - utilisation de l'état estimé pour la commande
  - diagnostic et / ou la commande tolérante aux fautes
  - diagnostic de systèmes à plusieurs modes de fonctionnement

Estimation des MM à variables de décision mesurables

- K. Tanaka, T. Ikeda, H. O. Wang, Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6 (2), pp. 250–265, 1998.
- K. Tanaka, H.O. Wang, *Fuzzy Control System Design and analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons Inc, 2001, Chapitre 4.

Estimation des MM à variables de décision non mesurables

- D. Ichalal, Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par des multimodèles de Takagi-Sugeno, Thèse de Doctorat, INP Nancy, 2009.
- A.M. Nagy-Kiss, Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration, Thèse de Doctorat, INP Nancy, 2010.
- J. Yoneyama, H_∞ filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables : an uncertain system approach, *Fuzzy Sets and Systems*, 160(12), pp. 1738–1748, 2009.
- A.M. Nagy, B. Marx, G. Mourot, G. Schutz, J. Ragot. Observers design for uncertain Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables and unknown inputs. Application to a wastewater treatment plant. *Journal of Process Control*, 21, pp. 1105-1114, 2011.

Diminution du conservatisme des résultats (fonctions de Lyapunov multiples, approche descripteur, etc.)

- K. Guelton, T. Bouarar, N. Manamanni, Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems - A descriptor redundancy approach, *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19), pp. 2796–2811, 2009.
- K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 6(2), pp. 250–265, 1998.
- K. Tanaka, T. Hori, H. Wang, A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 11(4), pp. 582–589, 2003.
- K. Tanaka, H. Ohtake, H.O. Wang, A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 15(3), pp. 333–341, 2007.
- H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto, Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 9(2), pp. 324–332, 2001.

Extensions diverses (systèmes singuliers, utilisation pour le diagnostic, le contrôle tolérant aux fautes, etc.)

- T. Bouarar, B. Marx, D. Maquin, J. Ragot, Fault tolerant control for uncertain Takagi-Sugeno systems by trajectory tracking : a descriptor approach, IET Control Theory and Applications, in press, 2013.
- D. Ichalal, B. Marx, D. Maquin, J. Ragot, Fault detection, isolation and estimation for Takagi-Sugeno nonlinear systems, Journal of the Franklin Institute, in press, 2013.
- B. Marx, D. Koenig, J. Ragot, Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis, IET Control Theory and Applications, 1(5), pp. 1487-1495, 2007.
- A.M. Nagy Kiss, B. Marx, G. Mourot, G. Schutz, J. Ragot, State estimation of two-time scale multiple models. Application to wastewater treatment plant, Control Engineering Practice, 19(11), pp. 1354–1362, 2011.
- S. Bezzaoucha, B. Marx, D. Maquin, J. Ragot J. Nonlinear Joint State and Parameter Estimation : Application to a Wastewater Treatment Plant. *Control Engineering Practice*, 2013.

4. Thèse du laboratoire sur les multi-modèles (4/4)

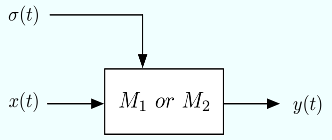
1. A. Boukhris. Identification de systèmes non linéaires par une approche multi-modèle. Application à la modélisation de la relation pluie-débit, 1998.
2. C. Loverini. Identification de systèmes dynamiques non-linéaires à l'aide de représentations multi-modèles, 1999.
3. K. Gasso. Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèle, 2000.
4. I. Bara. Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants, 2001.
5. M. Chadli. Analyse des systèmes non linéaires décrits par des structures multimodèles, 2002.
6. A. Akhenak. Conception de multi-observateurs pour des multimodèles. Application au diagnostic, 2004.
7. E. Cherrier. Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires, 2006.
8. H. Abdelfettah. Estimation d'état des systèmes à commutation par l'approche multi-modèle : application au diagnostic, 2006.
9. R. Orjuela. Identification et diagnostic des systèmes représentés par un multimodèle, 2008.
10. D. Ichalal. Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno, 2009.
11. A.M. Nagy. Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic : application à une station d'épuration, 2011.
12. S. Bezzaoucha. Diagnostic et contrôle tolérant aux fautes de systèmes non linéaires sous forme multimodèle (thèse à soutenir en octobre 2013.

Des idées pour la suite !

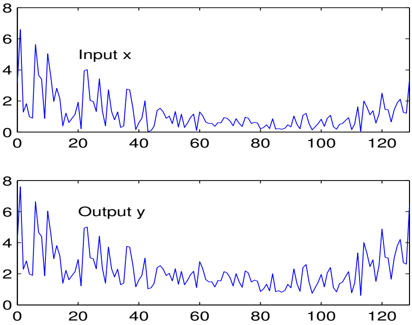
- Systèmes à paramètres variables ?
- Poursuite de modèle de référence ?
- Saturation de la commande ?

4. A difficult problem : detection of regime changes

- Model of the system



$$y(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$$



- Problem : knowing only the input $x(t)$ and the output $y(t)$ of the system, is it possible to find the switching between the two modes M_1 and M_2 ?
- Hypothesis

$$\begin{cases} M_1 & y(t) = a_1.x(t) + b_1 \\ M_2 & y(t) = a_2.x(t) + b_2 \end{cases}$$

- Where is the switching time instant ?
- What are the values of the models parameters ?

Idea ?

$$y(t) = \mu_1(.)(a_1 x(t) + b_1) + \mu_2(.)(a_2 x(t) + b_2)$$