

Méthode générale de sélection de multimodèles

Anca M. NAGY¹, Benoît MARX¹, Gilles MOUROT¹, José RAGOT¹, Georges SCHUTZ²

¹Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039 – Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre, France.

² Centre de Recherche Public “Henri Tudor”, LTI : Unité Business and Systems Analytics
29, Avenue John F. Kennedy, L-1855 Luxembourg-Kirchberg
{anca – maria.nagy, benoit.marx, gilles.mourot, jose.ragot}@ensem.inpl-nancy.fr, georges.schutz@tudor.lu

Résumé— Dans cet article, une méthode analytique est proposée en vue d’obtenir un multimodèle (MM) strictement équivalent à un modèle non-linéaire représentable sous une forme quasi-LPV. La méthode proposée ne produit pas de perte d’information, contrairement aux méthodes de réduction d’ordre existantes. Plusieurs formes multimodèle peuvent être obtenues. Pour cette raison on propose aussi une méthode de choix de la meilleure forme pour des études d’analyse et de contrôle basées sur la formulation LMI (inégalités matricielles linéaires).

Mots-clés— multimodèle ; quasi-LPV ; transformation polytopique convexe

I. INTRODUCTION

Le problème de la complexité des systèmes dynamiques non linéaires apparait dans de nombreux domaines scientifiques et en ingénierie. Un certain nombre de techniques de décomposition et de simplification ont été développées au cours de ces dernières années, en vue de réaliser une réduction de cette complexité, en fonction d’objectifs d’identification, de commande ou d’analyse.

La réduction de la complexité repose, dans la plupart des études réalisées, sur une réduction de l’ordre du système et s’accompagne d’une perte d’information [4], [11]. Une autre façon de procéder est de réécrire le système d’une manière plus facile à étudier, en le décomposant en unités plus simples et ceci sans perdre d’information.

L’écriture d’un système sous forme multimodèle (MM) [9] constitue un outil très efficace pour la modélisation des systèmes non linéaires, en se basant sur une interpolation de sous-modèles linéaires. Le modèle global est en fait une combinaison convexe de ces sous-modèles [8].

L’intérêt majeur de cette décomposition du système est que des propriétés importantes comme la stabilité, la contrôlabilité, l’observabilité, largement étudiées dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant (LTI), peuvent être -au moins partiellement- généralisées sur les multimodèles (avec quelques suppositions sur les fonctions de pondération) [1].

Il existe différentes techniques pour obtenir un MM. La première est basée sur une linéarisation du modèle non linéaire autour d’un (ou plusieurs) point(s) de fonctionnement, ainsi qu’une linéarisation dynamique autour d’une trajectoire arbitraire [13]. La deuxième technique consiste à identifier le modèle et/ou les paramètres à partir de données expérimentales [8]. La perte d’information constitue un premier inconvénient de ces techniques. Un deuxième inconvénient est le choix de *variables de prémisses* exprimant les différentes non-linéarités du système- qui

n’est pas réalisé de façon systématique. De plus, le choix des différents points de fonctionnement reste encore très délicat à effectuer.

Dans la suite, on va présenter une procédure systématique de transformation d’un système non linéaire en le réécrivant sous une forme multimodèle, en évitant ces inconvénients majeurs : la transformation est réalisée sans perte d’information, le système obtenu ayant exactement les mêmes trajectoires d’état que le système initial. De plus, le choix de différents points de fonctionnement n’est plus nécessaire et le choix de variables de prémisses est réalisé de façon plus systématique. En partant d’une forme générale du système non linéaire, une représentation d’état quasi-linéaire à paramètres variables (quasi-LPV) [12], [6] est réalisée. En général, plusieurs formes quasi-LPV peuvent être construites pour un système non linéaire donné. À chacune de ces formes est associée un ensemble de variables de prémisses et choisir une forme quasi-LPV est équivalent à choisir un ensemble de variables de prémisses. Cette représentation constitue une forme polytopique, car les matrices à paramètres variables qui la constituent sont des combinaisons convexes des matrices à coefficients constants calculées à partir des sommets du polytope. Ceux-ci sont obtenus en utilisant la transformation polytopique convexe (TPC) [16]. Chaque sommet définit un sous-modèle linéaire, les non-linéarités du système étant rejetées dans les fonctions de pondération.

La plupart des résultats obtenus pour l’analyse de stabilité ou la construction des correcteurs/observateurs pour des systèmes quasi-LPV sont basés seulement sur les matrices qui définissent les sommets. En conséquence, même si les différentes formes quasi-LPV associées au système non linéaire sont formellement équivalentes, les résultats obtenus dépendent fortement du choix de la réalisation. De plus, le choix de l’ensemble des variables de prémisses est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et sur la structure du modèle global. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de commandabilité, d’observabilité et d’analyse de stabilité. Il est donc possible de choisir parmi différentes structures MM celle qui assure la convergence du multi-observateur basé sur la structure MM, en respectant des conditions de convergence données. Les conditions de convergence de l’estimation d’état peuvent être exprimées dans le formalisme LMI [7].

La méthode proposée dans cette communication (section III-A) généralise l’approche par secteurs non linéaires qui est fréquemment utilisée dans le cadre des modèles Takagi-Sugeno [15]. La contribution de ce papier réside dans

l'établissement d'une procédure systématique en vue de choisir la forme quasi-LPV la plus adaptée d'un système non linéaire (section III-B), tenant compte des objectifs de l'étude (comme la stabilité ou l'analyse de performance, la construction d'un contrôleur ou d'un observateur). La prochaine section débute avec deux notions utiles dans la méthodologie générale : le multimodèle et la transformation polytopique convexe (II). Un exemple introductif est ensuite présenté dans II-B. Enfin, le cas général est détaillé, dans III.

II. PRÉLIMINAIRES

A. Notions utiles

Dans ce qui suit on introduit la notion de multimodèle et la transformation polytopique convexe. Le multimodèle est une combinaison convexe des r sous-modèles [8] :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) [C_i x(t) + D_i u(t)]\end{aligned}\quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de entrées et $y \in \mathbb{R}^l$ le vecteur de sorties. A_i , B_i , C_i , D_i , sont des matrices à coefficients constants de dimensions appropriées. La fonction $\mu_i(x, u)$ représente la pondération du sous-modèle i , représenté, dans le modèle global, par $\{(A_i, B_i, C_i, D_i)\}$. Les fonctions de pondération $\mu_i(x, u)$ ont la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(x, u) = 1; \quad \mu_i(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Introduisons la notion de transformation polytopique convexe, qui servira dans la description de la méthodologie.

Lemme 1 : [15] Soit $h(x(t), u(t))$ une fonction continue et bornée sur le domaine $[x_0, x_1] \times [u_0, u_1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $x_0, x_1, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe deux fonctions

$$F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto [\mathcal{K}, \mathcal{K}] \quad (\sqsupset = \mathcal{K}, \neq)$$

$$(x(t), u(t)) \mapsto F_i(x(t), u(t))$$

avec $F_1(x(t), u(t)) + F_2(x(t), u(t)) = 1$ telles que

$$h(x(t), u(t)) = F_1(x(t), u(t)) h_1 + F_2(x(t), u(t)) h_2$$

$$\forall h_1 \geq \max_{x, u} \{h(x, u)\} \text{ et } h_2 \leq \min_{x, u} \{h(x, u)\}.$$

Les fonctions F_1 et F_2 sont définies par :

$$\begin{aligned}F_1(x(t), u(t)) &= \frac{h(x(t), u(t)) - h_2}{h_1 - h_2} \\ F_2(x(t), u(t)) &= \frac{h_1 - h(x(t), u(t))}{h_1 - h_2}\end{aligned}$$

B. Exemple introductif

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1)x_2 + x_1^3 u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{x_2}} + x_1^2 x_2 \end{cases}\quad (2)$$

Dans une première étape, on représente le système (2) sous forme quasi-LPV :

$$\dot{x} = A(x, u)x + B(x, u)u$$

La forme quasi-LPV représente ainsi une forme affine en l'état et la commande d'un système non linéaire général.

En effectuant cette transformation on peut obtenir plusieurs représentations quasi-LPV, car il existe plusieurs transformations réalisant une séparation des différentes non-linéarités du système vis-à-vis des différents composants de l'état ou de l'entrée.

Pour la première composante de l'équation d'état, cette séparation est claire dans le produit $\sin(x_1)x_2$, car on a un produit entre la fonction $\sin(x_1)$ et la deuxième variable d'état x_2 . Pour le deuxième terme, $x_1^3 u$, on peut soit affecter la non-linéarité x_1^3 dans la matrice de commande (représentation (3)), soit la répartir dans le vecteur d'état (composante x_1) et dans la matrice d'état (monôme $x_1^2 u$) (représentation (4)) :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(x_1) \\ \frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} & x_1^2 \end{bmatrix} \quad B(x, u) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} x_1^2 u & \sin(x_1) \\ \frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} & x_1^2 \end{bmatrix} \quad B(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pour la deuxième composante de l'équation d'état, on peut remarquer deux décompositions possibles. La plus évidente consiste à attribuer aux deux variables d'état des termes non linéaires multiplicatifs (décomposition (3)). Plus précisément, on peut réécrire $\frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} \cdot x_1$, sous condition que la division avec x_1 est possible ($x_1 \neq 0$). Si cette condition n'est pas respectée, on peut réaliser une translation de cette variable dans l'espace de fonctionnement -comme décrit dans la section suivante- afin d'éviter cet inconvénient. Ainsi, le terme non linéaire $\frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}}$ est attribué à la variable x_1 et le terme x_1^2 est attribué à x_2 . Une autre possibilité est d'attribuer à la variable d'état x_1 le terme non linéaire $\frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} + x_1 x_2$:

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(x_1) \\ \frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} + x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad B(x, u) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

En choisissant une des trois formes LPV ((3), (4), où (5)), conformément à des critères de choix qui seront discutés plus en détail dans le développement de la méthodologie générale, on montre maintenant le passage à la forme MM. En retenant uniquement la représentation (5), on construit tout d'abord un ensemble de variables de prémisses $V_z = \{z_1, z_2, z_3\}$, où on choisit :

$$\begin{aligned}z_1(x) &= \sin(x_1) \\ z_2(x) &= x_1^3 \\ z_3(x) &= \frac{1}{x_1 \sqrt{x_2}} + x_1 x_2\end{aligned}\quad (6)$$

Le choix de ces variables z_1, z_2, z_3 de prémisses est lié directement à la forme LPV choisie.

Dans une deuxième étape, on applique la transformation polytopique convexe, présentée au lemme 1, à chaque variable de prémisses $z_j(t)$ ($j = 1, \dots, 3$). On réalise alors pour chaque variable de prémisses une décomposition en deux parties :

$$z_1(x) = F_{1,1}(z_1) z_{1,1} + F_{1,2}(z_1) z_{1,2} \quad (7a)$$

$$z_2(x) = F_{2,1}(z_2) z_{2,1} + F_{2,2}(z_2) z_{2,2} \quad (7b)$$

$$z_3(x) = F_{3,1}(z_3) z_{3,1} + F_{3,2}(z_3) z_{3,2} \quad (7c)$$

où

$$F_{j,1}(z_j) = \frac{z_j(x) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (8a)$$

$$F_{j,2}(z_j) = \frac{z_{j,1} - z_j(x)}{z_{j,1} - z_{j,2}} \quad (8b)$$

Les deux partitions $F_{j,1}$ et $F_{j,2}$ de chaque variable de prémisses z_j ($j = 1, \dots, 3$) vont contribuer, à leur tour, à la construction de chaque fonction de pondération correspondant à un des sous-systèmes du multimodèle. Les scalaires $z_{j,1}$ et $z_{j,2}$ ($j=1,\dots,3$) vont contribuer à la construction de chaque sous-système du multimodèle.

On choisit, par exemple :

$$\begin{aligned} z_{j,1} &= \max_x \{z_j(x)\} \\ z_{j,2} &= \min_x \{z_j(x)\} \end{aligned} \quad \forall j = 1, \dots, 3 \quad (9)$$

Les fonctions $F_{j,1}$ et $F_{j,2}$ représentent respectivement la première et la deuxième partition de chaque variable de prémisses. Il faut noter que $A(x, u)$ fait intervenir les variables de prémisses z_1 et z_3 , alors que $B(x, u)$ fait intervenir la variable de prémisses z_2 ; ainsi, on va évaluer les matrices A et B à partir des matrices sommets du polytope défini par les partitions des variables de prémisses intervenant dans ces matrices. Tout d'abord, en utilisant la décomposition de z_1 donnée dans (7) on obtient :

$$\begin{aligned} A(z_1, z_3) &= \begin{bmatrix} 0 & z_1(x) \\ z_3(x) & 0 \end{bmatrix} \\ &= F_{1,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_3(x) & 0 \end{bmatrix} + F_{1,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_3(x) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la décomposition de z_3 avec le lemme 1 :

$$\begin{aligned} A(z_1, z_3) &= F_{1,1}(x)F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,2}(x)F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,1}(x)F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,2}(x)F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour inclure les partitions de la variable z_2 , qui n'interviennent pas dans $A(z_1, z_3)$, on va effectuer une multiplication de A avec $F_{2,1}(x) + F_{2,2}(x)$ (qui vaut 1) :

$$\begin{aligned} A(z_1, z_3) &= F_{1,1}(x)F_{2,1}(x)F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,2}(x)F_{2,1}(x)F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,1}(x)F_{2,2}(x)F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,2}(x)F_{2,2}(x)F_{3,1}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,1}(x)F_{2,1}(x)F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,2}(x)F_{2,1}(x)F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,1}(x)F_{2,2}(x)F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,1} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\ &+ F_{1,2}(x)F_{2,2}(x)F_{3,2}(x) \begin{bmatrix} 0 & z_{1,2} \\ z_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

On peut identifier dans (10) les fonctions de pondération du multimodèle $\mu_i(x) = F_{1,\sigma_i^1}(x)F_{2,\sigma_i^2}(x)F_{3,\sigma_i^3}(x)$, ainsi que les matrices des sous-modèles $A_i = \begin{bmatrix} 0 & z_{1,\sigma_i^1} \\ z_{3,\sigma_i^3} & 0 \end{bmatrix}$, où $\sigma_i^k \in \{1, 2\}$ ($k = 1, 2, 3$). La même transformation est réalisée sur la matrice B , pour obtenir les matrices B_i .

III. RÉÉCRITURE SOUS FORME MULTIMODÈLE

Cette section est consacrée à la méthodologie générale du passage d'un système non linéaire vers un multimodèle. La forme générale d'un système non linéaire est réécrite sous la forme quasi-LPV. Cette représentation n'est pas unique et de ce fait, il faut définir des critères de choix d'une représentation LPV qui correspondent aux objectifs de l'étude. A chaque représentation quasi-LPV correspond un ensemble de variables de prémisses, qui seront partitionnées en deux en utilisant la transformation polytopique convexe. Le multimodèle sera ainsi une combinaison convexe de sous-modèles linéaires.

A. Méthode générale

Une large catégorie de systèmes non linéaires dynamiques peut être représentée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (11)$$

où $f(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ et $g(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^l$.

Sous les hypothèses que $f(x(t), u(t))$ et $g(x(t), u(t))$ sont continues et bornées dans $U \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $f(0, \cdot) = 0$ et $g(0, \cdot) = 0$, le système (11) peut être représenté sous une forme quasi-LPV :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(x, u)) & B(\rho(x, u)) \\ C(\rho(x, u)) & D(\rho(x, u)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

où $A(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D(\rho(x, u)) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ et où $\rho(x, u) \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n_1+m_1})$ avec $n_1+m_1 \leq n+m$ peut représenter une partie des états et des entrées. Dans la forme classique LPV, ρ est un vecteur de paramètres variant avec le temps. La différence entre la représentation quasi-LPV d'un système non linéaire et la forme classique LPV consiste dans le vecteur des paramètres, qui dépend dans le premier cas des variables d'état et d'entrée [6]. La trajectoire des paramètres dépend du comportement des variables du système. Par exemple, dans la forme quasi-LPV (5), la matrice A dépend de $x = (x_1, x_2) : \rho(x, u) = x$, alors que B ne dépend que de $x_1 : \rho(x, u) = x_1$. Il faut aussi remarquer que la forme quasi-LPV représente une forme affine de l'état et le contrôle d'un système non linéaire général.

La matrice $A(\rho(x, u))$ est dans ce cas donnée par :

$$A(\rho(x, u)) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(\rho(x, u)) & \cdots & a_{1,n}(\rho(x, u)) \\ \vdots & & \\ a_{n,1}(\rho(x, u)) & \cdots & a_{n,n}(\rho(x, u)) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Les matrices $B(\rho(x, u))$, $C(\rho(x, u))$ et $D(\rho(x, u))$ sont construites de la même manière que $A(\rho(x, u))$.

Comme déjà vu dans l'exemple introductif, l'obtention

de la forme quasi-LPV peut nécessiter des divisions avec différentes variables du système (variables d'état en particulier). En conséquence, des conditions supplémentaires sur ces variables sont nécessaires pour effectuer les divisions : les variables impliquées doivent être non nulles. Afin de respecter cette condition, une translation des variables impliquées peut être réalisée. Notons $[-\alpha, \beta]$ le domaine de variation de l'une de ces variables x_d , où $\alpha, \beta > 0$. On peut réaliser la translation suivante :

$$\bar{x}_d = x_d + \alpha + \epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (14)$$

Ainsi $\bar{x}_d \in [\epsilon, \beta + \alpha + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. En remplaçant $x_d = \bar{x}_d - \alpha - \epsilon$, conformément à (14), dans le système (11), on peut construire la forme quasi-LPV souhaitée. Pour des raisons de simplicité on va garder la même notation pour le vecteur x , sachant qu'il contient éventuellement les translations effectuées.

A partir de la représentation quasi-LPV issue du système (11) et donnée sous forme explicite dans (12), on définit l'ensemble des variables de prémisse V_z de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V_z = & \{a_{i,q}(\rho(x,u)) \mid a_{i,q} \neq K, \ i = \overline{1,n}, \ q = \overline{1,n}\} \\ & \cup \{b_{i,s}(\rho(x,u)) \mid b_{i,s} \neq K, \ i = \overline{1,n}, \ s = \overline{1,m}\} \\ & \cup \{c_{j,q}(\rho(x,u)) \mid c_{j,q} \neq K, \ j = \overline{1,l}, \ q = \overline{1,n}\} \\ & \cup \{d_{j,s}(\rho(x,u)) \mid d_{j,s} \neq K, \ j = \overline{1,l}, \ s = \overline{1,m}\} \end{aligned}$$

où $\overline{1,n} = \{1, \dots, n\}$ et K désigne une constante quelconque. Dans la suite cet ensemble est noté plus simplement :

$$V_z = \{z_1(\rho(x,u)), \dots, z_p(\rho(x,u)) \mid p \leq (n+l)(n+m)\}$$

où p représente la dimension de l'ensemble des variables de prémisse V_z et en même temps le nombre de non-linéarités identifiées en utilisant la forme quasi-LPV du système (11). Les quantités $z_1(\rho(x,u)), \dots, z_p(\rho(x,u))$ sont les *variables de prémisse*.

Remarque 1. $(n+l) \times (n+m)$ représente le nombre maximal de variables de prémisse.

Remarque 2. Le nombre de sous-modèles qui constituent le multimodèle est égal à $r = 2^p \leq 2^{(n+l)(n+m)}$.

Les matrices à paramètres variables qui interviennent dans la forme quasi-LPV du système (11) sont des combinaisons linéaires de matrices à coefficients constants ($\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i$) ; par exemple, la matrice $A(\rho(x,u))$ peut être exprimée comme suit :

$$A(x,u) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_j(x,u) \mathcal{A}_j \quad (15)$$

L'ensemble $\mathcal{I}_A$ contient les indices correspondants aux variables de prémisse qui interviennent dans la matrice A . La matrice $\mathcal{A}_0$ contient les termes constants ($a_{i,j}$) de la matrice $A(\rho(x,u))$ (13). Chaque matrice $\mathcal{A}_j$ donne la dépendance linéaire de z_j de la matrice $A(x,u)$ et elle contient à la composante correspondant à la non-linéarité $a_{i,q}$ (identifiée avec la variable de prémisse z_j) le terme constant 1, et des

zéros pour toutes les autres composantes :

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad i$$

Les matrices $B(\rho(x,u)), C(\rho(x,u)), D(\rho(x,u))$ sont exprimées de la même façon que $A(\rho(x,u))$, en utilisant les ensembles $\mathcal{I}_B, \mathcal{I}_C$ et $\mathcal{I}_D$. Ainsi, dans l'exemple précédent (équation (5)), on a $\mathcal{I}_A = \{1, 3\}$ et $\mathcal{I}_B = \{2\}$.

En généralisant la technique présentée dans l'exemple introductif, on génère les 2^p sous-modèles d'un multimodèle caractérisé par les p variables de prémisse qui sont partitionnées en deux, à l'aide de la transformation polytopique convexe :

$$z_j(x,u) = F_{j,1}(z_j) z_{j,1} + F_{j,2}(z_j) z_{j,2} \quad (16)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{j,1}(z_j) &= \frac{z_j(x,u) - z_{j,2}}{z_{j,1} - z_{j,2}} \\ F_{j,2}(z_j) &= \frac{z_{j,1} - z_j(x,u)}{z_{j,1} - z_{j,2}} \end{aligned} \quad (17)$$

où les scalaires $z_{j,1}$ et $z_{j,2}$ sont définis dans (18) :

$$\begin{aligned} z_{j,1} &= \max_{x,u} \{z_j(x,u)\} \\ z_{j,2} &= \min_{x,u} \{z_j(x,u)\} \end{aligned} \quad \forall j = 1, \dots, p \quad (18)$$

A chaque sous-modèle i , représenté dans le tableau I par la ligne i , correspond un p -uplet σ_i qui code les partitions des variables de prémisse intervenant dans la fonction de pondération correspondant à ce sous-modèle. On peut ainsi construire un tableau regroupant l'ensemble des partitions des variables de prémisse. En multipliant entre elles les fonctions qui décrivent ces partitions, on obtient la fonction de pondération $\mu_i(z)$:

$$\mu_i(z) = \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j}(z_j(x,u)) \quad (19)$$

où σ_i^k représente l'indice à la $k^{\text{ème}}$ position dans le p -uplet σ_i . Alors $\sum_{i=1}^r \mu_i(z) = 1$ et $\mu_i(z) \geq 0$ ($i = 1, \dots, r$), car :

$$F_{j,1}(z_j(x,u)) + F_{j,2}(z_j(x,u)) = 1, \quad \forall j = 1, \dots, p$$

Il faut noter que les fonctions matricielles $A(\rho(x,u)), B(\rho(x,u)), C(\rho(x,u))$ et $D(\rho(x,u))$ font intervenir les variables de prémisse z_j pour $j = 1, \dots, p$. Ainsi, on va évaluer les matrices A, B, C et D aux sommets du polytope définis par les partitions des variables de prémisse intervenant dans ces matrices pour déterminer les matrices $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{D}_i$ ($i = 1, \dots, r$). Ces matrices sont les matrices à coefficients constants relatives à chaque sous-modèle :

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j \in \mathcal{I}_A} z_{j,\sigma_i^j} \mathcal{A}_j \quad (20)$$

$\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{D}_i$ s'écrivent de la même façon. Ce fait est détaillé dans la démonstration du résultat suivant :

TABLE I
OBTENTION D'UN MM AVEC p VARIABLES DE PRÉMISSSE

Sous-modèle i	σ_i	A_i	$\mu_i(z)$
1	(1,1,...,1)	$A(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{p,1})$	$\prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_1^j}$
2	(1,1,...,2)	$A(z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{p,2})$	$\prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_2^j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^{p-1}	(1,2,...,2)		
$2^{p-1} + 1$	(2,1,...,1)	$A(z_{1,2}, z_{2,1}, \dots, z_{p,1})$	$\prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_{2^{p-1}+1}^j}$
	(2,1,...,2)		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	(2,2,...,1)		
2^p	(2,2,...,2)	$A(z_{1,2}, z_{2,2}, \dots, z_{p,2})$	$\prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_{2^p}^j}$

Théorème 1 : Le MM (1), qui représente une combinaison convexe de sous-modèles linéaires $\{(A_i, B_i, C_i, D_i)\}$ ($i = 1, \dots, r$), est équivalent au système (12), avec $r = 2^p$ où p est le nombre de variables de prémissse.

Preuve 1 : Comme déjà précisé dans (15)

$$A(z) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^p z_j \mathcal{A}_j \quad (21)$$

On veut démontrer, dans un premier temps, que les matrices A_i ($i = 1, \dots, r$), représentant les r sous-modèles du multimodèle, sont calculées en évaluant la fonction matricielle A aux sommets du polytope définies par les partitions des variables de prémissse.

En remplaçant z_p (comme donné dans (16) pour $j = p$) dans l'égalité précédente (21) et en multipliant les autres termes de la somme par $F_{p,1} + F_{p,2} = 1$, on obtient :

$$A(z) = (F_{p,1} + F_{p,2}) \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j \right) + (z_{p,1} F_{p,1} + z_{p,2} F_{p,2}) \cdot \mathcal{A}_p$$

On factorise les termes qui contiennent $F_{p,1}$ et $F_{p,2}$:

$$A(z) = F_{p,1} \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j + z_{p,1} \mathcal{A}_p \right) + F_{p,2} \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-1} z_j \mathcal{A}_j + z_{p,2} \mathcal{A}_p \right)$$

On remplace z_{p-1} (comme donné dans (16) pour $j = p-1$) et on multiplie les autres termes de la somme avec $F_{p-1,1} + F_{p-1,2} = 1$:

$$A(z) = F_{p,1} \cdot \left[(F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j \right) + (z_{p-1,1} F_{p-1,1} + z_{p-1,2} F_{p-1,2}) \cdot \mathcal{A}_{p-1} + \right.$$

$$\left. + z_{p,1} (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_p \right] + F_{p,2} \cdot \left[(F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j \right) + (z_{p-1,1} F_{p-1,1} + z_{p-1,2} F_{p-1,2}) \cdot \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,2} (F_{p-1,1} + F_{p-1,2}) \mathcal{A}_p \right]$$

En factorisant de nouveau les termes qui contiennent $F_{p-1,1}$ et $F_{p-1,2}$, à l'intérieur des parenthèses on obtient :

$$A(z) = F_{p,1} F_{p-1,1} \left[\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,1} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,1} \mathcal{A}_p \right] + F_{p,1} F_{p-1,2} \left[\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,2} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,1} \mathcal{A}_p \right] + F_{p,2} F_{p-1,1} \left[\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,1} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,2} \mathcal{A}_p \right] + F_{p,2} F_{p-1,2} \left[\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{p-2} z_j \mathcal{A}_j + z_{p-1,2} \mathcal{A}_{p-1} + z_{p,2} \mathcal{A}_p \right]$$

En réitérant ce mécanisme de factorisation, en remplaçant à chaque étape du calcul z_j avec l'expression (16), jusqu'à ce qu'on ait remplacé toutes les variables de prémissse, on obtient :

$$A(z) = \sum_{i=1}^{2^p} \left\{ \prod_{j=1}^p F_{j,\sigma_i^j} \cdot \left[\mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^p z_{j,\sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \right] \right\}$$

On a ainsi exprimé les matrices A_i ($i = 1, \dots, r$) en utilisant les matrices sommets du polytope définies par les partitions des variables de prémissse :

$$A_i = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^p z_{j,\sigma_i^j} \cdot \mathcal{A}_j \quad (22)$$

En appliquant le même raisonnement pour la partie commande et la sortie, on démontre ainsi l'équivalence entre le multimodèle (1) et le système (11).

La section suivante donne quelques outils généraux concernant la construction d'un observateur/contrôleur basé sur une structure MM, en vue de justifier l'utilisation de la méthode générale et de motiver le choix final du MM.

B. Critères de choix de la forme quasi-LPV

Les résultats existants concernant la synthèse et l'analyse de contrôleur/observateur pour un MM [1], [2], [3], [5], [7], [15], [16] sont basés sur la résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI), en utilisant la méthode de Lyapunov. Grâce à la propriété de convexité attribuée aux fonctions de pondération, les LMIs sont évaluées uniquement aux sommets du polytope (A_i , B_i , C_i et D_i) et les fonctions de pondération n'interviennent pas dans la résolution de ces LMIs. Seules les matrices A_i , B_i , C_i et D_i ont une contribution dans la résolution. Il est important de noter que les conditions LMI utilisées pour construire un contrôleur ou

un observateur basé sur un MM représentent des conditions suffisantes mais non nécessaires.

En général, la représentation quasi-LPV (12) pour un système non linéaire de la forme (11) n'est pas unique ; à chaque représentation quasi-LPV correspond un ensemble particulier de variables de prémisses V_z ; choisir une forme quasi-LPV est équivalent à choisir l'ensemble V_z . Le choix de cet ensemble V_z est important, car il influe sur le nombre de sous-modèles et la structure du modèle global. Ce degré de liberté sera utilisé pour faciliter les études de commandabilité, d'observabilité et d'analyse de stabilité.

Tout d'abord, pour assurer l'observabilité/commandabilité du système global, représenté sous une forme multimodèle (i.e. assurer une solution pour les LMIs associées au MM pour obtenir le contrôleur/observateur) l'observabilité/commandabilité de chaque sous-modèle est nécessaire [5]. Ainsi, les formes quasi-LPV qui produisent des sous-modèles qui ne possèdent pas ces propriétés doivent être éliminées. Il faut remarquer que ceci ne constitue pas une condition suffisante pour assurer l'observabilité/commandabilité du multimodèle [10]. Par exemple, les différentes formes quasi-LPV du système (2) de l'exemple précédent ne partagent pas la même structure. La forme (4) est caractérisée par une matrice $B(z)$ nulle, donc le système ne peut pas être contrôlé, alors que dans (3) et (5) la matrice $B(z)$ n'est pas nulle, donc la condition de commandabilité nécessaire est vérifiée.

De plus, comme déjà précisé au début de la section, dans les études de stabilité des multimodèles, les conditions de stabilité des observateurs sont données en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Différentes techniques sont proposées pour réduire le nombre de conditions LMI, ce qui conduit à moins de calculs et favorise l'existence d'une solution [2]. En conclusion, le nombre des LMIs à vérifier est linéaire ou polynomial en nombre des sous-modèles [15]. C'est la raison pour laquelle il est souhaitable qu'un multimodèle soit composé par un nombre minimal de sous-modèles. Ce nombre est relié au nombre de variables de prémisses, donc une forme quasi-LPV qui associe un ensemble minimal des variables de prémisses sera préférée. Par exemple, les formes quasi-LPV (3) et (4) associent quatre variables de prémisses qui produiront 16 sous-modèles, alors que la forme (5) implique trois variables de prémisses qui produiront 8 sous-modèles.

Enfin, la construction d'un observateur/contrôleur pour un MM avec des variables de prémisses qui dépendent des états est plus difficile que dans le cas où ces variables de prémisses sont connues [7]. En conséquence, un MM avec des variables de prémisses qui dépendent d'un nombre minimal des variables d'état est préférable.

Tenant compte de ces remarques, les règles suivantes, issues d'une recherche de structure la plus simple possible, peuvent guider ce choix :

- Éliminer les formes quasi-LPV pour lesquelles la matrice B a des colonnes nulles et C a des lignes nulles, puisque ces matrices ne respectent pas les conditions de rang d'observabilité/commandabilité.
- Parmi les formes quasi-LPV pour lesquelles les variables de prémisses dépendent du même nombre de variables d'état, choisir la forme quasi-LPV qui contient

le nombre minimal de variables de prémisses.

- Identifier les décompositions contenant des variables de prémisses communes aux différentes équations de l'état et/ou de sortie, dans (12), en réduisant ainsi le nombre total de variables de prémisses.
- Parmi les formes quasi-LPV qui ont le même nombre de variables de prémisses, choisir la forme quasi-LPV pour laquelle les variables de prémisses dépendent du nombre minimal de variables d'état.

IV. CONCLUSION

Cet article propose une méthode analytique générale de simplification de complexité d'un modèle non linéaire auquel est substitué un ensemble de sous-modèles de structures plus simples, linéaires et un ensemble de fonctions d'agrégation appropriées afin d'agréger ces sous-modèles pour constituer le multimodèle. Cette nouvelle réécriture sera utilisée par la suite grâce à ses propriétés particulières, pour l'estimation d'état et ses applications au diagnostic de fonctionnement de systèmes.

RÉFÉRENCES

- [1] Akhenak A., Chadli M., Ragot J., Maquin D. Estimation of state and unknown inputs of a nonlinear system represented by a multiple model. *11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal processing, MMM*, 2004.
- [2] Bergsten P., Palm R., Driankov D. Fuzzy Observers. *Fuzzy Observers*, pp. 700-703, 2001.
- [3] Chadli M., Maquin D., Ragot J. On the stability analysis of multiple model systems. *Proc. of the 6th European Conference Control (ECC)*, Porto, Portugal, 2001.
- [4] Dolgin Y., Zeheb E. Model reduction of uncertain systems retaining the uncertainty structure. *Systems & Control Letters*, vol. 54, pp. 771-779, 2005.
- [5] Guerra T., Kruszewski A., Bernal M. Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Date published Online : 2008-07-16.
- [6] Huang Y., Jadbabaie A. Nonlinear Hinf Control : An enhanced Quasi-LPV Approach. *Proc. of the IFAC World Congress*, pp. 85-90, 1999.
- [7] Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D. State estimation of nonlinear systems using multiple model approach. *Proc. of the 2009 American Control Conference*, St. Louis, Missouri, USA.
- [8] Mourot G., Gasso K., Ragot J. Modelling of ozone concentrations using a Takagi-Sugeno model. *Control Engineering Practice*, vol. 7, pp. 707-715, 1999.
- [9] Murray-Smith R., Johansen T. *Multiple model approaches to modeling and control*. Taylor & Francis, London, 1997.
- [10] Murphey T., Burdick J. Nonsmooth controllability theory and an example. *Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 370-376, 2002.
- [11] Sayesal A.K., Barlas Y. Model simplification and validation with indirect structure validity tests. *System Dynamics Reviews*, vol. 22, pp. 241-262, 2006.
- [12] Shamma J.S., Athans M. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35 (8), pp. 898 - 907 , 1990.
- [13] Smets I., Verdickt L., Van Impe J. A linear ASM1 based multimodel for activated sludge systems. *Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems*, vol. 12, pp. 489-503, 2006.
- [14] Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernet*, vol. 15, pp. 166-172, 1985.
- [15] Tanaka K., Wang H. *Fuzzy Control System Design and analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons Inc., 2001.
- [16] Wang H.O., Tanaka K., Griffin M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 14-23, 1996.