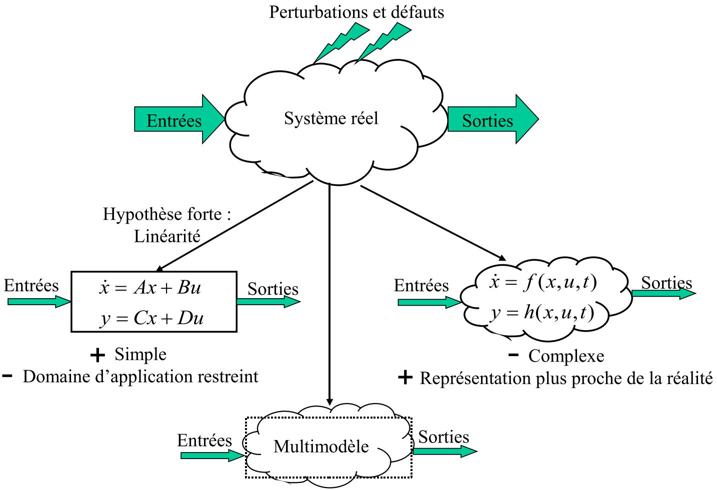
# Diagnostic des systèmes non linéaires par une approche multimodèle

Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Réunion du Groupe de Travail S3 Sûreté-Surveillance-Supervision
5 décembre 2008

# Introduction




+ Représentation non linéaire (plus proche de la réalité)
+ Structure simple (inspiré des modèles linéaires)

1. Sur l'approche multimodèle
   - Modèle de Takagi-Sugeno (T-S)
   - Modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables (VDNM)
2. Estimation d'état basée sur un modèle T-S à VDNM
   - Première approche
   - Deuxième approche
3. Estimation d'état et d'entrées inconnues
   - Observateur Proportionnel Intégral (PI)
4. Diagnostic
   - Détection et localisation des défauts affectant le système
5. Conclusions

1. Sur l'approche multimodèle
   - Modèle de Takagi-Sugeno (T-S)
   - Modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables (VDNM)
2. Estimation d'état basée sur un modèle T-S à VDNM
   - Première approche
   - Deuxième approche
3. Estimation d'état et d'entrées inconnues
   - Observateur Proportionnel Intégral (PI)
4. Diagnostic
   - Détection et localisation des défauts affectant le système
5. Conclusions

# Plan

1. Sur l'approche multimodèle
   - Modèle de Takagi-Sugeno (T-S)
   - Modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables (VDNM)
2. Estimation d'état basée sur un modèle T-S à VDNM
   - Première approche
   - Deuxième approche
3. Estimation d'état et d'entrées inconnues
   - Observateur Proportionnel Intégral (PI)
4. Diagnostic
   - Détection et localisation des défauts affectant le système
5. Conclusions

1. Sur l'approche multimodèle
   - Modèle de Takagi-Sugeno (T-S)
   - Modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables (VDNM)
2. Estimation d'état basée sur un modèle T-S à VDNM
   - Première approche
   - Deuxième approche
3. Estimation d'état et d'entrées inconnues
   - Observateur Proportionnel Intégral (PI)
4. Diagnostic
   - Détection et localisation des défauts affectant le système
5. Conclusions

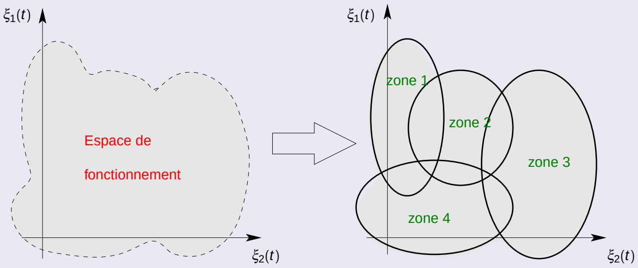
## Plan

# Plan

1. Sur l'approche multimodèle
   - Modèle de Takagi-Sugeno (T-S)
   - Modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables (VDNM)
2. Estimation d'état basée sur un modèle T-S à VDNM
   - Première approche
   - Deuxième approche
3. Estimation d'état et d'entrées inconnues
   - Observateur Proportionnel Intégral (PI)
4. Diagnostic
   - Détection et localisation des défauts affectant le système
5. Conclusions

## Principe de l'approche multimodèle

- Décomposition de l'espace de fonctionnement en zones de fonctionnement
- Un sous-modèle caractérise le système dans chaque zone de fonctionnement
- La contribution de chaque sous-modèle est quantifiée par une fonction de pondération

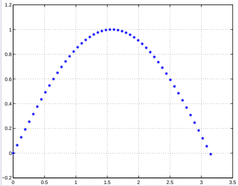



Système non linéaire    Représentation multimodèle

- Multimodèle = ensemble de sous-modèles agrégés par un mécanisme d'interpolation

## Comportement non linéaire

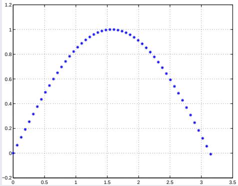
- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$




## Représentation par un multimodèle

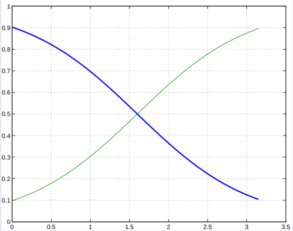
## Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$



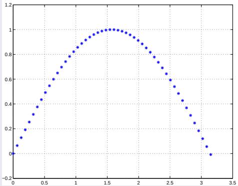

## Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



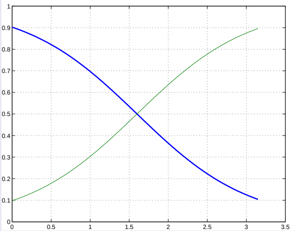
## Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

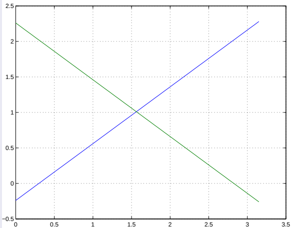



## Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$

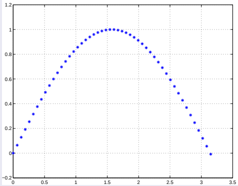



Sous-modèles : $f_i(x)$



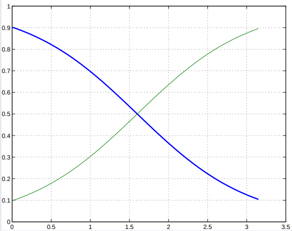
## Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

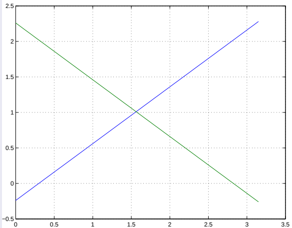


## Représentation par un multimodèle

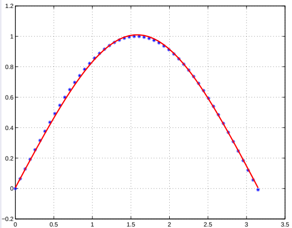
Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



Sous-modèles : $f_i(x)$



$\hat{y}(x) = \mu_1(x) f_1(x) + \mu_2(x) f_2(x)$



## Structure classique

Modèle de Takagi-Sugeno :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))B_i\}u(t) \\ y(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in 1,\ldots,r \quad \forall t$$

## Caractéristiques

## Structure classique

Modèle de Takagi-Sugeno :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))A_i\}x(t) + \{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))B_i\}u(t) \\ y(t) & = & \{\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in 1,\ldots,r \quad \forall t$$

- $\xi(t)$ variable de décision
- $\mu_i(\xi(t))$ fonctions de pondération

## Caractéristiques

## Structure classique

Modèle de Takagi-Sugeno :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))B_i\}u(t) \\ y(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in 1,\ldots,r \quad \forall t$$

- $\xi(t)$ variable de décision
- $\mu_i(\xi(t))$ fonctions de pondération

## Caractéristiques

(i) Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps

## Structure classique

Modèle de Takagi-Sugeno :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))B_i\}u(t) \\ y(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in 1,\ldots,r \quad \forall t$$

- $\xi(t)$ variable de décision
- $\mu_i(\xi(t))$ fonctions de pondération

## Caractéristiques

(i) Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps

(ii) La contribution de chaque modèle est quantifiée par $\mu_i(\xi(t))$

## Intérêts des multimodèles

- Permet une representation précise d'un système non linéaire (voir exacte)
- Epargne la recherche d'un modèle unique complexe
- Facilite l'extension de certains résultats théoriques du cas linéaire au cas non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))B_i\}u(t) \\ y(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))B_i\}u(t) \\ y(t) = \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

- la variable de décision est l'état du système

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = x^3(t) + 2x(t) \\ z(t) = 2x(t) + 3\dot{x}(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T$$

$$x(t) \in \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La méthode de transformation par secteur non linéaire [Tanaka et al 1996], on a :

$$x^3(t) = \mu_1(x) \cdot 0 \cdot x(t) + \mu_2(x) \cdot 1 \cdot x(t)$$

$$\mu_1(x) + \mu_2(x) = 1$$

Les fonctions d'activation $\mu_1(x)$ et $\mu_2(x)$ sont données par

$$\begin{cases} \mu_1(x) = 1 - x^2(t) \\ \mu_2(x) = x^2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) (A_i \bar{x}(t)) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \bar{x} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

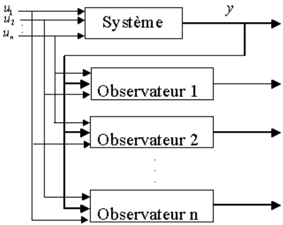
## Conception d'observateur

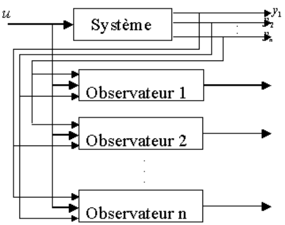
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\left(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + G_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\left(C_i\hat{x}(t) + D_iu(t)\right) \end{cases}$$

## Objectif

Synthétiser des observateurs pour pouvoir comparer le fonctionnement réel du système à son fonctionnement sain.

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$



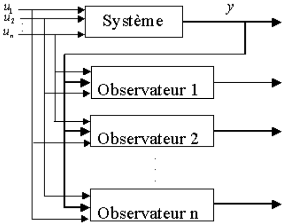

**Défauts actionneurs**

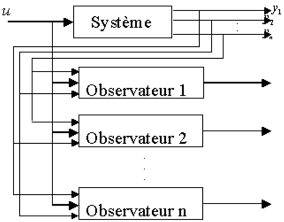
$$\xi(t) = y(t)$$

**Défauts capteurs**

$$\xi(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t))$$



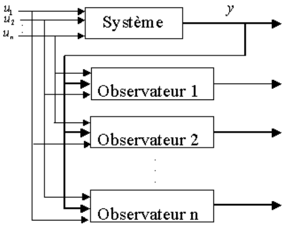

### Défauts actionneurs

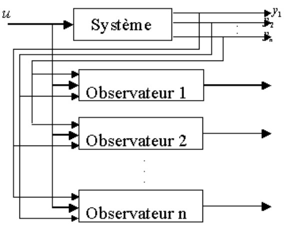
$$\xi(t) = y(t)$$

### Défauts capteurs

$$\xi(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t))$$




**Défauts actionneurs**

$$\xi(t) = y(t)$$

**Défauts capteurs**

$$\xi(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t))$$

# Multimodèle à variable de décision non mesurable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))B_i\}u(t) \\ y(t) & = & \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

- la variable de décision est l'état du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))B_i\}u(t) \\ y(t) &= \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

- la variable de décision est l'état du système

## Interêts des modèles T-S à VDNM

(i) Représentation exacte d'un modèle non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))B_i\}u(t) \\ y(t) &= \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

- la variable de décision est l'état du système

## Interêts des modèles T-S à VDNM

(i) Représentation exacte d'un modèle non linéaire

(ii) Représentation d'une classe plus large de systèmes non linéaires

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))A_i\}x(t) + \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))B_i\}u(t) \\ y(t) = \{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))C_i\}x(t) \end{cases}$$

- la variable de décision est l'état du système

## Interêts des modèles T-S à VDNM

(i) Représentation exacte d'un modèle non linéaire

(ii) Représentation d'une classe plus large de systèmes non linéaires

(iii) Un seul multimodèle suffit pour la conception de bancs d'observateurs afin de localiser des défauts de capteurs et d'actionneurs

## Objectifs généraux

i. Estimation d'état des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables
ii. Estimation des entrées inconnues des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables
iii. Utilisation des observateurs pour le diagnostic des systèmes non linéaires

## Démarche utilisée

- Obtention d'un multimodèle suivant une démarche analytique (Transformation par secteurs non linéaires)
- Extension des outils d'estimation d'état LTI aux multimodèles (méthode de Lyapunov, LMIs, $\mathcal{L}_2$)
- Génération d'indicateurs de défauts (bancs d'observateurs, analyse des résidus)

## Objectifs de l'étude

### Objectifs généraux

i Estimation d'état des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

ii Estimation des entrées inconnues des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

iii Utilisation des observateurs pour le diagnostic des systèmes non linéaires

### Démarche utilisée

- Obtention d'un multimodèle suivant une démarche analytique (Transformation par secteurs non linéaires)
- Extension des outils d'estimation d'état LTI aux multimodèles (méthode de Lyapunov, LMIs, $\mathcal{L}_2$)
- Génération d'indicateurs de défauts (bancs d'observateurs, analyse des résidus)

## Objectifs généraux

i Estimation d'état des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

ii Estimation des entrées inconnues des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

iii Utilisation des observateurs pour le diagnostic des systèmes non linéaires

## Démarche utilisée

- Obtention d'un multimodèle suivant une démarche analytique (Transformation par secteurs non linéaires)
- Extension des outils d'estimation d'état LTI aux multimodèles (méthode de Lyapunov, LMIs, $\mathcal{L}_2$)
- Génération d'indicateurs de défauts (bancs d'observateurs, analyse des résidus)

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i - L_i C)e(t)$$

$$(A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) < 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i - L_i C)e(t)$$

$$(A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) < 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(A_i - L_i C)e(t)$$

$$(A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) < 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))\\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}$$

# Observateur

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\,(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\,(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Erreur d’estimation d’état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\,(A_i x + B_i u)) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\,(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i Ce)$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)))$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u)) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i Ce)$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Première forme équivalente

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \omega(x,\hat{x},u))$$

où

$$\omega(x,\hat{x},u) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

Dans (Bergsten et al 2002), la synthèse de l'observateur est basée sur la condition

$$\|\omega(x,\hat{x},u)\| < \alpha \|e(t)\|$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Deuxième forme équivalente

Afin de limiter les non-linéarités, on écrit les variations de modèle autour d'un modèle moyen linéaire

$$A_0 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} A_i, \quad A_i = \bar{A}_i + A_0$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(\bar{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

### Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

### Troisième forme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i x(t) + B_i u(t)) + \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))(A_i x(t) + B_i u(t))$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(\hat{x})\left((A_j + \Delta A_{ij})x + (B_j + \Delta B_{ij})u\right)$$

où :

$$\Delta A_{ij} = A_i - A_j, \;\; \Delta B_{ij} = B_i - B_j, \;\; i,j = 1,\ldots,r$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\,(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Quatrième forme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\,((A_i + \Delta A)x + (B_i + \Delta B)u)$$

où :

$$\Delta A = \mathcal{A}\Sigma_A(t)E_A, \;\; \Delta B = \mathcal{B}\Sigma_B(t)E_B$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_n \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix}, \Sigma_B = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_m \end{bmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} I_m & \dots & I_m \end{bmatrix}^T$$

$$\delta_i = \mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}) \qquad -1 \le \delta_i \le 1$$

## Multi-modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(\overline{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

## Multi-observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(\overline{A}_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_0 - L_i C)e + (\bar{A}_i(\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}) + B_i(\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u)$$

## Hypothèses

Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)$ : $|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i\,|x - \hat{x}|$
Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)x$ : $|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i\,|x - \hat{x}|$
Borne sur l'entrée du système $u(t)$ : $\|u(t)\| \leq \beta_2$

## Deuxième méthode de Lyapunov

Considérons la fonction candidate de Lyapunov $V(e(t))$, où $e(t)$ représente l'erreur d'estimation d'état

$$V(e(t)) = e(t)^T Pe(t).$$

La convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro est assurée si :

1. $V(e(t)) > 0, \forall t$ et $e(t) \neq 0$
2. $\dot{V}(e(t)) < 0, \forall t$ et $e(t) \neq 0$

## Théorème 1 : Convergence asymptotique

L'erreur d'estimation d'état tend asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, $K_i$ et des scalaires positifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tels que :

$$A_0^T P + P A_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I & P\bar{A}_i & PB_i \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

Les gains $L_i$ sont déduits à partir de $L_i = P^{-1} K_i$.

Fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e) = e^T P e$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \Big) e \\ &+ 2e^T P \overline{A}_i \delta_i + 2e^T P B_i \Delta_i\end{aligned}$$

avec :

$$\delta_i = \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}$$
$$\Delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u$$

Lemme

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \ \ avec \ \ \lambda > 0$$

Fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e) = e^T P e$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\ &+ 2e^T P \overline{A}_i \delta_i + 2e^T P B_i \Delta_i\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\delta_i &= \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x} \\ \Delta_i &= (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u\end{aligned}$$

Lemme

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \ \ avec \ \ \lambda > 0$$

Fonction de Lyapunov quadratique

$$V(e) = e^T P e$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \Big( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \Big) e \\ &+ 2e^T P \overline{A}_i \delta_i + 2e^T P B_i \Delta_i\end{aligned}$$

avec :

$$\delta_i = \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}$$
$$\Delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u$$

Lemme

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \; avec \; \lambda > 0$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 \Delta_i^T \Delta_i\end{aligned}$$

D'après les hypothèses de travail, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 M_i^2 e^T e + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2 e^T e\end{aligned}$$

La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q$$

et

$$-Q + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0$$

En appliquant le complément de Schur on obtient

$$(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n}\mu_i(\hat{x})e^T\left((A_0-L_iC)^TP+P(A_0-L_iC)\right)e \\ &+ \lambda_1^{-1}e^TP\overline{A}_i\overline{A}_i^TPe+\lambda_1\delta_i^T\delta_i+\lambda_2^{-1}e^TPB_iB_i^TPe+\lambda_2\Delta_i^T\Delta_i\end{aligned}$$

D'après les hypothèses de travail, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n}\mu_i(\hat{x})e^T\left((A_0-L_iC)^TP+P(A_0-L_iC)\right)e \\ &+ \lambda_1^{-1}e^TP\overline{A}_i\overline{A}_i^TPe+\lambda_1M_i^2e^Te+\lambda_2^{-1}e^TPB_iB_i^TPe+\lambda_2N_i^2\beta_2^2e^Te\end{aligned}$$

La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$(A_0-L_iC)^TP+P(A_0-L_iC)<-Q$$

et

$$-Q+\lambda_1^{-1}P\overline{A}_i\overline{A}_i^TP+(\lambda_1M_i^2+\lambda_2N_i^2\beta_2^2)I+\lambda_2^{-1}PB_iB_i^TP<0$$

En appliquant le complément de Schur on obtient

$$(A_0-L_iC)^TP+P(A_0-L_iC)<-Q$$

$$\begin{bmatrix}-Q+(\lambda_1M_i^2+\lambda_2N_i^2\beta_2^2)I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^TP & -\lambda_1I & 0 \\ B_i^TP & 0 & -\lambda_2I\end{bmatrix}<0$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\
&+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 \Delta_i^T \Delta_i
\end{aligned}
$$

D'après les hypothèses de travail, on obtient

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\
&+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 M_i^2 e^T e + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2 e^T e
\end{aligned}
$$

La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$
(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q
$$

et

$$
-Q + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0
$$

En applicant le complément de Schur on obtient

$$
(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q
$$

$$
\begin{bmatrix}
-Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\
\overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\
B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I
\end{bmatrix} < 0
$$

Dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 \Delta_i^T \Delta_i\end{aligned}$$

D'après les hypothèses de travail, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V} &< \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\hat{x}) e^T \left( (A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) \right) e \\ &+ \lambda_1^{-1} e^T P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P e + \lambda_1 M_i^2 e^T e + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2 e^T e\end{aligned}$$

La négativité de $\dot{V}$ est assurée si

$$(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q$$

et

$$-Q + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0$$

En applicant le complément de Schur on obtient

$$(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

Changement de variable

$$K_i = PL_i$$

Les inégalités linéaires matricielles suivantes sont obtenues

$$A_0^T P + PA_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I & P\bar{A}_i & PB_i \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

Changement de variable

$$K_i = PL_i$$

Les inégalités linéaires matricielles suivantes sont obtenues

$$A_0^T P + PA_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_2^2) I & P\overline{A}_i & PB_i \\ \overline{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

## Hypothèses

Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)$ : $|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i\,|x - \hat{x}|$
Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)x$ : $|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i\,|x - \hat{x}|$
Borne sur l'entrée du système $u(t)$ : $\|u(t)\| \leq \beta_2$

## Hypothèses

Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)$ : $|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i |x - \hat{x}|$
Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)x$ : $|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i |x - \hat{x}|$
Borne sur l'entrée du système $u(t)$ : $\|u(t)\| \leq \beta_2$

## Hypothèses

Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)$ : $|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i\,|x - \hat{x}|$
Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)x$ : $|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i\,|x - \hat{x}|$
Borne sur l'entrée du système $u(t)$ : $\|u(t)\| \leq \beta_2$

## Hypothèses

Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)$ : $|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i \, |x - \hat{x}|$
Condition de Lipschitz de $\mu_i(x)x$ : $|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i \, |x - \hat{x}|$
Borne sur l'entrée du système $u(t)$ : $\|u(t)\| \leq \beta_2$

## Objectif

Proposer une méthode prenant en compte une classe plus générale de fonction d'activation $\mu_i(x)$.

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Ré-écriture du multimodèle sous forme de multimodèle incertain

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i x + B_i u) + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))}_{\delta_i}(A_i x + B_i u)$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Ré-écriture du multimodèle sous forme de multimodèle incertain

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})((A_i + \Delta A)x(t) + (B_i + \Delta B)u(t)), \quad \Delta A = \mathcal{A}\Sigma(t)_A E_A, \ \ \Delta B = \mathcal{B}\Sigma(t)_B E_B$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_n \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix}, \Sigma_B = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_m \end{bmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} I_m & \dots & I_m \end{bmatrix}^T$$

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \ \Rightarrow \ -1 \leq \delta_i \leq 1 \ \Rightarrow \ \Sigma_A^T \Sigma_A < I, \ \ \Sigma_B^T \Sigma_B < I$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\,(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Ré-écriture du multimodèle sous forme de multimodèle incertain

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\,((A_i + \Delta A)x(t) + (B_i + \Delta B)u(t)), \quad \Delta A = \mathcal{A}\Sigma(t)_A E_A, \;\; \Delta B = \mathcal{B}\Sigma(t)_B E_B$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_n \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} I_n & \ldots & I_n \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix}, \Sigma_B = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_m \end{bmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} I_m & \ldots & I_m \end{bmatrix}^T$$

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq \delta_i \leq 1 \;\Rightarrow\; \Sigma_A^T \Sigma_A < I, \;\; \Sigma_B^T \Sigma_B < I$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u) \qquad y = Cx$$

## Ré-écriture du multimodèle sous forme de multimodèle incertain

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})((A_i + \Delta A)x(t) + (B_i + \Delta B)u(t)), \quad \Delta A = \mathcal{A}\Sigma(t)_A E_A, \ \ \Delta B = \mathcal{B}\Sigma(t)_B E_B$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \end{bmatrix}, \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_n \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} I_n & \ldots & I_n \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix}, \Sigma_B = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_m \end{bmatrix}, E_B = \begin{bmatrix} I_m & \ldots & I_m \end{bmatrix}^T$$

$$0 \leq \mu_i(x) \leq 1 \ \Rightarrow \ -1 \leq \delta_i \leq 1 \ \Rightarrow \ \Sigma_A^T \Sigma_A < I, \ \ \Sigma_B^T \Sigma_B < I$$

## Observateur

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))\right)$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

## Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(\underbrace{(A_i - L_i C)}_{\Phi_i} e(t) + \Delta A x(t) + \Delta B u(t)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(x(t))\left(\underbrace{\begin{pmatrix} A_i - L_i C & \Delta A \\ 0 & A_j \end{pmatrix}}_{\bar{A}_{ij}}\underbrace{\begin{pmatrix} e(t) \\ x(t) \end{pmatrix}}_{e_a(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta B \\ B_j \end{pmatrix}}_{\bar{B}_j} u(t)\right)$$

## Approche utilisée

Considérons la fonction candidate de Lyapunov $V(e(t))$, où $e(t)$ représente l'erreur d'estimation d'état

$$V(e(t)) = e(t)^T Pe(t).$$

Le problème à résoudre est d'assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état si $u(t) = 0$ :

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \qquad pour \;\; u(t) = 0$$

et assurer une erreur bornée dans le cas $u(t) \neq 0$ :

$$\|e(t)\|_2 \leq \gamma \|u(t)\|_2 \qquad pour \;\; u(t) \neq 0 \;\; et \;\; e(0) = 0$$

Pour satisfaire ces contraintes, il suffit de trouver une fonction candidate de Lyapunov $V$ telle que

$$\dot{V}(t) + e(t)^T e(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0$$

## Théorème 2

L'erreur d'estimation d'état converge vers zéro, et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers l'erreur d'estimation est borné, s'il existe deux matrices symétriques et définies positives $P_1$ et $P_2$, des matrices $K_i$, et des scalaires positifs $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\bar{\gamma}$ tels que les LMIs suivantes soient vérifiées $\forall \; i,j \in \{1,..,r\}$ :

$$\min_{L_i,\lambda_1,\lambda_2,P_1,P_2,\bar{\gamma}} \bar{\gamma} \quad \text{sous les contraintes LMI}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & 0 & 0 & P_1\mathcal{A} & P_1\mathcal{B} \\ 0 & A_j^T P_2 + P_2 A_j + \lambda_2 E_A^T E_A & P_2 B_j & 0 & 0 \\ 0 & B_j^T P_2 & -\bar{\gamma} I + \lambda_3 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^T P_1 & 0 & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ \mathcal{B}^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0$$

où :

$$\Psi_i = A_i^T P_1 + P_1 A_i - K_i C - C^T K_i^T + I$$

Les gains de l'observateur sont calculés par :

$$L_i = P_1^{-1} K_i$$

Le taux d'atténuation $\gamma$ est calculé par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$$

# Plan

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)(A_i x + B_i u + E_i d) \qquad y = Cx + Dd$$

## Hypothèse

$$\dot{d}(t) = 0$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x + B_i u + E_i d\right) \qquad y = Cx + Dd$$

## Hypothèse

$$\dot{d}(t) = 0$$

## Ré-écriture du multimodèle

$$\dot{x}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\left(\bar{A}_i x_a + \bar{B}_i u + \Gamma v\right) \qquad y = \bar{C} x_a$$

où :

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})\right)\left(A_i x + B_i u + E_i d\right)$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\,(A_i x + B_i u + E_i d) \qquad y = Cx + Dd$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x + B_i u + E_i d\right) \qquad y = Cx + Dd$$

## Structure du multi-observateur PI

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\left(A_i x + B_i u + E_i \hat{f} + K_{Pi}(y - \hat{y})\right)$$
$$\dot{\hat{f}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) K_{Ii}(y - \hat{y})$$

$$\dot{\hat{x}}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\left(\bar{A}_i \hat{x}_a + \bar{B}_i u + K_i(y - \hat{y})\right)$$
$$\hat{y} = \bar{C}\hat{x}_a$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{Pi} \\ K_{Ii} \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{d} \end{bmatrix}$$

## Multimodèle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x + B_i u + E_i d\right) \qquad y = Cx + Dd$$

## Structure du multi-observateur PI

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\left(A_i x + B_i u + E_i \hat{f} + K_{Pi}(y - \hat{y})\right)$$
$$\dot{\hat{f}} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) K_{Ii}(y - \hat{y})$$

$$\dot{\hat{x}}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\left(\bar{A}_i \hat{x}_a + \bar{B}_i u + K_i(y - \hat{y})\right)$$
$$\hat{y} = \bar{C}\hat{x}_a$$

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{Pi} \\ K_{Ii} \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{d} \end{bmatrix}$$

## Erreur d'estimation

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\left((\bar{A}_i - K_i\bar{C})e_a + \Gamma v\right)$$

## Perturbation

$$v = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))(A_i x + B_i u + E_i d)$$

## Hypothèse de travail

$$|v| < \gamma |e|$$

## Théorème 3

- L'erreur d'estimation d'état (entre le multi-observateur et le multimodèle augmenté) converge asymptotiquement, s'il existe une matrice symétrique et définie positive $X$, des matrices $M_i$ et un scalaire positif $\lambda$ tels :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T X + X\bar{A}_i - M_i\bar{C} - \bar{C}^T M_i + \lambda\gamma^2 I & X\Gamma \\ X\Gamma^T & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

- Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$K_i = X^{-1} M_i$$

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - K_i \bar{C}) e_a + \Gamma v \right)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X \, e_a(t), \;\; X = X^T > 0$$

- La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(e(t)^T((\bar{A}_i - K_i\bar{C})^T X + X(\bar{A}_i - K_i\bar{C}))e(t) \\ &+ e(t)^T XP v(t) + v(t)^T P^T X e(t)) \end{aligned}$$

- Soit deux matrices $X$ et $Y$ de dimensions appropriées, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \;\; \lambda > 0$$

# Éléments de démonstration

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - K_i \bar{C}) e_a + \Gamma v \right)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X \, e_a(t), \quad X = X^T > 0$$

- La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(e(t)^T((\bar{A}_i - K_i\bar{C})^T X + X(\bar{A}_i - K_i\bar{C}))e(t) \\ &+ e(t)^T X P v(t) + v(t)^T P^T X e(t)) \end{aligned}$$

- Soit deux matrices $X$ et $Y$ de dimensions appropriées, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \quad \lambda > 0$$

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) \left( (\bar{A}_i - K_i \bar{C}) e_a + \Gamma v \right)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X \, e_a(t), \;\; X = X^T > 0$$

- La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(e(t)^T ((\bar{A}_i - K_i \bar{C})^T X + X(\bar{A}_i - K_i \bar{C}))e(t) \\ &+ e(t)^T XPv(t) + v(t)^T P^T Xe(t)) \end{aligned}$$

- Soit deux matrices $X$ et $Y$ de dimensions appropriées, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \;\; \lambda > 0$$

- Dynamique de l'erreur d'estimation d'état :

$$\dot{e}_a = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) \left((\bar{A}_i - K_i\bar{C})e_a + \Gamma v\right)$$

- Analyse de l'erreur (fonction de Lyapunov) :

$$V(t) = e_a(t)^T X \, e_a(t), \;\; X = X^T > 0$$

- La dérivée de la fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(e(t)^T((\bar{A}_i - K_i\bar{C})^T X + X(\bar{A}_i - K_i\bar{C}))e(t) \\ &+ e(t)^T XP v(t) + v(t)^T P^T X e(t)) \end{aligned}$$

- Soit deux matrices $X$ et $Y$ de dimensions appropriées, alors la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \;\; \lambda > 0$$

# Remarques

- Extension des approches proposées dans la section 2 à l'observateur PI
- Considération d'entrées inconnues plus générales de formes polynomiales :

$$d(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_q t^q$$

$\Rightarrow$ Utilisation d'un observateur Proportionnel Multi-Integral (PMI)

- Relaxation de l'hypothèse de travail

$$|v| < \gamma |e|$$

par l'hypothèse

$$|v| < \rho$$

## Objectif

- Utilisation des observateurs pour la génération de signaux sensibles aux défauts
- Résidus obtenus par comparaison entre les mesures et leurs estimées
- Structuration des résidus à l'aide d'un banc d'observateurs
- Logique de décision (table des signatures théoriques)

- Considérons le multimodèle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

- Fonctions d'activation :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \dfrac{1 - \tanh((x_1 - 44)/11)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases}$$

- Bruit de mesure $\omega(t)$, centré et d'amplitude maximale 0.5.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i^1 u_1(t) + B_i^2 u_2(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases}$$

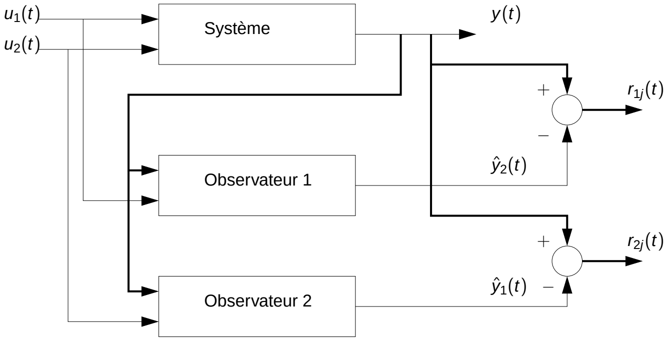



FIG.: Schéma de détection et localisation de défauts d'actionneurs

- Génération des défauts

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1(t) & 15 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & 35 < t < 45 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Calcul des résidus à partir de l'observateur et des mesures

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t)$$

où $j \in \{1,2\}$ désigne le numéro de l'observateur
et $i \in \{1,2\}$ désigne le numéro de la sortie.

- Table de signatures théoriques des défauts actionneur

| | Observateur 1 | | Observateur 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | $r_{11}$ | $r_{21}$ | $r_{12}$ | $r_{22}$ |
| défaut $f_1$ sur $u_1$ | $\times$ | $\times$ | $\sim 0$ | $\sim 0$ |
| défaut $f_2$ sur $u_2$ | $\sim 0$ | $\sim 0$ | $\times$ | $\times$ |

- Génération des défauts

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1(t) & 15 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & 35 < t < 45 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Calcul des résidus à partir de l'observateur et des mesures

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t)$$

où $j \in \{1,2\}$ désigne le numéro de l'observateur
et $i \in \{1,2\}$ désigne le numéro de la sortie.

- Table de signatures théoriques des défauts actionneur

| | Observateur 1 | | Observateur 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | $r_{11}$ | $r_{21}$ | $r_{12}$ | $r_{22}$ |
| défaut $f_1$ sur $u_1$ | $\times$ | $\times$ | $\sim 0$ | $\sim 0$ |
| défaut $f_2$ sur $u_2$ | $\sim 0$ | $\sim 0$ | $\times$ | $\times$ |

- Génération des défauts

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1(t) & 15 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2(t) & 35 < t < 45 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Calcul des résidus à partir de l'observateur et des mesures

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t)$$

où $j \in \{1,2\}$ désigne le numéro de l'observateur
et $i \in \{1,2\}$ désigne le numéro de la sortie.

- Table de signatures théoriques des défauts actionneur

| | Observateur 1 | | Observateur 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | $r_{11}$ | $r_{21}$ | $r_{12}$ | $r_{22}$ |
| défaut $f_1$ sur $u_1$ | $\times$ | $\times$ | $\sim 0$ | $\sim 0$ |
| défaut $f_2$ sur $u_2$ | $\sim 0$ | $\sim 0$ | $\times$ | $\times$ |

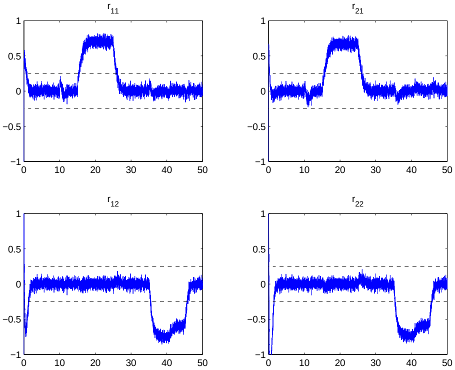



FIG.: Résidus en présence des défauts $f_1$ et $f_2$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.3 & 10 < t < 20 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0.3 & 30 < t < 40 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

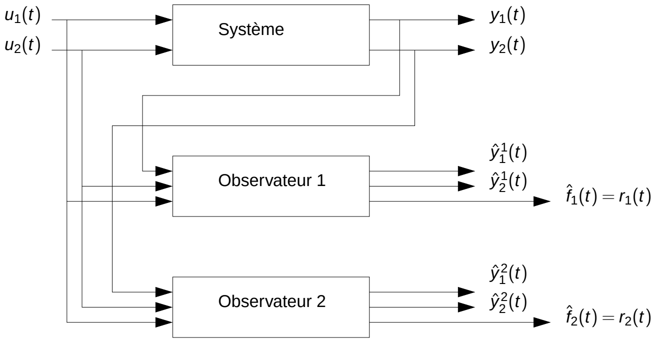



FIG.: Schéma de détection et localisation de défauts de capteurs

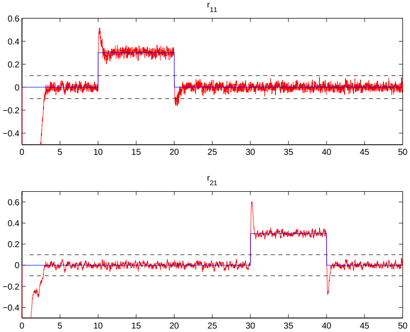



FIG.: Résidus en présence des défauts capteurs $f_1$ et $f_2$

## Conclusions

Estimation d'état et d'entrées inconnues pour des systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

- Proposition de différentes approches pour l'estimation d'état et d'entrées inconnues.
- Utilisation des observateurs proposés dans un contexte de diagnostic par bancs d'observateurs.

## Travaux en cours

- Nouvelles conditions d'existence de l'observateur (Utilisation de fonctions de Lyapunov non quadratiques)
- Utilisation du bloc de détection, isolation et estimation des défauts pour la conception de commande tolérante aux défauts.

## Perspectives

Nombreuses pistes à étudier...

- Considération de formes d'entrées inconnues plus générales.
- Détermination des seuils de détection pour la génération de signaux d'alarme (seuils adaptatifs...).
- Application au projet SIRASAS.

merci pour votre attention