

Conception d'observateurs robustes pour des systèmes non linéaires incertains : une stratégie multimodèle

Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Nancy-Université, CNRS.
2 avenue de la Forêt de Haye F-54516 Vandœuvre-lès-Nancy

prenom.nom@ensem.inpl-nancy.fr
<http://www.cran.uhp-nancy.fr>

Résumé— Cet article porte sur la synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires incertains décrits par des multimodèles. Dans cette approche de modélisation, le comportement dynamique du système est caractérisé par un ensemble de sous-modèles valides dans une zone de fonctionnement. La structure du multimodèle exploité dans ce travail, multimodèle dit *dé-couplé*, admet des sous-modèles comportant un nombre différent d'états. Un degré de flexibilité dans l'étape de modélisation est ainsi introduit car la dimension des sous-modèles peut être adaptée à la complexité de la zone de fonctionnement à décrire. Des conditions suffisantes pour la synthèse d'un observateur robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations sont établies pour cette classe de multimodèle, sous la forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs). Un exemple de simulation est également proposé afin d'illustrer les performances de l'approche proposée.

Mots-clés— estimation d'état, approche multimodèle, systèmes incertains, systèmes non linéaires, LMI

I. INTRODUCTION

De nombreuses techniques de commande, de surveillance ou de diagnostic de systèmes font appel aux variables d'état du système. Cependant, d'un point de vue pratique, la connaissance complète de l'ensemble des variables d'état du système est en général indisponible, d'une part parce qu'une variable d'état n'a pas toujours un sens physique et d'autre part parce que sa mesure directe est souvent soumise à des contraintes d'ordre technique, technologique ou économique.

Une solution permettant de contourner ces difficultés consiste à estimer l'état du système, à l'aide d'un observateur, à partir de l'entrée, de la sortie et d'un modèle du système. La qualité de l'estimation fournie par l'observateur dépend fortement de la qualité des mesures et de la précision du modèle. Or un modèle n'est qu'une représentation abstraite permettant une description imparfaite du comportement réel du système. D'autre part, tout processus physique est inévitablement soumis à des perturbations provenant des interactions entre le processus et son environnement affectant ainsi les mesures utilisées.

Le problème d'estimation robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des perturbations s'avère donc fondamental en automatique. Il a été beaucoup étudié pour des systèmes modélisés par un modèle de type linéaire en utilisant, par exemple, la théorie pour la commande robuste [1–4] ou l'analyse par intervalles [5]. Cependant, dans un nombre important d'applications, la nature non linéaire du processus ne peut pas être négligée. L'utilisation des techniques classiques d'estimation se révèle alors peu adaptée. En effet, l'hypothèse de linéarité du

modèle n'est vérifiée que localement autour d'un point de fonctionnement. D'autre part, obtenir un modèle qui soit exploitable systématiquement et qui tienne compte de la complexité globale du système est souvent difficile voire impossible.

L'approche multimodèle permet de contourner ces difficultés en évitant l'utilisation d'un modèle unique très complexe. L'idée est de réduire la complexité du système en effectuant une décomposition de son espace de fonctionnement en un nombre fini de zones de moindre complexité délimitées par une fonction poids. Chaque zone de fonctionnement est ensuite modélisée par un *sous-modèle* de structure simple. La caractérisation du comportement dynamique du système est alors effectuée en combinant la contribution relative de chaque sous-modèle à travers ces fonctions poids associées (voir [6–8] pour une discussion approfondie).

Dans ce contexte de modélisation, l'agrégation des sous-modèles peut se faire de diverses façons donnant lieu à différentes classes de multimodèles [9]. Deux grandes familles de multimodèles sont recensées selon qu'un vecteur d'état unique (*multimodèle de Takagi-Sugeno*) ou que plusieurs vecteurs d'état (*multimodèle dé-couplé*) apparaissent dans les équations du multimodèle.

La structure du multimodèle de Takagi-Sugeno a été initialement proposée, dans un contexte de modélisation floue, par Takagi et Sugeno [10] dans les années 80 et a été depuis largement popularisée, dans un contexte multimodèle, par les travaux de Johansen et Foss [6]. L'intérêt de cette structure pour effectuer la modélisation, la commande ou l'estimation d'état des systèmes non linéaires a été largement démontré [11–15]. Remarquons que d'un point de vue structurel, tous les sous-modèles dans ce multimodèle ont la même dimension car un vecteur d'état unique est utilisé. Par conséquent, la complexité des sous-modèles est invariable quelle que soit la complexité de la zone de fonctionnement à décrire. Le multimodèle ainsi obtenu peut être alors sur-paramétré et sa complexité inutilement augmentée.

Le structure du multimodèle dé-couplé [9] introduit une certaine flexibilité dans l'étape de modélisation. En effet la dimension des sous-modèles peut être adaptée à la complexité des zones de fonctionnement car dans cette structure chaque sous-modèle peut avoir un nombre d'états différent (une présentation approfondie est proposée dans la section II). Ce multimodèle a

déjà été exploité pour effectuer l'identification [16, 17] et/ou la commande [18–20] des systèmes non linéaires. En revanche, les possibilités offertes par cette structure pour l'estimation d'état restent actuellement peu exploitées [21, 22].

Cet article basé sur nos précédents travaux [22], examine le problème de la conception robuste d'estimateurs d'état pour des systèmes non linéaires comportant des incertitudes paramétriques, sujets à des perturbations et modélisés par un multimodèle découpé. Les incertitudes paramétriques admissibles peuvent varier dans le temps et sont bornées en norme. L'étude de la stabilité de l'observateur est abordée à l'aide de la méthode de Lyapunov et en introduisant une mesure de performance H_∞ .

Cet article est structuré comme suit : le multimodèle découpé est présenté dans la section II et la structure de l'observateur dans la section III. Des conditions suffisantes (sous forme de LMI) assurant des performances robustes de l'estimation vis-à-vis des perturbation et des incertitudes sont obtenues dans la section IV. Enfin, la section V propose un exemple académique de reconstruction d'état d'un multimodèle découpé.

Notations : Par la suite, une matrice P définie positive (négative) sera notée $P > 0$ ($P < 0$) et la transposée d'une matrice P par P^T . I est la matrice identité de dimension appropriée et $\text{diag}\{A_1, \dots, A_n\}$ est une matrice diagonale par bloc de coefficients diagonaux A_i . La norme L_2 d'un signal de carré intégrable est notée et définie par $\|f(t)\|_2^2 = \int_0^\infty f^T(t)f(t)dt$. Afin d'alléger l'écriture $\mu_i(\xi(t))$ sera abrégée sous la forme $\mu_i(t)$.

II. SUR LA REPRÉSENTATION MULTIMODÈLE

Le principe de l'approche multimodèle repose sur l'appréhension du comportement d'un système à l'aide d'un ensemble de sous-modèles agrégés à travers un mécanisme d'interpolation. Les multimodèles constituent alors un outil adapté à la modélisation des systèmes non linéaires. Quant à l'extension des outils d'analyse développés dans le cadre des systèmes linéaires, elle peut être envisagée sans effectuer une analyse spécifique de la non linéarité du système.

Dans ce contexte de modélisation, plusieurs catégories de multimodèles peuvent être distinguées selon la façon dont les sous-modèles sont associés. Parmi elles, figure le multimodèle découpé. Ce multimodèle, proposé initialement dans [9], se présente sous la forme d'une représentation d'état par :

$$\dot{x}_i(t) = (A_i + \Delta A_i)x_i(t) + B_i u(t) + D_i w(t), \quad (1a)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t), \quad (1b)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) y_i(t) + W w(t), \quad (1c)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du $i^{\text{ème}}$ sous-modèle ; $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $w \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement l'entrée, la sortie et la perturbation du système. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_i \times q}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$ et $W \in \mathbb{R}^{p \times q}$ sont des matrices constantes connues caractérisant le comportement nominal de chaque sous-modèle et l'influence des perturbations sur le système.

Les imprécisions de la modélisation du système sont représentées par des incertitudes structurées bornées en norme :

$$\Delta A_i = M_i F_i(t) N_i, \quad (2)$$

où M_i et N_i sont des matrices connues, constantes et de dimensions appropriées, et $F_i(t)$ une fonction matricielle inconnue, avec des éléments de Lebesgue mesurables, satisfaisant à :

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I, \quad \forall t. \quad (3)$$

Les différentes zones de fonctionnement du système sont indexées à l'aide de la variable de décision $\xi(t)$ supposée inconnue mais accessible par mesure en temps réel. Elle est une variable caractéristique du système, par exemple, des variables d'état mesurables et/ou des signaux d'entrée ou de sortie.

La contribution relative de chaque sous-modèle, selon la zone où évolue le système, est déterminée par les *fonctions de pondération* $\mu_i(\xi(t))$. Elles délimitent les zones de validité, assurent la transition entre les sous-modèles et possèdent les propriétés de somme convexe suivantes :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad \forall i = 1 \dots L, \quad \forall t. \quad (4)$$

La sortie du multimodèle est alors obtenue en effectuant une somme pondérée des sorties des sous-modèles. Il convient de souligner à ce niveau, que les sorties $y_i(t)$ des sous-modèles doivent être considérées comme des "signaux artificiels de modélisation" utilisés pour décrire le comportement non linéaire du système réel. De ce fait, ces signaux ne sont pas exploitables pour piloter un observateur.

D'autre part, grâce au découplage entre les sous-modèles la dimension de chaque sous-modèle peut être adaptée selon la complexité de la zone de fonctionnement à caractériser. Cette structure de multimodèle est donc adaptée à la modélisation des systèmes fortement non linéaires de structure variable en fonction de la zone de fonctionnement. Les paramètres du multimodèle peuvent être obtenus en utilisant une approche de type boîte noire à l'aide des différentes techniques d'identification (le lecteur peut consulter par exemple [16, 17, 23]).

III. STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR

Il est intéressant de remarquer qu'en introduisant un vecteur d'état augmenté de la forme :

$$x(t) = [x_1^T(t) \dots x_i^T(t) \dots x_L^T(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \quad n = \sum_{i=1}^L n_i, \quad (5)$$

les équations (1) peuvent s'écrire sous la forme compacte :

$$\dot{x}(t) = (\tilde{A} + \Delta \tilde{A}(t))x(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}w(t), \quad (6a)$$

$$y(t) = \tilde{C}(t)x(t) + Ww(t), \quad (6b)$$

où

$$\tilde{A} = \text{diag}\{A_1 \dots A_i \dots A_L\}, \quad (7a)$$

$$\Delta \tilde{A} = \text{diag}\{\Delta A_1 \dots \Delta A_i \dots \Delta A_L\}, \quad (7b)$$

$$\tilde{B} = [B_1^T \dots B_i^T \dots B_L^T]^T, \quad (7c)$$

$$\tilde{D} = [D_1^T \dots D_i^T \dots D_L^T]^T, \quad (7d)$$

$$\tilde{C}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \tilde{C}_i, \quad (7e)$$

$$\tilde{C}_i = [0 \dots C_i \dots 0]. \quad (7f)$$

Il convient de remarquer que la matrice $\Delta \tilde{A}$ admet une écriture similaire à celle de ΔA_i :

$$\Delta \tilde{A} = \tilde{M} \tilde{F}(t) \tilde{N}, \quad (8)$$

où

$$\tilde{M} = \text{diag} \{M_1 \cdots M_i \cdots M_L\} , \quad (9)$$

$$\tilde{N} = \text{diag} \{N_1 \cdots N_i \cdots N_L\} , \quad (10)$$

$$\tilde{F}(t) = \text{diag} \{F_1(t) \cdots F_i(t) \cdots F_L(t)\} , \quad (11)$$

où $\tilde{F}^T(t)\tilde{F}(t) \leq 1$.

La reconstruction des variables d'état du multimodèle décomposé (6) est effectuée à l'aide d'un observateur de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) , \quad (12a)$$

$$\hat{y}(t) = \tilde{C}(t)\hat{x}(t) , \quad (12b)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimation du vecteur d'état (5), $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie reconstruite par l'observateur et $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ le gain de l'observateur à déterminer.

A. Formulation du problème

L'erreur d'estimation d'état est définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) , \quad (13)$$

et sa dynamique, obtenue par agrégation des équations (6) et (12), par :

$$\dot{E}(t) = A_o(t)E(t) + \Phi \bar{w}(t) , \quad (14)$$

$$z(t) = [I \ 0]E(t) , \quad (15)$$

où

$$E(t) = [e(t) \ x(t)]^T , \quad (16)$$

$$\bar{w}(t) = [w(t) \ u(t)]^T , \quad (17)$$

$$A_o(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A} - K\tilde{C}(t) & \Delta\tilde{A} \\ 0 & \tilde{A} + \Delta\tilde{A} \end{bmatrix} , \quad (18)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{D} - KW & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix} . \quad (19)$$

La convergence de l'observateur est étudiée en prenant en compte la dépendance entre l'erreur d'estimation et les signaux exogènes au système. Ainsi la synthèse de l'observateur (12) consiste à ajuster le gain K de façon à garantir une reconstruction de l'état du multimodèle avec une certaine précision en présence des incertitudes paramétriques et des perturbations. On cherche alors à satisfaire les performances robustes suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{w}(t) = 0 , \quad (20a)$$

$$\|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|\bar{w}(t)\|_2^2 \quad \text{pour} \quad \bar{w}(t) \neq 0 \text{ et } z(0) = 0 . \quad (20b)$$

où $\bar{w}(t)$ est assimilé à une perturbation sur l'erreur d'estimation et γ est le niveau d'atténuation entre $\bar{w}(t)$ et $E(t)$.

IV. SYNTHÈSE DE L'OBSERVATEUR

Dans cette section, des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état sont établies sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles LMIs [24], en utilisant la méthode de Lyapunov.

Hypothèse 1. L'entrée et la perturbation sont des signaux à énergie bornée, soit $\|u(t)\|_2^2 < \infty$ et $\|w(t)\|_2^2 < \infty$.

Lemme 1. Soit X et Y deux matrices de taille appropriées. L'inégalité suivante est toujours vraie pour toute matrice $Q = Q^T > 0$:

$$XY^T + YX^T \leq XQX^T + YQ^{-1}Y^T .$$

Une condition suffisante pour garantir l'existence de l'observateur est présentée ci-dessous :

Théorème 1. Soit le modèle (6) satisfaisant à l'hypothèse 1. Il existe un observateur (12) garantissant les performances robustes (20), s'il existe deux matrices symétriques et définies positives P_1 et P_2 , une matrice G et deux scalaires positifs $\tilde{\gamma}$ et τ tels que :

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & 0 & \Xi & 0 & P_1\tilde{M} \\ 0 & \Gamma & 0 & P_2\tilde{B} & P_2\tilde{M} \\ \Xi^T & 0 & -\tilde{\gamma}I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & -\tilde{\gamma}I & 0 \\ \tilde{M}^T P_1 & \tilde{M}^T P_2 & 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1 \dots L,$$

où

$$\Pi_i = P_1\tilde{A} + \tilde{A}^T P_1 - G\tilde{C}_i - \tilde{C}_i^T G^T + I ,$$

$$\Gamma = P_2\tilde{A} + \tilde{A}^T P_2 + \tau\tilde{N}^T \tilde{N} ,$$

$$\Xi = P_1\tilde{D} - GW .$$

Le gain de l'observateur est donné par $K = P_1^{-1}G$ et le niveau d'atténuation par $\gamma = \sqrt{\tilde{\gamma}}$.

Remarque 1. La recherche d'une solution satisfaisant les conditions de ce théorème peut éventuellement s'accompagner d'une minimisation du niveau d'atténuation γ .

Démonstration. La démonstration du théorème 1 s'effectue en considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = e^T(t)P_1e(t) + x^T(t)P_2x(t) , \quad (21)$$

où $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$. Les objectifs de synthèse (20) sont garantis s'il existe une fonction de Lyapunov (21) satisfaisant à :

$$\dot{V}(t) < -z^T(t)z(t) + \gamma^2 \bar{w}^T(t)\bar{w}(t) . \quad (22)$$

La dérivée $\dot{V}(t)$ le long de la trajectoire de l'erreur d'estimation est obtenue en utilisant les équations (14) :

$$\dot{V}(t) = \Omega(t)^T \begin{bmatrix} A_o^T(t)P + PA_o(t) & P\Phi \\ \Phi^T P & 0 \end{bmatrix} \Omega(t) , \quad (23)$$

$$P = \text{diag} \{P_1, P_2\} , \quad (24)$$

$$\Omega(t) = [E(t) \ \bar{w}(t)]^T . \quad (25)$$

Ainsi, compte tenu de (23), la condition (22) devient alors :

$$\Omega^T(t) \begin{bmatrix} A_o^T(t)P + PA_o(t) + \text{diag} \{I, 0\} & P\Phi \\ \Phi^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \Omega(t) < 0 , \quad (26)$$

qui est une forme quadratique en $\Omega(t)$. Par conséquent, en introduisant les définitions (18) de $A_o(t)$ et (19) de Φ , cette inégalité est également satisfaite par :

$$\begin{bmatrix} \Pi(t) & P_1\Delta\tilde{A} & P_1(\tilde{D} - KW) & 0 \\ \Delta\tilde{A}^T P_1 & X_1 + X_2 & 0 & P_2\tilde{B} \\ (\tilde{D} - KW)^T P_1 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 , \quad (27)$$

où

$$\Pi(t) = (\tilde{A} - K\tilde{C}(t))^T P_1 + P_1(\tilde{A} - K\tilde{C}(t)) + I, \quad (28)$$

$$X_1 = \tilde{A}^T P_2 + P_2 \tilde{A}, \quad (29)$$

$$X_2 = \Delta \tilde{A}^T P_2 + P_2 \Delta \tilde{A}. \quad (30)$$

Il est maintenant possible de dissocier les paramètres nominaux et incertains dans l'inégalité (27) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Pi(t) & 0 & P_1(\tilde{D} - KW) & 0 \\ 0 & X_1 & 0 & P_2 \tilde{B} \\ (\tilde{D} - KW)^T P_1 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + Z < 0, \quad (31)$$

où

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & P_1 \Delta \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & P_2 \Delta \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \tilde{A}^T P_1 & \Delta \tilde{A}^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

et d'expliciter ainsi Z par :

$$Z = R^T H + H^T R, \quad (33)$$

où

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & P_1 \tilde{M} & 0 & 0 \\ 0 & P_2 \tilde{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{F}(t) \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est maintenant aisé de faire disparaître les termes inconnus $\tilde{F}(t)$ dans (33) en utilisant le lemme 1 et en prenant en compte le fait que $\tilde{F}^T(t) \tilde{F}(t) \leq I$, soit :

$$Z \leq \begin{bmatrix} \tau^{-1} P_1 \tilde{M} \tilde{M}^T P_1 & \tau^{-1} P_1 \tilde{M} \tilde{M}^T P_2 & 0 & 0 \\ \tau^{-1} P_2 \tilde{M} \tilde{M}^T P_1 & \tau^{-1} P_2 \tilde{M} \tilde{M}^T P_2 + \tau \tilde{N}^T \tilde{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Ainsi, en introduisant la majoration (34) de Z dans (31) et en utilisant le complément de Schur, il découle que l'inégalité (27) est également satisfaite par :

$$\begin{bmatrix} \Pi(t) & 0 & \tilde{\Xi} & 0 & P_1 \tilde{M} \\ 0 & \Gamma & 0 & P_2 \tilde{B} & P_2 \tilde{M} \\ \tilde{\Xi} & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ \tilde{M}^T P_1 & \tilde{M}^T P_2 & 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

où

$$\tilde{\Xi} = P_1(\tilde{D} - KW), \quad (36)$$

$$\Gamma = \tilde{A}^T P_2 + P_2 \tilde{A} + \tau \tilde{N}^T \tilde{N}. \quad (37)$$

Maintenant, en utilisant la définition (7e) de $\tilde{C}(t)$ alors $\Pi(t)$ devient :

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) (\tilde{A} - K\tilde{C}_i)^T P_1 + P_1 (\tilde{A} - K\tilde{C}_i) + I. \quad (38)$$

Enfin, en posant $G = P_1 K$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$ et compte tenu des propriétés de somme convexe des fonctions de pondération $\mu_i(t)$, l'inégalité (27) est également satisfaite par les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & 0 & \Xi & 0 & P_1 \tilde{M} \\ 0 & \Gamma & 0 & P_2 \tilde{B} & P_2 \tilde{M} \\ \Xi^T & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 \\ \tilde{M}^T P_1 & \tilde{M}^T P_2 & 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0, i = 1 \dots L, \quad (39)$$

où

$$\Xi = P_1 \tilde{D} - GW, \quad (40)$$

$$\Pi_i = P_1 \tilde{A} + \tilde{A}^T P_1 - G\tilde{C}_i - \tilde{C}_i^T G^T + I. \quad (41)$$

Il convient de remarquer que la stabilité de l'observateur (12), en considérant le modèle nominal sans perturbations, est assurée par la négativité du bloc (1,1) dans l'inégalité matricielle (39) [22].

Le théorème 1 est ainsi démontré et une solution satisfaisant ces conditions peut alors être obtenue en faisant appel à des algorithmes d'optimisation sous contraintes convexes. \square

A. Deuxième condition de convergence

On propose de modifier la forme des incertitudes (2) par :

$$\Delta A_i = \mu_i(t) M_i F_i(t) N_i. \quad (42)$$

L'idée d'introduire une pondération est de négliger éventuellement les incertitudes des sous-modèles qui ne sont pas mis à contribution dans la sortie du muldimodèle. La forme augmentée proposée dans la section III reste inchangée excepté pour la matrice $\Delta \tilde{A}$ qui devient :

$$\Delta \tilde{A} = \sum_{i=1}^L \mu_i(t) \Delta \tilde{A}_i, \quad (43)$$

où

$$\Delta \tilde{A}_i = \tilde{M}_i F_i(t) \tilde{N}_i, \quad (44)$$

$$\tilde{M}_i = [0 \ \dots \ M_i \ \dots \ 0], \quad (45)$$

$$\tilde{N}_i = [0 \ \dots \ N_i \ \dots \ 0]. \quad (46)$$

Une condition suffisante pour garantir l'existence de l'observateur est présentée ci-dessous :

Théorème 2. Soit le modèle (6) avec les incertitudes de la forme (42) et satisfaisant à l'hypothèse 1. Il existe un observateur (12) garantissant les performances robustes (20), s'il existe deux matrices symétriques et définies positives P_1 et P_2 , une matrice G et des scalaires positifs $\bar{\gamma}$ et τ_i tels que :

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & 0 & \Xi & 0 & P_1 \tilde{M}_i \\ 0 & \Gamma_i & 0 & P_2 \tilde{B} & P_2 \tilde{M}_i \\ \Xi^T & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T P_2 & 0 & -\bar{\gamma} I & 0 \\ \tilde{M}_i^T P_1 & \tilde{M}_i^T P_2 & 0 & 0 & -\tau_i I \end{bmatrix} < 0, i = 1 \dots L,$$

où

$$\Pi_i = P_1 \tilde{A} + \tilde{A}^T P_1 - G\tilde{C}_i - \tilde{C}_i^T G^T + I,$$

$$\Gamma_i = P_2 \tilde{A} + \tilde{A}^T P_2 + \tau_i \tilde{N}_i^T \tilde{N}_i,$$

$$\Xi = P_1 \tilde{D} - GW,$$

$$\tilde{M}_i = [0 \ \dots \ M_i \ \dots \ 0],$$

$$\tilde{N}_i = [0 \ \dots \ N_i \ \dots \ 0].$$

Le gain de l'observateur est donné par $K = P_1^{-1} G$ et le niveau d'atténuation par $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème s'effectue en adoptant une démarche tout à fait similaire à celle du théorème 1. La démonstration est omise ici. \square

V. EXEMPLE DE SIMULATION

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 2$ sous-modèles de dimensions différentes dont les paramètres sont définis par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ -0.4 & -0.8 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 & -0.3 \\ 0.3 & -0.5 & -0.8 \\ 0.6 & 0.7 & -0.4 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= [0.6 \quad 0.7]^T, & B_2 &= [0.9 \quad -0.7 \quad -0.5]^T, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.5 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 & -0.2 \\ 0.2 & -0.3 & -0.4 \end{bmatrix}, \\ M_1 &= [0.3 \quad 0.2]^T, & M_2 &= [0.4 \quad 0.5 \quad 0.3]^T, \\ N_1 &= [0.1 \quad 0.3], & N_2 &= [0.2 \quad 0.3 \quad 0.6], \\ W &= \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La variable de décision $\xi(t)$ est ici le signal de commande $u(t) \in [-1, 1]$. La perturbation $w(t)$ est un bruit de moyenne nulle et de variance égale à 1.

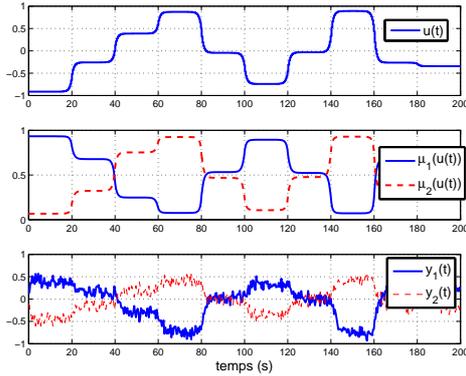


Fig. 1. Entrée, fonctions de pondération et sortie

Les fonctions de pondération sont obtenues par la normalisation de fonctions de type gaussien :

$$\mu_i(\xi(t)) = \frac{\omega_i(\xi(t))}{\sum_{j=1}^L \omega_j(\xi(t))}, \quad (47)$$

$$\omega_i(\xi(t)) = \exp\left(-(\xi(t) - c_i)^2 / \sigma^2\right), \quad (48)$$

de dispersion $\sigma = 0.5$ et de centres $c_1 = -0.18$ et $c_2 = 0.18$. Le choix des fonctions de pondération fait que la sortie du multimodèle est construite en considérant à tout instant la contribution des deux sous-modèles.

Les allures du signal d'entrée, des fonctions de pondération et des sorties du multimodèles sont illustrées sur la figure 1. La figure 2 présente les incertitudes $F_1(t)$, $F_2(t)$ et la perturbation $w(t)$ utilisées dans la simulation.

Les solutions, satisfaisant les conditions du théorème 1 et 2, sont obtenues en utilisant l'interface YALMIP [25] associée au solver SEDUMI [26]. Une solution, satisfaisant les conditions

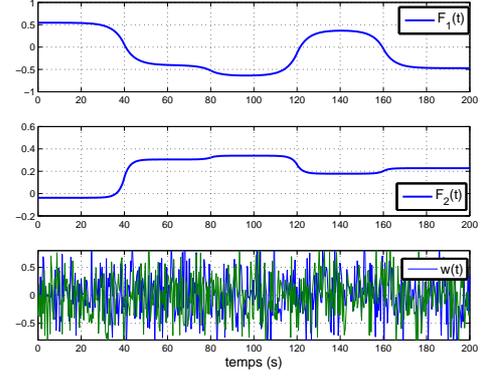


Fig. 2. $F_1(t)$, $F_2(t)$ et $w(t)$

du théorème 1, est donnée par :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.7239 & 0.6650 \\ -1.1742 & -0.0716 \\ -1.4914 & -0.6806 \\ -2.9926 & -2.7446 \\ -2.3465 & -2.6586 \end{bmatrix},$$

avec un niveau d'atténuation minimal de $\gamma^2 = 1.8933$ et $\tau = 3.0592$. Une solution, satisfaisant les conditions du théorème 2, est donnée par :

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.9904 & 1.0389 \\ -0.5708 & 0.9015 \\ -5.0878 & -3.7781 \\ -2.5354 & -3.4427 \\ -1.0984 & -1.7825 \end{bmatrix},$$

avec un niveau d'atténuation minimal de $\gamma^2 = 0.4292$ et $\tau_1 = 1.6140$ et $\tau_2 = 0.6405$. Il est possible de remarquer le fort contraste entre les niveaux d'atténuation obtenus avec les conditions du théorème 1 et 2.

Il convient également de remarquer que dans la simulation du multimodèle les incertitudes ne sont pas assorties de pondération et que les conditions initiales des observateurs sont nulles.

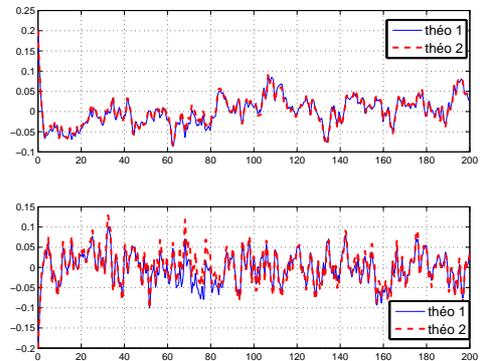


Fig. 3. Erreurs d'estimation du sous-modèle 1

Les erreurs d'estimation obtenues en utilisant ces deux observateurs sont illustrées sur les figures 3 et 4. La figure 5 présente l'indice de performance $\gamma^2 = \|E(t)\|_2^2 / \|\bar{w}(t)\|_2^2$ au cours

du temps. Dans les deux cas les erreurs d'estimation demeurent bornées et proches de zéro.

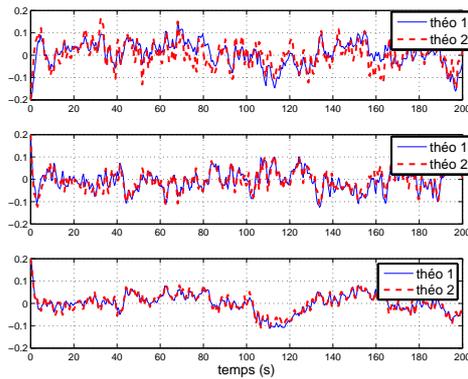


Fig. 4. Erreurs d'estimation du sous-modèle 2

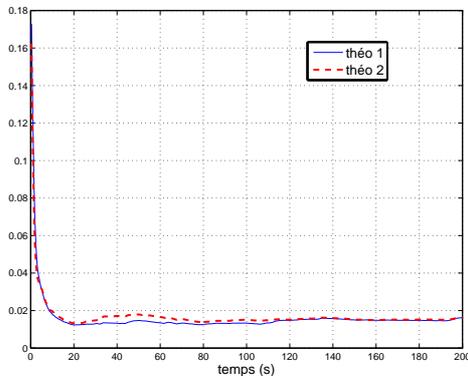


Fig. 5. Performances de l'estimation $\varepsilon = \|E(t)\|_2^2 / \|\bar{w}(t)\|_2^2$

VI. CONCLUSIONS

Cet article expose une méthode de synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires incertains décrits par une classe de multimodèle. Le multimodèle utilisé, le multimodèle découplé, peut comporter des sous-modèles de dimensions différentes, contrairement aux approches classiques où les sous-modèles ont la même dimension.

Des conditions suffisantes permettant la synthèse d'observateurs robustes vis-à-vis des incertitudes du modèle et des perturbations sont établies en utilisant un formalisme LMI. La méthode proposée et son efficacité est illustrée à travers un exemple de simulation. L'observateur proposé peut être utilisé dans un contexte de diagnostic de systèmes pour générer des résidus robustes en vue de fournir des signaux indicateurs de défauts.

VII. REMERCIEMENTS

Ce travail est partiellement financé par le Conseil Régional de Lorraine.

RÉFÉRENCES

[1] A. Weinmann. *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag Wien New York, Vienne, 1991.
 [2] L. Xie et C.E. Souza. Robust H-infinity control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1188–1191, 1992.

[3] Alain Oustaloup. *La robustesse, analyse et synthèse de commandes robustes*. Hermès, Paris, 1994.
 [4] W. Colmenares. *Sur la robustesse des systèmes incertains : approche quadratique, retour de sortie*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1996.
 [5] O. Adrot. *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante*. PhD thesis, Institut national Polytechnique de Lorraine, 2000.
 [6] R. Murray-Smith et T.A. Johansen. *Multiple model approaches to modeling and control*. Taylor & Francis, London, 1997.
 [7] D. J. Leith et W. E. Leithead. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International Journal of Control*, 73(11) :1001–1025, July 2000.
 [8] R. Gao, A. O'Dwyer, S. McLoone, et E. Coyle. Multiple model networks in non-linear systems model for control – a review. *Wismarer Automatisierungs Symposium mit International Beteiligung*, Hansestadt Wismar, 2002.
 [9] D. Filev. Fuzzy modeling of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) :281–290, 1991.
 [10] M. Takagi, T. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to model and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetic*, 15 :116–132, 1985.
 [11] K. Tanaka, T. Ikeda, et H. Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, Hinf control theory, and Linear Matrix Inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 4(1) :1–13, 1996.
 [12] M. Teixeira et S. Zak. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(2) :133–142, 1999.
 [13] S. G. Cao, N. W. Rees, et G. Feng. Hinf control of uncertain fuzzy continuous-time systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(2) :171–190, October 2000.
 [14] P. Bergsten, R. Palm, et D. Driankov. Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 32(1) :114–211, 2002.
 [15] M. Hadjili et V. Wertz. Takagi-Sugeno fuzzy modeling incorporating input variables selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(6) :728–742, 2002.
 [16] A.N. Venkat, P. Vijaysai, et R.D. Gudi. Identification of complex nonlinear processes based on fuzzy decomposition of the steady state space. *Journal of Process Control*, 13(6) :473–488, 2003.
 [17] L. Thiaw, K. Madani, R. Malti, et G. Sow. Implementation of recurrent multi-models for system identification. *4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO*, pages 314–321, Angers, France, 2007.
 [18] P.J. Gawthrop. Continuous-time local state local model networks. *IEEE Conference on Systems, Man & Cybernetics*, pages 852–857, Vancouver, Canada, 1995.
 [19] E. P. Gatzke et F. J. Doyle III. Multiple model approach for CSTR control. *14th IFAC World Congress*, pages 343–348, Beijing, P. R. China, 1999.
 [20] G. Gregorcic et G. Lightbody. Control of highly nonlinear processes using self-tuning control and multiple/local model approaches. *2000 IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems, INES 2000*, pages 167–171, Portoroz, Slovenia, 2000.
 [21] F. Uppal, R. Patton, et M. Witczak. A hybrid neuro-fuzzy and de-coupling approach applied to the DAMADICS benchmark problem. *Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFE-PROCESS'03*, Washington, DC. USA, 2003.
 [22] R. Orjuela, B. Marx, D. Maquin, et J. Ragot. State estimation for nonlinear systems using a decoupled multiple mode. *International Journal of Modelling Identification and Control*, 3(5), (planned to be published in May) 2008.
 [23] R. Orjuela, D. Maquin, et J. Ragot. Identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle à états découplés. *Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'06*, Poitiers, France, 2006.
 [24] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics 15, Philadelphia, 1994.
 [25] J. Löfberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Computer Aided Control Systems Design, CACSD*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, 2004.
 [26] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1) :625–653, 1999.