

Surveillance et diagnostic *

Didier Maquin, José Ragot, Benoît Marx
*Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN),
Institut National Polytechnique de Lorraine, France*

1 Introduction générale

La sûreté de fonctionnement peut être mise en cause lors de l'apparition de défauts du processus, ces défauts pouvant affecter le processus lui-même ou ses organes de conduite. Ce constat a naturellement conduit à la mise en œuvre de systèmes de surveillance dont l'objectif est d'être capable, à tout instant, de fournir l'état de fonctionnement des différents organes constitutifs d'un système technologique quelconque.

Cette demande croissante de fiabilité et de sûreté de fonctionnement, mais également celle d'un fonctionnement moins onéreux et plus écologique, justifient donc l'intérêt grandissant porté à des méthodes avancées de conduite incluant, évidemment, des techniques performantes de détection de défauts. Lorsqu'un défaut apparaît, il doit être détecté le plus rapidement possible, même dans le cas où tous les signaux observés restent dans leurs limites admissibles. Il doit ensuite être localisé et sa cause identifiée. Ainsi, les classiques étapes d'observation et de suivi doivent-elles être assistées par une étape plus "intelligente". Cette étape, souvent appelée *surveillance*, doit utiliser l'*ensemble des informations disponibles* au moyen d'un modèle explicite ou implicite (reconnaissance de formes).

En fait, l'objet de la surveillance est de signaler les modes de fonctionnement anormaux (non désirés ou interdits) et d'aider à prendre les décisions appropriées de façon à éviter une dégradation des performances du processus ou une dégradation du processus lui-même pouvant conduire à un accident mettant éventuellement en cause des vies humaines. Un défaut est généralement perçu comme une déviation dans les caractéristiques attendues du processus lui-même, des capteurs, des actionneurs ou de tout autre équipement constitutif du système. Si ces déviations influencent les variables mesurées, elles doivent pouvoir être détectées à l'aide de procédures d'évaluation de signal adéquates. Ces fonctions sont appelées, globalement, *monitoring* dans le cas où les variables mesurées sont simplement comparées à certains seuils limites (comparaison de la

*How to cite this chapter : Maquin, D., Ragot, J., Marx, B., (2007) Surveillance et diagnostic, Chap. 16 in *Du Cahier des Charges à la Réalisation de Systèmes*, (ed. R. Husson), Dunod.

mesure elle-même ou de sa vitesse d'évolution) et des alarmes sont déclenchées si les limites sont dépassées. L'opérateur, à partir de ces alarmes, met en œuvre les actions appropriées pour ramener la ou les variables incriminées dans leurs plages de fonctionnement normales. Dans le cas où la violation de ces limites entraîne le système dans un état présentant un danger (pour lui-même ou pour son environnement), une action appropriée peut être effectuée automatiquement (garantie de la sécurité).

Cette technique, très répandue dans l'industrie, donne souvent des résultats satisfaisants. Cependant, les dérives, par exemple, ne sont détectées que lorsqu'elles deviennent importantes et si celles-ci sont lentes, très longtemps après leur apparition.

De plus, beaucoup de défauts ne peuvent être détectés par la seule analyse individuelle des différents signaux acquis sur l'installation en raison des interactions qu'ils présentent entre eux. Au cours des vingt dernières années, les efforts de la recherche ont montré que les changements de mode de fonctionnement des processus peuvent cependant être détectés précocement en utilisant des modèles liant les différentes variables mesurées. Ainsi, des quantités non mesurables comme certaines variables d'état ou des paramètres du processus peuvent être estimés et leur évolution temporelle peut être analysée. A l'aide de cette connaissance améliorée, la surveillance des processus (incluant le diagnostic des défauts) devient réalisable.

Dans ce contexte, le traitement adéquat des signaux fournit des caractères sous la forme de mesures directes ou d'estimation d'états ou de paramètres. Par comparaison à des valeurs de référence (valeurs normales), les changements sont détectés et traduits en termes de symptômes ou d'événements (le mot symptôme est utilisé par analogie au domaine médical). Une procédure numérique ou le recours à une base de connaissances permet ensuite de localiser et de déterminer éventuellement la cause du défaut.

L'étape suivante concerne l'évaluation de ce défaut pour savoir comment il affecte le processus. Les défauts sont alors répartis en classes selon leur incidence sur le processus. Cette classification peut être réalisée, par exemple, à l'aide d'un arbre des causes. A partir de cette analyse, les actions appropriées peuvent alors être entreprises. Si le défaut est "tolérable", le système peut continuer à fonctionner. Le défaut peut également être conditionnellement tolérable, dans ce cas une modification de la loi de commande, la reconfiguration d'une partie du système ou une maintenance doivent être effectuées. Si le défaut est inacceptable, on procède à un arrêt immédiat et à une opération de réparation.

Une très grande diversité d'approches et de méthodes a été développée afin de surveiller le comportement des processus technologiques ou des processus naturels. Le lecteur intéressé pourra consulter les références récentes [Gertler, 1998], [Chen, 1999], [Patton, 2000], [Maquin, 2000], [Chiang, 2001], [Blanke, 2003] et [Iserman, 2006]. Il n'est donc pas question de dresser ici un panorama complet de ces méthodes. L'enjeu est plutôt d'inciter le lecteur à consulter, en fonction de ses connaissances et des objectifs qu'il souhaite atteindre, des ouvrages plus spécialisés décrivant de manière détaillée les méthodes qui peuvent être mises en œuvre selon l'information dont on dispose. Afin d'illustrer cette diversité,

les sections suivantes de ce chapitre se focalisent chacune sur une approche particulière. La première concerne les méthodes de validation de mesures qui permettent de fournir des jeux de mesures cohérents. La détection de défauts intervenant sur des systèmes pouvant être représentés par des modèles dynamiques linéaires fait l'objet de la section suivante. Cette approche qui s'appuie sur la disponibilité d'un modèle de comportement du système à surveiller utilise essentiellement la notion d'observateur permettant d'effectuer une estimation d'état du modèle du système. Enfin, la dernière section illustre les approches de type "analyse de données". Celles-ci ne supposent pas la connaissance a priori de modèle de comportement du système et n'utilisent que les enregistrements des signaux prélevés sur le système à surveiller.

2 Validation de données

2.1 Introduction

Pour fonctionner correctement, les systèmes de contrôle-commande et de surveillance des systèmes ont besoin de recevoir, en permanence, des informations représentatives de l'état de ces systèmes. L'élaboration de commandes complexes est en effet inefficace, si les informations prises en compte par les algorithmes qui les génèrent sont erronées et/ou incohérentes. La performance et la fiabilité de l'ensemble des moyens de commande et de contrôle sont liées à la qualité des systèmes de mesures. Toute défaillance de l'instrumentation conduit à la génération d'informations erronées. Les algorithmes élaborent alors des ordres et des comptes rendus qui ne correspondent pas à l'état réel du système, d'où une diminution des performances et de la fiabilité et parfois même, une mise en cause de la sécurité. La validation de données ou de mesures qui permet de s'assurer de la cohérence des informations acquises constitue donc une étape essentielle qui doit précéder toute tentative de conduite rationnelle [Ragot, 1990], [Narasimhan, 2000], [Romagnoli, 2000], [Bagajewicz, 2001].

La validation de données peut être définie comme l'opération consistant à engendrer une information qui sera considérée comme fiable et crédible par les utilisateurs (opérateurs, systèmes de sécurité et de contrôle-commande, ...). Cette estimation d'une grandeur physique est réalisée à partir de différents signaux issus, soit de capteurs mesurant directement cette grandeur, soit de modèles synthétisant une valeur représentative de celle-ci.

Nous nous intéresserons essentiellement à la validation de mesures par équilibrage de bilan. Cette technique est fréquemment utilisée par les exploitants de systèmes très divers. Les secteurs industriels au sein desquels ces méthodes ont été le plus développées sont essentiellement la chimie, la pétrochimie et la minéralurgie. Cependant les méthodes mises au point sont tout à fait générales et peuvent s'appliquer à de nombreuses autres applications en particulier toutes celles relevant des réseaux de transport (systèmes d'aéragage de mines, réseaux de distribution d'électricité ou d'eau potable, réseaux de collecte d'eaux usées, etc.).

Le problème de la réconciliation¹ de mesures que l'on se propose de résoudre peut être formulé de la manière suivante. Ayant effectué, sur une installation, un ensemble de mesures redondantes mais non cohérentes, compte tenu de l'imprécision inévitable avec laquelle elles ont été faites, comment substituer aux valeurs mesurées de nouvelles valeurs vérifiant les équations de bilan (donc cohérentes) et nécessairement proches des valeurs mesurées puisque, même si ces valeurs sont imparfaites, elles constituent une approximation de la réalité ?

Pour cela on traduit mathématiquement les deux conditions énoncées ci-dessus et l'on impose aux "estimateurs" des grandeurs vraies que l'on recherche de les respecter. On introduit donc une fonction d'écart entre les mesures et les estimations qui rend compte de la proximité des valeurs mesurées et des estimations calculées et on minimise cette fonction sous la contrainte de la satisfaction des équations de bilan. Ainsi formulé, le problème se ramène à une minimisation de fonction sous contraintes égalité. On le résout habituellement par la méthode dite "des multiplicateurs de Lagrange"².

2.2 Mise en évidence de l'incohérence des mesures

Afin de montrer la nécessité d'un traitement préalable des mesures prélevées sur un système, examinons deux exemples introductifs. Le premier est relatif à des mesures de relevés topographiques ; le second à des mesures d'un atelier d'enrichissement de minerais.

2.2.1 Mesures de relevés topographiques

On mesure, sur un terrain, les différences de hauteur entre cinq points (les flèches sur le dessin de la figure 1 sont dirigées vers les hauteurs décroissantes).

Les résultats des mesures sont les suivants :

$$y = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_7)^T = (20,2 \quad 40,0 \quad 34,3 \quad 35,8 \quad 60,4 \quad 5,9 \quad 70,0)^T \quad (1)$$

On vérifie sans peine que ces mesures sont entachées d'erreurs. En effet, les dénivelés ne sont pas indépendants. Si l'on note y_i^* les dénivelés "vrais" inconnus, on a :

$$\begin{cases} y_5^* - y_1^* - y_2^* = 0 \\ y_6^* - y_2^* + y_3^* = 0 \\ y_7^* - y_3^* - y_4^* = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1. Ce vocable "réconciliation" n'existe pas en français ; il provient d'une utilisation abusive du terme anglo-saxon *réconciliation*

2. Lagrange Joseph Louis, comte de Lagrange (25 janvier 1736, Turin – 10 avril 1813, Paris) est un mathématicien et astronome italien. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est un artifice permettant de trouver des points stationnaires (maximum, minimum...) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables. Cette technique est utile, entre autres, pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contrainte.

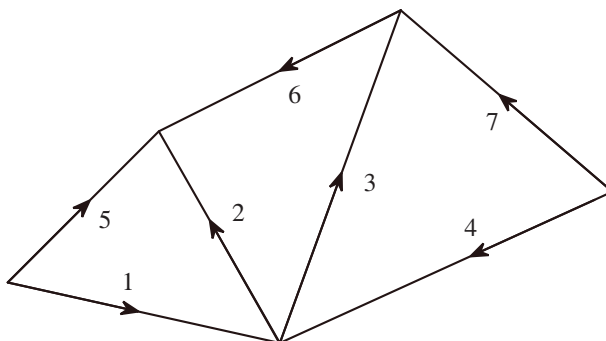


FIGURE 1 – Topographie du terrain

En substituant les mesures aux grandeurs “vraies”, on obtient :

$$\begin{cases} y_5 - y_1 - y_2 = 60, 4 - 20, 2 - 40 = 0, 2 \\ y_6 - y_2 + y_3 = 5, 9 - 40 - 34, 3 = 0, 2 \\ y_7 - y_3 - y_4 = 70 - 34, 3 - 35, 8 = -0, 1 \end{cases} \quad (3)$$

En fait, chaque mesure s’exprime en fonction de la grandeur vraie correspondante :

$$y_i = y_i^* + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (4)$$

Les termes ε_i sont des erreurs de mesure (erreur de visée, de lecture, imprécision de l’appareil, etc...). On peut alors se poser le problème suivant : comment estimer “au mieux” les grandeurs vraies y_i^* sur la base de la connaissance des mesures y_i ?

On peut tout d’abord remarquer que les grandeurs y_i ne sont pas indépendantes. En effet, tous les dénivelés peuvent s’exprimer en fonction des quatre premiers ; on a :

$$\begin{cases} y_1 = y_1^* + \varepsilon_1 \\ y_2 = y_2^* + \varepsilon_2 \\ y_3 = y_3^* + \varepsilon_3 \\ y_4 = y_4^* + \varepsilon_4 \\ y_5 = y_1^* + y_2^* + \varepsilon_5 \\ y_6 = y_2^* - y_3^* + \varepsilon_6 \\ y_7 = y_3^* + y_4^* + \varepsilon_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sous une forme plus compacte, on peut écrire :

$$Y = HX^* + \varepsilon \quad (6)$$

Les grandeurs inconnues X^* sont déterministes et la distribution de probabilité des erreurs de mesure est inconnue. On peut donc estimer X^* à l’aide de

la méthode des moindres carrés. La solution est donnée par³ :

$$\hat{X} = \arg \min_{X^*} \phi = \frac{1}{2} \|Y - HX^*\|^2 = (H^T H)^{-1} H^T Y \quad (7)$$

De plus, on a :

$$\hat{Y} = H\hat{X} = H(H^T H)^{-1} H^T Y \quad (8)$$

Numériquement, on obtient :

$$\hat{Y} = (20,224 \quad 40,152 \quad 34,381 \quad 35,709 \quad 60,376 \quad 5,771 \quad 70,090)^T \quad (9)$$

En l'absence d'informations complémentaires, on peut affirmer que le vecteur des mesures corrigées \hat{Y} est plus "vraisemblable" que celui des mesures brutes Y car il vérifie parfaitement le modèle reliant entre elles les différentes variables. On notera ici que ce modèle est parfaitement exact et n'est sujet à aucune incertitude. Cela n'est bien sûr pas toujours le cas.

2.2.2 Mesures sur un atelier d'enrichissement de minerais

Considérons le réseau élémentaire de la figure 2 qui représente un circuit d'enrichissement de minerais par flottation comportant deux cellules de flottation (nœuds II et III).

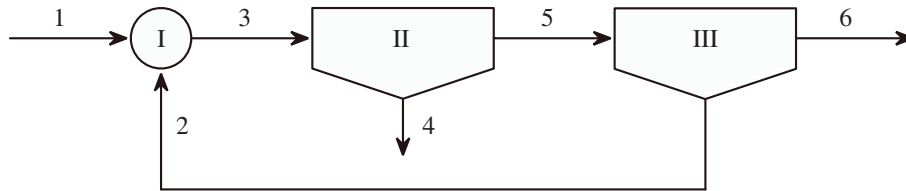


FIGURE 2 – Banc de cellules de flottation

Le saviez-vous ?

La flottation consiste en une séparation des particules sur la base de leurs propriétés physico-chimiques de surface. La séparation s'appuie sur un caractère hydrophobe le plus souvent artificiellement conféré à une famille de particules par l'adsorption en surface de molécules hydrophobes. Suite à la création de bulles de gaz dans la pulpe en suspension, par exemple par injection d'air, les particules (rendues) hydrophobes sont collectées par la phase gazeuse. En conséquence, et si la dimension de la bulle le permet, les particules collectées lévitent au sein de la pulpe pour être concentrées dans une mousse surnageante en surface. La mousse peut ensuite être récoltée, soit par raclage, soit simplement par débordement.

Habituellement, sur un banc de cellules de flottation, on mesure les concentrations en matériaux utiles sur l'ensemble des voies de circulation de la matière.

3. Voir annexe 1

Ici, la pulpe contient trois constituants, le cuivre (Cu), le plomb (Pb) et le zinc (Zn). On note Q_j les débits massiques et C_{ij} les concentrations en les différentes espèces minérales avec $i = 1, \dots, 3$ et $j = 1, \dots, 6$, l'indice $i = 1$ étant affecté au cuivre, 2 au plomb et 3 au zinc. On peut alors exprimer les équations de conservation de la masse totale et de la masse par constituants :

$$\text{nœud I} \begin{cases} Q_1 + Q_2 - Q_3 & = 0 \\ Q_1 C_{i1} + Q_2 C_{i2} - Q_3 C_{i3} & = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (10a)$$

$$\text{nœud II} \begin{cases} Q_3 - Q_4 - Q_5 & = 0 \\ Q_3 C_{i3} - Q_4 C_{i4} - Q_5 C_{i5} & = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (10b)$$

$$\text{nœud II} \begin{cases} Q_5 - Q_2 - Q_6 & = 0 \\ Q_5 C_{i5} - Q_2 C_{i2} - Q_6 C_{i6} & = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (10c)$$

La consistance des mesures peut être éprouvée en calculant pour chacun des nœuds, un rendement poids r . Si l'on considère, par exemple, la première cellule de flottation (nœud II), on écrira :

$$r = \frac{Q_5}{Q_3} \quad (11)$$

d'où :

$$1 - r = \frac{Q_3 - Q_5}{Q_3} = \frac{Q_4}{Q_3} \quad (12)$$

En reportant ces expressions dans la seconde équation de (10b), on obtient :

$$C_{i3} - (1 - r)C_{i4} - rC_{i5} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

d'où

$$r = \frac{C_{i3} - C_{i4}}{C_{i5} - C_{i4}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

Le tableau 1 rassemble les mesures et les rendements poids calculés pour chacun des nœuds et chaque constituant.

On constate que les valeurs des rendements relatifs à chaque nœud sont très différentes suivant le constituant choisi pour leur détermination. Certaines valeurs sont même complètement aberrantes (rendement nul ou supérieur à un). Il n'est donc pas envisageable de calculer un quelconque indice de récupération rendant compte des performances du banc de cellules à l'aide des mesures brutes. Celles-ci devront donc être filtrées avant toute utilisation.

Ces deux exemples élémentaires montrent qu'il est important d'analyser la cohérence des mesures effectuées sur un système avant de les utiliser pour prendre des décisions.

2.3 Méthode d'équilibrage de bilan

2.3.1 Introduction

Le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence le problème de l'incohérence des mesures dans le cas de systèmes représentés par des modèles

Nœud I	Cu	voie 1	2,080	3,610	3	r	0,957
	Pb		1,100	2,900	1,300		0,875
	Zn		2,800	3,800	2,900		0,910
II	Cu	voie 3	2,010	15,170	0,270	r	0,880
	Pb		1,300	2,900	1,050		0,660
	Zn		2,900	2,900	3,000		0,000
II	Cu	voie 5	0,270	3,610	0,110	r	0,950
	Pb		1,050	2,900	1,000		0,970
	Zn		3,000	3,800	3,300		1,600

TABLE 1 – Mesures et rendements

structurellement exacts. Avec cette hypothèse, l'incohérence constatée provient uniquement des mesures qui sont entachées d'erreurs.

L'estimation des vraies grandeurs ou validation des données doit être effectuée en tenant compte de la distribution et de la nature des erreurs de mesure. Rappelons que ces dernières sont réparties en trois catégories.

- les erreurs aléatoires et les erreurs de “faible” amplitude, affectant toutes les variables et qui sont généralement supposées indépendantes, gaussiennes, de valeur moyenne nulle,
- les erreurs systématiques, de “grande” amplitude, dues à des événements non aléatoires tels que le biais d'instruments, le mauvais fonctionnement d'un capteur, les modèles incomplets ou imprécis,
- les erreurs accidentelles dues à la défaillance momentanée d'un opérateur ou d'un appareil et détectables par des ruptures dans un signal.

Selon la nature des erreurs, un traitement approprié doit être envisagé. Les mesures affectées d'erreurs aléatoires peuvent être soumises à un filtrage prenant en compte les interactions dues aux modèles : c'est la technique d'équilibrage ou de réconciliation. Lorsque certaines mesures sont entachées de biais systématiques, on doit procéder à la localisation de ces biais, puis à l'estimation de leur amplitude. Enfin, le cas d'erreurs accidentelles peut être pris en compte si l'on dispose de séries chronologiques de mesures sur lesquelles des tests statistiques sont effectués.

Dans ce paragraphe, seules les erreurs du premier type seront considérées. On se limite au cas de grandeurs mesurées une seule fois et les traitements proposés ne constituent pas un filtrage des données au sens habituel du terme, mais une réconciliation par rapport à des modèles.

2.3.2 Position du problème

Dans ce qui suit, on note X , le vecteur des mesures (de dimension v), ε , le vecteur des erreurs de mesure (de dimension v), X^* , le vecteur des grandeurs

vraies (de dimension v), tel que $X = X^* + \varepsilon$ et $F(X^*)$, le vecteur des contraintes (de dimension n) vérifiées par les grandeurs vraies.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il est important de prendre en compte, dans l'estimation des grandeurs vraies, la précision des mesures. L'hypothèse la plus fréquente est de considérer que les erreurs de mesures suivent une distribution normale centrée⁴.

Pour une variable aléatoire continue scalaire x , la densité de probabilité d'une telle loi s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (15)$$

où μ et σ représentent respectivement l'espérance et l'écart-type de la distribution.

Si chaque erreur de mesure est supposée être une variable aléatoire normale centrée, le vecteur ε a comme premiers moments :

$$\text{Esp}(\varepsilon) = 0 \quad (16a)$$

$$\text{Var}(\varepsilon) = V \quad (16b)$$

Fréquemment, les erreurs de mesure sont supposées indépendantes les unes des autres. Dans ce cas, la matrice de variance-covariance V est une matrice diagonale qui contient sur sa diagonale les variances de chaque mesure. Pour la variable aléatoire vectorielle ε et par extension de l'équation (15) la fonction densité de probabilité s'écrit :

$$f(\varepsilon) = (2\pi)^{-v/2}(\text{Dét}(V))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^T V^{-1}\varepsilon\right) \quad (17)$$

En l'absence de biais systématiques, les mesures sont aussi des réalisations de variables aléatoires d'espérance mathématique $\text{Esp}(X) = X^*$ et de matrice de variance V . Leur fonction densité de probabilité s'écrit :

$$f(X) = (2\pi)^{-v/2}(\text{Dét}(V))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - X^*)^T V^{-1}(X - X^*)\right) \quad (18)$$

L'hypothèse de distribution normale des erreurs de mesures est la plus fréquemment posée. Cependant, son utilisation pratique entraîne parfois quelques difficultés. En effet, en milieu industriel, la qualité des mesures est souvent décrite à l'aide d'erreurs relatives : débit égal à $0.5 \text{ m}^3/\text{s} \pm 8 \%$. Cette erreur relative porte en général sur la valeur de pleine échelle. La conversion de cette mesure de précision sous la forme d'une variance est arbitraire. En désignant

4. Historiquement, la loi de Laplace-Gauss (ensuite appelée "loi normale" par Pearson en 1893) a précisément été élaborée à partir de l'observation statistique d'erreurs de mesure. Elle décrit certains phénomènes continus qui fluctuent autour d'une valeur moyenne, de manière aléatoire. Ces fluctuations résultent d'un grand nombre de causes algébriquement additives et indépendantes. C'est une illustration d'un des théorèmes importants du calcul des probabilités, le théorème central limite.

par E , la valeur de pleine échelle du capteur considéré, p la précision relative de la mesure exprimée en % et x la mesure, on peut cependant proposer d'évaluer l'écart-type de cette dernière en utilisant la formule suivante :

$$\text{Ect}(x) = \frac{E \times p}{200} \quad (19)$$

On établit ainsi une correspondance entre l'intervalle défini par la valeur de la mesure plus ou moins deux fois son écart-type (censé contenir 95% des réalisations d'une variable aléatoire distribuée selon une loi normale) et l'intervalle défini par la valeur de la mesure plus ou moins son erreur de mesure relative.

Au sens du maximum de vraisemblance, le meilleur estimateur \hat{X} des grandeurs vraies X^* est celui qui maximise la densité de probabilité des valeurs observées X , en respectant les contraintes. Lorsque la matrice de variance V est connue, la maximisation de $f(X)$ par rapport à X^* , sous la contrainte $F(X^*) = 0$, conduit à l'estimation \hat{X} .

Cette recherche est équivalente à celle du minimum, par rapport à X^* , du critère :

$$\phi = \frac{1}{2}(X - X^*)^T V^{-1}(X - X^*) \quad (20a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(X^*) = 0 \quad (20b)$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation quadratique, on définit le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(X - X^*)^T V^{-1}(X - X^*) + \lambda^T F(X^*) \quad (21)$$

Les conditions de stationnarité de ce lagrangien définissent alors la solution recherchée.

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^*} \right|_{X^*=\hat{X}} = V^{-1}(\hat{X} - X) + \left. \frac{\partial F^T(X^*)}{\partial X^*} \right|_{X^*=\hat{X}} \lambda = 0 \quad (22a)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \right|_{X^*=\hat{X}} = F(\hat{X}) = 0 \quad (22b)$$

La complexité de résolution du système (22) est liée à la nature des contraintes F . Si les contraintes sont linéaires par rapport aux variables inconnues X^* , la solution de ce problème est analytique. Dans tous les autres cas, il convient de résoudre un système non linéaire. La solution ne peut alors être obtenue qu'à l'aide d'algorithmes itératifs qui, à chaque itération, améliorent la solution obtenue à l'itération précédente.

2.3.3 Résolution dans le cas de contraintes linéaires

Le cas de contraintes linéaires peut sembler très restrictif. Néanmoins, sur le plan des applications pratiques, cette classe de systèmes se rencontre fréquemment.

Dans le cadre des bilans matière, cela correspond physiquement à des systèmes décrits par des équations de bilan en flux totaux. De plus, la résolution du système d'équations obtenu lorsqu'on est en présence de contraintes non linéaires s'appuie le plus souvent sur des linéarisations successives de celui-ci. La formulation précise de la solution dans le cas de contraintes linéaires est donc essentielle.

Le système considéré est donc décrit par les deux équations suivantes :

$$MX^* = 0 \quad (23a)$$

$$X = X^* + \varepsilon \quad (23b)$$

La matrice M qui décrit les contraintes est de dimension $n \times v$. Dans la suite de l'exposé, et sans atteinte à la généralité, cette matrice sera supposée être de rang égal à n ; cela signifie que les n équations de contraintes sont indépendantes, ce qui est toujours le cas pour un problème correctement décrit.

Dans ce cas, le problème d'estimation revient à chercher le minimum par rapport à X^* du critère :

$$\phi = \frac{1}{2} \|(X - X^*)\|_{V^{-1}}^2 \quad (24a)$$

$$\text{sous les contraintes } MX^* = 0 \quad (24b)$$

Le système (22) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$V^{-1}(\hat{X} - X) + M^T \lambda = 0 \quad (25a)$$

$$M\hat{X} = 0 \quad (25b)$$

Ce système d'équations algébriques linéaire comporte autant d'équations que d'inconnues. Il peut être réordonné de façon à faire apparaître le vecteur des inconnues \hat{X} et λ . Cependant, la structure très particulière de l'équation (25b) suggère une résolution par combinaisons linéaires. En effet, à partir de l'équation (25a) on obtient :

$$\hat{X} = X - VM^T \lambda \quad (26)$$

qui, remplacé dans (25b), donne :

$$\lambda = (MVM^T)^{-1}MX \quad (27)$$

L'expression de \hat{X} devient alors :

$$\hat{X} = PX \quad (28)$$

où la matrice de projection P est définie par :

$$P = I - VM^T(MVM^T)^{-1}M \quad (29)$$

On peut remarquer que l'estimateur (28) est non biaisé. En effet :

$$\text{Esp}(\hat{X}) = P\text{Esp}(X) = PX^* = X^* \quad (30)$$

car, par hypothèse, les erreurs de mesure ont d'espérance mathématique nulle et les grandeurs vraies X^* vérifient les contraintes : $MX^* = 0$.

La caractérisation d'un estimateur passe par l'évaluation de ses propriétés statistiques. Intéressons-nous au calcul de sa variance. Nous avons établi un estimateur linéaire par rapport aux observations sous la forme $\hat{X} = PX$ où P est une matrice constante. La variance de \hat{X} s'écrit donc directement :

$$\text{Var}(\hat{X}) = P\text{Var}(X)P^T = PV P^T \quad (31)$$

On vérifie aisément, en utilisant l'expression (29) de la matrice de projection, que l'expression (31) se simplifie sous la forme :

$$\text{Var}(\hat{X}) = PV \quad (32)$$

Pratiquement, pour des systèmes de faible dimension le calcul de l'estimation \hat{X} , à partir de (28) et (29), ne pose pas de difficulté particulière. Pour des systèmes de grande dimension (par exemple au-delà d'une centaine de contraintes) des problèmes numériques liés essentiellement au calcul de l'inverse de matrice peuvent apparaître. Dans ce cas, il convient d'employer des techniques de décomposition-coordination qui s'appuient sur une décomposition hiérarchique du système considéré et la prise en compte des couplages entre les différents sous-systèmes obtenus.

2.3.4 Exemple de bilan matière

Une application directe des techniques précédemment décrites concerne la résolution du problème classique d'équilibrage de bilan matière où l'on prend en compte des équations de conservation de masse ou de volume. On représente alors le processus par un graphe orienté dans lequel :

- les arcs (voies) correspondent aux flux de matière dont les directions sont déterminées par la structure du système,
- les nœuds représentent les unités de traitement, de transformation ou les points de jonction de plusieurs arcs, chaque nœud est décrit par une équation.

A ce système, on associe une matrice d'incidence M définie par :

$$M = (m_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, v \quad (33)$$

où n est le nombre de nœuds (nombre d'équations de contraintes) et v le nombre d'arcs (nombre de variables), et telle que :

- $m_{ij} = 0$, si l'arc j n'est pas relié au nœud i ,
- $m_{ij} = 1$, si l'arc j "entre" dans le nœud i ,
- $m_{ij} = -1$, si l'arc j "sort" du nœud i .

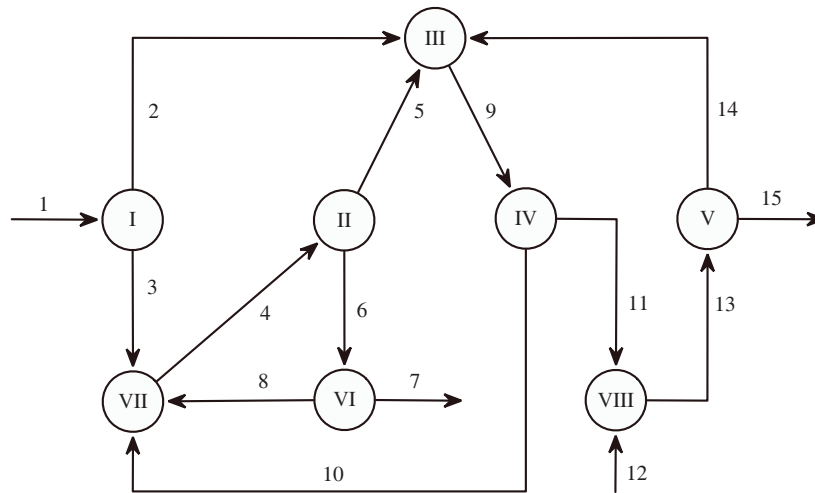


FIGURE 3 – Graphe orienté du système

Considérons, à titre d'exemple, le réseau de la figure 3 formé de huit nœuds et quinze arcs.

Pour chaque voie de circulation de la matière (arc du graphe), une mesure de débit massique est disponible. La précision des mesures de débit est exprimée sous forme d'écart-type. Les mesures des débits ainsi que celles de leurs écarts-type sont regroupées dans le tableau 2.

Arc	Mesure	Ecart-type	Arc	Mesure	Ecart-type
1	59,35	0,75	9	129,10	1,60
2	25,87	0,33	10	36,12	0,36
3	33,16	0,66	11	91,31	1,84
4	84,36	0,63	12	36,30	0,70
5	59,25	0,75	13	125,13	1,58
6	23,82	0,34	14	41,74	0,40
7	8,14	0,06	15	86,52	1,72
8	14,98	0,22			

TABLE 2 – Mesures et écarts-type

L'incohérence des mesures est mise en évidence dans le tableau 3 à l'aide des écarts de bouclage de bilan. Ces écarts sont obtenus à partir des équations de bilan, dans lesquelles les vraies grandeurs sont remplacées par les mesures.

Nœud	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Ecart	0,32	1,29	-2,24	1,67	-3,13	0,70	-0,10	2,48

TABLE 3 – Ecart de bouclage de bilan

La méthode présentée à la section précédente a été appliquée à cet exemple. Les estimés obtenus et leurs écarts-type sont donnés au tableau 4.

Arc	Mesure	Ecart-type	Arc	Mesure	Ecart-type
1	58,66	0,41	9	128,08	0,53
2	25,91	0,30	10	36,00	0,32
3	32,74	0,38	11	92,08	0,52
4	83,96	0,39	12	35,80	0,61
5	60,58	0,38	13	127,88	0,73
6	23,38	0,18	14	41,60	0,37
7	8,17	0,06	15	86,29	0,68
8	15,21	0,18			

TABLE 4 – Estimés et écarts-type

Si l'on dispose d'un logiciel⁵ permettant d'effectuer des calculs matriciels, la mise en œuvre de telles méthodes est immédiate. On trouvera en annexe 3, le programme MATLAB[©] résolvant le problème précédent.

2.3.5 Résolution dans le cas de contraintes non linéaires

Le problème d'estimation a été posé, en termes de problème d'optimisation quadratique sous contraintes non linéaires, à la section 2.3.2. Sa résolution passe par celle d'un système d'équations non linéaires comportant $n + v$ (nombre de variables à estimer + nombre de contraintes qui les lient) inconnues. Dans le cas général, la solution d'un tel système n'est pas analytique et ne peut être obtenue qu'en utilisant un algorithme⁶. Selon la valeur initiale fournie à l'algorithme et la nature des non-linéarités, mais également la dimension de l'espace de recherche, la solution est plus ou moins facile à obtenir.

L'analyse du problème posé permet de diminuer la dimension de cet espace de recherche. En effet, plutôt que de linéariser le système d'équations issu des conditions de stationnarité du lagrangien (22), on peut ne linéariser que les équations de contrainte (20b). On transforme alors la résolution du problème d'optimisation quadratique sous contraintes non linéaires en une succession de résolutions de problèmes d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires. A chaque itération i , on suppose que l'on dispose d'une solution \hat{X}_i , et partant de cette solution, on cherche à l'améliorer sur la base de l'utilisation d'un développement limité au premier ordre de la contrainte au voisinage de cette solution temporaire \hat{X}_i . Les solutions successives forment alors une suite qui converge vers la solution du problème.

5. Parmi ceux-ci, on peut citer, de façon non exhaustive, le logiciel commercial MATLAB[©] (Mathworks Inc., <http://www.mathworks.com>) et les logiciels libres Scilab (Inria-ENPC, <http://www.scilab.org>) ou Octave (Université du Wisconsin, <http://www.octave.org>).

6. On appelle *algorithme* tout procédé de calcul itératif qui engendre une suite de nombres, de vecteurs ou de matrices. L'algorithme converge si la suite de valeurs qu'il engendre tend vers une limite désirée dans l'espace considéré en l'occurrence, vers la solution du problème à résoudre.

A l'itération $i + 1$ de l'algorithme, pour une solution \hat{X}_{i+1} , proche de \hat{X}_i , le développement limité au premier ordre de la contrainte autour de la valeur \hat{X}_i s'écrit :

$$F(\hat{X}_{i+1}) = F(\hat{X}_i) + G(\hat{X}_i)(\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i) = 0 \quad (34)$$

avec l'expression suivante du gradient de la contrainte :

$$G(\hat{X}_i) = \left. \frac{dF(X)}{dX^T} \right|_{X=\hat{X}_i} \quad (35)$$

A l'itération $i + 1$, le problème d'estimation se ramène à la recherche du minimum, par rapport à X^* du critère :

$$\phi_{i+1} = \frac{1}{2} \|X - X^*\|_{V^{-1}}^2 \quad (36a)$$

$$\text{sous les contraintes } F(\hat{X}_i) + G(\hat{X}_i)(X^* - \hat{X}_i) = 0 \quad (36b)$$

En s'inspirant de ce qui a été établi à la section 2.3.3, on peut facilement montrer que la solution \hat{X}_{i+1} de ce problème s'explique :

$$\hat{X}_{i+1} = (I - VG_i^T(G_iVG_i^T)^{-1}G_i)X + VG_i^T(G_iVG_i^T)^{-1}(G_i\hat{X}_i - F_i) \quad (37)$$

Les notations G_i et F_i ont été utilisées à la place de $G(\hat{X}_i)$ et $F(\hat{X}_i)$ afin de simplifier les écritures.

Pratiquement, l'estimé \hat{X} s'obtient selon la procédure itérative suivante :

Etape 1 : choix d'un estimé initial \hat{X}_0 (on peut bien sûr choisir $\hat{X}_0 = X$),
 $i = 1$;

Etape 2 : calcul du résidu de contrainte F_i et du gradient G_i ;
calcul de l'estimé \hat{X}_{i+1} (37) ;

Etape 4 : test de convergence de l'estimation. Si le test n'est pas satisfait,
 $i = i + 1$

et retour à l'étape 2, sinon $\hat{X} = \hat{X}_{i+1}$ et arrêt de la procédure.

D'un point de vue mathématique, le test d'arrêt doit porter sur la nullité, à un seuil choisi, des dérivées du lagrangien. En pratique, l'arrêt de la procédure s'effectue souvent en testant que la norme de la différence entre deux estimés successifs est inférieure à un seuil donné.

Remarquons que l'algorithme proposé n'apporte aucune indication sur la progression de la suite des estimés vers la solution optimale. Cependant, comme cette solution doit vérifier la contrainte $F(\hat{X}) = 0$, un test pratique consiste à vérifier la décroissance de la quantité :

$$t_i = \frac{1}{2} \|F(\hat{X}_i)\|^2 \quad (38)$$

Pour une variation $\Delta \hat{X}_i = \hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i$ de deux estimés consécutifs, la quantité t_i varie sensiblement de :

$$\Delta t_i = \frac{1}{2} \frac{d \left(F^T(\hat{X}) F(\hat{X}) \right)}{d \hat{X}^T} \Bigg|_{\hat{X}=\hat{X}_i} \Delta \hat{X}_i \quad (39a)$$

$$\Delta t_i = F^T(\hat{X}_i) \frac{dF(\hat{X})}{d \hat{X}^T} \Bigg|_{\hat{X}=\hat{X}_i} \Delta \hat{X}_i \quad (39b)$$

Compte tenu de l'équation (34), on a :

$$\Delta t_i = -F^T(\hat{X}_i) F(\hat{X}_i) \quad (40)$$

Cette quantité étant toujours négative, les t_i décroissent à condition que les variations $\Delta \hat{X}_i$ soient suffisamment "petites" de façon à valider le développement limité (34). Dans ce cas, on peut affirmer que chaque itération améliore l'estimation ; ceci ne prouve pas pour autant la convergence de l'algorithme vers la solution optimale.

2.3.6 Exercice : exemple didactique non linéaire

On considère le système de cinq équations non linéaires suivant :

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 x_2^* + x_5^* - a &= 0 \\ f_2 &= \exp(-x_1^*) - \exp(-x_2^*) - 0.5 &= 0 \\ f_3 &= x_1^* (x_3^*)^2 - x_6^* &= 0 \\ f_4 &= (x_4^*)^3 - x_1^* x_3^* &= 0 \\ f_5 &= x_5^* (x_3^*)^2 + x_1^* / x_4^* - x_6^* &= 0 \end{aligned}$$

Le paramètre a est égal à 5.5254. L'ensemble de ces contraintes sera noté $F(X^*) = 0$ où x_i^* (respectivement f_i) sont les composantes de X^* (resp. $F(X^*)$). Les mesures x_i , $i = 1, \dots, 6$, des variables x_i^* sont directes, c'est-à-dire que l'on a $x_i = x_i^* + \varepsilon_i$.

Les erreurs de mesure ε_i sont exprimées en valeurs relatives sous la forme d'un pourcentage p_i de la grandeur mesurée. On assimile alors ces erreurs à des variables aléatoires normales centrées d'écart-types respectifs e_i définis par :

$$e_i = \frac{p_i}{200} x_i$$

La valeur et les précisions relatives p_i des mesures sont consignées dans le tableau 5.

Le but de l'exercice est de "réconcilier" ces données par rapport au modèle fourni. En remplaçant les valeurs vraies x_i^* par leurs mesures x_i dans les équations du système, on calculera tout d'abord les résidus d'équations r_i afin de vérifier l'incohérence des mesures. On procédera ensuite à l'estimation de l'ensemble des variables en utilisant la méthode exposée à la section précédente.

Des éléments de correction de cet exercice ainsi qu'un programme MATLAB[®] réalisant l'estimation des grandeurs vraies sont fournis à l'annexe 4.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,760	5,805	5,33	1,60	0,73	22,55
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
5	8	2	2	5	6

TABLE 5 – Valeurs et précisions relatives des mesures

2.4 Réconciliation robuste de données et détection de valeurs aberrantes

2.4.1 Objectif

La réconciliation de données a pour but de rendre compatibles avec son modèle les mesures effectuées sur un système. A ce titre, les méthodes de réconciliation présentent des similitudes avec celles traitant de l'estimation d'état. En effet, dans ce domaine, la démarche consiste, connaissant l'entrée et la sortie d'un système, d'estimer son état en imposant qu'il soit compatible avec le modèle de ce système. Une conséquence importante de la réconciliation est la détection et la localisation de mesures aberrantes⁷. En effet, les valeurs réconciliées peuvent être comparées aux mesures et les écarts constatés peuvent être analysés, les plus grands d'entre eux pouvant témoigner de la présence de mesures aberrantes.

Le saviez-vous ?

Lorsqu'on fait des mesures de débit cardiaque, en anesthésie-réanimation, les erreurs de mesure engendrées par les imprécisions de manipulation et les variations dues au temps de l'injection imposent de retenir la moyenne de trois à cinq mesures consécutives. Une valeur manifestement aberrante sera éliminée du calcul de la moyenne.

Cependant, le principe même de réconciliation doit être appliqué avec précaution et dans des conditions particulières. En effet, les estimées obtenues après réconciliation des données sont fonction des mesures. Si certaines d'entre elles sont aberrantes, les estimées en subissent l'influence ; il devient alors hasardeux de tirer des conclusions sur les écarts entre estimées et mesures pour en déduire la présence de valeurs aberrantes. Afin de rendre robustes⁸ les estimées vis-à-vis des valeurs aberrantes, il convient de rendre la méthode d'estimation insensible ou partiellement insensible à leur présence. Un des principes permettant d'at-

7. Une donnée aberrante correspondent à une observation (ou un sous-ensemble d'observations) qui apparaît comme étant incompatible avec le reste des données. Il faut noter, qu'une valeur ne peut pas être considérée comme aberrante dans l'absolu, mais par rapport à un espace ou un domaine connu.

8. Le terme "robuste" a été introduit en statistique par G.E.P. Box en 1953. Un estimateur est dit robuste s'il est insensible à des petits écarts sur les hypothèses pour lesquelles il a été optimisé. Il peut s'agir de petites variations sur toutes les données, ou des écarts importants sur un petit nombre de données. Souvent, la robustesse traduit l'insensibilité de l'estimation aux données aberrantes. On la définit aussi par le plus petit nombre de données extrêmes qui modifie la valeur de l'estimation ramené à la taille de l'échantillon.

teindre cet objectif est présenté.

2.4.2 Introduction à la robustesse : moindres carrés pondérés

Pour sensibiliser le lecteur à la notion de robustesse, considérons le problème classique de calcul de la moyenne d'une série de mesures x_i , $i = 1..N$. L'estimateur de la moyenne m des moindres carrés est celui qui minimise le critère :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \quad (41)$$

qui n'est autre que la somme des carrés des écarts des mesures par rapport à la valeur moyenne. Ce critère privilégie les écarts qui sont importants, et par conséquent, les valeurs aberrantes qui affectent les mesures x_i risquent d'avoir un rôle majeur dans l'estimation de la moyenne. Pour mettre ce point en évidence, on peut expliciter l'équation d'optimalité par rapport à la moyenne :

$$\frac{d\Phi_1}{dm} = - \sum_{i=1}^N (x_i - m) = 0 \quad (42)$$

On constate que tous les écarts $x_i - m$ ont le même poids (égal à 1). Afin de minimiser l'influence néfaste des grands écarts, on peut envisager l'utilisation d'un critère qui limite le poids des écarts importants, comme par exemple :

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (1 - e^{-(x_i - m)^2}) \quad (43)$$

L'équation d'optimalité par rapport à la moyenne s'explique alors :

$$\frac{d\Phi_2}{dm} = - \sum_{i=1}^N (x_i - m) e^{-(x_i - m)^2} = 0 \quad (44)$$

On constate cette fois que les écarts $x_i - m$ ont des poids différents définis par $e^{-(x_i - m)^2}$; plus précisément, les poids décroissent quand les écarts, en valeurs absolues, augmentent, ce qui est bien l'effet recherché pour obtenir une estimée de la moyenne peu sensible aux valeurs aberrantes.

La figure 4 visualise $f_1(x) = 0,5x^2$ et $f_2(x) = 0,5(1 - e^{-x^2})$ qui ont permis de construire les deux critères précédents Φ_1 et Φ_2 , ainsi que les quantités p_1 et p_2 qui sont les dérivées respectives de Φ_1 et Φ_2 par rapport à x ensuite réduites par rapport à x et qui représentent les poids dont sont affectés les écarts dans les critères considérés :

$$p_1(x) = \frac{1}{x} \frac{df_1(x)}{dx} = 1$$

$$p_2(x) = \frac{1}{x} \frac{df_2(x)}{dx} = e^{-x^2}$$

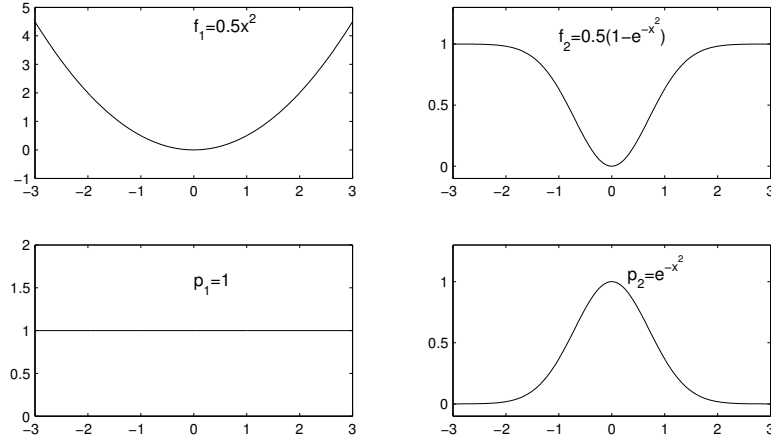


FIGURE 4 – Critères et leurs fonctions d’influence

Contrairement à $p_1(x)$, la zone d’influence de la dérivée $p_2(x)$ est limitée, ce qui justifie l’intérêt du critère Φ_2 pour le rejet des valeurs aberrantes. Quoique de portée limitée, cet exemple illustre bien l’influence du choix du critère pour obtenir une estimée de la grandeur recherchée qui soit peu sensible aux valeurs aberrantes. Dans le paragraphe suivant, cette idée est reprise dans le cadre général de la réconciliation de mesures vis-à-vis d’un modèle.

2.4.3 Principe de la réconciliation de données

On a exposé, au cours de la section 2.3, le principe de la réconciliation de données. L’idée maîtresse est la minimisation, sous contrainte, du critère quadratique formé à partir des écarts pondérés entre estimés et mesures, les pondérations étant proportionnelles aux variances des erreurs de mesure. La validité et le caractère optimal de cette approche sont éminemment liés à l’hypothèse forte de normalité des erreurs de mesure. Dans la pratique, cette hypothèse est difficilement vérifiable et peut être mise en défaut en présence de grosses erreurs qui constituent des valeurs aberrantes. Il est alors plus réaliste de prendre en compte simultanément ces deux types d’erreur en posant le problème de réconciliation de la façon suivante. A partir de mesures x_j des v variables du système, il faut estimer les grandeurs vraies x_j^* d’un système à modèle linéaire, sachant que :

$$x_j = x_j^* + \varepsilon_j + g_j, \quad j = 1..v \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^v a_{ij} x_j^* = 0, \quad i = 1..n \quad (46)$$

Les mesures sont affectées simultanément par des erreurs de faibles et de grandes amplitudes, notées respectivement ε_j et g_j , ces dernières n’étant pas

connues a priori. Pour prendre ces erreurs en compte, plusieurs approches ont été envisagées.

Partant de l'hypothèse assez réaliste que le nombre de grosses erreurs est faible devant le nombre de variables, la première technique procède en trois étapes : réconciliation des mesures par moindres carrés (donc avec l'hypothèse de normalité des erreurs), puis détection et localisation des grosses erreurs (à partir d'une analyse des termes correctifs), et enfin reconduction de la procédure de réconciliation en affectant une variance très grande aux mesures pour lesquelles des grosses erreurs ont été localisées de façon à réduire fortement leur influence. Le défaut majeur de cette approche réside dans la première réconciliation qui peut s'avérer fortement erronée en raison de la présence des grosses erreurs dont l'influence peut affecter l'ensemble des estimées obtenues ; ceci peut rendre ensuite difficile la localisation des grosses erreurs par analyse des termes correctifs et par conséquent la troisième étape peut également conduire à des résultats erronés.

La seconde approche cherche à prendre en compte directement la présence des grosses erreurs au moyen d'une loi de distribution plus appropriée ; cette approche a été illustrée au paragraphe précédent par l'estimation robuste d'une moyenne. De façon générale, la classe des *M-estimateurs* [Hampel, 1986] fournit des estimées robustes vis-à-vis des grosses erreurs en choisissant une fonction objectif partiellement insensible aux écarts importants d'estimation.

Une autre procédure consiste à considérer une loi de distribution combinant les deux types d'erreur. Pour cela, les mesures sont maintenant exprimées en fonction des erreurs e_j pouvant représenter de façon concomitante les deux types d'erreur, ε_i et g_i , introduits en (45) :

$$x_j = x_j^* + e_j \quad j = 1..v \quad (47)$$

Le critère d'estimation est pris sous la forme :

$$\Phi_g(e) = - \sum_{j=1}^v \log(f(e_j)) \quad (48)$$

où f est habituellement une distribution dite *contaminée*, c'est-à-dire prenant en compte, sous forme d'une loi additive, la présence des erreurs de faibles et de grandes amplitudes. Par exemple, le mélange de deux distributions normales prend la forme :

$$f(e_j) = \mu p_{1,j}(e_j) + (1 - \mu) p_{2,j}(e_j) \quad (49)$$

$$p_{1,j}(x_j^* - x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{1,j}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^* - x_j}{\sigma_{1,j}}\right)^2\right) \quad (50)$$

$$p_{2,j}(x_j^* - x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{2,j}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_j^* - x_j}{\sigma_{2,j}}\right)^2\right) \quad (51)$$

Si le paramètre de pondération μ des deux distributions est proche de l'unité, on peut dire que la distribution p_1 est contaminée par la distribution p_2 . Les

écart-types $\sigma_{2,j}$ seront choisis plus grands que $\sigma_{1,j}$ afin de marquer la disparité d'échelle entre les deux types d'erreur ; on note en particulier que $p_{2,j}$ décroît alors moins vite que $p_{1,j}$. Dans la pratique, on pourra choisir une dépendance linéaire entre les écart-types des deux distributions $\sigma_{2,j} = A \sigma_{1,j}$. Le coefficient μ , encore appelé paramètre de mélange, traduit la proportion de grosses erreurs dans les mesures. C'est un coefficient empiriquement fixé a priori ou, dans certains cas, qui peut être estimé à partir de l'analyse d'historiques. On peut remarquer que si $\mu = 1$ on retrouve :

$$\Phi_g(e) = \sum_{j=1}^v \left(-\log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{1,j}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_j^* - x_j}{\sigma_{1,j}} \right)^2 \right) \quad (52)$$

qui correspond, à une constante près, au critère utilisé pour une distribution normale des erreurs de mesure. Finalement, d'un point de vue pratique, la réconciliation des mesures consiste donc à maximiser la fonction de vraisemblance (48) vis-à-vis de X^* et compte tenu de la définition (49) et des contraintes (46) que ces grandeurs doivent vérifier.

Le saviez-vous ?

Le calcul de la moyenne d'une série de nombres peut être très sensible à la présence de valeurs aberrantes. Par exemple, considérons la série :

$x = (2,5 \ 2,2 \ 2,2 \ 1,8 \ 2,1 \ 1,9 \ 2,2 \ 1,9 \ 1,7 \ 1,9 \ 2,1 \ 2,2 \ 2,4 \ 5,2 \ 1,9 \ 4,9 \ 2,0 \ 4,6 \ 5,2 \ 2,3 \ 5,0 \ 5,3 \ 5,3 \ 2,1 \ 1,9 \ 2,4 \ 2,6 \ 5,1 \ 5,2 \ 5,0)$, constituée de valeurs prises autour de 2 et comportant quelques valeurs dite "aberrantes" autour de 5, comme cela est visualisé à la figure 5. On obtient

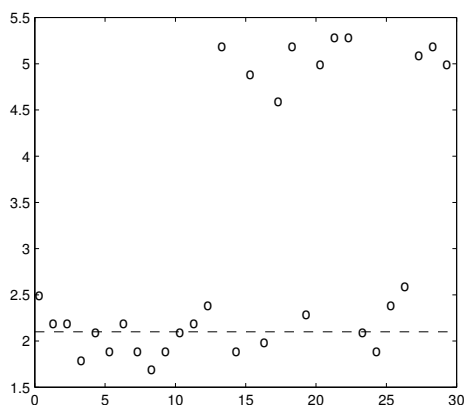


FIGURE 5 – Série avec valeurs aberrantes

comme valeur moyenne 3,10. Une estimation plus robuste, calculée à partir de la médiane⁹ est 2,25. Enfin si l'on utilise le critère d'estimation (48) avec

9. La médiane est la valeur qui partage une population en deux parties de même effectif lorsque l'on trie celle-ci par valeurs ordonnées de la variable considérée. Il y a donc autant de valeurs de la variable inférieures à la médiane que de valeurs supérieures à la médiane.

le choix arbitraire $\sigma_1 = 0,5$ et $\sigma_2 = 50$, on obtient comme estimation de la moyenne 2,10. Ainsi, en l'absence de valeurs aberrantes, la moyenne attendue est 2, et la procédure robuste d'estimation fournit une valeur très voisine de cette moyenne attendue en l'absence de valeurs aberrantes. Afin de bien saisir le rôle des paramètres σ_1 et σ_2 sur la séparation des valeurs aberrantes, le lecteur peut reprendre cette application numérique en conservant fixe la valeur de σ_1 et en faisant varier celle de σ_2 .

2.4.4 Algorithme de réconciliation des mesures

A partir des mesures x_j , entachées d'erreurs, on souhaite fournir une estimée \hat{x}_j des grandeurs vraies satisfaisant au modèle du système et répondant à l'exigence de robustesse précédemment énoncée, c'est-à-dire peu sensible à la présence des valeurs aberrantes. Cette réconciliation des mesures vis-à-vis du modèle se traduit en un problème d'optimisation :

$$\hat{x} = \arg \min_{X^*} \Phi_g(X^* - X) \quad (53)$$

sous la contrainte :

$$\sum_{j=1}^v a_{ij} x_j^* = 0 \quad i = 1..n \quad (54)$$

$$\text{avec } \Phi_g(X^* - X) = \sum_{j=1}^v \log(\mu p_{1,j}(x_j^* - x_j) + (1 - \mu)p_{2,j}(x_j^* - x_j))$$

En dépit de la présence de contraintes linéaires (54), la fonction Φ_g n'étant pas quadratique par rapport à X , le problème précédent n'admet pas, en général, de solution analytique. Néanmoins, on peut expliciter les conditions d'optimalité. En effet, à partir de la fonction de Lagrange :

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^v \log(\mu p_{1,j}(x_j^* - x_j) + (1 - \mu)p_{2,j}(x_j^* - x_j)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^v a_{ij} x_j^*$$

on déduit par dérivation vis-à-vis de x_j^* et λ_i (encore appelés multiplicateurs de Lagrange) :

$$\frac{\hat{x}_j - x_j}{w_j} + \sum_{i=1}^n a_{ij} \lambda_i = 0, \quad j = 1..v \quad (55)$$

$$\sum_{j=1}^v a_{ij} \hat{x}_j = 0, \quad i = 1..n \quad (56)$$

où les poids w_j sont définis par :

$$w_j = \frac{\frac{\mu}{\sigma_{1,j}^2} \hat{p}_{1,j} + \frac{1 - \mu}{\sigma_{2,j}^2} \hat{p}_{2,j}}{\mu \hat{p}_{1,j} + (1 - \mu) \hat{p}_{2,j}}, \quad j = 1..v \quad (57)$$

Les expressions $\hat{p}_{1,i}$ et $\hat{p}_{2,i}$ sont obtenues à partir de (50) et (51) en substituant aux grandeurs vraies x_j^* leurs estimations respectives \hat{x}_j . Le système précédent doit être résolu par rapport à \hat{X} . On peut noter le couplage existant entre les différentes équations. En effet, pour estimer \hat{X} à partir de (55) et (56), il faudrait connaître les poids w_j qui eux-même dépendent de \hat{X} par l'intermédiaire de \hat{p} . Il n'est pas possible, en général de résoudre de façon analytique ce système d'équations. Parmi les techniques de résolution envisageables, le principe de l'itération directe (sous réserve de convergence) est séduisant. Lorsqu'on examine les équations d'optimalité, on remarque que les équations (55) et (56) sont linéaires vis-à-vis des \hat{x}_j et λ_i , à condition que les poids w_j soient fixés ; dans ce cas, on peut appliquer la méthode de résolution exposée pour la réconciliation dans le cas où les erreurs sont caractérisées par une distribution unique. On peut donc proposer une résolution à itération directe comportant deux niveaux (k étant l'indice d'itération) :

- le premier niveau fournit l'estimé \hat{X} de l'état connaissant une estimée des poids :

$$W_x^{(k)} = \text{diag} \left(1/w_j^{(k)} \right)_{i=1..v} \quad (58)$$

$$\hat{X}^{(k)} = (I - W_x^{(k)} A^T (A W_x^{(k)} A^T)^{-1} A) X \quad (59)$$

- le deuxième niveau adapte les poids w_j en fonction des estimés obtenus au premier niveau :

$$\hat{p}_{1,j}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{1,j}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_j^{(k)} - x_j}{\sigma_{1,j}} \right)^2 \right) \quad j = 1..v \quad (60)$$

$$\hat{p}_{2,j}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{2,j}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{x}_j^{(k)} - x_j}{\sigma_{2,j}} \right)^2 \right) \quad j = 1..v \quad (61)$$

$$w_j^{(k+1)} = \frac{\frac{\mu}{\sigma_{1,j}^2} \hat{p}_{1,j}^{(k)} + \frac{1-\mu}{\sigma_{2,j}^2} \hat{p}_{2,j}^{(k)}}{\mu \hat{p}_{1,j}^{(k)} + (1-\mu) \hat{p}_{2,j}^{(k)}} \quad j = 1..v \quad (62)$$

Ainsi, à partir d'un choix initial des poids $w_j^{(k)}$ (par exemple 1, en l'absence de connaissance particulière), on peut donner une estimation $\hat{X}^{(k)}$ des grandeurs vraies X^* . Puis, sur la base de cette estimation, on peut réactualiser les poids à partir de $\hat{p}_{i,j}^{(k)}$. Ce calcul à deux niveaux est repris jusqu'à convergence ; celle-ci est analysée de façon heuristique, en observant, par exemple, la stabilisation au cours des itérations des différents estimés. Notons que l'utilisateur devra choisir judicieusement les écart-types $\sigma_{1,j}$ et $\sigma_{2,j}$ ainsi que le paramètre de mélange μ . Dans la pratique, si les données ont des ordres de grandeur homogènes, on pourra prendre $\sigma_{1,j} = \sigma_1$ et $\sigma_{2,j} = \sigma_2$. Ce problème de choix est discuté de façon plus détaillée dans [Arora, 2001], [Ragot, 2005].

2.4.5 Application

La technique précédente est appliquée aux mesures effectuées sur un système simulé décrit par les équations rassemblées dans la table 6. Ce système peut représenter un processus de traitement de matière constitué de 9 unités de traitement connectées entre elles par 16 voies de circulation (figure 6).

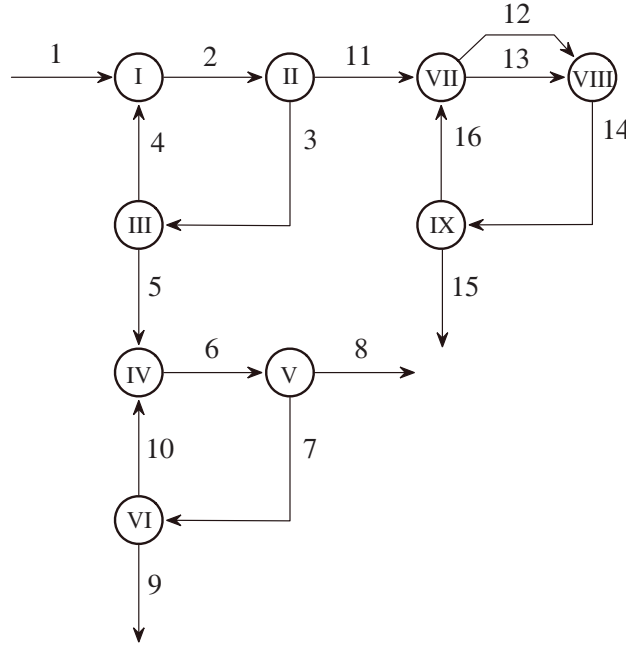


FIGURE 6 – Flowsheet

Ici, le modèle se limite à décrire, pour chaque unité de traitement, la conservation de la matière entre les entrées et les sorties sans prendre en compte la nature du traitement. De plus, les flux sont considérés globalement, c'est-à-dire sans prendre en compte leurs caractéristiques telles que composition chimique ou distribution granulométrique. Les données utilisées ont été obtenues par simulation des équations de flux en générant tout d'abord des données vérifiant exactement les modèles, puis en leur superposant des erreurs à caractère aléatoire et des biais.

Dans les lignes successives de la table 6, on a regroupé : les mesures X , les estimations \hat{X}_{RLS} fournies par la méthode robuste puis les termes correctifs qui s'en déduisent, les estimations fournies par la méthode des moindres carrés \hat{X}_{LS} et les termes correctifs qui s'en déduisent ($E_{LS} = \hat{X}_{LS} - X$ et $E_{RLS} = \hat{X}_{RLS} - X$). Pour interpréter les résultats, précisons que les mesures 3, 7 et 16 utilisées ont été délibérément biaisées de la quantité 8. Ces biais se retrouvent aisément pour RLS en observant les termes correctifs (ligne 4) dont les valeurs sont très proches de -8 indiquant ainsi l'aptitude de la méthode à corriger les

$x_1^* - x_2^* + x_4^* = 0$	$x_2^* - x_3^* - x_{11}^* = 0$	$x_3^* - x_4^* - x_5^* = 0$
$x_5^* - x_6^* + x_{10}^* = 0$	$x_6^* - x_7^* - x_8^* = 0$	$x_7^* - x_9^* - x_{10}^* = 0$
$x_{11}^* - x_{12}^* - x_{13}^* + x_{16}^* = 0$	$x_{12}^* + x_{13}^* - x_{14}^* = 0$	$x_{14}^* - x_{15}^* - x_{16}^* = 0$

TABLE 6 – Equations du système

X	1	2	3	4	5	6	7	8
\tilde{X}_{RLS}	56,5	65,9	60,8	8,2	43,9	54,9	39,4	24,7
E_{RLS}	0,5	-0,3	-8,0	0,3	0,3	0,0	-8,6	-0,6
\tilde{X}_{LS}	57,6	66,0	54,6	8,4	46,2	57,5	33,2	24,3
E_{LS}	1,2	0,1	-6,2	0,1	2,3	2,5	-6,2	-0,5
X	9	10	11	12	13	14	15	16
\tilde{X}_{RLS}	20,6	10,8	12,9	16,9	2,6	19,5	12,8	14,8
E_{RLS}	20,0	10,8	12,8	16,9	2,6	19,5	12,8	6,7
\tilde{X}_{LS}	-0,5	-0,0	-0,1	-0,01	-0,0	0,0	-0,1	-8,1
E_{LS}	21,9	11,2	11,4	19,7	2,7	22,4	11,4	10,9
E_{LS}	1,4	0,4	-1,5	2,8	0,1	2,9	-1,5	-3,8

TABLE 7 – Mesures, estimées et termes correctifs

mesures erronées, les autres mesures étant peu corrigées.

La figure 7 visualise les termes correctifs (en valeur absolue) obtenus par les approches *RLS* et *LS*. Outre la mauvaise évaluation des biais fournie par l'approche *LS*, cette dernière présente l'inconvénient de polluer les autres grandeurs en les corrigeant de façon intempestive. La ligne horizontale en pointillés indique la position du seuil adopté pour détecter les valeurs aberrantes. L'approche *LS* ne permet pas une détection et une isolation de ces valeurs, au contraire de l'approche *RLS*. On peut noter que le choix d'autres valeurs de seuil de détection aboutit à la même conclusion en faveur de l'approche *RLS*.

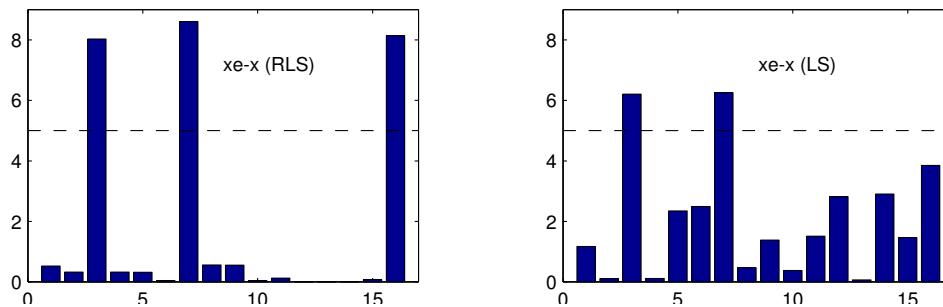


FIGURE 7 – Termes correctifs

2.4.6 Compléments et discussion

L'examen de la solution précédente montre que la grandeur qui permet de faire la séparation entre les deux types d'erreur est le poids w_j qui est adapté pour chaque variable en fonction de son terme correctif. Son rôle sur l'estimation peut être mis en évidence en étudiant les paramètres qui le caractérisent (voir 62). Pour cela, considérons la fonction :

$$w(\xi) = \frac{\frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\sigma_2^2 p_1(\xi)}{\sigma_1^2 p_2(\xi)} + 1}{\frac{\mu}{1 - \mu} \frac{p_1(\xi)}{p_2(\xi)} + 1} \quad (63)$$

où ξ représente l'erreur d'estimation et p_1 et p_2 les lois de distribution (60) et (61) de cette erreur. La figure ci-dessous a été tracée avec $\sigma_1 = 1$ et pour différentes valeurs de μ et de σ_2 .

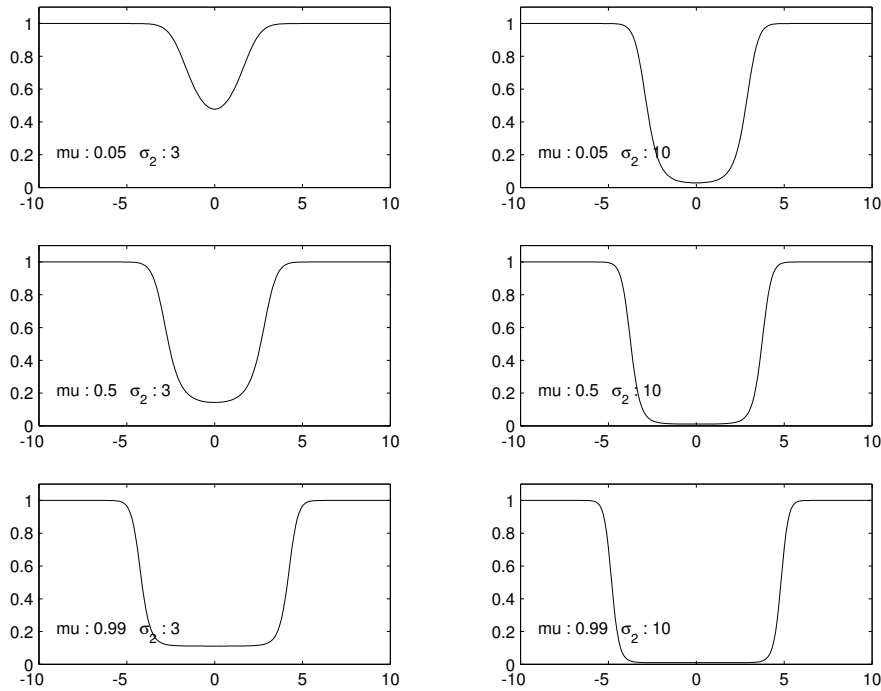


FIGURE 8 – Forme de la fonction poids

D'une façon générale, le poids w décroît lorsque ξ tend vers zéro. Ainsi, lors de la réconciliation des données, les erreurs de forte amplitude seront peu prises en compte. Les deux paramètres μ et σ_2 (ou σ_1) jouent, d'une part, sur la portée de la fonction poids et, d'autre part, sur le poids relatif des valeurs de forte amplitude par rapport à celles de faible amplitude. On comparera les graphiques

correspondant aux deux situations ($\mu = 0,05$, $\sigma_2 = 3$) et ($\mu = 0,99$, $\sigma_2 = 10$) qui permettent, en passant de l'une à l'autre, de modifier de façon très sensible le poids relatif des deux types d'erreur ainsi que leurs portées. Par exemple, des erreurs $\xi_1 = 10$ et $\xi_2 = 0$ ont, dans le premier cas, des poids voisins de $w_1 = 1$ et $w_2 = 0,5$ dont les inverses qui interviennent dans les écritures des estimés sont 1 et 2. Dans le deuxième cas, ces mêmes erreurs ont des poids voisins de 1 et 0, leurs inverses étant alors 1 et $l'\infty$. Cette disparité des poids, en fonction de l'amplitude de l'erreur permet de réduire l'effet des mesures aberrantes. Compte tenu de ces remarques, il peut être intéressant de rechercher les valeurs optimales des paramètres σ et μ . Ce point est laissé à l'initiative du lecteur.

3 Diagnostic à base d'observateurs

3.1 Introduction

Lors du fonctionnement d'un système, l'opérateur ne connaît que les grandeurs mesurées, qui sont une combinaison linéaire de certaines variables d'état. Les variables d'état n'intervenant pas dans les sorties sont inaccessibles, pourtant elles contiennent une information essentielle quant à l'évolution du système. Il est donc naturel de chercher à estimer l'ensemble des variables d'état à partir des seules grandeurs connues. L'estimé de l'état donné par un filtre appelé *observateur* est une représentation du fonctionnement sain du système. L'estimé de l'état peut être très utile dans la phase de commande du système, par exemple pour synthétiser des lois par retour d'état.

Pour le diagnostic, l'utilité de la reconstruction de l'état est plus discutable car sa connaissance ne permet pas toujours de détecter des dysfonctionnements ; pour cela, il serait nécessaire de le comparer à un état de référence de bon fonctionnement (par exemple) mais non connu a priori. En revanche, la comparaison entre les sorties mesurées et les sorties estimées, obtenues par combinaison linéaire des variables d'état estimées, permet de mettre en évidence un écart entre le fonctionnement réel du système et son fonctionnement sain. En d'autres termes cet écart peut être considéré comme un *résidu*, indicateur de l'occurrence d'un dysfonctionnement. Les dysfonctionnements affectant un système sont souvent modélisés par des signaux additifs inconnus.

Parmi ces signaux inconnus, on peut distinguer deux classes :

- les signaux engendrés par l'occurrence d'une défaillance ou d'une panne d'un composant (capteur, actionneur). De leur détection va dépendre la capacité de l'opérateur à effectuer la maintenance nécessaire. Pour pouvoir mettre en évidence clairement ces défauts, il convient de rendre l'erreur d'estimation des sorties particulièrement sensible à ces entrées non mesurées, afin que le résidu s'écarte visiblement de zéro.
- les signaux non significatifs auxquels l'erreur d'estimation doit être la moins sensible possible, par exemple : les erreurs ou les approximations faites lors de la modélisation, les bruits de mesure, etc. Une borne de l'influence de cette classe de signaux (précision d'un capteur, rapport si-

gnal/bruit, etc) donne un seuil au delà duquel l'écart entre les sorties et leurs estimations est révélateur d'un dysfonctionnement.

L'apparition d'un résidu significativement non nul traduit un fonctionnement anormal du système, on parle de la *détection* d'une faute. Il est alors intéressant d'identifier le composant en défaut, c'est la *localisation*. Enfin, quand il est possible de déterminer l'amplitude du défaut occurrent, on cherchera à obtenir l'*estimation* des défauts. Ces traitements sont l'objet du diagnostic à base d'observateur dont la figure 9 propose une représentation synthétique.

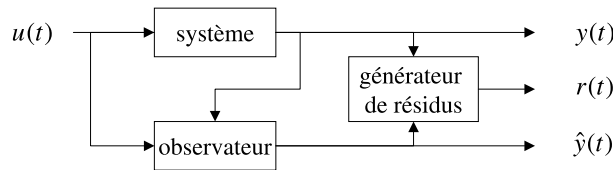


FIGURE 9 – Diagnostic à base d'observateur

Dans un premier temps, on utilise les observateurs d'état étudiés dans le cadre de la commande (RENOVI)¹⁰ pour mettre en évidence l'apparition d'un dysfonctionnement du système. Puis des techniques de reconstruction des variables d'état d'un système seront présentées lorsqu'une partie seulement des entrées est mesurée, on parle alors d'observateur à entrées inconnues. On détaillera quelques techniques de diagnostic utilisant les observateurs à entrées inconnues. Enfin, on verra l'intérêt de construire un ensemble d'observateurs pour un même système, dans le but de comparer les sorties estimées et d'en déduire une procédure de diagnostic.

3.2 Diagnostic à base d'observateur d'état

On suppose disposer d'une représentation du processus sous la forme d'un modèle dynamique linéaire à p entrées, notées $u(t)$, et m sorties mesurées, notées $y(t)$. L'ensemble des n grandeurs décrivant l'état du processus, noté $x(t)$, obéit au système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (64)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (65)$$

$$x(0) = x_0 \quad (66)$$

où les matrices A , B , C ont des dimensions compatibles avec celles des vecteurs $x(t)$, $u(t)$ et $y(t)$.

On suppose également disposer d'un observateur d'état. Il existe de nombreuses formes d'observateurs, dans le contexte déterministe, les plus utilisés sont les observateurs de Luenberger, ou les observateurs proportionnels. On peut

10. renvoi synthèse d'obs

également citer les observateurs proportionnels intégraux, dont l'avantage est de fournir une estimation des sorties malgré un modèle imprécis ou la présence de non-linéarités. Dans le contexte stochastique, l'outil le plus répandu est le filtre de Kalman qui permet d'obtenir l'estimation non biaisée la plus probable malgré la présence de bruits. Notre étude portera exclusivement sur les observateurs de type proportionnel, définis ci-dessous.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (67)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (68)$$

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (69)$$

L'observateur a pour entrées $u(t)$ et $y(t)$, et il est construit afin que sa sortie soit une estimation de l'état, notée $\hat{x}(t)$. Comme il a été vu (RENVOI)¹¹, il suffit pour cela de trouver une matrice K telle que $A - KC$ soit stable. Pour que l'estimation soit de bonne qualité, il faut que l'observateur soit au moins aussi rapide que le système observé, il convient donc de choisir K de manière à ce que les valeurs propres de $A - KC$ aient une partie réelle plus petite que celles de A . Il faut néanmoins veiller à ne pas choisir des valeurs propres à parties réelles trop petites, en effet, cela a pour conséquence d'augmenter la bande passante de l'observateur et donc de le rendre sensible à d'éventuels bruits de mesure.

3.2.1 Application au diagnostic

Les observateurs étudiés précédemment peuvent être utilisés pour mettre en évidence l'apparition de défauts affectant les actionneurs ou les capteurs. Pour cela, des signaux de résidus sont créés par comparaison des grandeurs estimées et des grandeurs réelles, selon le schéma de principe représenté à la figure 9.

Estimation en présence de défauts actionneur. Considérons, un système dont les actionneurs peuvent être affectés par des défauts (présence de bruit, offset, dérive, panne momentanée ou destruction). Les différents défauts sont modélisés par le signal additionnel, noté $f_a(t)$. Le modèle du système devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_a f_a(t) \quad (70)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (71)$$

$$x(0) = x_0 \quad (72)$$

La matrice D_a est appelée matrice de distribution des défauts. La $i^{\text{ème}}$ colonne de D_a donne la direction du défaut i dans l'équation de mesure. Par exemple, pour modéliser une panne de l'actionneur transmettant la première composante de $u(t)$ notée $u_1(t)$, il suffit de choisir :

$$D_a = B_1 \quad (73)$$

$$f_a(t) = -u_1(t) \quad (74)$$

11. renvoi synthèse d'obs

où B_1 désigne la première colonne de la matrice B . La matrice D_a est supposée de plein rang colonne¹², autrement dit, les différents défauts sont supposés être linéairement indépendants

Le signal $f_a(t)$ n'est pas mesurable, il est donc impossible de l'utiliser lors de la synthèse de l'observateur (67-69). L'écart de mesure des sorties $\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ est alors donné par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - KC)\tilde{x}(t) + D_a f_a(t) \quad (75)$$

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \quad (76)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0 \quad (77)$$

La transformée de Laplace de ces équations, permet d'obtenir le transfert entre les transformées de Laplace de $\tilde{y}(t)$ et de $f_a(t)$, notée respectivement $\tilde{Y}(p)$ et $F_a(p)$. En négligeant le transitoire dû à la condition initiale $\tilde{y}_0 = C\tilde{x}(0)$, il vient :

$$\tilde{Y}(p) = C(pI - A + KC)^{-1} D_a F_a(p) \quad (78)$$

En l'absence de défaut $f_a(t)$, le signal $\tilde{y}(t)$ tend asymptotiquement vers 0. En revanche lorsque $f_a(t)$ est non nul, $\tilde{y}(t)$ est sensible à l'apparition du défaut. Il est donc possible de détecter les défauts actionneurs au moyen de l'écart d'estimation des sorties. Le choix du gain K permet de fixer la structure de l'observateur dans le but de rendre $\tilde{y}(t)$ particulièrement sensible à une composante particulière de $f_a(t)$. La synthèse de plusieurs observateurs, chacun dédié à un défaut, permet de localiser efficacement chaque défaut [Patton, 1989]. Notons que la matrice de transfert $C(pI - A + KC)^{-1} D_a$ explique la façon dont les défauts agissent sur l'erreur d'estimation de la sortie du système; l'analyse du rang de cette matrice, et plus généralement l'analyse a priori de sa structure, renseigne sur la possibilité de détecter et d'isoler les défauts.

Estimation en présence de défauts capteur. Supposons à présent que les capteurs de mesure des sorties soient en partie défaillants. Comme dans le cas précédent, les différents défauts possibles sont modélisés par un signal additionnel $f_c(t)$ dans l'équation de mesure. Le système observé devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (79)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_c f_c(t) \quad (80)$$

$$x(0) = x_0 \quad (81)$$

On peut supposer que tous les défauts interviennent indépendamment les uns des autres, autrement dit la matrice D_c est de plein rang colonne¹³. L'erreur

12. si ce n'est pas le cas il est toujours possible d'écrire $D_a f_a(t) = \bar{D}_a \bar{f}_a(t)$ où \bar{D}_a est de plein rang colonne, et où $\bar{f}_a(t)$ est une combinaison linéaire des défauts

13. comme il a été vu pour D_a , ce n'est pas restrictif

d'estimation des sorties obtenue par l'observateur (67-69) est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) - KD_c f_c(t) \quad (82)$$

$$\tilde{y}(t) = C\hat{x}(t) + D_c f_c(t) \quad (83)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0 \quad (84)$$

À l'évidence, l'erreur d'estimation de la sortie est un résidu permettant de détecter les défauts $f_c(t)$. Dans le cas des défauts de capteur, il est possible d'obtenir une quantification du signal $f_c(t)$. En effet, en utilisant la transformée de Laplace (et sans tenir compte du terme fonction des conditions initiales qui tend asymptotiquement vers zéro), il vient :

$$\tilde{Y}(p) = (I - C(pI - A + KC)^{-1}K)D_c F_c(p) \quad (85)$$

où $\tilde{Y}(p)$ et $F_c(p)$ sont respectivement les transformées de Laplace de $\tilde{y}(t)$ et de $f_c(t)$. Autrement dit, il vient :

$$D_c F_c(p) = (I - C(pI - A + KC)^{-1}K)^{-1}\tilde{Y}(p) \quad (86)$$

Le lemme d'inversion matricielle¹⁴ permet de mettre l'équation précédente sous la forme suivante :

$$D_c F_c(p) = (C(pI - A)^{-1}K + I)\tilde{Y}(p) \quad (87)$$

La matrice D_c étant de plein rang colonne, sa pseudo-inverse, définie par $D_c^+ = (D_c^T D_c)^{-1} D_c^T$, vérifie : $D_c^+ D_c = I$. L'estimation des défauts capteurs est donnée par le filtre suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - KC & 0 \\ -KC & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & K \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\hat{f}_c(t) = [-D_c^+ C \quad D_c^+ C] \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + [0 \quad D_c^+] \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (89)$$

3.2.2 Exemple de mise en œuvre

Considérons le système suivant, affecté par un défaut de capteur $f_c(t)$ et par des bruits de mesure $\nu(t)$:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2,5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0,1 & -5 & -6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (90)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f_c(t) + \nu(t) \quad (91)$$

$$x(0) = (4 \quad 4 \quad 4)^T \quad (92)$$

14. $(A_1 + A_2 A_3 A_4)^{-1} = A_1^{-1} - A_1^{-1} A_2 (A_3^{-1} + A_4 A_1^{-1} A_2)^{-1} A_4 A_1^{-1}$

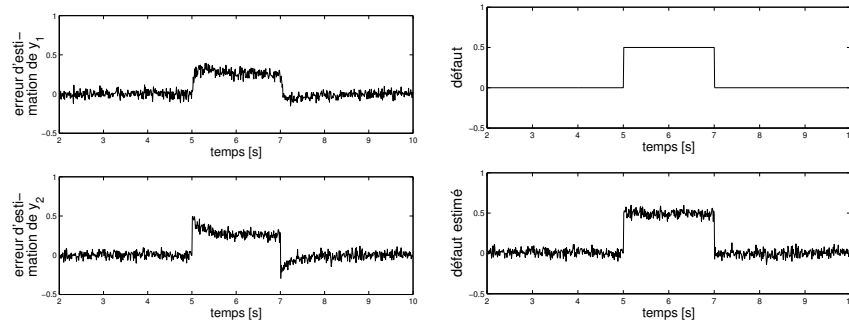
Le défaut $f_c(t)$ intervient sur la deuxième mesure, entre les instants $t = 5$ s et $t = 7$ s. Entre ces deux instants, il est constant et d'amplitude égale à 0,5.

Afin de détecter et d'estimer ce défaut de capteur, on construit un observateur d'état, pour ensuite filtrer l'erreur d'estimation des sorties.

La paire (C, A) est observable, il est donc possible de déterminer une matrice K telle que $A - KC$ soit stable. Les valeurs propres de A sont : $\lambda_A = \{-1, 67 - 2, 97 - 8, 37\}$. Le gain K est choisi afin que les valeurs propres de $A - KC$ soient environ le double de celle de A , ainsi l'observateur (67-69) est assez rapide pour suivre l'évolution des variables d'état. Par exemple, pour obtenir les valeurs propres $\lambda_{A-KC} = \{-3, 30 - 5, 80 - 20, 3\}$, il faut choisir le gain :

$$K = \begin{pmatrix} 12, 0 & -13, 0 \\ -3, 5 & 4, 4 \\ -1, 0 & -2, 5 \end{pmatrix} \quad (93)$$

Fixons l'état initial de l'observateur à $\hat{x}(t) = [0 \ 0 \ 0]^T$. Le défaut corrompt l'erreur d'estimation des sorties représentée à la figure 10(a). Le signal $\tilde{y}(t)$ permet de détecter le défaut. Pour l'estimer, le filtre (88-89) est mis en œuvre. La figure 10(b) permet de comparer le défaut et son estimation.



(a) Erreur d'estimation des sorties en présence d'un offset de capteur présent entre $t = 5$ s et $t = 7$ s (b) Comparaison du défaut capteur (en haut) et de son estimation (en bas)

FIGURE 10 – Détection et estimation d'un défaut capteur

3.3 Diagnostic à base d'observateur à entrées inconnues

3.3.1 Introduction

La représentation d'un système fait généralement apparaître des signaux inconnus : bruits d'actionneurs ou de capteurs, biais ou offset d'un composant, voire erreur de modélisation. Ces signaux sont désignés par le terme d'*entrées inconnues*, et notés $w(t)$. Un système dynamique affecté par des entrées in-

nues est de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fw(t) \quad (94)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (95)$$

$$x(0) = x_0 \quad (96)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des commandes, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les sorties mesurées et $w(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des entrées inconnues. Les matrices A , B , C et F sont des matrices connues, constantes et de dimensions compatibles avec les signaux.

La construction d'observateur vue précédemment est fondée sur la connaissance du modèle du système observé, de ce fait l'introduction de signaux inconnus peut dégrader sensiblement la qualité de l'estimation d'état. Sous certaines conditions portant sur la matrice F de distribution des entrées inconnues, il est néanmoins possible de reconstruire l'état du système observé malgré la présence d'entrées inconnues.

La principale utilité de cette approche est de pouvoir se passer d'une partie, supposée corrompue, des entrées pour estimer l'état du système. La comparaison de l'estimation des sorties avec les sorties réelles permet de conclure sur la présence de fautes affectant les entrées utilisées pour l'estimation. La synthèse d'un ensemble – ou banc – d'observateurs utilisant chacun une partie des entrées permet de localiser le défaut occurrent, par comparaison des différentes erreurs d'estimation des sorties, et au moyen d'une logique de décision.

3.3.2 Synthèse d'un observateur à entrées inconnues

Le but de l'estimation en présence d'entrées inconnues est de déterminer un observateur qui, à partir des entrées et des sorties $u(t)$ et $y(t)$ de (94-95), produit une estimation $\hat{x}(t)$ telle que l'erreur $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tende asymptotiquement vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. La structure de l'observateur à entrées inconnues est la suivante :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Mu(t) + Ly(t) \quad (97)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + Ey(t) \quad (98)$$

$$z(0) = z_0 \quad (99)$$

Il convient alors de déterminer les gains L , M , N et E de l'observateur de sorte que $\hat{x}(t)$ converge vers zéro quel que soit l'état initial du système.

Quelques hypothèses sont nécessaires :

- toutes les sorties mesurées sont linéairement indépendantes, autrement dit : la matrice C est de plein rang ligne. Ce n'est pas restrictif dans la mesure où il est toujours possible de considérer une sortie $\bar{y}(t) = \underline{C}y(t) = \bar{C}x(t)$ telle que \bar{C} est de plein rang ligne.
- toutes les entrées inconnues sont linéairement indépendantes, autrement dit : F est de plein rang colonne. Ce n'est pas restrictif, dans la mesure où il est toujours possible de décomposer F sous la forme $F = \bar{F}\underline{F}$ où \bar{F} est de plein rang colonne. Dans ce cas l'entrée inconnue est $\bar{w}(t) = \underline{F}w(t)$.

- les matrices C et F vérifient $\text{rang } CF = \text{rang } F = q$. Cette hypothèse signifie que toutes les entrées inconnues ont une influence indépendante sur les sorties.
- le nombre d'entrées inconnues est strictement inférieur au nombre de sorties mesurées.

En définissant la matrice

$$P = I_n - EC \quad (100)$$

l'erreur d'estimation de l'état $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, est donnée par :

$$\tilde{x}(t) = Px(t) - z(t) \quad (101)$$

et son évolution est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = PAx(t) + PBu(t) + PFw(t) - Nz(t) - Mu(t) - Ly(t) \quad (102)$$

$$= (PA - LC - NP)x(t) + (PB - M)u(t) + PFw(t) + N\tilde{x}(t) \quad (103)$$

Pour que $\tilde{x}(t)$ converge vers 0 indépendamment des autres signaux, il faut déterminer les gains de l'observateur tels que l'erreur d'estimation soit décrite par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = N\tilde{x}(t) \quad (104)$$

Autrement dit, il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$0 = PA - LC - NP \quad (105)$$

$$0 = PB - M \quad (106)$$

$$0 = PF \quad (107)$$

$$N \text{ stable} \quad (108)$$

Les équations précédentes doivent être résolues par rapport à N , M , L et E de façon à définir complètement la structure de l'observateur (97-98). Pour cela, notons que la matrice CF est de plein rang colonne, donc, compte tenu de la définition (100), l'égalité $PF = 0$ admet la solution suivante :

$$E = F(CF)^+ + \Theta(I_m - CF(CF)^+) \quad (109)$$

où Θ est une matrice arbitraire, et où $(CF)^+$ désigne la pseudo-inverse de CF définie par :

$$CF^+ = ((CF)^T CF)^{-1} (CF)^T \quad (110)$$

On déduit alors la valeur de P :

$$P = I - F(CF)^+ C + \Theta(I_m - CF(CF)^+) C \quad (111)$$

Notons que la matrice $((CF)^T CF)$ est inversible car CF est de plein rang colonne (par hypothèse). Considérons la matrice auxiliaire définie par $K =$

$L - NE$, l'équation (105) devient : $N = PA - KC$. Il vient alors :

$$N = (I_n - F(CF)^+C)A - [\Theta \quad K] \begin{bmatrix} (I_m - CF(CF)^+)CA \\ C \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$E = F(CF)^+ + \Theta(I_m - CF(CF)^+) \quad (113)$$

$$M = (I_n - EC)B \quad (114)$$

$$L = K + NE \quad (115)$$

Pour obtenir les gains de l'observateur, il suffit tout d'abord de déterminer les matrices Θ et K de (112) par placement des pôles de N afin d'en garantir la stabilité. Puis les autres gains sont alors donnés par (113-115). Lorsque le degré de liberté offert par le réglage du paramètre Θ n'est pas nécessaire, une solution simple consiste à choisir $\Theta = 0$.

3.3.3 Estimation des entrées inconnues

Comme il a été vu, l'observateur à entrées inconnues permet d'estimer les variables d'état du système indépendamment des entrées inconnues $w(t)$. Il est alors possible d'utiliser l'état reconstruit obtenu pour chercher à estimer également les entrées inconnues, qui, dans certains cas, peuvent être des défauts ou des perturbations que l'on cherche à identifier. Pour cela, dérivons la sortie $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t) + CFw(t) \quad (116)$$

La matrice CF étant de plein rang colonne la pseudo-inverse (110) vérifie : $(CF)^+CF = I_q$. Définissons le signal $\hat{w}(t)$ par :

$$\hat{w}(t) = (CF)^+(\dot{y}(t) - CBu(t) - CA\hat{x}(t)) \quad (117)$$

En reportant l'équation (116) dans la précédente, il vient :

$$\hat{w}(t) = w(t) + (CF)^+CA\tilde{x}(t) \quad (118)$$

L'erreur d'estimation de l'état tend asymptotiquement vers zéro, donc $\hat{w}(t)$ tend asymptotiquement vers $w(t)$. Autrement dit, $\hat{w}(t)$ est une estimation de $w(t)$.

Nonobstant, ce résultat est à considérer avec circonspection : en effet il nécessite la dérivation des sorties mesurées. En pratique, la dérivation – souvent numérique – d'un signal n'est pas une opération anodine car elle augmente la sensibilité en hautes fréquences, où se situent généralement les bruits de mesure. Pour tenter d'atténuer cette conséquence néfaste, il peut être avantageux de filtrer préalablement les signaux utilisés pour reconstruire les entrées inconnues, au prix d'un appauvrissement du spectre de l'estimée des entrées inconnues.

3.3.4 Application au diagnostic

Montrons, dans un premier temps, que la présence de défaut actionneur, notés $f_a(t)$, et de défaut capteur, notés $f_c(t)$, a une influence sur l'erreur d'estimation des sorties. Le système affecté des différents défauts et des entrées

inconnues $w(t)$ est défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fw(t) + D_a f_a(t) \quad (119)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_c f_c(t) \quad (120)$$

$$x(0) = x_0 \quad (121)$$

L'erreur d'estimation des sorties par l'observateur à entrées inconnues (97-98), synthétisé selon (112-115) peut être vue comme la sortie du système dynamique suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = N\tilde{x}(t) + PD_a f_a(t) + (NE - L)D_c f_c(t) - ED_c \dot{f}_c(t) \quad (122)$$

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D_c f_c(t) \quad (123)$$

$$\tilde{x}(0) = Px_0 - z_0 \quad (124)$$

Il est donc évident qu'en l'absence de défaut le signal $\tilde{y}(t)$ converge asymptotiquement vers zéro, dans la mesure où la matrice N est stable. On peut donc faire les trois observations suivantes :

- sauf dans le cas particulier où la matrice d'incidence des défauts d'actionneur D_a est dans le noyau de P , les défauts $f_a(t)$ ont une influence sur $\tilde{y}(t)$;
- la présence de défauts de capteurs $f_c(t)$ affecte le signal $\tilde{y}(t)$, par sa présence dans les équations d'état et de mesure (122) et (123) ;
- par principe de l'observation en présence d'entrées inconnues, le signal $w(t)$ n'a pas d'influence sur l'erreur de reconstruction des sorties.

Le signal $\tilde{y}(t)$ est donc un résidu sensible à $f_a(t)$ et $f_c(t)$, et insensible à $w(t)$. La sensibilité des résidus vis-à-vis des défauts peut être étudiée en utilisant la transformée de Laplace. En effet, on obtient à partir de (122) :

$$\tilde{X}(p) = (pI - N)^{-1} (\tilde{x}(0) + PD_a F_a(p) + (NE - L - pE)D_c F_c(p)) \quad (125)$$

$$\tilde{Y}(p) = C\tilde{X}(p) + D_c F_c(p) \quad (126)$$

ce qui permet d'étudier les fonctions de transfert exprimant l'influence des défauts sur les résidus.

3.3.5 Exemple de mise en œuvre

Pour illustrer l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues, on considère le réseau de distribution d'eau représenté à la figure 11. Ce réseau est constitué de différents réservoirs de section au sol S_i , où i indique le numéro du réservoir (de 1 à 4), reliés par des canalisations de section s . Le réseau est alimenté par deux débits volumiques $q_{e1}(t)$ et $q_{e2}(t)$ arrivant dans les réservoirs 1 et 2 respectivement. Ces deux débits d'alimentations sont commandés par des pompes. Pour observer le réseau, on dispose de trois débitmètres repérés sur la figure 11 par des ronds noirs. Les capteurs sont étalonnés de manière à mesurer la variation autour des valeurs en régime stationnaire. Les mesures disponibles sont la

somme des débits sortant des réservoirs 1 et 2 : $y_1(t) = q_1(t) + q_2(t)$, ainsi que les mesures des débits sortant des réservoirs 3 et 4 : $y_2(t) = q_3(t)$ et $y_3(t) = q_4(t)$.

Deux grandeurs non mesurables affectent l'évolution du réseau : une fuite dans la canalisation d'alimentation du réservoir 1 (par exemple un branchement sauvage sur le réseau), notée $f(t)$, des infiltrations dans le réservoir 4, notées $d(t)$.

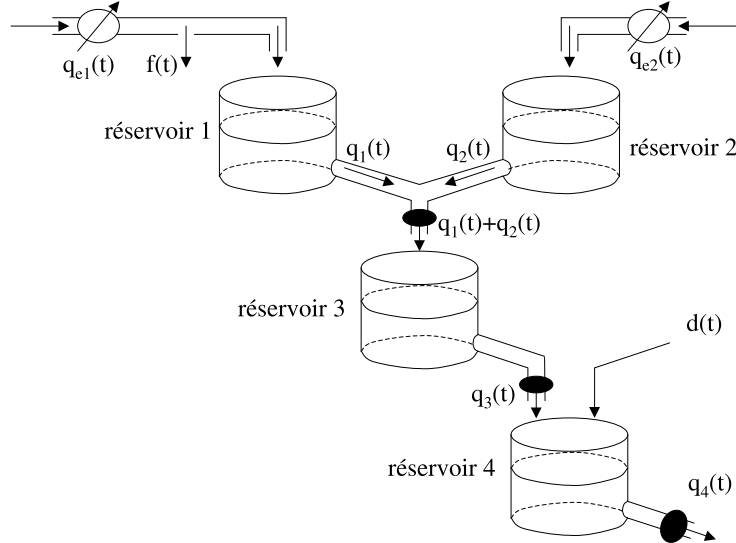


FIGURE 11 – Réseau de distribution d'eau

En négligeant les pertes de charge dans les canalisations, et après linéarisation en considérant des petites variations autour du régime de fonctionnement stationnaire, le système peut être modélisé sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_{e1}(t) \\ \delta q_{e2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ d(t) \end{pmatrix} \quad (127)$$

$$\delta y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \quad (128)$$

où $\delta q_{ei}(t)$ désigne la variation du débit d'alimentation $q_{ei}(t)$ autour de sa valeur en régime stationnaire. Les coefficients a_i sont données par $a_i = \frac{s}{S_i} \sqrt{\frac{g}{2h_{i0}}}$, où h_{i0} est la hauteur d'eau dans le réservoir i en fonctionnement stationnaire. Pour des

réservoirs de section : $S_1 = 100 \text{ m}^2$, $S_2 = 150 \text{ m}^2$, $S_3 = 300 \text{ m}^2$, $S_4 = 400 \text{ m}^2$, le régime stationnaire imposé par les débits d'alimentation $q_{e1}(t) = 0,02 \text{ m}^3/s$ et $q_{e2}(t) = 0,015 \text{ m}^3/s$ est caractérisé par : $a_1 = 49,05 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $a_2 = 43,60 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $a_3 = 9,3429 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et $a_4 = 7,0071 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Les mesures sont affectées par des bruits de capteurs, notés $\nu_i(t)$, de moyenne nulle et d'écart-type égal à 5×10^{-5} (environ 5% des grandeurs mesurées).

On constate que les matrices C et F sont respectivement de plein rang ligne et de plein rang colonne, que le produit CF est de plein rang colonne, et que le nombre de mesures est strictement supérieur au nombre d'entrées inconnues. Les conditions d'existence d'un observateur à entrées inconnues sont vérifiées. De plus, on peut vérifier l'observabilité de (112), autrement dit les valeurs propres de N peuvent être placées arbitrairement au moyen de Θ et K . Les pôles de l'observateur sont placés en $\{-0,0196 \quad -0,0206 \quad -0,0216 \quad -0,0196\}$, soit autour de deux fois le plus petit pôle du système observé. Les paramètres K et Θ obtenus sont donnés ci-dessous. Les gains N , E , M et L sont calculés à partir de (112)-(115).

$$K = \begin{bmatrix} 0,045 & -0,015 & 0 \\ -0,0099 & 0,0084 & -0,0000 \\ -0,0032 & 0,021 & 0 \\ 0 & 0,0007 & 0,020 \end{bmatrix} \quad \Theta = \frac{1}{10000} \begin{bmatrix} 0 & 0,5608 & 0 \\ 0 & -0,1711 & 0 \\ 0 & -0,2260 & 0 \\ 0 & -0,0065 & 0 \end{bmatrix} \quad (129)$$

Le débit de fuite $f(t)$ est égal à 30% de $\delta q_{e1}(t)$ entre les instants $t = 500 \text{ s}$ et $t = 750 \text{ s}$. Les infiltrations $d(t)$ sont égales à $0,01 \text{ m}^3/s$ entre les instants $t = 850 \text{ s}$ et 1050 s . La figure 12 permet de constater la convergence des estimations vers les variables réelles. Le programme ayant servi à cet exemple est donné en annexe, page 64.

3.4 Diagnostic à base de bancs d'observateurs

Les observateurs synthétisés précédemment utilisent l'ensemble des informations disponibles, c'est-à-dire toutes les mesures des entrées et des sorties. Si l'une de ces mesures est défaillante, par exemple présente un biais, les estimations d'état et de sortie qui en résultent peuvent être erronées. Pour tenter de s'affranchir de cette influence, on peut essayer de construire un observateur n'utilisant qu'une partie des informations disponibles, par exemple en ne prenant pas en compte une entrée ou une sortie particulière.

3.4.1 Défauts d'actionneur

Sous réserve de vérifier les conditions d'existence d'un observateur à entrées inconnues, il est possible de n'utiliser qu'une des commandes disponibles pour synthétiser l'observateur, et de considérer les autres commandes comme des entrées inconnues. Dans ce cas, l'erreur de reconstruction des sorties sera sensible à un défaut affectant la $i^{\text{ème}}$ entrée et insensible à un défaut survenant sur les commandes ignorées. On parle de détection de défaut actionneur par observateur dédié ou DOS (pour *dedicated observer scheme*). Dans ce cas la localisation

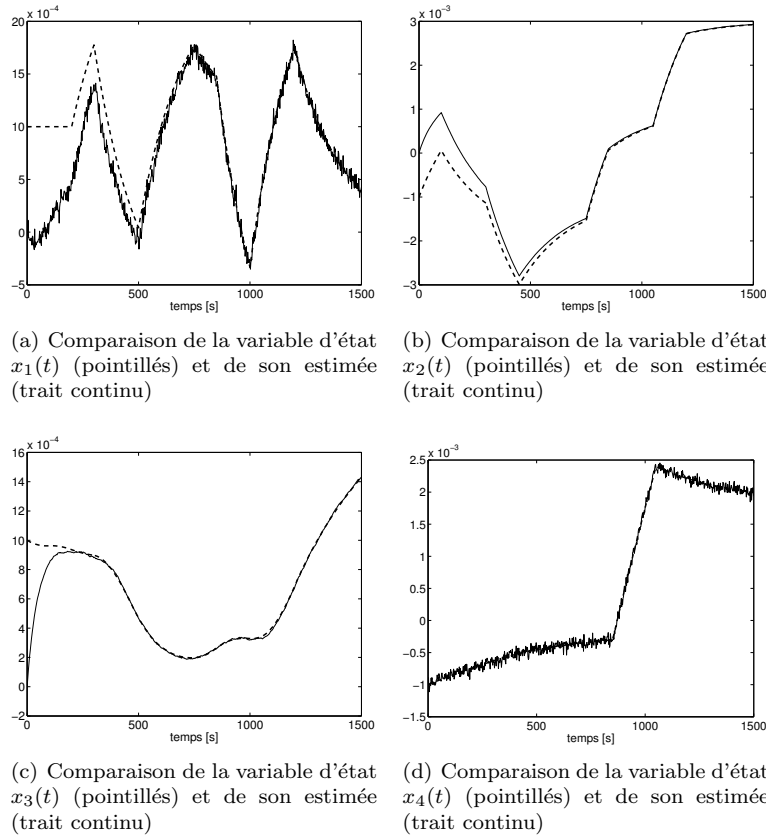


FIGURE 12 – Estimation des variables d'état en présence d'entrées inconnues

est très simple car l'erreur de reconstruction donnée par l'observateur i , notée $\tilde{y}_i(t)$, permet de diagnostiquer l'apparition d'un défaut sur le $i^{\text{ème}}$ actionneur. L'alarme $A_{ai}(t)$ affectée au $i^{\text{ème}}$ défaut actionneur est obtenue par comparaison de $\tilde{y}_i(t)$ à un seuil s_i établi lors d'une campagne de mesure faite pendant le fonctionnement du système en l'absence de défaut.

$$A_{ai}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\tilde{y}_i(t)| < s_i \\ 1, & \text{si } |\tilde{y}_i(t)| \geq s_i \end{cases} \quad (130)$$

L'approche DOS, illustrée par la figure 13 (pour $p = m = 3$), est séduisante par sa simplicité, mais les conditions d'existence de l'observateur à entrées inconnues deviennent très contraignantes du fait d'un grand nombre d'entrées inconnues. Si cette approche n'est pas réalisable, on construit des observateurs utilisant toutes les entrées, sauf la $i^{\text{ème}}$, cette dernière étant considérée comme une entrée inconnue. C'est l'approche GOS (pour *generalized observer scheme*),

illustrée par la figure 14. Dans ce cas, l'erreur d'estimation des sorties donnée par le $i^{\text{ème}}$ observateur est sensible à tous les défauts actionneur, excepté le $i^{\text{ème}}$. Une logique de décision permet, à partir des p résidus, de déterminer l'actionneur en faute. Notons $f_{ai}(t)$ le $i^{\text{ème}}$ composant de $f_a(t)$. À chaque commande, est associé un booléen, noté b_i , déterminé par comparaison de $\tilde{y}_i(t)$ avec un seuil s_i supposé constant.

$$b_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\tilde{y}_i(t)| < s_i \\ 1, & \text{si } |\tilde{y}_i(t)| \geq s_i \end{cases} \quad (131)$$

Les signatures des différentes fautes sur les différents résidus sont données-ci dessous pour un système à trois commandes.

	$f_{a1}(t)$	$f_{a2}(t)$	$f_{a3}(t)$
$b_1(t)$	0	1	1
$b_2(t)$	1	0	1
$b_3(t)$	1	1	0

La logique de décision pour générer une alarme $A_{ai}(t)$ affectée à un défaut $f_{ai}(t)$ est alors :

$$A_{ai}(t) = \bar{b}_i(t) \prod_{j \neq i} b_j(t) \quad (132)$$

Dans le cas de défauts multiples et simultanés, il faut ignorer non pas une commande mais un ensemble de commandes. Par exemple si deux actionneurs sont susceptibles d'être corrompus simultanément, on construit les $p(p-1)$ observateurs ignorant chacun deux commandes sur les p disponibles (le cas extrême étant le schéma DOS).

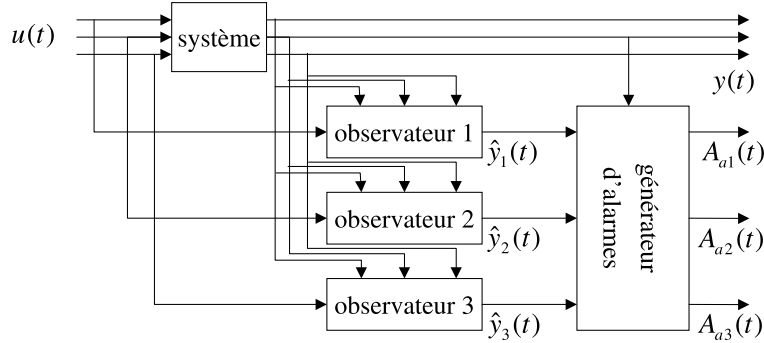


FIGURE 13 – Banc d'observateurs à entrées inconnues pour la localisation de défauts actionneur, approche DOS

3.4.2 Défauts de capteur

Le même raisonnement est possible dans le cas des défauts capteurs. En utilisant une seule sortie parmi les m existantes pour synthétiser l'observateur,

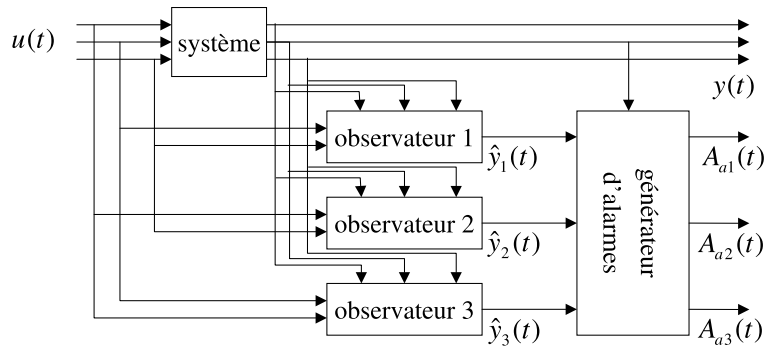


FIGURE 14 – Banc d’observateurs à entrées inconnues pour la localisation de défauts actionneur, approche GOS

l’erreur de reconstruction des sorties est sensible au défaut de capteur affectant la sortie utilisée. Cette approche DOS, illustrée par la figure 15, rend les conditions d’observabilité très contraignantes (le rang de C est limité par le nombre de sorties considérées). Pour contourner cette limite structurelle, on peut suivre l’approche GOS, représentée figure 16, pour la localisation de défauts capteur. Il s’agit de construire m observateurs, tels que le $i^{\text{ème}}$ observateur utilise l’ensemble des sorties sauf la $i^{\text{ème}}$. Dans ce cas, l’erreur de reconstruction des sorties générée à partir du $i^{\text{ème}}$ observateur est sensible à tous les défauts capteur sauf le $i^{\text{ème}}$, et on utilise une logique de décision analogue à celle détaillée pour la localisation de défauts actionneurs.

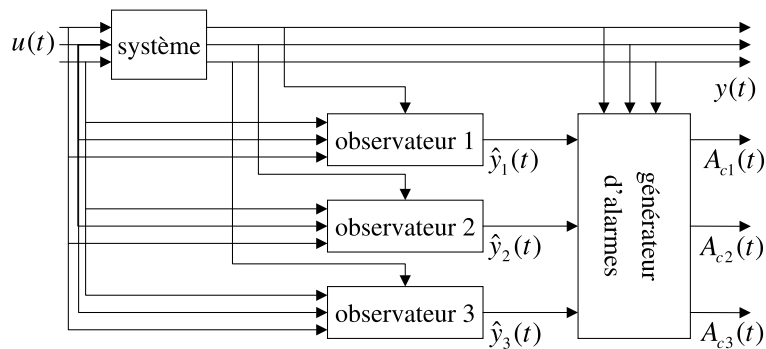


FIGURE 15 – Banc d’observateurs pour la localisation de défauts capteur, approche DOS

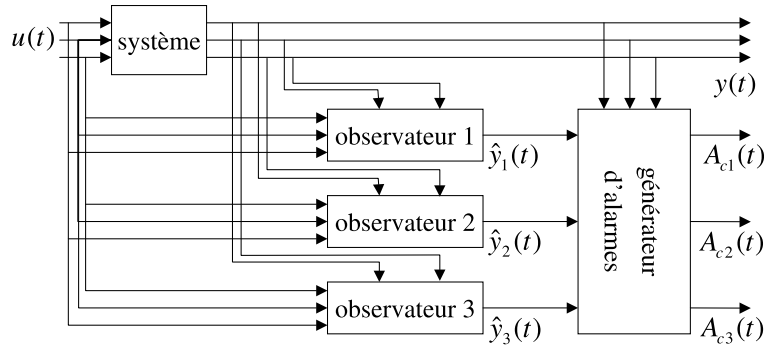


FIGURE 16 – Banc d’observateurs pour la localisation de défauts capteur, approche GOS

3.4.3 Exemple de mise en œuvre

Considérons à nouveau le réseau de distribution d’eau représenté à la figure 11 et modélisé par (127)-(128). Comme dans l’exemple précédent, le réseau est affecté par deux entrées inconnues : une fuite $f(t)$ dans la canalisation d’alimentation du réservoir 1, et des infiltrations inconnues $d(t)$ alimentant le réservoir 3. La fuite $f(t)$ apparaît entre les instants $t = 500$ s et $t = 750$ s. L’infiltration $d(t)$ est non nulle entre les instants $t = 850$ s et $t = 1050$ s. Comme précédemment, les mesures sont affectées par des bruits de capteurs.

Pour pouvoir avertir l’opérateur de l’apparition de chaque défaut, on construit deux observateurs à entrée inconnues :

- le premier observateur ne prend pas en compte l’infiltration $d(t)$, la seule entrée inconnue est $f(t)$, la matrice F est alors définie par $F^T = [a_1 \ 0 \ 0 \ 0]$. Le résidu défini par l’erreur d’estimation des sorties est sensible à $d(t)$ et insensible à $f(t)$;
- le second observateur ne tient pas compte de la fuite $f(t)$, la seule entrée inconnue est $d(t)$, la matrice F est alors définie par $F^T = [0 \ 0 \ 0 \ a_4]$. Le résidu défini par l’erreur d’estimation des sorties est sensible à $f(t)$ et insensible à $d(t)$.

On ne détaille pas la synthèse des observateurs, elle est identique à celle de l’observateur construit pour les deux entrées inconnues $f(t)$ et $d(t)$. Le programme ayant servi à cet exemple est donné en annexe, page 64.

L’entrée inconnue $f(t)$ intervient dans l’équation d’évolution de $q_1(t)$, qui est mesuré par $y_1(t)$, il serait donc intéressant d’étudier l’erreur d’estimation de la sortie $y_1(t)$ représentée par la figure 17(a). On constate en effet une augmentation du résidu entre $t = 500$ s et $t = 750$ s correspondant à l’apparition de $f(t)$.

L’entrée inconnue $d(t)$ apparaît dans l’équation différentielle de $q_4(t)$ qui est mesuré par $y_3(t)$. Pour détecter $d(t)$, on représente donc l’évolution de l’erreur d’estimation de $y_3(t)$ au moyen de l’observateur insensible à $f(t)$. On constate

sur la figure 17(b), que le résidu ainsi créé est significativement non nul entre $t = 850$ s et $t = 1050$ s, c'est à dire lors de l'apparition de $d(t)$.

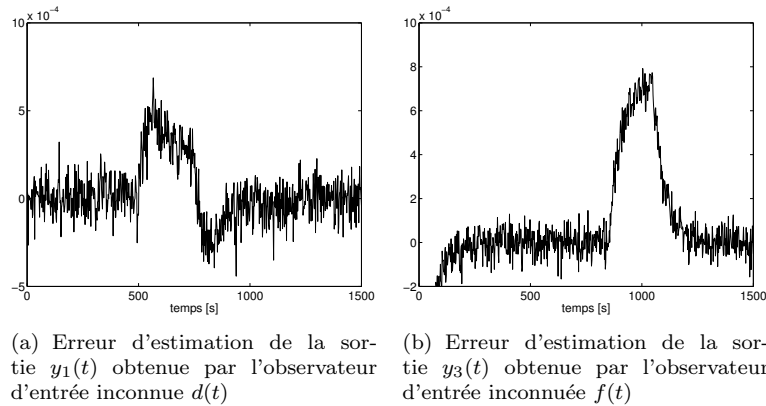


FIGURE 17 – Localisation de défaut dans un réseau de distribution d'eau

3.5 Discussion et extension

Dans cette chapitre nous avons choisi de développer exclusivement les techniques de diagnostic à base d'observateurs dans le cas déterministe et linéaire. Les techniques exposées se transposent aux cas des systèmes stochastiques, ou à celui des systèmes non-linéaires, la difficulté consistant à synthétiser un observateur, ou un banc d'observateurs pour le type de systèmes considérés.

Dans le cas des systèmes stochastiques, on utilise généralement le filtre de Kalman [Najim, 1998]. Sous les hypothèses que les bruits inconnus affectant le système de structure connue, et les mesures, sont de moyenne nulle, non corrélés entre eux, et de covariance connues, le filtre de Kalman donne une estimation sans biais (la moyenne de l'estimée est égale à la valeur réelle) et de variance minimale (la dispersion des estimations autour de la valeur réelle est minimisée).

Dans le cas des systèmes non-linéaires, des hypothèses sur la nature des non-linéarités (systèmes bilinéaires, présence de non-linéarités lipschitziennes, ...) permettent généralement d'utiliser des techniques de synthèse proches de celles existant pour le linéaire afin de construire des observateurs particuliers (observateurs bilinéaires [Yu, 1996], observateurs à modes glissants [Edwards, 2000], observateurs adaptatifs [Zhang, 2002], ...).

4 Analyse en composantes principales et diagnostic

L'analyse en composantes principales, communément appelée *ACP*, est une méthode statistique multidimensionnelle qui permet de synthétiser un ensemble

de données en identifiant la redondance existant dans celles-ci [Jolliffe, 1986]. Si à l'origine de son développement, elle a su se rendre attractive en montrant comment représenter graphiquement les groupements de données, mettre en évidence les corrélations entre observations ou variables, c'est actuellement avec les développements récents une méthode d'appréciation quantitative du contenu informatif des observations qui permet d'appréhender de nombreux problèmes tels que : la recherche de structure de modèles, l'identification de paramètres de modèles, la détection de valeurs aberrantes, la détection de changements de régimes de fonctionnement, le diagnostic de fonctionnement des systèmes. Le lecteur pourra consulter avec profit les ouvrages [Morineau, 1998], [Govaert, 2003], [Lebart, 2006].

Initialement, les techniques *ACP* ont été dédiées à l'analyse de comportements statiques et linéaires ; les extensions récentes et actuelles repoussent cette limitation en proposant des techniques applicables aux cas non linéaire et dynamique prenant en compte des critères de robustesse afin de s'affranchir de l'influence de certaines perturbations. Les applications de l'*ACP* sont très nombreuses et si, il y a quelques décennies, le domaine du génie chimique a été un champ d'application très fertile on trouve actuellement des investigations dans des domaines variés comme la vision, l'environnement, l'analyse de trafic de véhicules, de reconnaissance d'individus, la surveillance et le diagnostic.

4.1 Principe de l'analyse en composantes principales

Soit $x = (x_1 \dots x_n)^T$ un vecteur aléatoire constitué de n variables aléatoires caractérisant le fonctionnement d'un système à analyser ayant comme caractéristiques statistiques du premier et du deuxième ordre :

$$E(x) = 0 \tag{133}$$

$$\mathcal{E}(xx^T) = \Sigma \tag{134}$$

Excepté si l'une des variables x_i s'exprime en fonction d'autres, on a besoin des n variables pour décrire le comportement du système ; on peut cependant examiner si, au détriment d'une perte d'explicabilité quantifiable et admissible, il est possible de réduire le nombre de ces variables. Un des objectifs de l'*ACP* est précisément de décrire le système à l'aide d'un nombre plus restreint de variables [Jolliffe, 1986]. Pour cela, on définit une nouvelle variable t combinaison linéaire des variables aléatoires x_i :

$$t = p^T x \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \tag{135}$$

où, sans perte de généralité, le vecteur directeur p est supposé normalisé :

$$p^T p = 1 \tag{136}$$

La perte d'information liée à la réduction de dimension doit être quantifiée et le vecteur p optimal est celui qui minimise cette perte d'information. Pour cela un critère est défini de la façon suivante : on recherche p tel que la projection

de x sur p soit de variance maximale. Sachant que la matrice de projection sur p est définie par :

$$\pi = pp^T \quad (137)$$

le critère s'explique :

$$\Phi(p) = \mathcal{E} \| x - \pi x \|^2 \quad (138)$$

ou encore après développement :

$$\Phi(p) = Tr(\Sigma) - \mathcal{E}(t^T t) \quad (139)$$

$$= Tr(\Sigma) - p^T \Sigma p \quad (140)$$

La recherche du maximum de Φ sous la contrainte (136) conduit alors au résultat important suivant : p est le vecteur propre de Σ associé à sa plus petite valeur propre. De plus, la projection de x sur la direction p s'exprime par :

$$\hat{x} = \pi x = pt$$

qui représente la partie de x appartenant au sous-espace engendré par p . On peut aussi définir l'écart ou résidu :

$$\tilde{x} = x - \hat{x} = (I - pp^T)x$$

qui représente l'erreur commise lorsque x est remplacé par sa projection sur p , donc dans un espace de dimension réduite. La procédure peut être étendue à la recherche d'un deuxième vecteur directeur (orthogonal au premier) permettant également, par projection, d'expliquer une partie de l'information contenue dans x et non encore expliquée par la première direction. De façon plus générale, en procédant de façon itérative, si $(k-1)$ composantes p_i ont été déterminées, la $k^{\text{ème}}$ composante principale correspond au maximum de la variance résiduelle obtenue à partir des $(k-1)$ composantes principales :

$$p_k = \arg \max_p \left(\mathcal{E} \left\| p^T \left(I - \sum_{i=1}^{k-1} p_i p_i^T \right) x \right\|^2 \right)$$

De façon plus générale, si l'on cherche l'ensemble des combinaisons linéaires (135), il a été montré que :

- les directions p_i , $i = 1..n$, sont les vecteurs propres de la matrice Σ . Pour rechercher l'ensemble des directions, il convient donc de résoudre l'équation matricielle :

$$\Sigma P = P \Lambda$$

$P \in \mathbb{R}^{n..n}$ étant la matrice des vecteurs propres p_i de Σ et $\Lambda \in \mathbb{R}^{n..n}$ celle, diagonale, de ses valeurs propres λ_i .

- les valeurs propres de Σ témoignent du pouvoir explicatif de chaque direction p_i , ce que met en évidence le rapport suivant exprimant le pourcentage de variance expliquée par les ℓ premières composantes :

$$\tau(\ell) = 100 \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad \ell = 1..n$$

– les projections de x dans l'espace engendré par les colonnes de P sont :

$$\hat{x} = PP^T x = \sum_{j=1}^n p_j p_j^T x \quad (141)$$

et comme P contient tous les vecteurs propres de Σ , on a nécessairement $PP^T = I$, conduisant ainsi à la relation triviale $\hat{x} = x$.

– les coordonnées de x dans l'espace des vecteurs propres sont :

$$t = P^T x$$

La formulation précédente trouve un intérêt uniquement si l'on cherche à réduire la dimension de l'espace de représentation ; cette réduction ne sera possible que si les variables initiales ne sont pas indépendantes et présentent des coefficients de corrélation non nuls. Pour cela, les valeurs propres λ_i de la matrice Σ étant classées par amplitudes décroissantes, ce classement étant adopté aussi pour les vecteurs propres p_i , on peut chercher à exprimer la projection \hat{x} (141) uniquement à partir des ℓ ($\ell < n$) premiers vecteurs propres :

$$\hat{x}^{(\ell)} = \left(\sum_{j=1}^{\ell} p_j p_j^T \right) x \quad (142)$$

Les données sont ainsi “reconstituées” à partir des composantes principales les plus significatives en terme de variance expliquée. Bien évidemment, il est souhaitable que l'erreur de reconstruction soit quantifiée et puisse être rendue inférieure à un seuil donné en ajustant le nombre ℓ de composantes à retenir. De nombreuses procédures ont été développées dans ce sens et notamment celles reposant sur l'analyse de la variance de l'erreur de reconstruction \tilde{x} qui s'évalue de la façon suivante. On établit tout d'abord le modèle *ACP*, c'est-à-dire le calcul de P , matrice des vecteurs propres. Puis, en choisissant ℓ vecteurs propres, correspondant aux ℓ plus grandes valeurs propres, on reconstruit l'état $\hat{x}^{(\ell)}$ du système. On évalue ensuite l'erreur de reconstruction et sa variance :

$$\tilde{x}^{(\ell)} = x - \hat{x}^{(\ell)} = \left(I - \sum_{j=1}^{\ell} p_j p_j^T \right) x = \left(\sum_{j=\ell+1}^n p_j p_j^T \right) x \quad (143)$$

$$\mathcal{E}(\tilde{x}^{(\ell)} \tilde{x}^{(\ell)T}) = \left(\sum_{j=\ell+1}^n p_j p_j^T \right) \Sigma \left(\sum_{j=\ell+1}^n p_j p_j^T \right) \quad (144)$$

La variance de l'erreur de reconstruction est ainsi fonction du nombre ℓ de composantes retenues, cette variance étant décroissante avec ℓ . D'un point de vue pratique, une façon de choisir ℓ consiste à fixer une borne maximale sur cette variance.

Le saviez-vous ?

Les deux principales variétés de cafés cultivées sont connues sous les noms d'Arabica et Robusta. Les cafés moulus commerciaux sont constitués d'Arabica pur,

de Robusta pur ou de mélanges des deux. L'Arabica, considéré comme étant de qualité supérieure, est plus cher. Il est donc important de disposer de méthodes permettant de différencier ces deux variétés de cafés, afin de mieux contrôler la qualité des produits commerciaux, de dépister la présence de Robusta dans l'Arabica et de déterminer les proportions de chacun dans un mélange.

Des travaux récents sur la discrimination des variétés de cafés à partir de leur composition chimique ont été publiés. L'ACP a permis de définir les descripteurs, c'est-à-dire les variables, (la caféine, les stérols, les alcools terpéniques, les minéraux ou encore les acides phénoliques) permettant de différencier les deux variétés de café.

4.2 Extension à des données expérimentales

Il est important de noter que l'analyse précédente a été conduite sur des variables aléatoires. Cependant, dans la pratique, on est souvent confronté à analyser des données issues de chaînes de mesures collectant des informations sur le fonctionnement d'un système physique. Ces données sont rarement des variables aléatoires, mais la procédure précédente est néanmoins appliquée, les données étant considérées comme des réalisations particulières de variables aléatoires. On dispose alors d'une matrice de données $X \in \mathbb{R}^{N \times n}$ qui rassemble les N mesures effectuées sur les n variables du système. On peut évaluer la matrice de covariance de ces données :

$$\Sigma = X^T \left(I - \frac{UU^T}{U^TU} \right) X$$

U , le vecteur de dimension N dont toutes les composantes sont égales à 1, permettant de centrer les données. L'extension des résultats obtenus à la section 4.1 pour une variable aléatoire à une matrice de données permet d'écrire les décompositions :

$$X = TP^T \tag{145}$$

$$T = XP \tag{146}$$

où P est la matrice des vecteurs propres de Σ . Comme indiqué précédemment, ces relations trouvent uniquement leur intérêt lorsqu'on diminue la dimension de l'espace de représentation. Une fois déterminé le nombre ℓ de composantes à retenir, la matrice X des données peut être approximée de la façon suivante :

$$\hat{X} = X \sum_{i=1}^{\ell} p_i p_i^T \tag{147}$$

Plus simplement, si la matrice des vecteurs propres est partitionnée sous la forme :

$$P = (\hat{P} \quad \tilde{P}) \quad \hat{P} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$$

on peut expliciter la partie des données expliquées par les ℓ premiers vecteurs propres et la partie résiduelle respectivement par :

$$\hat{X} = X\hat{P}\hat{P}^T \quad (148)$$

$$\tilde{X} = X - \hat{X} = X(I - \hat{P}\hat{P}^T) \quad (149)$$

Une redondance d'information (liée au nombre de capteurs ou à des liaisons physiques entre des variables du système) est détectable par la présence de valeurs propres de Σ nulles ou de façon équivalente par la présence de vecteurs colonnes de \tilde{P} nuls. Dans la pratique, la présence d'erreurs de mesure affectant les données ou l'existence de liaisons "complexes" entre variables masquent partiellement ces valeurs nulles ; les redondances sont alors mises en évidence à partir d'un seuil approprié sélectionnant les valeurs propres les plus faibles.

L'expression (147) explicite la reconstruction de données à partir d'une partie des composantes principales. Bien évidemment, si les données utilisées pour cette reconstruction sont erronées, les valeurs reconstruites le seront également. On peut donc tenter d'effectuer la reconstruction en n'utilisant qu'une partie seulement des données.

Pour cela, considérons un vecteur x , de dimension n , dont la reconstruction est définie par :

$$\hat{x}^{(\ell)} = \sum_{i=1}^{\ell} p_i p_i^T x$$

En notant c_{ij} les éléments de la matrice $C = \sum_{i=1}^{\ell} p_i p_i^T$ et en particulierisant la contribution de la $i^{\text{ème}}$ composante de la mesure pour des raisons qui vont être justifiées, la $i^{\text{ème}}$ composante de \hat{x} (142) s'explique :

$$\hat{x}_i^{(\ell)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} x_j + c_{ii} x_i$$

Si l'on souhaite ne pas utiliser la $i^{\text{ème}}$ composante de la mesure, on propose de remplacer dans le membre de droite de cette équation x_i par l'estimation $\hat{x}_i^{(\ell)}$, ce qui donne après factorisation (si c_{ii} n'est pas nul) :

$$\hat{x}_i^{(\ell)} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} x_j}{1 - c_{ii}} \quad (150)$$

Ainsi, on peut estimer une variable à partir du modèle *ACP* (c'est-à-dire les coefficients c_{ij}) et des mesures des $n - 1$ autres variables. La procédure s'applique à l'ensemble des composantes de la variable x , chaque composante x_i de x pouvant être estimée à partir des composantes restantes ; elle peut aussi s'étendre à la reconstruction d'une variable à partir de $n - 2$ autres prises parmi les $n - 1$ restantes.

4.3 Application au diagnostic

Une fois obtenu le modèle *ACP* (c'est-à-dire la matrice des vecteurs propres et le nombre de composantes à retenir) à partir de données réputées saines, on peut tester la cohérence d'une nouvelle observation notée x . Le principe du test est assez simple : comme l'expression (150) fournit une reconstruction de la $i^{\text{ème}}$ composante de l'observation x , la comparaison de cette reconstruction avec cette $i^{\text{ème}}$ composante est un indicateur de cohérence. Dans le cas d'une incohérence avérée, il convient de la localiser, c'est-à-dire de préciser la composante de x qui est anormale. Le diagnostic comporte donc deux phases complémentaires : la détection d'anomalie et la localisation de cette anomalie.

Parmi les nombreux tests de détection, on se limite à rappeler ceux du *SPE* et de Hotelling.

- La statistique *SPE* (squared prediction error) est définie par :

$$SPE = \| \tilde{x} \|^2 = \| (I - \hat{P}\hat{P}^T)x \|^2 \quad (151)$$

Elle correspond à la projection de x sur l'espace résiduel des composantes retenues. Si cette quantité présente une amplitude importante, cela signifie que l'observation x appartient au sous-espace résiduel et donc que la corrélation entre les données n'a pu être observée. De façon plus précise, la mesure x est déclarée saine, et donc témoigne du fonctionnement correct du système si :

$$SPE \leq \delta_\alpha^2 \quad (152)$$

où le seuil δ_α^2 revêt une expression analytique approchée dans le cas où x suit une loi normale. Le test (152) indique ou non la présence d'une incohérence dans la mesure x . Pour localiser la composante de x suspecte, il convient d'analyser plus finement la forme quadratique *SPE* (151). Il a été montré que la plus grande composante (en valeur absolue) \tilde{x}_i de \tilde{x} est celle qui a contribué le plus au déclenchement du test. L'indice i localise donc la composante suspecte de la mesure. Il faut cependant noter que le seuil δ_α est établi dans des conditions très précises ; dans la pratique, bien que ces conditions ne soient pas totalement satisfaites, il peut servir de premier réglage pour la détection.

- Le test de Hotelling utilise la quantité :

$$T^2 = x^T \hat{P}\Sigma^{-1}\hat{P}^T x$$

qui est évaluée à partir des premières composantes principales. Il suit une loi du *chi* - 2 avec ℓ degrés de liberté.

- D'autres tests ont été proposés à partir des deux précédents. En particulier, on peut utiliser la statistique *SWE* (squared weighted error) qui n'est autre que la statistique *SPE* dans laquelle les erreurs sont pondérées par l'inverse de la variance des dernières composantes. On peut lui préférer la statistique combinée $\lambda T^2 + (1 - \lambda)SPE$, où λ est une fonction des données qui peut être estimée par une approche non paramétrique. Enfin, pour

s'affranchir en partie de bruits de mesure, la statistique *EWMA* (exponentially weighted moving average) consiste à filtrer numériquement le critère *SPE*

En ce qui concerne le deuxième aspect du diagnostic, c'est-à-dire la localisation de la composante de x en défaut, on procède de la façon suivante. On exprime tout d'abord la mesure x en fonction de la grandeur vraie x^* et du défaut à localiser. Pour repérer la direction du défaut, on définit le vecteur ξ_i ayant toutes ses composantes nulles sauf la $i^{\text{ème}}$:

$$\xi_i = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$$

En présence d'un défaut d'amplitude f dans la direction ξ_i , la mesure s'explique alors :

$$x = x^* + f\xi_i$$

Après projection de la mesure x sur les ℓ premières composantes principales retenues, on peut définir l'erreur de reconstruction en fonction des projections de la grandeur vraie et de la direction du défaut :

$$\tilde{x} = \tilde{x}^* + f\tilde{\xi}_i$$

où \tilde{x}^* et $\tilde{\xi}_i$ sont respectivement les projections de x^* et ξ_i dans l'espace résiduel, ce qui permet ensuite d'évaluer le critère :

$$SPE(\tilde{x}) = \|\tilde{x}\|^2$$

Si $f\tilde{\xi}_i$ (projection de $f\xi$ dans l'espace résiduel) est nul, cette valeur du *SPE* est identique à celle que l'on pourrait calculer si les grandeurs vraies étaient connues ; l'indicateur *SPE*, dans ce cas, se révèle inefficace pour la détection. En dehors de cette situation particulière, à partir de $f\tilde{\xi}_i = \tilde{x} - \tilde{x}^*$, on peut établir la majoration :

$$\|f\| \|\tilde{\xi}_i\| \leq \|\tilde{x}\| + \|\tilde{x}^*\|$$

dont on déduit une majoration de l'erreur de reconstruction :

$$\|\tilde{x}\| \leq \|f\| \|\tilde{\xi}_i\| + \|\tilde{x}^*\|$$

Ainsi, en définissant une borne a priori δ sur la norme de l'erreur de reconstruction des grandeurs vraies, on en déduit l'amplitude minimale de défaut détectable :

$$\|f\| > \frac{2\delta}{\|\tilde{\xi}_i\|}$$

4.4 Extensions

A partir de la formulation de base qui a été présentée, quelques extensions sont mentionnées : robustesse vis-à-vis des valeurs aberrantes, traitement en ligne, banc de modèles *ACP*, mélange de régimes de fonctionnement.

- L’analyse en composantes principales de données procède par transformation linéaire de ces données, cette transformation garantissant une perte minimale d’information au sens des moindres carrés. Pour être efficace, cette transformation, représentée par les vecteurs propres de la matrice de covariance des données, doit être établie à partir de données réputées saines. Malheureusement, cette dernière condition n’est pas toujours satisfaite. En présence de valeurs aberrantes, la technique des moindres carrés est peu robuste et des variantes ont été proposées pour en améliorer la portée. L’utilisation de critère d’optimisation pour minimiser l’erreur de reconstruction \tilde{x} construit à partir de fonction de Cauchy permet de s’affranchir en grande partie de l’influence de valeurs aberrantes. Le principe repose toujours sur la recherche d’un nombre réduit de composantes pour la reconstruction, mais en cherchant à rendre minimale une fonction de la variance de l’erreur de reconstruction \tilde{x} , cette fonction étant choisie pour ses propriétés de robustesse vis-à-vis des valeurs aberrantes. En substitution du critère quadratique (138), on peut choisir un critère sous la forme :

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^N \rho(\tilde{x}) \quad (153)$$

$$\tilde{x} = (I - pp^T)x \quad (154)$$

$$\rho(\tilde{x}) = \frac{c^2}{2} \log \left(1 + \left\| \frac{\tilde{x}}{c} \right\|^2 \right) \quad (155)$$

On démontre que la recherche du minimum de Φ conduit aussi à la recherche de valeurs et vecteurs propres de la matrice de variance, mais cette fois la variance étant calculée sur les mesures pondérées par w défini par :

$$w = 1 + \left\| \frac{\tilde{x}}{c} \right\|^2$$

- Un deuxième aspect concerne le traitement en ligne des données et en particulier leur validation. On a vu que le diagnostic d’un point de vue général nécessite la connaissance préalable du modèle *ACP*, et le test d’adéquation de ces données, au fur et à mesure de leur acquisition, vis-à-vis du modèle. Il est tout à fait envisageable d’enrichir progressivement le modèle *ACP* par les données ainsi validées. Un autre argument plaidant en faveur de la réactualisation du modèle est le cas de processus non stationnaires, mais toutefois lentement variable. Dans les deux cas cités, on peut donc chercher à remettre à jour le modèle *ACP* et ceci de façon récursive.
- Le cas des systèmes à plusieurs modes de fonctionnement est particulièrement riche d’application dans le domaine du diagnostic, l’objectif étant de reconnaître l’état de fonctionnement du système à partir d’observations. Une troisième extension concerne la conception de bancs de modèles *ACP*. Cette technique est utilisée lorsqu’un système est décrit par plusieurs

modes de fonctionnement mettant en jeu le même ensemble de variables mais avec des relations différentes. Le principe est donc, dans une phase d'apprentissage, de caractériser chaque mode de fonctionnement par un modèle *ACP*. Puis, en présence d'une nouvelle mesure collectée sur le système, la technique exposée précédemment est appliquée : la nouvelle mesure est testée vis-à-vis de chaque modèle *ACP* de façon à déterminer le mode de fonctionnement du système.

Un principe analogue peut être appliqué à un système caractérisé par un seul mode de fonctionnement, mais pour lequel plusieurs modèles *ACP* sont conçus, chacun faisant intervenir un jeu de variables partiellement différent. Dans le cas où une (ou plusieurs) variables sont suspectes, la discrimination des mesures erronées peut, sous certaines conditions d'isolation, être réalisée au moyen des différents modèles.

- La construction d'un modèle *ACP* suppose implicitement que les données reflètent le comportement du système lorsqu'il est dans un régime de fonctionnement. En réalité, un système peut présenter, en fonction de conditions opératoires, plusieurs régimes de fonctionnement et dans cette situation, il peut arriver que les données collectées soient relatives à une succession de régimes de fonctionnement sans que l'on sache a priori les reconnaître. Pour cela, on peut étendre la formulation précédente du modèle *ACP* unique au cas multi-modèle; on parle alors d'analyse en composantes principales généralisées (*ACPG*). Le mécanisme de l'*ACP* repose sur l'estimation d'un sous-espace linéaire $S \in \mathbb{R}^n$ de dimension inconnue $\ell < n$ à partir d'un ensemble de points $\{x_i \in S, i = 1..N\}$. L'*ACPG* généralise cette estimation à p sous-espaces linéaires $\{S_j, j = 1..p\}$ de \mathbb{R}^n ; le problème consiste à identifier chaque sous espace sans connaître a priori à quel sous espace appartiennent les différents points x_i . Ce problème de mélange a de nombreuses applications en traitement de signal, en traitement d'image, en reconnaissance de formes et plus généralement en diagnostic.

4.5 Exemple

Pour mieux appréhender la mise en œuvre de la technique *ACP*, un exemple académique est proposé. Les données ont été obtenues de la façon suivante. Tout d'abord, vingt réalisations de trois variables aléatoires ont été générées à partir de distributions gaussiennes :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I)$$

Puis, sept variables présentant des corrélations en sont déduites :

$$x_1 = \varepsilon_1 \quad (156a)$$

$$x_2 = \varepsilon_2 \quad (156b)$$

$$x_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (156c)$$

$$x_4 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (156d)$$

$$x_5 = -\varepsilon_2 \quad (156e)$$

$$x_6 = \varepsilon_3 \quad (156f)$$

$$x_7 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (156g)$$

Ainsi, ces sept variables sont liées par quatre équations linéaires. Enfin, à chaque variable ainsi générée sont ajoutés des bruits à effets multiplicatif et additif (issus de distributions normales centrées de variance unité). Les données ainsi obtenues sont regroupées dans la table 8. A partir de ces données, le cal-

-0,79	-1,13	0,29	-0,01	-0,22	1,72	0,71
-1,49	-1,38	-0,64	-1,11	-0,65	5,10	3,21
-0,07	1,04	-1,18	-1,06	1,11	0,49	2,53
0,52	-1,05	1,29	1,47	-0,71	-0,45	-1,52
-0,29	-0,40	-0,05	-0,13	0,02	1,37	0,46
-0,19	-0,38	-0,14	-0,16	-0,28	-1,40	-2,31
-0,12	1,66	-1,71	-1,94	1,63	3,78	6,15
0,02	0,05	-0,03	-0,44	0,10	2,57	2,44
-1,22	-1,57	0,06	-0,70	-1,16	-2,73	-5,17
0,91	-1,14	2,34	3,25	-0,84	-1,27	-1,17
0,65	1,28	-1,59	-1,04	1,95	2,68	4,63
0,97	1,71	-0,59	0,83	1,98	0,79	4,33
-0,85	1,52	-1,35	-2,53	1,20	0,67	2,12
-1,15	-1,64	0,20	-0,80	-1,37	-3,02	-6,29
0,56	-0,08	0,72	2,18	-0,27	0,34	1,17
0,18	-0,11	0,29	0,44	-0,50	1,07	1,27
-0,68	0,27	-1,45	-1,56	0,36	-1,44	-1,72
-0,42	-0,35	0,47	0,61	-0,53	-1,85	-2,55
-2,49	-0,77	-1,44	-2,78	-0,92	-0,52	-3,74
0,91	-0,67	1,82	2,66	-1,01	-2,17	-1,67

TABLE 8 – Valeurs expérimentales

cul du modèle *ACP* a été conduit ; pour cela, la matrice de covariance Σ a été calculée, puis ses valeurs et vecteurs propres évalués. La figure 18 visualise l'amplitude des $n = 7$ valeurs propres de la matrice de covariance des données et met clairement en évidence que trois composantes principales suffisent à expliquer la quasi totalité de l'information contenue dans les données. Ce résultat était prévisible compte tenu de la façon dont les données ont été générées ; en effet,

les sept variables (avant superposition du bruit) sont liées par quatre équations linéaires et, par conséquent, la matrice de covariance a quatre valeurs propres nulles (en réalité proches de la valeur nulle en raison de l'influence des bruits de mesure). Le modèle *ACP* est ainsi constitué des trois vecteurs propres relatifs aux trois plus grandes valeurs propres de Σ . Ce modèle peut alors être exploité pour la surveillance du système et la détection de dysfonctionnement en particulier.

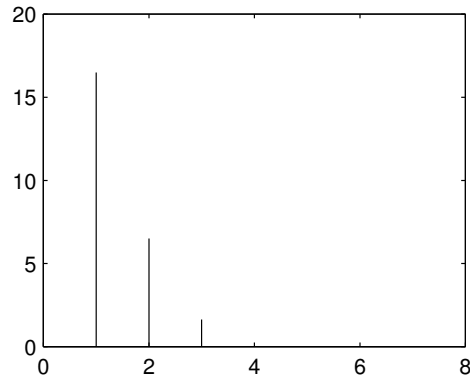


FIGURE 18 – Valeurs propres

Pour mettre en évidence l'aptitude du modèle *ACP* à détecter des dysfonctionnements, un défaut a été généré. Ici, il s'agit d'un défaut de mesure : la troisième variable a été biaisée entre les observations 7 à 12 en lui ajoutant la valeur 1. Pour analyser cette nouvelle matrice d'observations et tenter de détecter la présence de défauts de mesure, la technique de reconstruction a été appliquée. Pour cela, le modèle *ACP* précédent a été utilisé et chaque ligne de la matrice des observations a subi la procédure de reconstruction (150).

La figure 19 visualise la somme des carrés des erreurs de reconstruction pour le modèle *ACP* utilisant toutes les variables. Cette somme subit une variation importante entre les observations 7 à 12 témoignant ainsi de la présence de valeurs aberrantes c'est-à-dire invalides par rapport au modèle *ACP*.

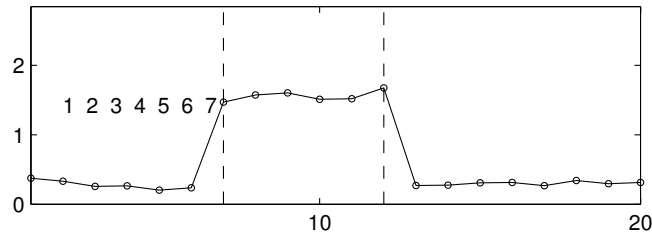


FIGURE 19 – Critère de reconstruction (à partir de toutes les variables)

Il convient ensuite d'essayer de localiser quelle variable, pour les observations

7 à 12 a pu être contaminée par un défaut. Pour cela, la procédure suivante a été adoptée. Le modèle *ACP* précédemment établi utilisait l'ensemble des sept variables disponibles. Il est également possible de construire des modèles *ACP* n'utilisant qu'une partie des sept variables, technique connue sous le nom d'*ACP* partielle. Ici, nous limitons cette construction en utilisant des modèles *ACP* à six variables. On peut ainsi construire, à partir des données initiales (en l'absence de défauts), sept modèles *ACP*, élaborés en conservant quatre composantes principales. Pour chaque modèle *ACP*, la procédure de reconstruction (150) est appliquée.

La figure 20 visualise la somme des carrés des erreurs de reconstruction pour des modèles *ACP* à $(n - 1)$ variables. A partir d'un jeu de mesures des sept variables ne comprenant pas de défaut, nous avons constitué sept modèles *ACP* chacun construit à partir de 6 variables; le $i^{\text{ème}}$ modèle est donc élaboré en utilisant toutes les variables sauf la $i^{\text{ème}}$. Sur chaque graphe de la figure 20, on a rappelé les variables utilisées.

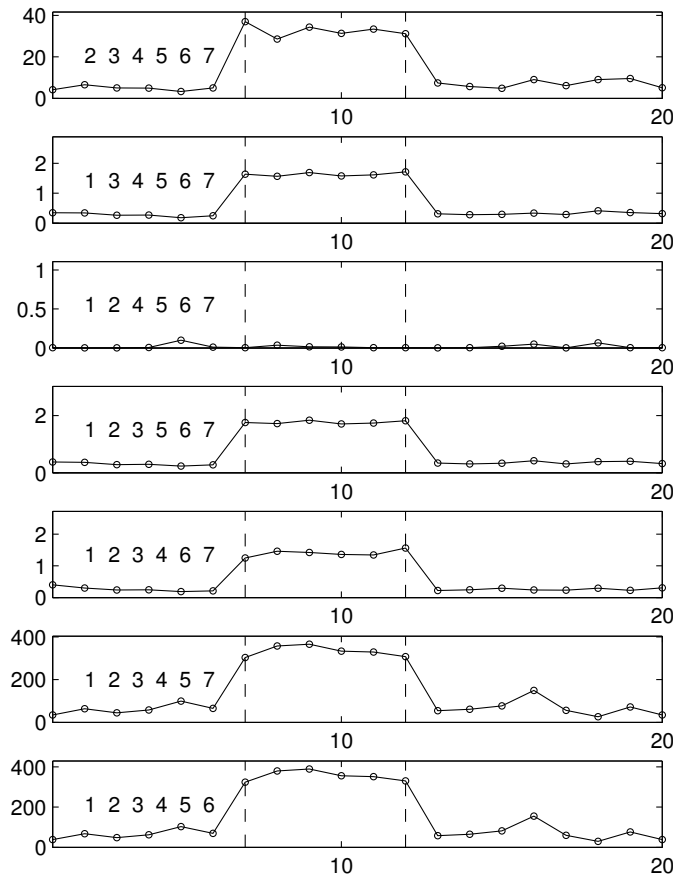


FIGURE 20 – Critère de reconstruction (à partir de toutes les variables sauf une)

Pour chaque modèle, les variables ont été reconstruites pour l'ensemble des 20 observations et les erreurs de reconstructions évaluées. Le premier graphique de la figure 20 indique la somme des carrés des erreurs de reconstruction pour chaque observation en utilisant le modèle *ACP* construit avec toutes les variables sauf la première ; l'évolution de la somme des carrés des erreurs de reconstruction indique de façon significative la présence de mesures aberrantes dans les observations 7 et 12. De façon nette, le troisième graphique obtenu sans utiliser la variable 3 met en évidence des erreurs de reconstruction très faibles, témoignant ainsi de l'absence de défauts dans les mesures. Ce banc de modèles *ACP* permet donc de détecter et de localiser, sans ambiguïté le capteur en défaut.

5 Annexes

5.1 Annexe 1 : Estimateur des moindres carrés

A partir d'un vecteur d'observations bruitées :

$$Z = HX^* + \varepsilon$$

on cherche à estimer le vecteur d'état X^* . Cette estimation est réalisée en minimisant la somme des carrés des différences entre les mesures et les estimations que l'on cherche.

Le critère que l'on cherche à minimiser peut alors s'écrire :

$$\phi = \frac{1}{2}(Z - HX^*)^T(Z - HX^*) = \frac{1}{2}\|Z - HX^*\|^2$$

Le minimum de ϕ est atteint lorsque sa dérivée par rapport à X^* est nulle :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X^*} \right|_{X^* = \hat{X}} = 0$$

L'expression précédente fait intervenir une opération de dérivation matricielle¹⁵, plus particulièrement, il faut savoir dériver un scalaire (ϕ) par rapport à un vecteur (X^*). Les règles de dérivation scalaire se transposent aisément au cas matriciel ; développons l'expression du critère ϕ :

$$\phi = \frac{1}{2}(Z^T Z - Z^T HX^* - (X^*)^T H^T Z + (X^*)^T H^T HX^*)$$

On obtient :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X^*} \right|_{X^* = \hat{X}} = \frac{1}{2}(-2H^T Z + 2H^T H \hat{X}) = 0$$

d'où l'égalité matricielle :

$$H^T Z = H^T H \hat{X}$$

c'est-à-dire :

$$\hat{X} = (H^T H)^{-1} H^T Z$$

15. voir annexe 2

5.2 Annexe 2 : Opérations de dérivation matricielle

Dérivée d'un vecteur par rapport à un scalaire

On considère un vecteur X , de dimension n , dont les composantes dépendent d'un scalaire a :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \text{On a} \quad \frac{\partial X}{\partial a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial a} \end{pmatrix}$$

Dérivée d'un scalaire par rapport à un vecteur

On considère une fonction scalaire f d'un vecteur X de dimension n :

$$a = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Par définition, on a :

$$\frac{\partial a}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial a}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial a}{\partial X^T} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial a}{\partial x_n} \right)$$

Dérivée d'un produit scalaire par rapport à un vecteur

Soit le produit scalaire a de deux vecteurs X et Y de dimension n

$$a = Y^T X$$

D'après la règle de dérivation précédente, on a immédiatement :

$$\frac{\partial a}{\partial X} = \frac{\partial Y^T X}{\partial X} = Y$$

Dérivée d'un vecteur par rapport à un vecteur

Considérons les deux vecteurs X et Y :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

On a :

$$\frac{\partial X}{\partial Y^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Dérivée d'une forme quadratique par rapport à un scalaire

On considère un vecteur X et une matrice carrée A de dimension $n \times n$. En combinant les divers résultats précédents, la dérivée de la forme quadratique $X^T A X$, par rapport au scalaire a , s'écrit :

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial a} = \frac{\partial X^T}{\partial a} A X + X^T \frac{\partial A}{\partial a} X + X^T A \frac{\partial X}{\partial a} \quad (157)$$

Si la matrice A est indépendante du scalaire a , on a :

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial a} = \frac{\partial X^T}{\partial a} A X + X^T A \frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial X^T}{\partial a} (A + A^T) X$$

Si, de plus, la matrice A est symétrique :

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial a} = 2 \frac{\partial X^T}{\partial a} A X$$

Dérivée d'une forme quadratique par rapport à un vecteur

L'expression précédente se généralise à la dérivation par rapport à un vecteur :

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial Y} = 2 \frac{\partial X^T}{\partial Y} A X$$

En particulier, si $Y = X$, on a :

$$\frac{\partial X^T A X}{\partial X} = 2 \frac{\partial X^T}{\partial X} A X = 2 A X$$

5.3 Annexe 3 : Exemple d'estimation - modèle linéaire

```

clear
% --> Matrice d'incidence du graphe
% 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12  13  14  15
M=[1  -1  -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 % I
    0  0  0  1  -1  -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0 % II
    0  1  0  0  1  0  0  0  0  -1  0  0  0  1  0 % III
    0  0  0  0  0  0  0  0  1  -1  -1  0  0  0  0 % IV
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  -1  -1 % V
    0  0  0  0  0  1  -1  -1  0  0  0  0  0  0  0 % VI
    0  0  1  -1  0  0  0  1  0  1  0  0  0  0  0 % VI
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  -1  0  0]; % VIII
% --> Vecteur des mesures
X=[ 59.35  25.87  33.16  84.36  59.25  23.82  8.14  14.98 ...
    129.10  36.12  91.31  36.30  125.13  41.74  86.52]';
% --> Vecteur des écarts-type
E=[0.75  0.33  0.66  0.63  0.75  0.34  0.06  0.22 ...
    1.60  0.36  1.84  0.70  1.58  0.40  1.72]';
% --> Calcul des écarts de bouclage de bilan
R=M*X
% --> Constitution de la matrice de variance des mesures
V=diag(E.*E);
% --> Evaluation du nombre de mesures
v=length(X);
% --> Calcul de la matrice de projection
P=eye(v)-V*M'*inv(M*V*M')*M;
% --> Calcul des estimés
Xe=P*X;
% --> Calcul de la matrice de variance-covariance des estimations
Ve=P*V;
% --> Ecarts-type des estimations
Ee=sqrt(diag(Ve));
% --> Affichage des résultats
Res=[X E Xe Ee];
disp(['  Mesures  Ecart-type Estimés  Ecart-type'])
disp(['          mesure          estimé'])
disp(Res)

```

5.4 Annexe 4 : Exemple d'estimation - modèle non linéaire

La résolution de l'exercice de la section 2.3.6 nécessite le calcul du gradient des contraintes par rapport aux variables. Pour cet exemple, on a :

$$G(\hat{X}) = \frac{dF(\hat{X})}{d\hat{X}^T} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2 & \hat{x}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\exp(-\hat{x}_1) & \exp(-\hat{x}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{x}_3^2 & 0 & 2\hat{x}_1\hat{x}_3 & 0 & 0 & -1 \\ -\hat{x}_3 & 0 & -\hat{x}_1 & 3\hat{x}_4^2 & 0 & 0 \\ 1/\hat{x}_4 & 0 & 2\hat{x}_3\hat{x}_5 & -\hat{x}_1/\hat{x}_4^2 & \hat{x}_3^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le test de convergence utilisé porte sur la norme de la différence entre deux itérés \hat{X}_i et \hat{X}_{i+1} successifs : si $\|\hat{X}_{i+1} - \hat{X}_i\| < 10^{-6}$, on arrête le calcul itératif et la solution correspond à la dernière estimation calculée.

Le programme MATLAB[®] ci-dessous réalise l'estimation des grandeurs vraies. On pourra remarquer la convergence extrêmement rapide de l'algorithme (5 itérations pour parvenir à la solution). Cela est dû au fait que l'on se place ici dans une situation très favorable car, d'une part, on dispose de la mesure de toutes les variables du système et, d'autre part, le jeu de mesures traité ne comporte pas de mesures aberrantes. Le lecteur pourra, en modifiant le jeu de données, analyser l'influence de la qualité de l'initialisation sur la convergence de la méthode.

```
clear
% --> Données du problème
x=[0.760 5.80 5.33 1.60 0.73 22.55]';
p=[5 8 2 2 5 6]';
a=5.5254;
v=length(x);
% --> Elaboration de la matrice de variance
V=diag((x.*p/200).^2);
% --> Calcul des résidus de contraintes
r(1)=x(1)*x(2)+x(5)-a;
r(2)=exp(-x(1))-exp(-x(2))-0.5;
r(3)=x(1)*x(3)^2-x(6);
r(4)=x(4)^3-x(1)*x(3);
r(5)=x(5)*x(3)^2+x(1)/x(4)-x(6);
% --> Initialisation
xe1=x;
fini=0; i=0;
% --> Boucle d'itération principale
while ~fini
    i=i+1;
    xe=xe1;
% --> Résidus de contrainte F
```

```

F=[xe(1)*xe(2)+xe(5)-a;
  exp(-xe(1))-exp(-xe(2))-0.5;
  xe(1)*xe(3)^2-xe(6);
  xe(4)^3-xe(1)*xe(3);
  xe(5)*xe(3)^2+xe(1)/xe(4)-xe(6)];
% --> Gradient des contraintes G
G=[  xe(2)      xe(1)      0      0      1      0
    -exp(-xe(1)) exp(-xe(2))  0      0      0      0
      xe(3)^2      0      2*xe(1)*xe(3)      0      0      -1
      -xe(3)      0      -xe(1)      3*xe(4)^2      0      0
      1/xe(4)      0      2*xe(3)*xe(5) -xe(1)/xe(4)^2  xe(3)^2  -1];
% --> Estimation
invGVG=inv(G*V*G');
xe1=(eye(v)-V*G'*invGVG*G)*x+V*G'*invGVG*(G*xe-F);
% --> Test de convergence
if(norm(xe1-xe)) < 1e-6,  fini = 1;  end
end
% --> Estimation finale
xe=xe1;
% --> Résidus finaux
F=[xe(1)*xe(2)+xe(5)-a;
  exp(-xe(1))-exp(-xe(2))-0.5;
  xe(1)*xe(3)^2-xe(6);
  xe(4)^3-xe(1)*xe(3);
  xe(5)*xe(3)^2+xe(1)/xe(4)-xe(6)];
% --> Affichage des résultats
disp('Résidus initiaux et finaux')
[r(:) F]
disp('Mesures et estimations')
[x xe]

```

5.5 Annexe 5 : mise en œuvre d'un observateur pour la détection de défaut

On trouvera ci-dessous le programme MATLAB[®] ayant servi à générer l'exemple de la page 31

```
% --> Définition du modèle
A=[-3 2.5 3;0 -4 -2;0.1 -5 -6];
B=[1 0;0 1;0 0];Bc=[0;0;0];
C=[1 0 0;0 1 0];
D=[0 0;0 0];Dc=[0;1];
sys=ss(A,[B Bc],C,0);
% --> Simulation du système
t=0:0.01:10;
u=[zeros(1,101) 1*ones(1,200) 4*ones(1,300) 2*ones(1,200) 5*ones(1,200);
   zeros(1,201) 5*sin(t(202:1001))];
fc=[zeros(1,501) 0.5*ones(1,200) zeros(1,300)];
y=lsim(sys,[u;fc],t,[4;4;4]);
y=y'+Dc*fc+0.04*randn(2,1001);
% --> Définition et simulation de l'observateur
K=[12 -13;-3.5 4.4;-1 -2.5];
obs=ss(A-K*C,[B K],eye(3),zeros(3,4));
xobs=lsim(obs,[u;y],t,[0;0;0]);
yobs=C*xobs';
% --> Erreur d'estimation des sorties
ey=y-yobs;
figure('name','erreur d'estimation des sorties'),
subplot(211),plot(t,ey(1,:));
subplot(212),plot(t,ey(2,:));
% --> Estimation du défaut
Dcp=pinv(Dc);
filtre=ss([A-K*C zeros(3,3);-K*C A],[B K;zeros(3,2) K],...
          [-pinv(Dc)*C pinv(Dc)*C],[[0 0] pinv(Dc)]);
f_obs=lsim(filtre,[u;y],t,[0;0;0;0;0;0]);
figure('name','comparaison du défaut et de son estimation'),
subplot(211),plot(t,fc)
subplot(212),plot(t,f_obs)
```

5.6 Annexe 6 : mise en œuvre d'un observateur à entrées inconnues pour la détection de défaut

On trouvera ci-dessous le programme MATLAB[©] ayant servi à générer les exemples des pages 36 et 42

```
% --> Définition du modèle, et calcul du point d'équilibre
g=9.81;      s=0.001;      S1=100;      S2=150;      S3=300;      S4=400;
qe10=0.02;  qe20=0.015;
q10=qe10;   q20=qe20;     q30=q10+q20;   q40=q30;
h10=qe10^2/(s^2*2*g);   h20=qe20^2/(s^2*2*g);
h30=q30^2/(2*g*s^2);    h40=q40^2/(2*g*s^2);
a1=sqrt(g/(2*h10))/S1;  a2=sqrt(g/(2*h20))/S2;
a3=sqrt(g/(2*h30))/S3;  a4=sqrt(g/(2*h40))/S4;
A=[-a1 0 0 0;0 -a2 0 0;a3 a3 -a3 0;0 0 a4 -a4];
B=[a1 0;0 a2;0 0;0 0];  F=[a1 0;0 0;0 0;0 a4];
C=[1 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
m=size(C,1);  n=size(A,1);  q=size(F,2);  p=size(B,2);
Sys=ss(A,[B F],eye(n),zeros(n,p+q));
% --> Création des données : simulation du système
t=0:2:1500;
u=[0.001*ones(1,100) .003*ones(1,50) -.001*ones(1,100) .005*ones(1,125)
.001*ones(1,50) -0.002*ones(1,75) .003*ones(1,100) 0*ones(1,151);
0.002*ones(1,50) -.002*ones(1,100) -.005*ones(1,75) -.001*ones(1,150)
.003*ones(1,50) 0.001*ones(1,100) .005*ones(1,75) .003*ones(1,151)];
f=zeros(1,length(t)); f(1,251:375)=-.5*u(1,251:375);
d=zeros(1,length(t)); d(1,426:525)=0.02;
x=lsim(Sys,[u;f;d],t,[0.001;0-.001;0.001;-0.001]);
y=C*x'+0.00005*randn(size(C*x'));
% --> Synthèse de l'observateur à entrées inconnues insensible à f(t) et d(t)
CFp=pinv(C*F);
pol=[-0.0196 -0.0206 -0.0216 -0.0196];
THK=place((eye(n)-F*CFp*C)*A',[(eye(m)-C*F*CFp)*C*A ; C]',pol);
THK=THK'; TH=THK(:,1:m); K=THK(:,m+1:end);
N=(eye(n)-F*CFp*C)*A-[TH K]*[(eye(m)-C*F*CFp)*C*A ; C];
E=F*CFp+TH*(eye(m)-C*F*CFp);
M=(eye(n)-E*C)*B; L=K+N*E;
Obs=ss(N,[M L],eye(n),[zeros(n,p) E]);
xo=lsim(Obs,[u;y],t,[0;0;0;0]);
% --> Affichage des résultats de l'observation
figure,
subplot(221),plot(t,x(:,1),'k--',t,xo(:,1),'r'),
subplot(222),plot(t,x(:,2),'k--',t,xo(:,2),'r'),
subplot(223),plot(t,x(:,3),'k--',t,xo(:,3),'r'),
subplot(224),plot(t,x(:,4),'k--',t,xo(:,4),'r'),
```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           DIAGNOSTIC           %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% --> Synthèse de l'observateur à entrées inconnues insensible à f(t)
F1=F(:,1);
CFp1=pinv(C*F1);
THK1=place((eye(n)-F1*CFp1*C)*A', [(eye(m)-C*F1*CFp1)*C*A ; C]',pol);
THK1=THK1'; TH1=THK1(:,1:m); K1=THK1(:,m+1:end);
N1=(eye(n)-F1*CFp1*C)*A-[TH1 K1]*[(eye(m)-C*F1*CFp1)*C*A ; C];
E1=F1*CFp1+TH1*(eye(m)-C*F1*CFp1);
M1=(eye(n)-E1*C)*B; L1=K1+N1*E1;
Obs1=ss(N1,[M1 L1],eye(n),[zeros(n,p) E1]);
% --> Création du résidu par l'observateur insensible à f(t)
xo1=lsim(Obs1,[u;y],t,[0;0;0;0]);
r1=y-C*xo1';
% --> Synthèse de l'observateur à entrées inconnues insensible à d(t)
F2=F(:,2);
CFp2=pinv(C*F2);
THK2=place((eye(n)-F2*CFp2*C)*A', [(eye(m)-C*F2*CFp2)*C*A ; C]',pol);
THK2=THK2'; TH2=THK2(:,1:m); K2=THK2(:,m+1:end);
N2=(eye(n)-F2*CFp2*C)*A-[TH2 K2]*[(eye(m)-C*F2*CFp2)*C*A ; C];
E2=F2*CFp2+TH2*(eye(m)-C*F2*CFp2);
M2=(eye(n)-E2*C)*B; L2=K2+N2*E2;
Obs2=ss(N2,[M2 L2],eye(n),[zeros(n,p) E2]);
% --> Création du résidu par l'observateur insensible à d(t)
xo2=lsim(Obs2,[u;y],t,[0;0;0;0]);
r2=y-C*xo2';
% --> Affichage des résultats de diagnostic
figure,subplot(211),plot(t,r2(1,:),'k'),subplot(212),plot(t,r1(3,:),'k')

```

Références

- [Arora, 2001] N. Arora. Redescending estimator for data reconciliation and parameter estimation. *Computers and Chemical Engineering*, 25 (11/12), p. 1585-1599, 2001.
- [Bagajewicz, 2001] M.J. Bagajewicz. *Process plant instrumentation : design and upgrade*. Technomic Publishing, Lancaster, 2001.
- [Blanke, 2003] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, M. Staroswiecki. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer, 2003.
- [Chen, 1999] J. Chen, R.J. Patton. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [Chiang, 2001] L.H. Chiang, E.L. Russell, R.D. Braatz. *Fault detection and diagnosis in industrial systems*. Springer, 2001.
- [Edwards, 2000] C. Edwards, S.K. Spurgeon, R.J. Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36 (4), pp. 541-553, 2000.
- [Gertler, 1998] J. Gertler. *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Dekker, 1998.
- [Govaert, 2003] G. Govaert. *Analyse des données*. Traité IC2, série Traitement du signal et de l'image. Hermès Science Publications, 2003.
- [Hampel, 1986] F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stohel. *Robust statistic : the approach on influence functions*. Wiley, New-York, 1986.
- [Iserman, 2006] R. Isermann. *Fault-diagnosis systems : an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer-Verlag, 2006.
- [Jolliffe, 1986] I. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Lebart, 2006] L. Lebart, M. Piron, A. Morineau. *Statistiques exploratoire multidimensionnelle. Visualisations et inférences en fouille de données*. Dunod, 2006.
- [Maquin, 2000] D. Maquin. *Diagnostic des systèmes linéaires*. Collection pédagogique d'automatique, Hermès Science Publications, 2000.
- [Morineau, 1998] A. Morineau, T. Aluja-Banet. *Analyse en composantes principales (avec illustrations SPAD)*. Lavoisier, 1998.
- [Najim, 1998] M. Najim. Filtrage optimal. Technip volume R7228-S1, pp. 12-18 1998.
- [Narasimhan, 2000] S. Narasimhan, C. Jordache. *Data reconciliation and gross error detection - An intelligent use of process data*. Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 2000.
- [Patton, 2000] R.J. Patton, P.M. Frank, R.N. Clark. *Issues of fault diagnosis for dynamic systems*. Springer Verlag, 2000.
- [Patton, 1989] R.J. Patton, P. Frank, R. Clark, *Fault Diagnosis in Dynamic Systems - Theory and Application*, Prentice Hall, 1989.

- [Ragot, 1990] J. Ragot, M. Darouach, D. Maquin, G. Bloch. *Validation de données et diagnostic*. Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, 432 p., Hermès, 1990.
- [Ragot, 2005] J. Ragot, M. Chadli, D. Maquin. Mass balance equilibration : a robust approach using contaminated distribution. *AIChE Journal*, 51 (5), pp. 1569-1575, 2005.
- [Romagnoli, 2000] J.A. Romagnoli, M.C. Sánchez. *Data processing and reconciliation for chemical process operations*. Academic Press, 2000.
- [Yu, 1996] D. Yu, D.N. Shields, S. Daley. A bilinear fault detection observer and its application to a hydraulic system. *International Journal of Control*, 64 (6), pp. 1023-1047, 1996.
- [Zhang, 2002] Q. Zhang. Adaptive observer for MIMO linear time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (3), pp. 525-529, 2002.
- [Zwingelstein, 1995] G. Zwingelstein. *Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels*. Traité des Nouvelles Technologies, série Diagnostic et Maintenance, Hermès, Paris, 1995.