

De l'identification au diagnostic des systèmes non linéaires à l'aide d'un multimodèle découplé

Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR7039, Nancy-Université, CNRS

Réunion du Groupe de Travail S3 Sûreté-Surveillance-Supervision
4 octobre 2007



Nancy-Université
INPL



Problématique

- Les systèmes physiques présentent souvent un comportement de type non linéaire
- Modèles non linéaires relativement difficiles à manipuler
- Nombreux outils d'analyse pour les modèles linéaires
- Dilemme entre la précision (modèles non linéaires) et l'*utilisabilité* (modèles linéaires)

Problématique

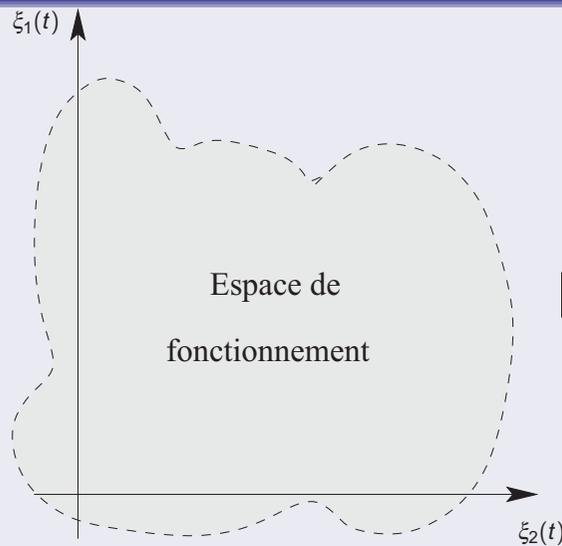
- Les systèmes physiques présentent souvent un comportement de type non linéaire
- Modèles non linéaires relativement difficiles à manipuler
- Nombreux outils d'analyse pour les modèles linéaires
- Dilemme entre la précision (modèles non linéaires) et l'*utilisabilité* (modèles linéaires)

Approche proposée

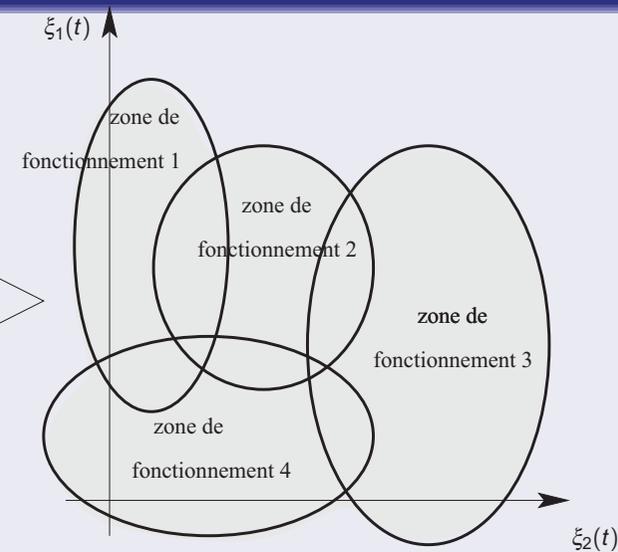
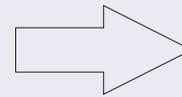
Approximation du système non linéaire par un **multimodèle** :

- 1 ensemble de sous-modèles
- 2 mécanisme d'interpolation

Principe du multimodèle

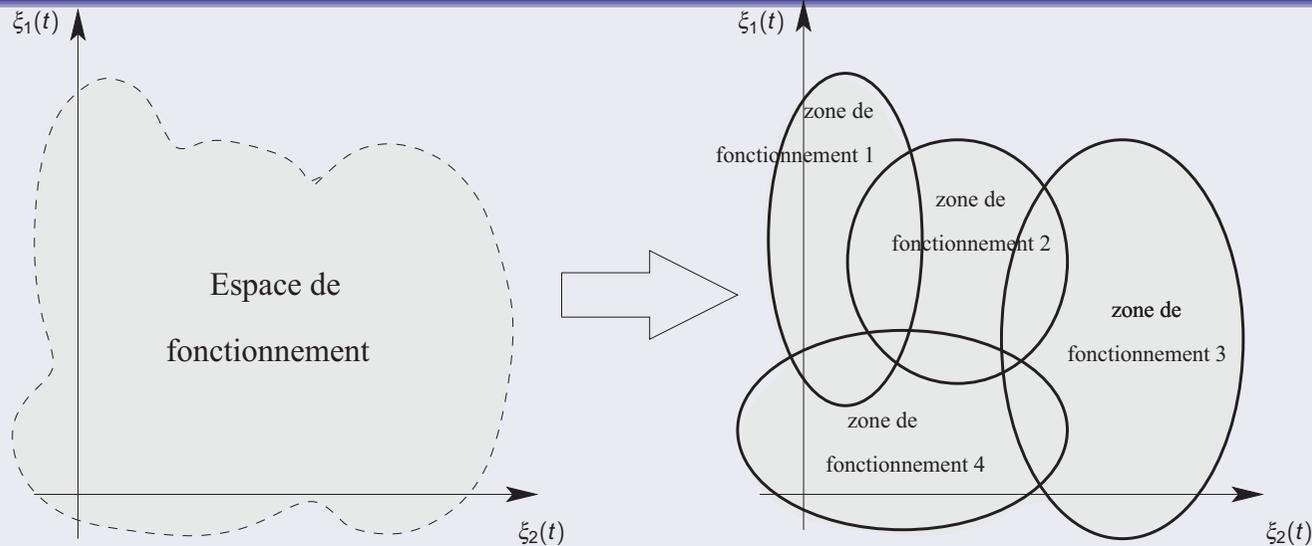


SYSTEME NON LINEAIRE



REPRESENTATION MULTIMODELE

Principe du multimodèle

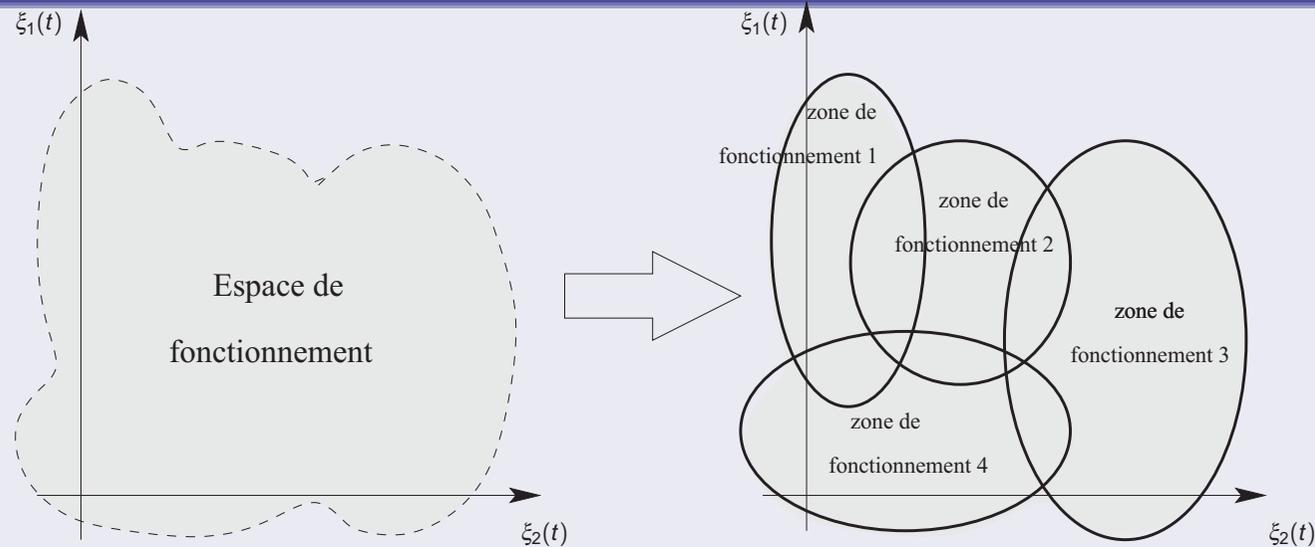


SYSTEME NON LINEAIRE

REPRESENTATION MULTIMODELE

- Décomposition en zones de fonctionnement

Principe du multimodèle

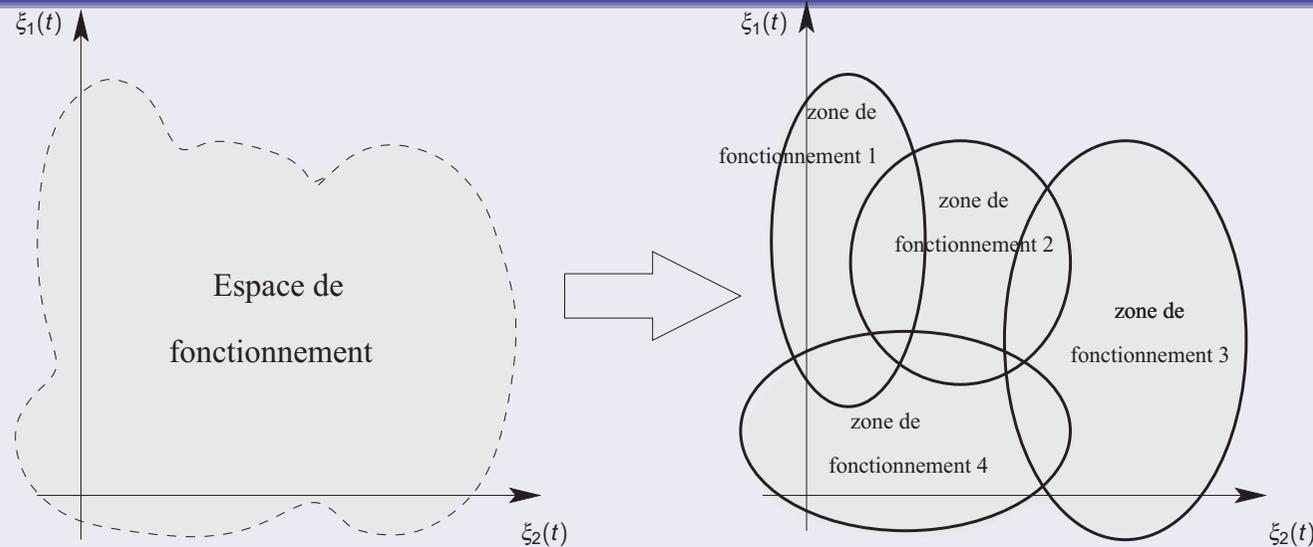


SYSTEME NON LINEAIRE

REPRESENTATION MULTIMODELE

- Décomposition en zones de fonctionnement
- Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire

Principe du multimodèle

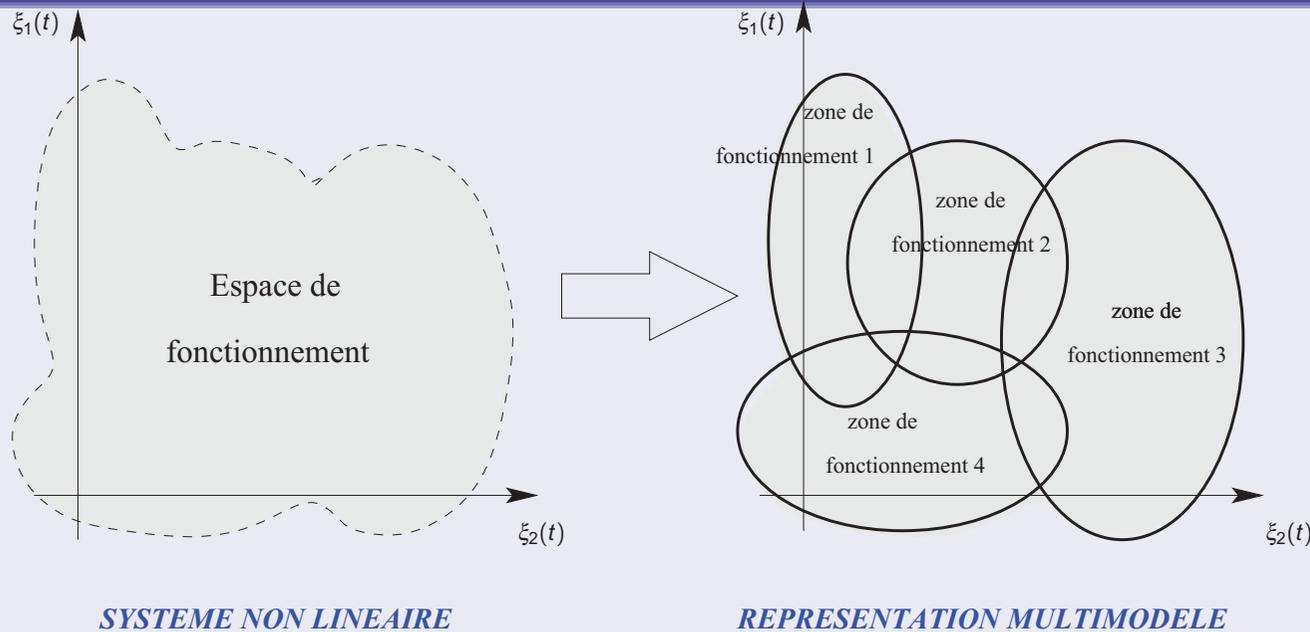


SYSTEME NON LINEAIRE

REPRESENTATION MULTIMODELE

- Décomposition en zones de fonctionnement
- Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire
- La contribution des sous-modèles est quantifiée par une fonction poids

Principe du multimodèle



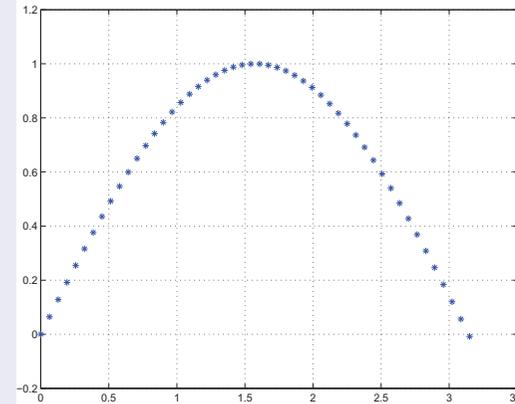
- Décomposition en zones de fonctionnement
- Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire
- La contribution des sous-modèles est quantifiée par une fonction poids

Intérêts des multimodèles

- Bon moyen de représenter un système non linéaire
- Extension des résultats du cas linéaire au cas non linéaire

Comportement non linéaire

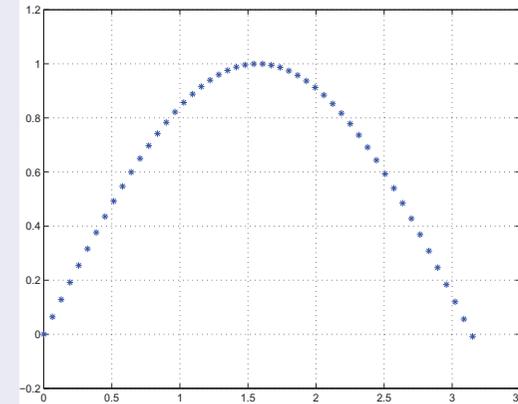
- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$



Représentation par un multimodèle

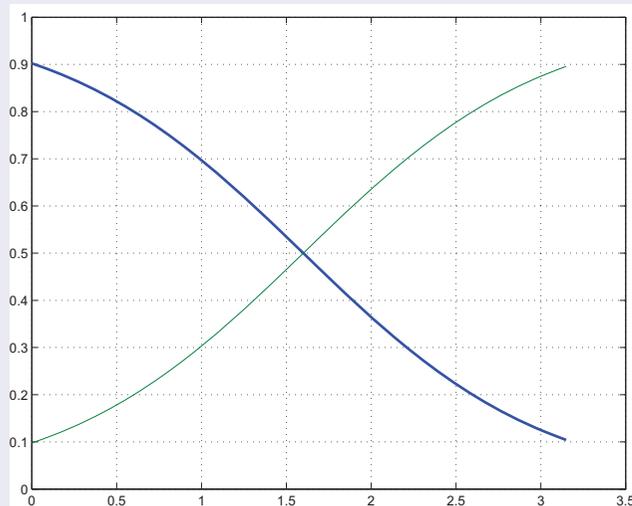
Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$



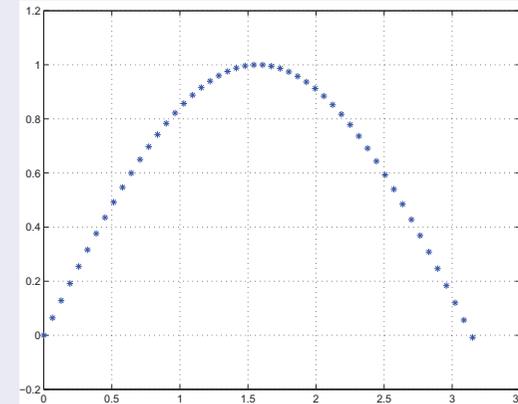
Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



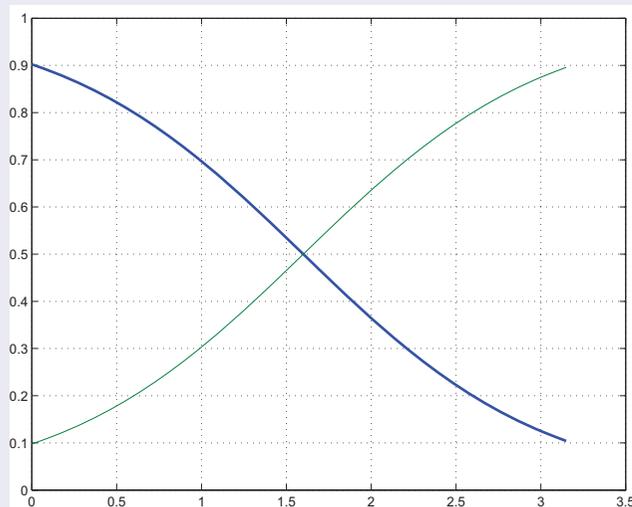
Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

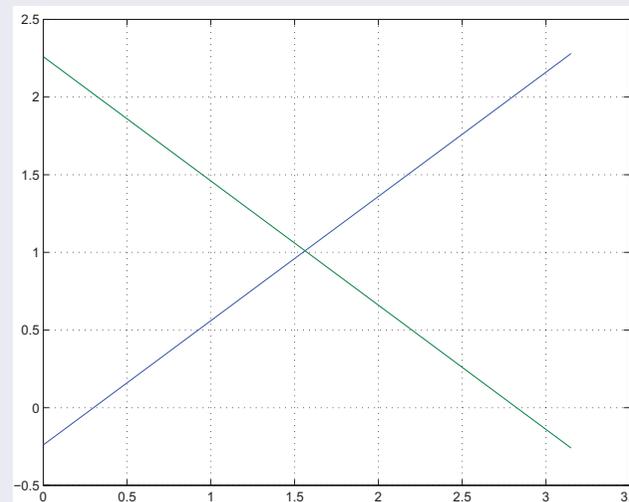


Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$

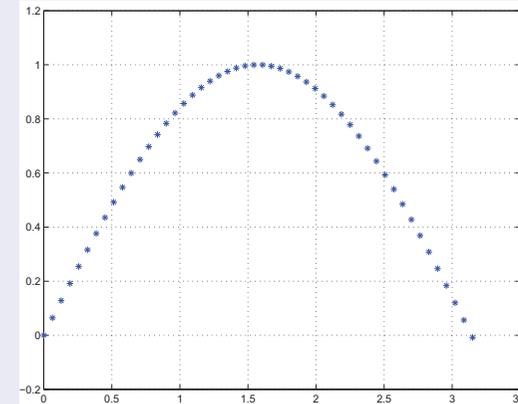


Sous-modèles : $f_i(x)$



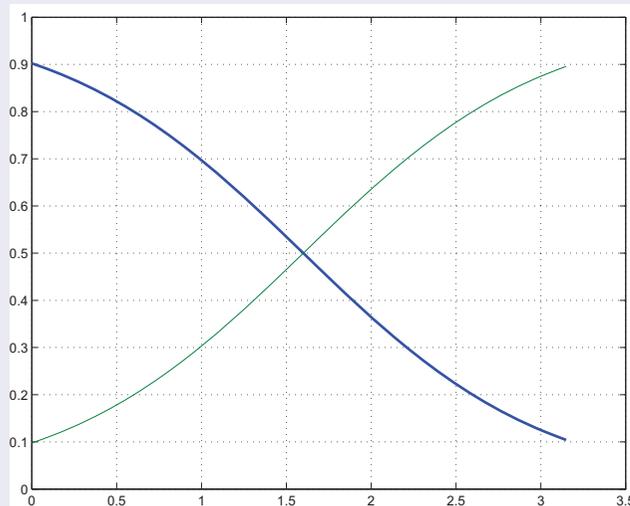
Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

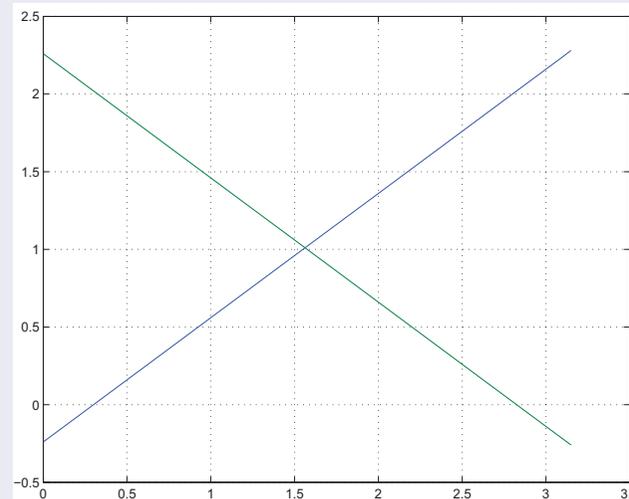


Représentation par un multimodèle

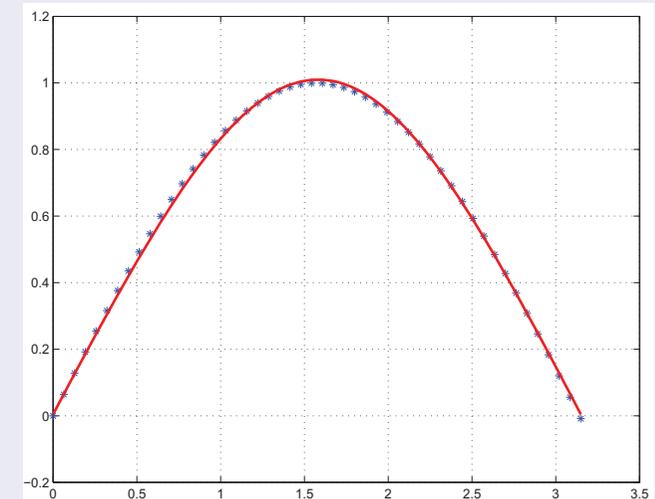
Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



Sous-modèles : $f_i(x)$



$\hat{y}(x) = \mu_1(x)f_1(x) + \mu_2(x)f_2(x)$



Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure

Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure

Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure

Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure

Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Problème lié à l'identification

Identifier les paramètres de L sous-modèles d'un multimodèle découplé à partir des données entrée/sortie d'un système, en fixant a priori les zones de fonctionnement

Problème lié à l'identification

Identifier les paramètres de L sous-modèles d'un multimodèle découplé à partir des données entrée/sortie d'un système, en fixant a priori les zones de fonctionnement

Problème lié au diagnostic

Développer des méthodes de surveillance des systèmes non linéaires basées sur le multimodèle découplé

- 1 Structures des multimodèles
 - Multimodèle de Takagi-Sugeno
 - Multimodèle découplé
- 2 Identification
 - Estimation paramétrique
 - Fonction de sensibilité
 - Exemples d'identification
 - Multimodèle découplé modifié
- 3 Estimation d'état
 - Synthèse de l'observateur
 - Exemple de simulation
 - Placement des valeurs propres
- 4 Conclusion

- 1 Structures des multimodèles
 - Multimodèle de Takagi-Sugeno
 - Multimodèle découplé
- 2 Identification
 - Estimation paramétrique
 - Fonction de sensibilité
 - Exemples d'identification
 - Multimodèle découplé modifié
- 3 Estimation d'état
 - Synthèse de l'observateur
 - Exemple de simulation
 - Placement des valeurs propres
- 4 Conclusion

- 1 Structures des multimodèles
 - Multimodèle de Takagi-Sugeno
 - Multimodèle découplé
- 2 Identification
 - Estimation paramétrique
 - Fonction de sensibilité
 - Exemples d'identification
 - Multimodèle découplé modifié
- 3 Estimation d'état
 - Synthèse de l'observateur
 - Exemple de simulation
 - Placement des valeurs propres
- 4 Conclusion

- 1 Structures des multimodèles
 - Multimodèle de Takagi-Sugeno
 - Multimodèle découplé
- 2 Identification
 - Estimation paramétrique
 - Fonction de sensibilité
 - Exemples d'identification
 - Multimodèle découplé modifié
- 3 Estimation d'état
 - Synthèse de l'observateur
 - Exemple de simulation
 - Placement des valeurs propres
- 4 Conclusion

Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) A_i \right\} x(k) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) B_i \right\} u(k) , \\ y(k) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) C_i \right\} x(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) A_i \right\} x(k) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) B_i \right\} u(k) , \\ y(k) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) C_i \right\} x(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) A_i \right\} x(k) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) B_i \right\} u(k) , \\ y(k) = \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) C_i \right\} x(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps

Structure classique

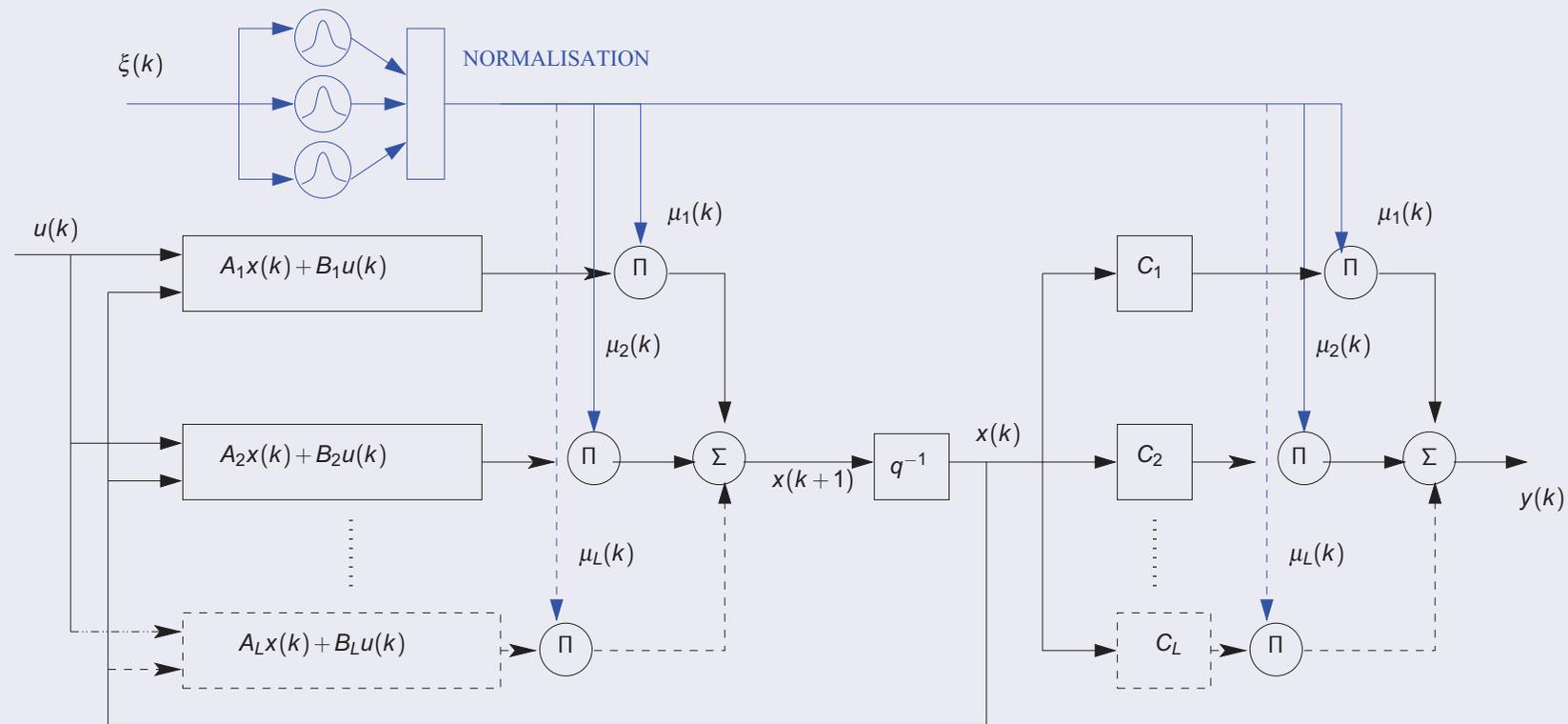
Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à **état unique**

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) A_i \right\} \mathbf{x}(k) + \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) B_i \right\} u(k) , \\ y(k) &= \left\{ \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) C_i \right\} \mathbf{x}(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps
- Un même vecteur d'état pour les sous-modèles
- **La dimension de l'état des sous-modèles est la même**

Multimodèle Takagi-Sugeno



Commentaires

- La notion de sous-modèle n'existe pas
- Lien avec la modélisation floue (règles de type : *si prémisse alors conséquence*)

Nouvelle structure

Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) , \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) , \\ y(k) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) y_i(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

Nouvelle structure

Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) , \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) , \\ y(k) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) y_i(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles

Nouvelle structure

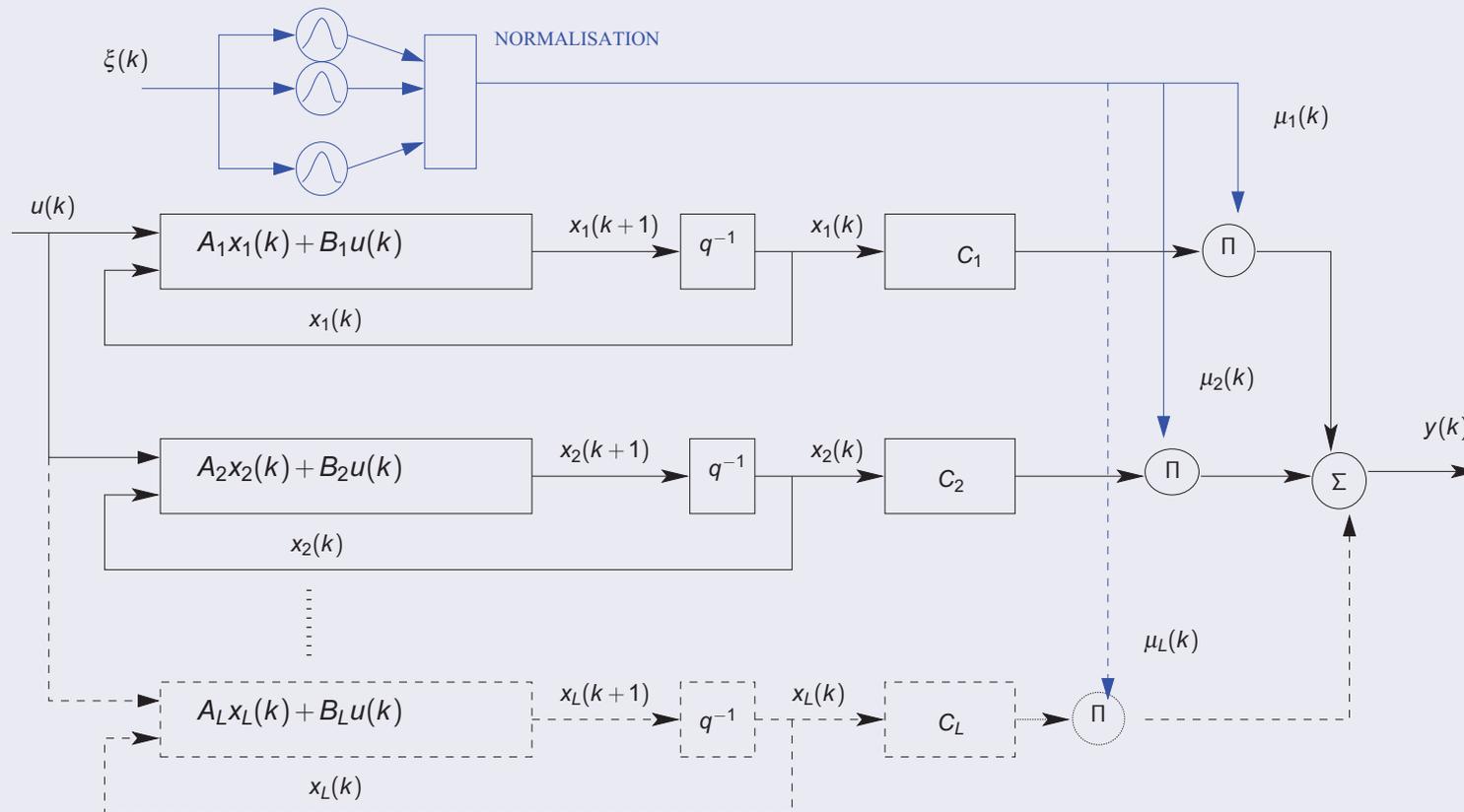
Multimodèle *découplé* : Multimodèle à *états découplés*

$$\begin{cases} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) , \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) , \\ y(k) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) y_i(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

- La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles
- L'espace d'état de chaque sous-modèle est indépendant
- **La dimension de l'état des sous-modèles peut être différente**

Multimodèle découplé



Commentaires

- Mise en parallèle de modèles de type Wiener
- Véritable existence des sous-modèles

Procédure d'estimation paramétrique

Élaboration d'un multimodèle

Élaboration d'un multimodèle

- 1 Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement

Élaboration d'un multimodèle

- 1 Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement
- 2 Agrégation des sous-modèles

Élaboration d'un multimodèle

- 1 Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement
- 2 Agrégation des sous-modèles
- 3 Détermination des paramètres de chaque sous-modèle

Élaboration d'un multimodèle

- 1 Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement
- 2 Agrégation des sous-modèles
- 3 **Détermination des paramètres de chaque sous-modèle**

Problème lié à l'identification

Identifier les paramètres de L sous-modèles d'un **multimodèle à états découplés** à partir des données entrée/sortie d'un système SISO, en connaissant les fonctions de pondération $\mu_j(\xi(k))$

Multimodèle découplé

$$\begin{cases} \hat{x}_i(k+1) &= A_i(\theta_i)\hat{x}_i(k) + B_i(\theta_i)u(k) + D_i(\theta_i) , \\ \hat{y}_i(k) &= C_i(\theta_i)\hat{x}_i(k) , \\ \hat{y}(k) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k))\hat{y}_i(k) , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, \dots, L\}$$

La variable de décision $\xi(k)$ est le signal de commande $u(k)$

Vecteur de paramètres

$\theta = [\theta_1 \dots \theta_i \dots \theta_L]^T$ vecteur paramètres multimodèle

$\theta_p = [\theta_{p,1} \dots \theta_{p,q} \dots \theta_{p,q_p}]^T$ vecteur paramètres sous-modèle p

Critères d'estimation

Critères d'estimation

- Critère global :

$$J_G(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k, \theta) - y(k))^2 ,$$

Critères d'estimation

- Critère global :

$$J_G(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k, \theta) - y(k))^2 ,$$

- Critère local :

$$J_L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N \mu_i(\xi(k)) (\hat{y}_i(k, \theta) - y(k))^2 ,$$

Critères d'estimation

- Critère global :

$$J_G(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k, \theta) - y(k))^2 ,$$

- Critère local :

$$J_L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N \mu_i(\xi(k)) (\hat{y}_i(k, \theta) - y(k))^2 ,$$

- Critère combiné ou mixte :

$$J_C(\theta) = \alpha J_G(\theta) + (1 - \alpha) J_L(\theta), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 .$$

Algorithme de Gauss-Newton avec régularisation

Procédure itérative de minimisation d'un critère

$$\theta^+ = \theta - \Delta(\mathbf{H} + \lambda I)^{-1} \mathbf{G} ,$$

- θ vecteur de paramètres à une itération particulière
- θ^+ cette même valeur à l'itération suivante
- $\mathbf{H} = \frac{\partial^2 J}{\partial \theta \partial \theta^T}$ la matrice hessienne
- $\mathbf{G} = \frac{\partial J}{\partial \theta}$ le vecteur gradient
- Δ coefficient de relaxation
- λ paramètre de régularisation (algorithme de Marquardt)

Calcul du vecteur gradient

$$G_G(\theta) = \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^N \varepsilon(k) \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta}, \quad \varepsilon(k) = \hat{y}(k) - y(k),$$

Calcul de la matrice hessienne

$$H_G(\theta) = \frac{\partial^2 J_G(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \sum_{k=1}^N \underbrace{\varepsilon(k)}_{\rightarrow 0} \frac{\partial^2 \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta^T},$$

$$H_G(\theta) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta^T}.$$

Calcul du vecteur gradient

$$G_G(\theta) = \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^N \varepsilon(k) \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta}, \quad \varepsilon(k) = \hat{y}(k) - y(k),$$

Calcul de la matrice hessienne

$$H_G(\theta) = \frac{\partial^2 J_G(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \sum_{k=1}^N \underbrace{\varepsilon(k)}_{\rightarrow 0} \frac{\partial^2 \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta^T},$$

$$H_G(\theta) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta^T}.$$

Calcul du vecteur gradient

$$G_G(\theta) = \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^N \varepsilon(k) \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta}, \quad \varepsilon(k) = \hat{y}(k) - y(k),$$

Calcul de la matrice hessienne

$$H_G(\theta) = \frac{\partial^2 J_G(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \sum_{k=1}^N \underbrace{\varepsilon(k)}_{\rightarrow 0} \frac{\partial^2 \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta^T},$$

$$H_G(\theta) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta^T}.$$

Calcul des fonctions de sensibilité de premier ordre : $\frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta}$.

Fonctions de sensibilité

$$\frac{\partial \hat{y}(k, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) \frac{\partial \hat{y}_i(k, \theta)}{\partial \theta} ,$$

$$\frac{\partial \hat{y}_i(k, \theta)}{\partial \theta_{p,q}} = \frac{\partial C_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} \hat{x}_i(k, \theta) + C_i(\theta) \frac{\partial \hat{x}_i(k, \theta)}{\partial \theta_{p,q}} ,$$

$$\frac{\partial \hat{x}_i(k+1, \theta)}{\partial \theta_{p,q}} = \frac{\partial A_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} \hat{x}_i(k, \theta) + A_i(\theta) \frac{\partial \hat{x}_i(k, \theta)}{\partial \theta_{p,q}} + \frac{\partial B_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} u(k) + \frac{\partial D_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} .$$

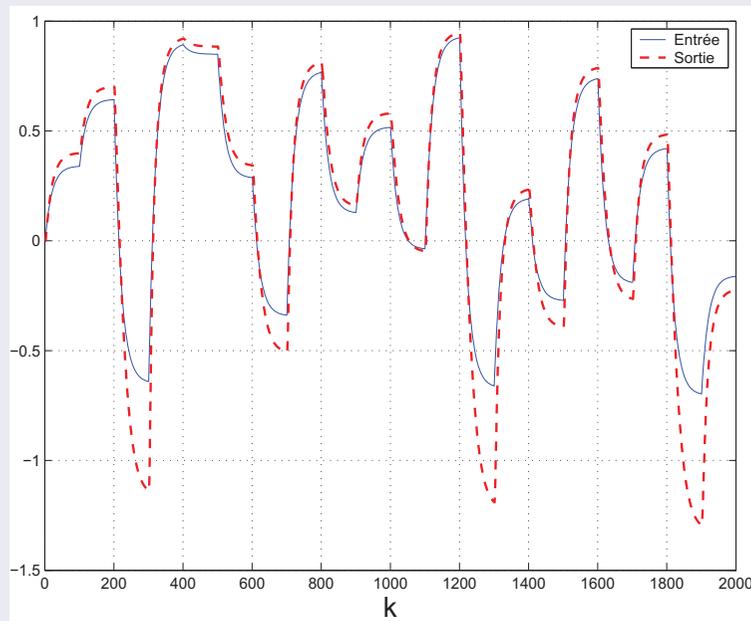
Les sous-modèles sont complètement indépendants alors :

$$\frac{\partial \hat{y}_i(k, \theta)}{\partial \theta_p} = 0 \quad \text{pour } p \neq i \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, L \\ p = 1, 2, \dots, L \end{matrix} .$$

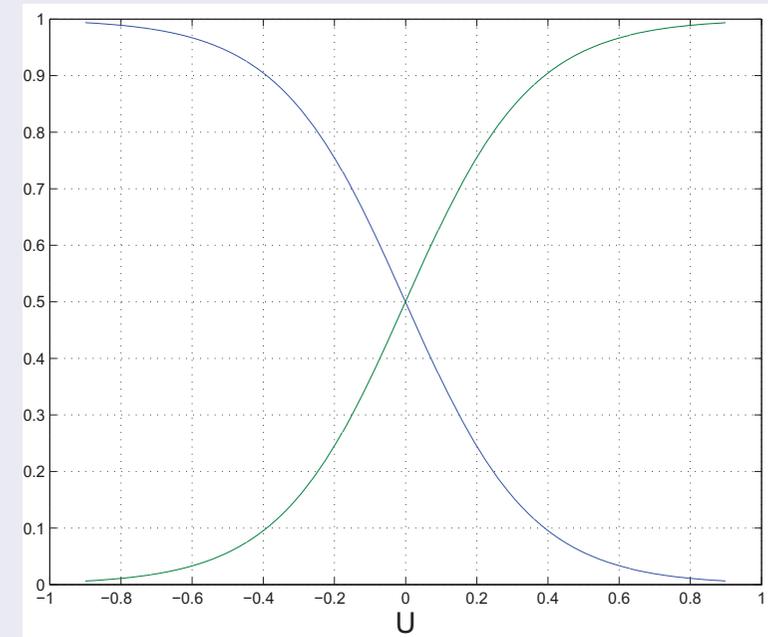
Modèle non linéaire

$$y(k+1) = (0.6 - 0.1a(k))y(k) + a(k)u(k), \quad u(k) \in [-0.9, 0.9],$$
$$a(k) = \frac{0.6 - 0.06y(k)}{1 + 0.2y(k)}.$$

Entrée–Sortie

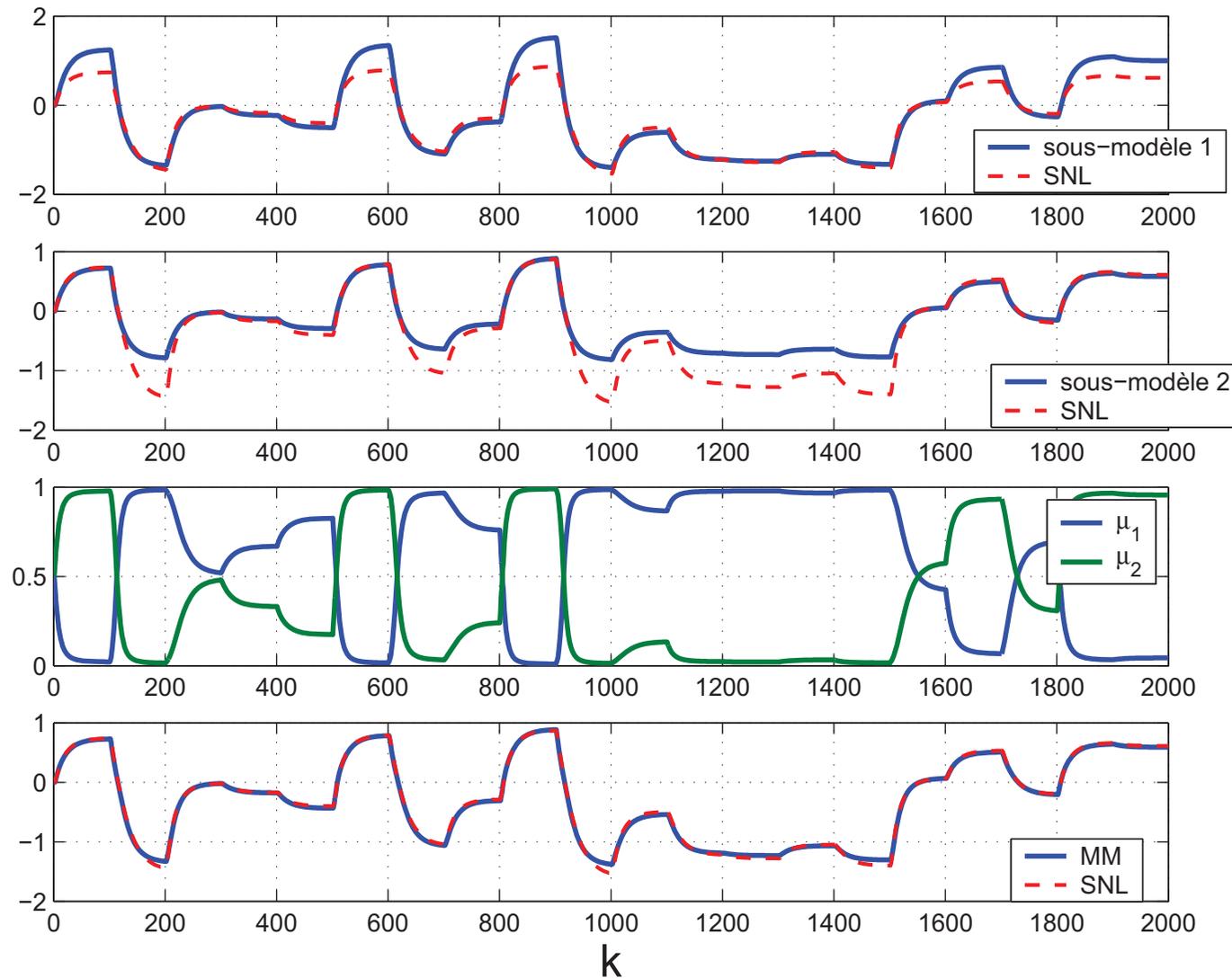


Fonctions de pondération



Fonctions de pondération dépendantes de la commande

Exemple d'identification 1



Bonne caractérisation du comportement non linéaire

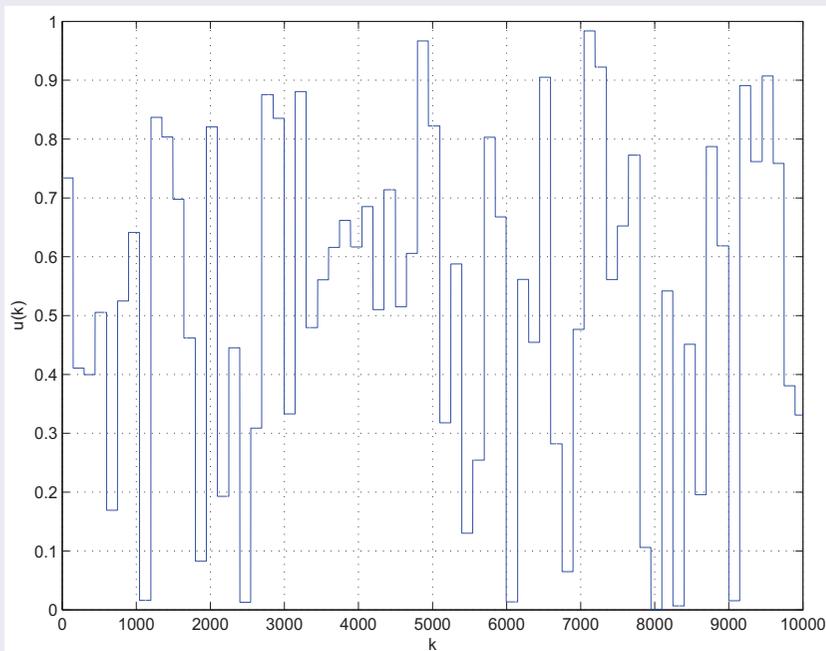
Modèle non linéaire

$$x(k+1) = Ax(k) + \sin(\gamma u(k))(\beta - u(k)) ,$$

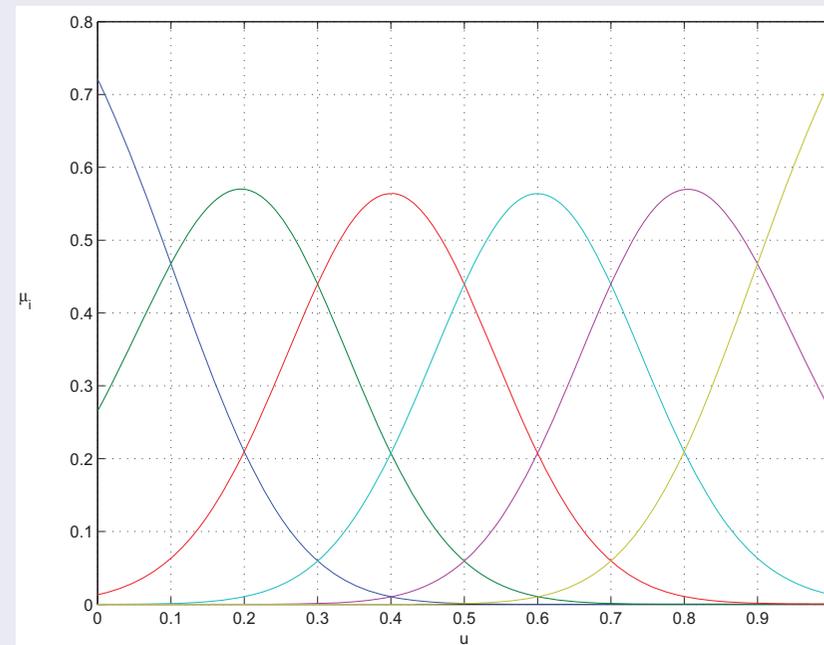
$$y(k) = x(k) ,$$

$$A = 0.95, \quad \gamma = 0.8\pi, \quad \beta = 1.5 .$$

Entrée du système



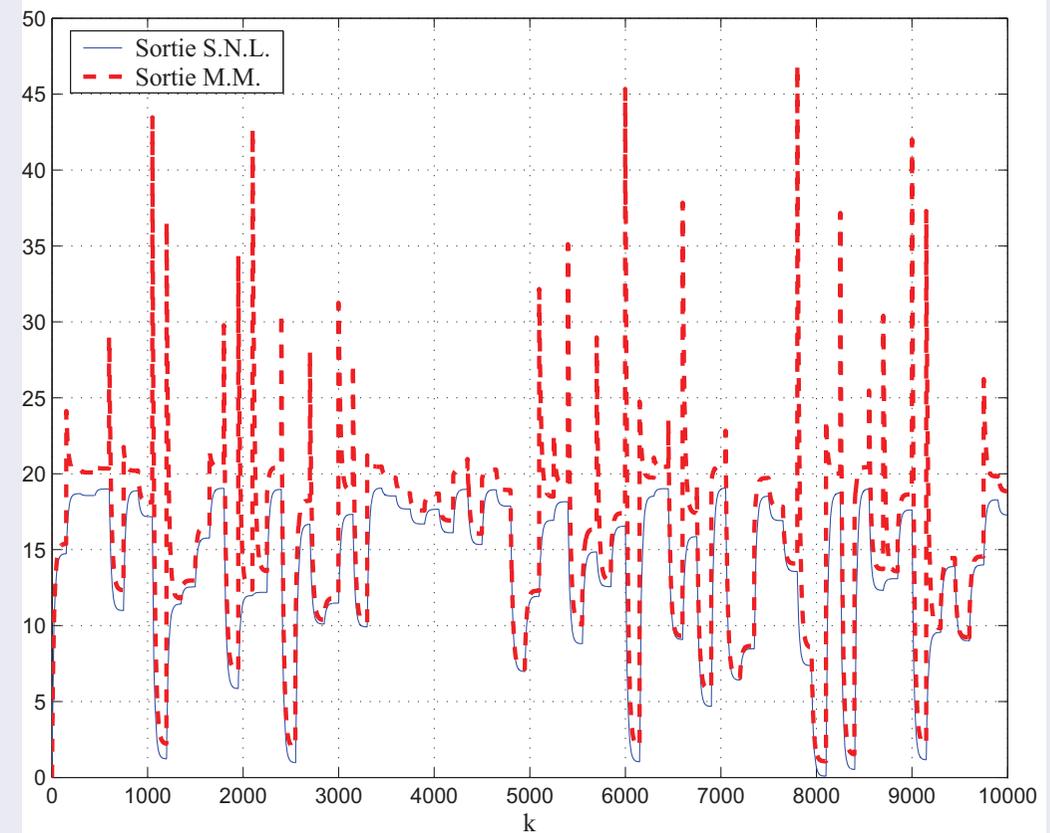
Fonctions de pondération



Fonctions de pondération dépendantes de la commande

Démarche analytique

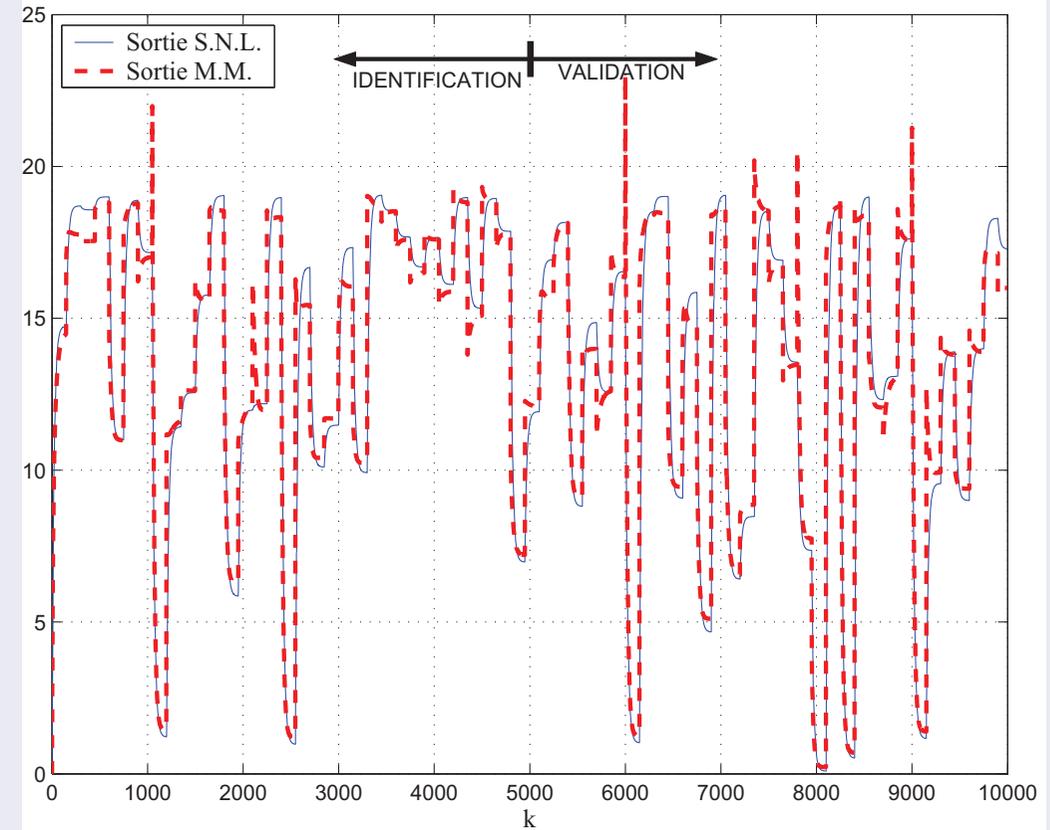
- Linéarisation du modèle non linéaire (développement en séries de Taylor au premier ordre)
- L sous-modèles linéarisés autour de différents points de fonctionnement



Problème de décrochage

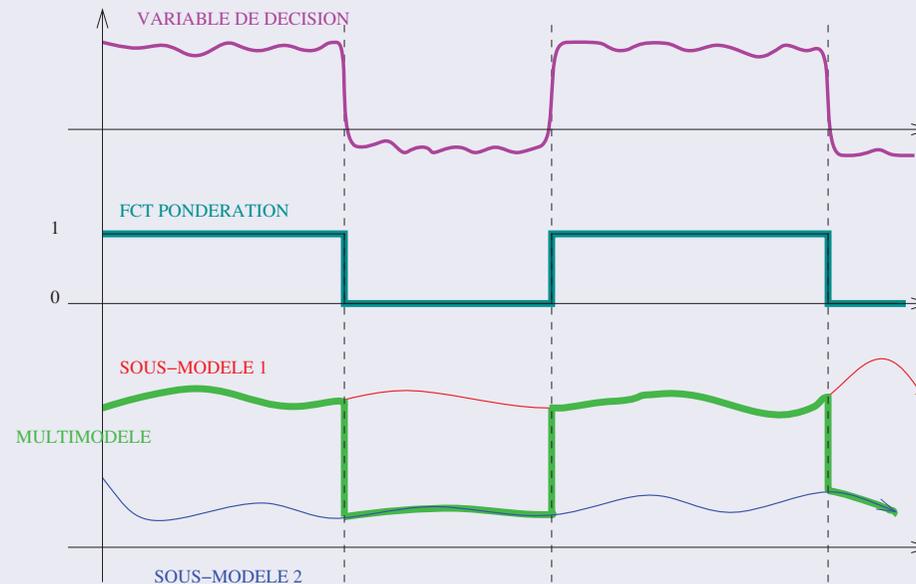
Identification

- Identification en utilisant la méthode proposée
- Utilisation d'un critère global (adéquation entrée/sortie)



Problème de décrochage

Définition

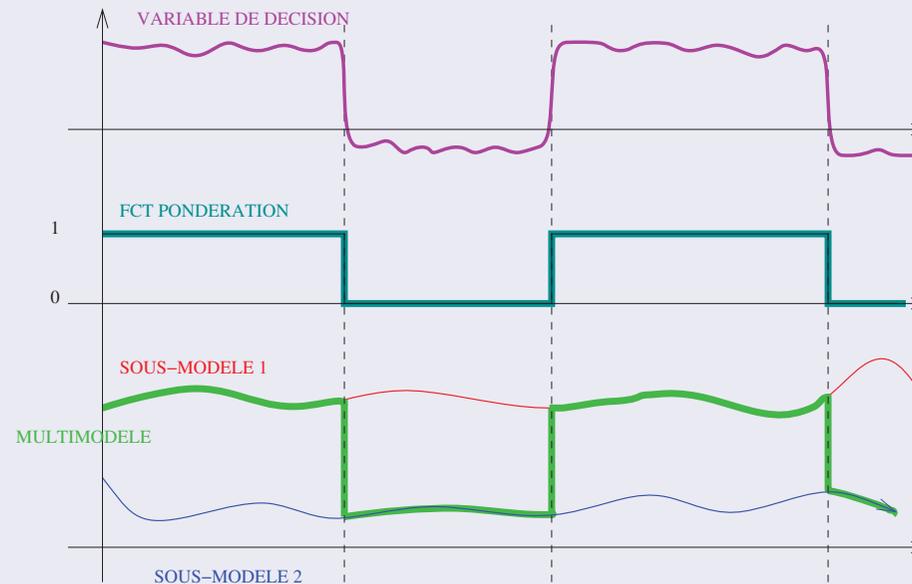


Problème de conditions initiales sur les sorties des sous-modèles quand elles sont mises à contribution (mélange dans l'équation statique)

Solutions

- Mélanger fortement les fonctions de pondération
- Augmenter le nombre des sous-modèles
- Modifier la structure du multimodèle

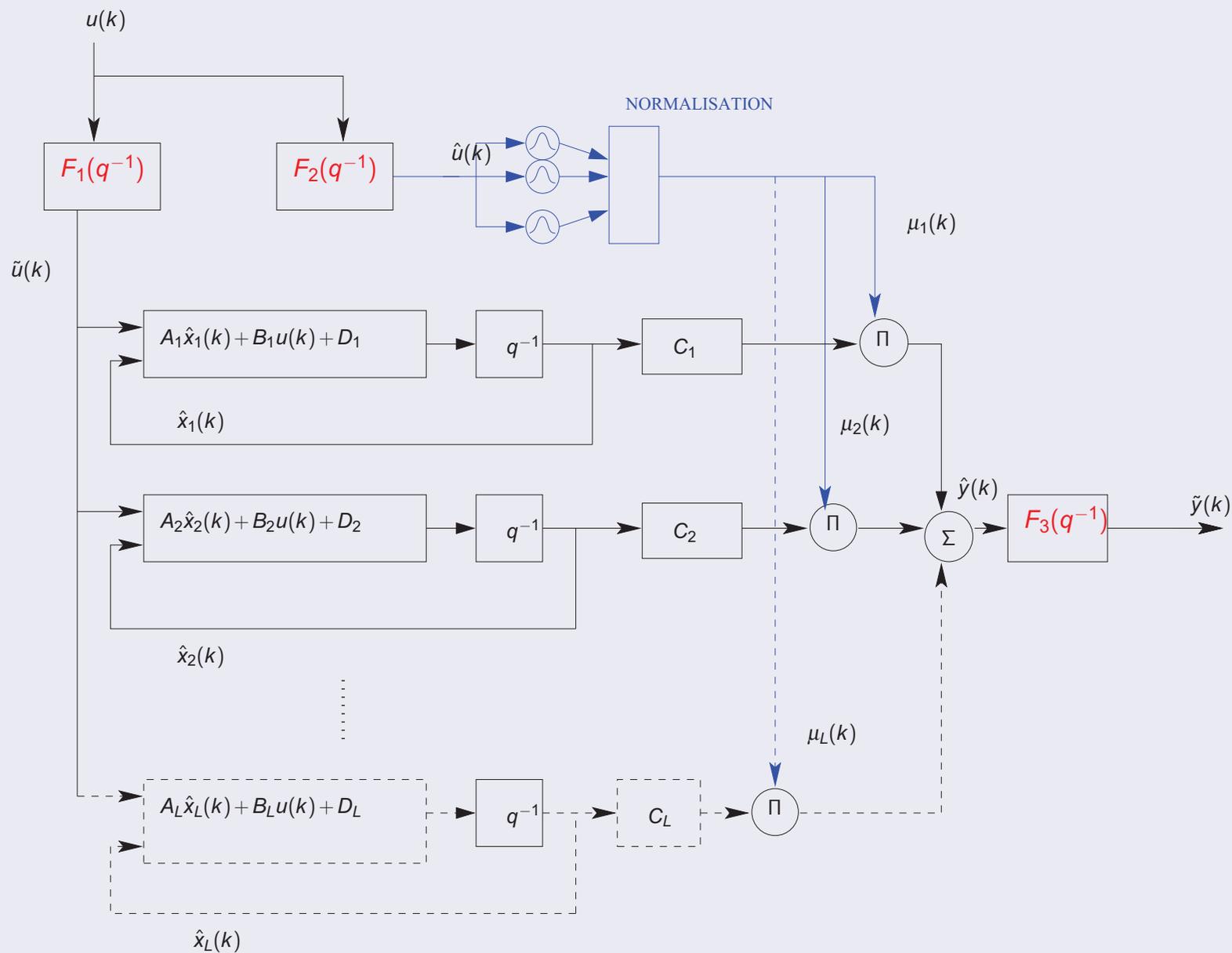
Définition

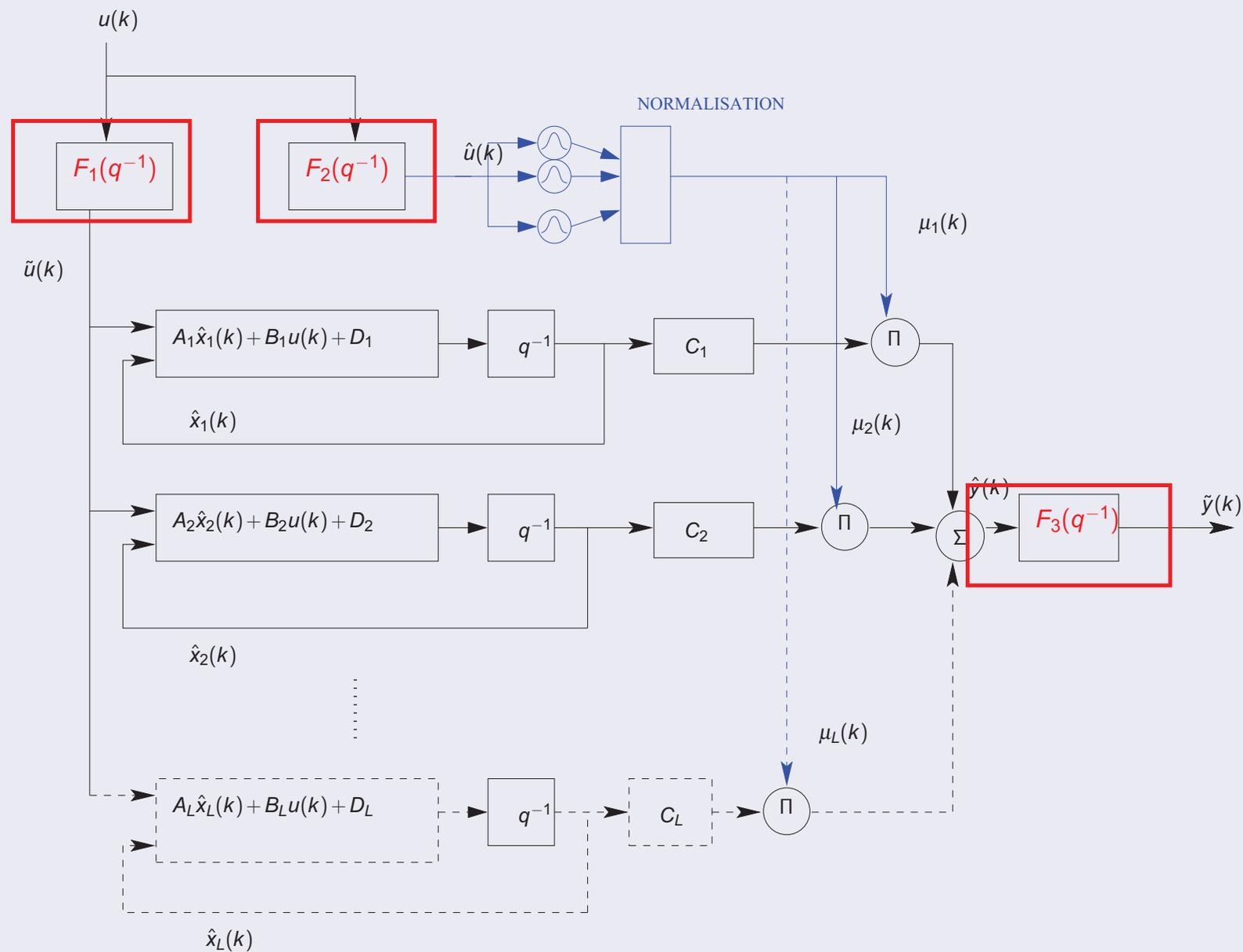


Problème de conditions initiales sur les sorties des sous-modèles quand elles sont mises à contribution (mélange dans l'équation statique)

Solutions

- Mélanger fortement les fonctions de pondération
- Augmenter le nombre des sous-modèles
- Modifier la structure du multimodèle





Nouvelles équations

$$\hat{x}_i(k+1) = A_i(\theta)\hat{x}_i(k) + B_i(\theta)\bar{u}(k) + D_i(\theta) ,$$

$$\hat{y}_i(k) = C_i(\theta)\hat{x}_i(k) ,$$

$$\bar{y}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k))\hat{y}_i(k) \text{ avec } \xi(k) = \bar{u}(k) ,$$

$$\bar{u}(k) = F_1(k, \theta)u(k) ,$$

$$\bar{\bar{u}}(k) = F_2(k, \theta)u(k) ,$$

$$\hat{y}(k) = F_3(k, \theta)\bar{y}(k) .$$

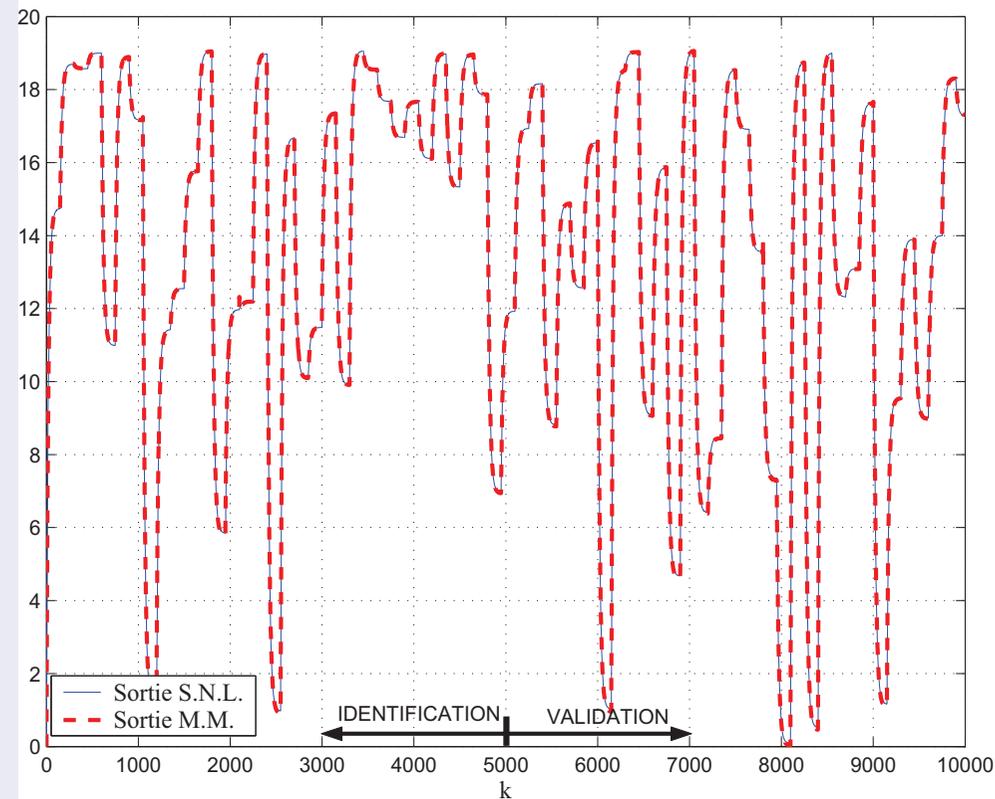
\hat{y} est la nouvelle sortie du multimodèle

Exemple de filtres utilisés

$$\bar{u}(k+1) = \alpha_1\bar{u}(k) + (1 - \alpha_1)u(k+1) ,$$

$$\bar{\bar{u}}(k+1) = \alpha_2\bar{\bar{u}}(k) + (1 - \alpha_2)u(k+1) ,$$

$$\hat{y}(k+1) = \alpha_3\hat{y}(k) + (1 - \alpha_3)\bar{y}(k+1) .$$



Méthode	J_G
Linéarisation	7.99×10^4
Estimation sans filtrage	1.46×10^4
Estimation avec filtrage	21.72

Estimation d'état

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u(k) ,$$

$$y_i(k) = C_i x_i(k) ,$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) y_i(k) ,$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

Notations

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n , \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix} , \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix} ,$$

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(\xi(k))C_1 \dots \mu_i(\xi(k))C_i \dots \mu_L(\xi(k))C_L] , \mu_i(\xi(k)) = \mu_i(k) .$$

$$\begin{aligned}
 x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) , & x(k+1) &= \tilde{A} x(k) + \tilde{B} u(k) , \\
 y_i(k) &= C_i x_i(k) , & y(k) &= \tilde{C}(\xi(k)) x(k) , \\
 y(k) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) y_i(k) , \\
 x_i &\in \mathbb{R}^{n_i} & x &\in \mathbb{R}^n, n = \sum_{i=1}^L n_i
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow$$

Notations

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(\xi(k))C_1 \dots \mu_i(\xi(k))C_i \dots \mu_L(\xi(k))C_L], \mu_i(\xi(k)) = \mu_i(k) .$$

$$\begin{aligned}
 x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) , & x(k+1) &= \tilde{A} x(k) + \tilde{B} u(k) , \\
 y_i(k) &= C_i x_i(k) , & y(k) &= \tilde{C}(\xi(k)) x(k) , \\
 y(k) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(\xi(k)) y_i(k) , & & \\
 x_i &\in \mathbb{R}^{n_i} & x &\in \mathbb{R}^n, n = \sum_{i=1}^L n_i
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow$$

Notations

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(\xi(k))C_1 \dots \mu_i(\xi(k))C_i \dots \mu_L(\xi(k))C_L], \mu_i(\xi(k)) = \mu_i(k) .$$

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

- \tilde{A} est une matrice bloc diagonale

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix},$$

- \tilde{A} est une matrice bloc diagonale
- \tilde{A} est une matrice de Schur si et seulement si A_i sont des matrices de Schur

Structure de l'observateur

Extension de l'observateur de Luenberger classiquement utilisé :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= \tilde{A}\hat{x}(k) + \tilde{B}u(k) + \tilde{K}(y(k) - \hat{y}(k)) , \\ \hat{y}(k) &= \tilde{C}(k)\hat{x}(k) ,\end{aligned}$$

Théorème (Convergence asymptotique)

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est assurée s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1 \dots L,$$

et le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned}e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) .\end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(k)C_1 \quad \dots \quad \mu_i(k)C_i \quad \dots \quad \mu_L(k)C_L] ,$$

$$\tilde{C}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\tilde{C}_i ,$$

$$\tilde{C}_i = [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0] .$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i ,$$

$$\Phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i .$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned}e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) .\end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(k)C_1 \quad \dots \quad \mu_i(k)C_i \quad \dots \quad \mu_L(k)C_L] ,$$

$$\tilde{C}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\tilde{C}_i ,$$

$$\tilde{C}_i = [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0] .$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i ,$$

$$\Phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i .$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned}e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) .\end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(k)C_1 \quad \dots \quad \mu_i(k)C_i \quad \dots \quad \mu_L(k)C_L] ,$$

$$\tilde{C}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\tilde{C}_i ,$$

$$\tilde{C}_i = [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0] .$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i ,$$

$$\Phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i .$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned}e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) .\end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(k)C_1 \quad \dots \quad \mu_i(k)C_i \quad \dots \quad \mu_L(k)C_L] ,$$

$$\tilde{C}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\tilde{C}_i ,$$

$$\tilde{C}_i = [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0] .$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i ,$$

$$\Phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i .$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$e(k+1) = A_{obs}(k)e(k),$$
$$A_{obs}(k) = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) .$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\tilde{C}(k) = [\mu_1(k)C_1 \quad \dots \quad \mu_i(k)C_i \quad \dots \quad \mu_L(k)C_L] ,$$

$$\tilde{C}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\tilde{C}_i ,$$

$$\tilde{C}_i = [0 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad 0] .$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i ,$$

$$\Phi_i = \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i .$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\} e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{ A_{obs}^T(k) P A_{obs}(k) - P \} e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k) P A_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k) \Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \Phi_i - P < 0 ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{ A_{obs}^T(k) P A_{obs}(k) - P \} e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k) P A_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k) \Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \Phi_i - P < 0 ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :

- $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{ A_{obs}^T(k) P A_{obs}(k) - P \} e(k) ,$$

-

$$A_{obs}^T(k) P A_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^L \mu_j(k) \Phi_j^T P \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \Phi_i - P < 0 ,$$

- En utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(k) \begin{bmatrix} P & \Phi_i^T P \\ P \Phi_i & P \end{bmatrix} > 0 .$$

- Également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P & (\tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i)^T P \\ P(\tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i) & P \end{bmatrix} > 0 , i = 1 \dots L.$$

Bilinéaire en P et \tilde{K} .

- Finalement, en posant : $G = P\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1 \dots L.$$

Linéaire en P et G .

- En utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(k) \begin{bmatrix} P & \Phi_i^T P \\ P \Phi_i & P \end{bmatrix} > 0 .$$

- Également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P & (\tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i)^T P \\ P(\tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i) & P \end{bmatrix} > 0 , i = 1 \dots L.$$

Bilinéaire en P et \tilde{K} .

- Finalement, en posant : $G = P\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1 \dots L.$$

Linéaire en P et G .

- En utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{i=1}^L \mu_i(k) \begin{bmatrix} P & \Phi_i^T P \\ P \Phi_i & P \end{bmatrix} > 0 .$$

- Également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P & (\tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i)^T P \\ P(\tilde{A} - \tilde{K} \tilde{C}_i) & P \end{bmatrix} > 0 , i = 1 \dots L.$$

Bilinéaire en P et \tilde{K} .

- Finalement, en posant : $G = P\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1 \dots L.$$

Linéaire en P et G .

Remarques

- La convergence asymptotique dépend de l'existence d'une matrice commune P satisfaisant un ensemble de LMIs
- Pour un nombre important de sous-modèles l'ensemble LMI n'a pas de solution

Théorème (Convergence asymptotique 2)

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est assurée s'il existe des matrices symétriques et définies positives P_i et P_j , une matrice G et une matrice M vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L,$$

et le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = M^{-1}G$.

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k) \sum_{i=1}^L \mu_i(k) P_i e(k), P_i = P_i^T, P_i > 0$$

$$V(e(k)) = e^T(k) P(k) e(k).$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k)\} e(k),$$

-

$$A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \mu_j(k+1) \begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.$$

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k) \sum_{i=1}^L \mu_i(k) P_i e(k), \quad P_i = P_i^T, \quad P_i > 0$$

$$V(e(k)) = e^T(k) P(k) e(k).$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{ A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) \} e(k),$$

-

$$A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \mu_j(k+1) \begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.$$

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k) \sum_{i=1}^L \mu_i(k) P_i e(k), \quad P_i = P_i^T, P_i > 0$$

$$V(e(k)) = e^T(k) P(k) e(k).$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{ A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) \} e(k),$$

-

$$A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \mu_j(k+1) \begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.$$

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k) \sum_{i=1}^L \mu_i(k) P_i e(k), \quad P_i = P_i^T, \quad P_i > 0$$

$$V(e(k)) = e^T(k) P(k) e(k).$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k) \{ A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) \} e(k),$$

-

$$A_{obs}^T(k) P(k+1) A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^L \mu_i(k) \mu_j(k+1) \begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.$$



$$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$



$$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$



$$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$



$$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i, j = 1 \dots L.$$

Si $P_i = P_j = M = P$ alors ce théorème coïncide avec le précédent.

Estimation d'état

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 3$ sous-modèles :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.7 & -0.8 & 0 \\ -2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ -0.6 & -0.5 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= [0.2 \ -0.4]^T, & B_2 &= [0.7 \ -0.5 \ 0.3]^T, & B_3 &= [-0.2 \ 0]^T, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, & C_3 &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Estimation d'état

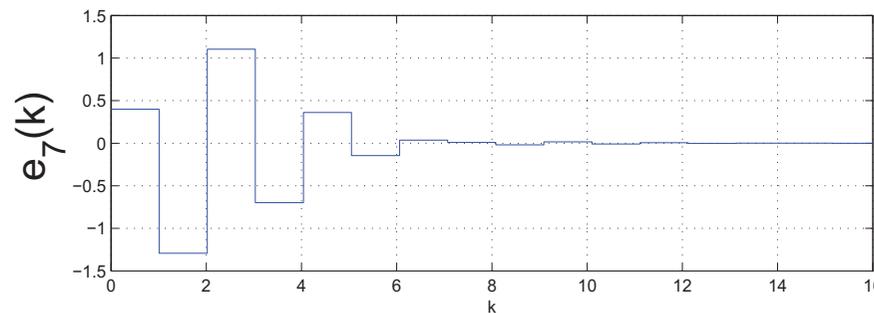
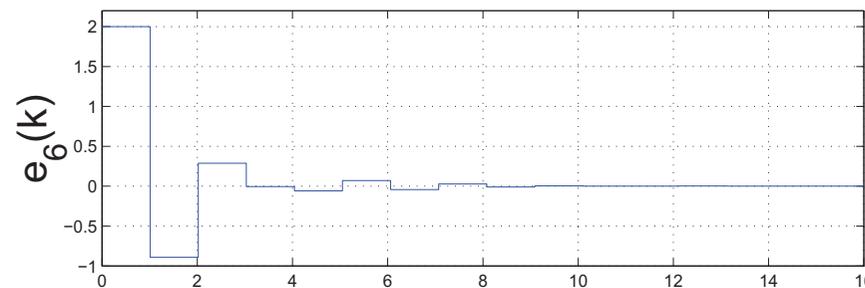
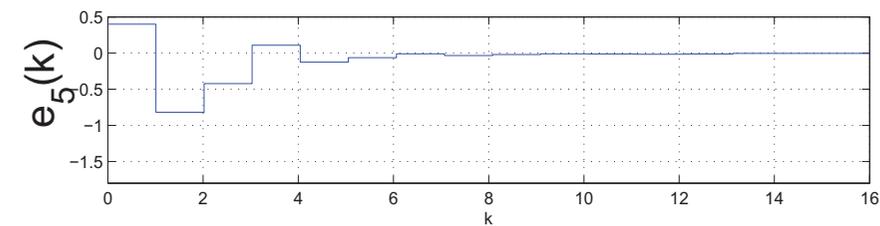
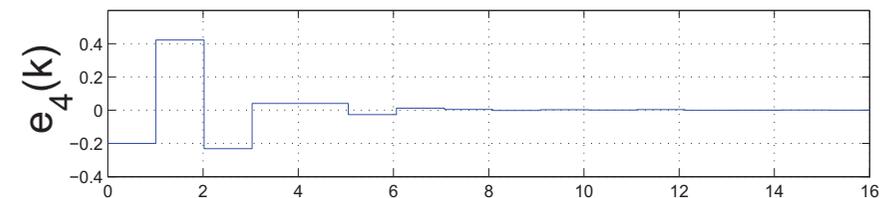
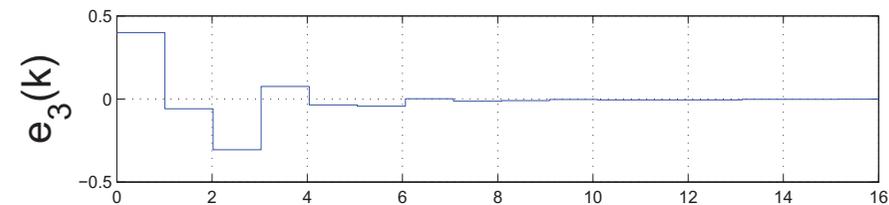
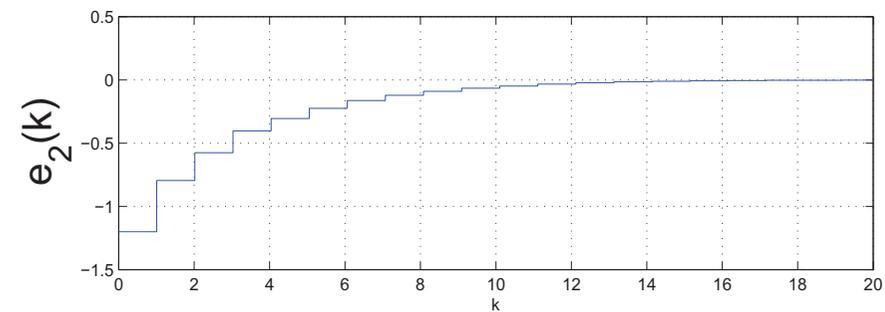
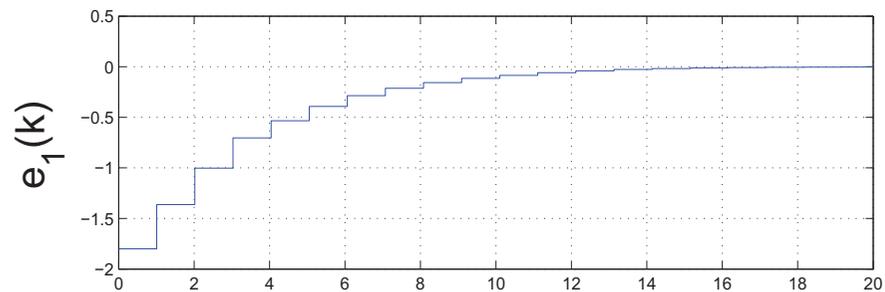
Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 3$ sous-modèles :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.7 & -0.8 & 0 \\ -2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ -0.6 & -0.5 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= [0.2 \ -0.4]^T, & B_2 &= [0.7 \ -0.5 \ 0.3]^T, & B_3 &= [-0.2 \ 0]^T, \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, & C_2 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, & C_3 &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

- La matrice \tilde{A} est de Schur, alors le multimodèle est stable
- Le gain de l'observateur est :

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0.041 & 0.020 \\ 0.194 & 0.113 \end{matrix}}_{K_1^T} & \underbrace{\begin{matrix} 0.160 & 0.190 & 0.221 \\ -0.299 & -0.044 & -0.70 \end{matrix}}_{K_2^T} & \underbrace{\begin{matrix} -0.090 & -0.181 \\ 0.172 & 0.268 \end{matrix}}_{K_3^T} \end{bmatrix}^T$$

Exemple de simulation



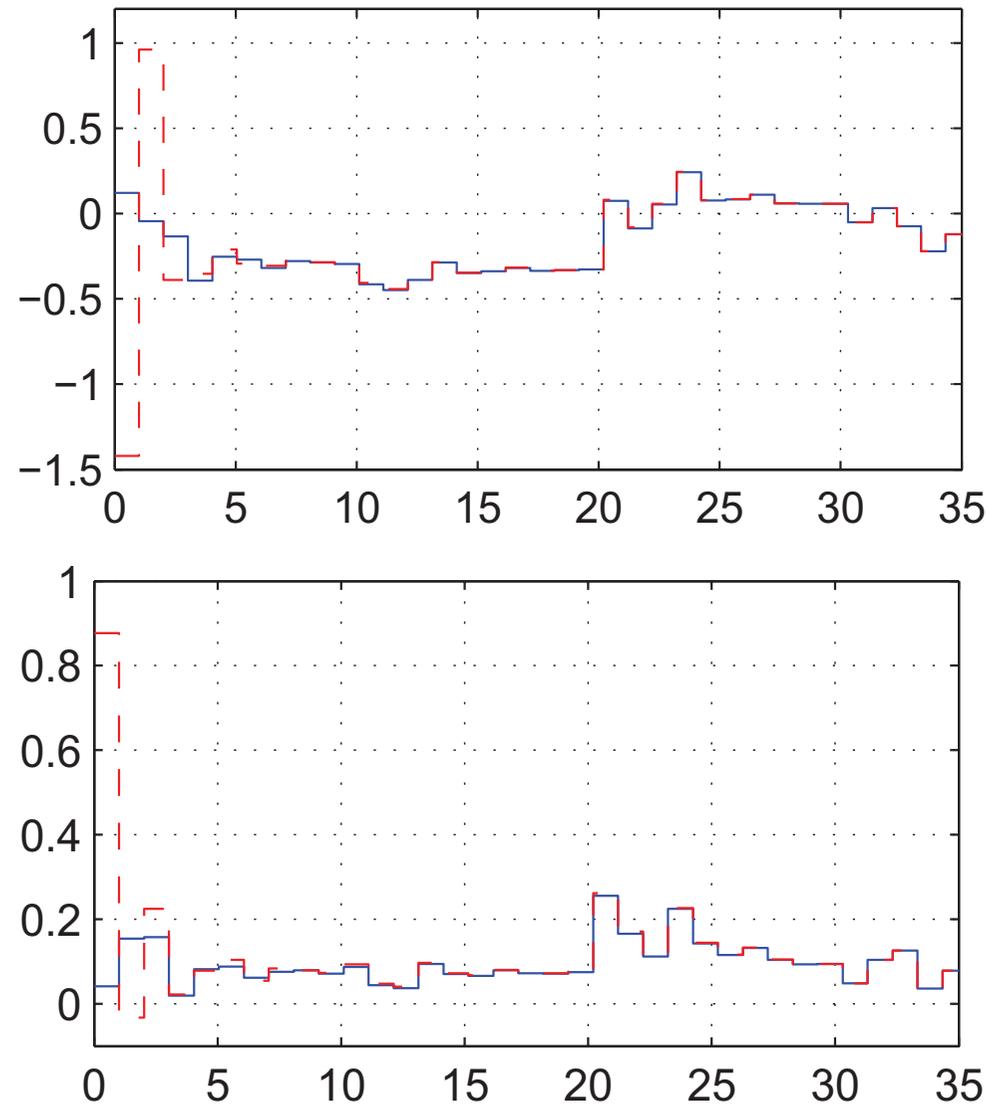


FIG.: Sorties du multimodèle (trait plein) et leurs estimées (pointillés).

Objectif

Imposer une dynamique à l'erreur d'estimation

Théorème (D-stabilité d'une matrice)

Les valeurs propres d'une matrice X sont à l'intérieur du disque de rayon R et de centre $(q, 0)$ si :

$$\begin{bmatrix} -RP & -qP + X^T P \\ -qP + PX & -RP \end{bmatrix} < 0,$$

où P est une matrice symétrique définie positive.

Si $R = 1$ et $q = 0$ alors :

$$X^T P X - P < 0$$

condition de stabilité pour un système linéaire à temps discret.

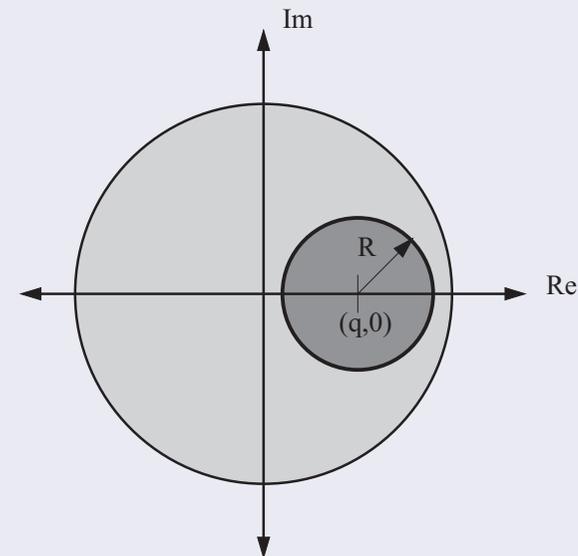
Théorème

Les valeurs propres de l'observateur sont placées à l'intérieur du disque de rayon R et de centre $(q, 0)$ s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} -RP & -qP + \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ -qP + P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & -RP \end{bmatrix} < 0, i = 1 \dots L$$

et le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

- Choix de région
- Eliminer les fortes oscillations



Conclusion

- Utilisation d'un multimodèle pour effectuer la modélisation et le diagnostic d'un système non linéaire
- Nouveauté : la dimension des sous-modèles peut être différente

Conclusion

- Utilisation d'un multimodèle pour effectuer la modélisation et le diagnostic d'un système non linéaire
- Nouveauté : la dimension des sous-modèles peut être différente

Travail réalisé

- Mise en place d'une procédure d'identification d'un système non linéaire SISO
- Conception d'un observateur proportionnel d'ordre plein
- Réduction du conservatisme de la solution proposée

Conclusion

- Utilisation d'un multimodèle pour effectuer la modélisation et le diagnostic d'un système non linéaire
- Nouveauté : la dimension des sous-modèles peut être différente

Travail réalisé

- Mise en place d'une procédure d'identification d'un système non linéaire SISO
- Conception d'un observateur proportionnel d'ordre plein
- Réduction du conservatisme de la solution proposée

Perspectives

- Extension à l'identification de systèmes MIMO
- Synthèse d'autres types d'observateurs, par exemple, observateur proportionnel intégral et observateur à entrées inconnues

- Orjuela, R., Ragot, J., Maquin, D. : Identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle à états découplés. In : Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'06, Poitiers, France (2006)
- Orjuela, R., Ragot, J., Maquin, D. : Nonlinear system identification using uncoupled state multiple-model approach. In : Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'2006, Nancy, France (2006)
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D. : State estimation for nonlinear systems using decoupled multiple model. *International Journal of Modelling Identification and Control* (à paraître), 2007
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D. : State estimation for nonlinear discrete-time systems based on the decoupled multiple model approach. In : 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO, Angers, France (2007)
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D. : Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche multimodèle découplé. In : 2ème Journées Doctorales-Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS, Reims, France (2007)